National Academy of Sciences of Ukraine
Национальная академия наук Украины
Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics
Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача

Mathematical problems of mechanics of nonhomogeneous structures

Математические проблемы механики неоднородных структур

Volume 2

Том 2

L'viv 2000
Львов 2000

УДК 517.91

ПРО КОЛИВАННЯ БАЛОК З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ПАРАМЕТРІВ

Віктор Мазуренко

Державний університет «Львівська політехніка», вул. Бандери, 12, Львів, 79646

Розглянуто крайові задачі, що описують коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів.

Дослідження коливань та стійкості широкого класу механічних систем приводять до задач на власні значення для диференціальних рівнянь з особливостями імпульсного типу [1–3]. Зокрема, в монографії [2] розглядається балка на сингулярній пружній основі. Диференціальне рівняння коливань такої балки при наявності повздовжньої стискуючої сили має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[(N-k_2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]+k_1 y+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[m^* y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^*\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]=0\,, \quad (1)$$

де $EI(x)$ – змінна жорсткість балки,

$$k_1(x)=k(x)+\sum_i k_{1i}\delta(x-x_i),\quad k_2(x)=\sum_i k_{2i}\delta(x-x_i)$$

– коефіцієнти жорсткості пружної основи,

$$m^*(x)=m(x)+\sum_i M_i\delta(x-x_i),\quad \mu^*(x)=\mu(x)+\sum_i J_i\delta(x-x_i)$$

– погонні маса і момент інерції, причому $m(x)$ і $\mu(x)$ – звичайні функції, а M_i і J_i – маса й момент інерції вантажу, зосередженого в перерізі $x=x_i$.

Застосувавши до рівняння (1) метод Фур'є, приходимо до рівняння

$$(EIy'')''+\left[(N-k_2)y'\right]'+k_1 y-\lambda\left[m^* y-(\mu^* y')'\right]=0 \quad (2)$$

відносно форми $y(x)$ власних коливань (λ – квадрат частоти власних коливань). Рівняння (2) є частковим випадком узагальнених квазідиференціальних рівнянь (КДР), що розглядалися в [4]. Якщо ввести прийняті там позначення

$$EI(x)=b_0(x),(k_2-N)(x)=b_1(x),k_1(x)=b_2(x),\mu^*(x)=a_1(x),m^*(x)=a_2(x)\,,$$

то це рівняння запишеться у звичному вигляді

$$(b_0(x)y'')''-(b_1(x)y')'+b_2(x)y-\lambda\left[-(a_1(x)y')'+a_2(x)y\right]=0\,. \quad (3)$$

Всюди далі вважатимемо, що коефіцієнти $b_i(x)\ \forall i = \overline{0,2}$, $a_j(x)$ $\forall j = \overline{1,2}$ КДР (3) (дійснозначні) функції дійсної змінної $x \in [0;l]$, причому $b_0^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна за Лебегом на $[0;l]$ функція, $b_i(x) = \beta_i'(x)$, $a_i(x) = \alpha_i'(x)\ \forall\ i = \overline{1,2}$ – міри, тобто узагальнені похідні від (неперервних праворуч) функцій обмеженої на $[0;l]$ варіації $\beta_i(x)$ і $\alpha_i(x)$ відповідно. Припускатимемо додатково, що функції $\alpha_i(x)$ $\forall\ i = \overline{1,2}$ неспадні на $[0;l]$.

Зауважимо, що зроблені припущення стосовно коефіцієнтів КДР (3) відповідають реальній фізичній моделі (1).

КДР (3) розглядатимемо разом з крайовими умовами

$$\sum_{v=1}^{4} p_{kv} y^{[v-1]}(0) = \sum_{v=1}^{4} q_{kv} y^{[v-1]}(l),\ k = \overline{1,4}\,, \tag{4}$$

де p_{kv}, q_{kv} $\forall k, v = \overline{1,4}$ – деякі (комплексні) числа, причому такі, що

$$\sum_{v=1}^{2} p_{jv}\overline{p_{k,5-v}} - \sum_{v=1}^{2} p_{j,5-v}\overline{p_{kv}} = \sum_{v=1}^{2} q_{jv}\overline{q_{k,5-v}} - \sum_{v=1}^{2} q_{j,5-v}\overline{q_{kv}},\ j,k = \overline{1,4}, \tag{5}$$

а $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0,3}$ – квазіпохідні КДР (3), які визначаються наступним чином: $y^{[0]} \overset{df}{=} y$, $y^{[1]} = y'$, $y^{[2]} = b_0(x)y''$, $y^{[3]} = [b_1(x) - \lambda a_1(x)]y' - (b_0(x)y'')'$. Лінійна теорія КДР (3), включаючи поняття його розв'язку, викладена в [4].

При виконанні умов (5) й наведених вище умов на коефіцієнти задача (3), (4) з допомогою вектора $\mathbf{Y}(x) = \mathrm{col}(y(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x), y^{[3]}(x))$ зводиться до наступної задачі на власні значення (*узагальнена схема Аткінсона*)

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{Y}'(x) = [\mathbf{B}'(x) + \lambda\mathbf{A}'(x)]\cdot\mathbf{Y}(x), \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{M}\mathrm{v}, \quad \mathbf{Y}(l) = \mathbf{N}\mathrm{v}$$

з сталою косоермітовою матрицею $\mathbf{J}$, ермітовими матрицями $\mathbf{B}(x)$ і $\mathbf{\Lambda}(x)$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}'(x) = \begin{pmatrix} -b_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^{-1}(x) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}'(x) = \begin{pmatrix} a_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та сталими матрицями $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ такими, що виконується рівність $\mathbf{M}^*\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{N}^*\mathbf{J}\mathbf{N}$ (* означає ермітове спряження), причому з рівності $\mathbf{M}\mathrm{v} = \mathbf{N}\mathrm{v} = 0$ (v – деякий сталий і ненульовий 4-вимірний вектор) випливає $\mathrm{v} \equiv 0$.

Зауважимо, що матриці $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ конструктивно будуються за відомими матрицями $\mathbf{P} = (p_{kv})_{k,v=1}^{4}$, $\mathbf{Q} = (q_{kv})_{k,v=1}^{4}$:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}^*, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^*.$$

Звідси, на основі результатів роботи [4], негайно випливає, що:

1) власні значення $\lambda_{k,\ k=1,2,\ldots}$ задачі (3), (4) всі дійсні;
2) нормовані власні функції задовольняють умови ортогональності

$$\int_0^l \left(y'(x,\lambda_m)y'(x,\lambda_n)d\alpha_1(x) + y(x,\lambda_m)y(x,\lambda_n)d\alpha_2(x)\right) = \delta_{mn},$$

3) довільна абсолютно неперервно диференційована функція $\varphi(x)$, що задовольняє крайові умови (4) і неоднорідне КДР

$$(b_0(x)\varphi'')'' - (b_1(x)\varphi')' + b_2(x)\varphi = -(a_1(x)p'(x))' + a_2(x)p(x),$$

де $p(x)$ і $p'(x)$ – абсолютно неперервні функції, розвивається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є за власними функціями задачі (3), (4)

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y(x,\lambda_n);$$

коефіцієнти Фур'є при цьому обчислюються за формулами

$$c_n = \int_0^l \left(\varphi'(x)y'(x,\lambda_n)\,d\alpha_1(x) + \varphi(x)y(x,\lambda_n)\,d\alpha_2(x)\right);$$

Розглянемо тепер неоднорідне КДР

$$L[y] \equiv (b_0 y'')'' - (b_1 y')' + b_2 y - \lambda\left[-(a_1 y')' + a_2 y\right] = -f_0' + f_1'' \qquad (6)$$

при крайових умовах (4). Тут $f_0(x),\ f_1(x) \in BV^+[0;l]$, $f_0'(x)$, $f_1''(x)$ – їх перша і друга узагальнені похідні відповідно. Це цілком узгоджується з тим відомим з механіки фактом, що $f_0'(x)$ – узагальнене зовнішнє зусилля, а $f_1''(x)$ – узагальнений зовнішній момент, що діють на балку.

Теорема. *Якщо* λ *не є власним значенням задачі* (3), (4), *то задача* (6), (4) *має єдиний розв'язок* $y(x)$, *який може бути записаний у вигляді*

$$y(x) = \int_0^l G(x,s,\lambda)\,df_0(s) + \frac{\partial G(x,s,\lambda)}{\partial s}\,df_1(s).$$

Доведення. Побудуємо розв'язок КДР

$$L[y] = (-1)^{i+1} f_i^{i+1}(x) \ \forall i = \overline{0,1} \qquad (7)$$

при крайових умовах (4) і просумуємо.

Нехай $K(x,s,\lambda)$ – функція Коші КДР (3). Тоді функція

$$y_i(x,\lambda) = \sum_{m=0}^{3} K^{\{m\}}(x,0,\lambda)\cdot c_m^i + \int_0^x K^{\{i\}}(x,s,\lambda)\,df_i(s) \ \forall i = \overline{0,1},$$

де $\{\cdot\}$ означає квазіпохідну в сенсі спряженого до (3) КДР, є загальним розв'язком неоднорідного КДР (7) і містить чотири невідомі константи. Для їх знаходження необхідно задовольнити крайові умови (4). Це приводить до системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=0}^{3}\left[p_{k,4-m} - \sum_{v=1}^{4} q_{kv} K^{\{m\}[v-1]}(l,0,\lambda)\right] c_m^i =$$

$$= \sum_{v=1}^{4} q_{kv} \int_0^l K^{\{i\}[v-1]}(l,s,\lambda)\,df_i(s), \quad k = \overline{1,4}. \qquad (8)$$

Оскільки λ не є власним значенням однорідної задачі (3), (4), то визначник цієї системи відмінний від нуля. В такому випадку константи $c_m^i \ \forall m = \overline{0,3}, i = \overline{0,1}$ можуть бути визначені з системи єдиним чином.

Через $r_{kv}(\lambda)$, $k,v = \overline{1,4}$ позначимо елементи матриці, оберненої до матриці, складеної з коефіцієнтів системи (8). Тоді

$$c_m^i = \sum_{k=1}^{4}\sum_{v=1}^{4} r_{m+1,k}(\lambda) q_{kv} \int_0^l K^{\{i\}[v-1]}(l,s,\lambda)\,df_i(s), \ m = \overline{0,3}, i = \overline{0,1}.$$

Отже,

$$y_i(x,\lambda) = \int_0^l \sum_{m=0}^{3}\sum_{k=1}^{4}\sum_{v=1}^{4} K^{\{m\}}(x,0,\lambda) r_{m+1,k}(\lambda) q_{kv} K^{\{i\}[v-1]}(l,s,\lambda)\,df_i(s) +$$

$$+ \int_0^x K^{\{i\}}(x,s,\lambda)\,df_i(s).$$

Введемо позначення

$$G_i(x,s,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{3}\sum\limits_{k=1}^{4}\sum\limits_{v=1}^{4} K^{\{m\}}(x,0,\lambda) r_{m+1,k}(\lambda) q_{kv} K^{\{i\}[v-1]}(l,s,\lambda) + \\ \qquad\qquad + K^{\{i\}}(x,s,\lambda),\ x > s, \\ \sum\limits_{m=0}^{3}\sum\limits_{k=1}^{4}\sum\limits_{v=1}^{4} K^{\{m\}}(x,0,\lambda) r_{m+1,k}(\lambda) q_{kv} K^{\{i\}[v-1]}(l,s,\lambda), \\ \qquad\qquad x < s, \quad i = \overline{0,1}. \end{cases}$$

Функцію $G(x,s,\lambda) \overset{df}{=} G_0(x,s,\lambda)$ називають *узагальненою функцією Гріна* крайової задачі (3), (4). Оскільки $K^{\{1\}}(x,s,\lambda) = \dfrac{\partial K(x,s,\lambda)}{\partial s}$, то, очевидно, $G_1(x,s,\lambda) = \dfrac{\partial G(x,s,\lambda)}{\partial s}$. *Теорема доведена.* ◊

1. *Вибрации* в технике: Справочник в 6 т. Т. 1. – М.: Машиностроение. – 1978. – 352 с.
2. *Гащук П., Зорій Л. М.* Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технології, 1999. – 372 с.
3. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
4. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами. – Автореф. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 37 с.

ON OSCILLATIONS OF BEAMS WITH DISCRETE-CONTINUOUS DISTRIBUTION OF PARAMETERS

The boundary problems, which describe oscillations of beams with discrete-continuous distribution of parameters, are considered.

О КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК С ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрены граничные задачи, которые описывают колебания балок с дискретно-непрерывным распределением параметров.