$$S_r^n(t)=\int_0^t S_r^n(\xi)d\xi=\frac{1}{n!}\int_0^t\left(\frac{\xi}{r}\right)^n\exp\left\{-\frac{\xi}{r}\right\}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{r}\right)d\xi=\frac{1}{n!}\int_0^{t/r}\xi^n e^{-\xi}d\xi$$

або, врахувавши формулу (5),

$$S_r^n(t)=1-\left[1+\frac{(t/r)}{1!}+\cdots+\frac{(t/r)^n}{n!}\right]\exp\left\{-\frac{t}{r}\right\}. \qquad (6)$$

Для інтегралів від дельтоподібних функцій (1) знайдемо такі формули:

$$S_{1r}(t)=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(t-t_0)\int_0^{|t-t_0|/r}g_1(t)dt\right], |t-t_0|\le r; S_{1r}(t)=0, t\le t_0-r; S_{1r}(t)=1, t\ge t_0+r;$$

$$S_{2r}(t)=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(t-t_0)\int_0^{|t-t_0|/r}g_2(t)dt\right], |t-t_0|<\infty. \qquad (7)$$

Безпосередньо з (6) і (7) випливає, що граничними для функцій $S_r^n(t), S_{ir}(t)$ при $r\to 0$ є функції Хевісайда

$$\lim_{r\to 0}S_r^n(t)=\begin{cases}0, t=0,\\ 1, t>0;\end{cases} \qquad \lim_{r\to 0}S_{ir}(t)=\begin{cases}0, \ t<t_0,\\ 1/2, t=t_0,\\ 1, \ t>t_0.\end{cases}$$

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. Харьков, 1984. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М., 1969. 3. Сухорольский М.А. Усреднение тригонометрических рядов // Изв. вузов. Математика. 1993. № 6. С.53–56.

УДК 517.91

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В.
НУ "Львівська політехніка", кафедра будівельної механіки

ПРО ПОРЯДОК ЗРОСТАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЯК ФУНКЦІЙ ПАРАМЕТРА

In the paper the analytical properties are investigated of the solutions of the ordinary differential equation with measures as functions of (complex) parameter linearly, included in the equation.

Досліджено аналітичні властивості розв'язків звичайного диференціального рівняння з мірами як функцій (комплексного) параметра, що входить в рівняння лінійним чином.

Для ознайомлення з необхідною термінологією з теорії цілих функцій пропонуємо монографії [1, 2]. У роботі [3] запропонований ефективний критерій визначення порядку зростання (значить роду [1, 2]) розв'язків відповідних задач як функцій параметра лише за виглядом диференціального рівняння. Встановлено, зокрема, що у випадку, коли коефіцієнти диференціального виразу $M[y]$ інтегровні на $[a;b]$, а коефіцієнти виразу $N[y]$, крім того, мають на цьому проміжку інтегровні похідні до $(m-n-1)$-го порядку* включно, всі невироджені розв'язки [3] рівняння $M[y]=\lambda\cdot N[y]$, де λ – деякий (комплексний) параметр, і їх похідні до $(m-1)$-го порядку включно є цілими функціями параметра λ з порядком зростання, що не перевищує $\dfrac{1}{m-n}$. У цій статті отримано аналогічний результат у припущенні, що коефіцієнти відповідного диференціального рівняння є узагальненими функціями.

Нехай I – відкритий інтервал дійсної осі. Простір неперервних праворуч на I функцій локально обмеженої варіації позначаємо $BV^{+}_{loc}(I)$, простір матриць-функцій, визначених на I, – $\Im(I^{l\times k})$. Під $\Delta f(x)=f(x)-f(x-0)$ розуміємо стрибок функції $f(x)\in BV^{+}_{loc}(I)$ в точці $x\in I$, під $|A|$ – норму матриці $A\in\Im(I^{l\times k})$, що визначається як сума модулів усіх її елементів a_{ij}

$$|A|=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|,$$

під $\mathrm{V}_a^b A(x)$ – повну варіацію матриці-функції $A(x)\in\Im(I^{l\times k})$ на $[a;b]$, що дорівнює сумі повних варіацій всіх її елементів $a_{ij}(x)$

$$\mathrm{V}_a^b A(x)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{V}_a^b a_{ij}(x).$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$M[y]=\lambda\cdot N[y], \tag{1}$$

де знову λ – деякий (комплексний) параметр, а диференціальні вирази $M[y]$ і $N[y]$ порядків m і n $(m>n)$ відповідно задають так:

$$M[y]=y^{(m)}-\sum_{i=1}^{m}b_i(x)\,y^{(m-i)}, \tag{2}$$

$$N[y]=-\sum_{j=0}^{n}a_{m-n+j}(x)\,y^{(n-j)}. \tag{3}$$

Поставимо наступну задачу: визначити порядок зростання розв'язків рівняння (1) за параметром λ.

Всюди далі коефіцієнти диференціальних виразів (2), (3) вважаємо комплексно-значними функціями дійсної змінної $x\in[a;b]\subset I$, причому $b_i(x)\ \forall i=\overline{1,m}$, $a_j(x)\ \forall j=\overline{0,n}$ – міри на I, тобто узагальнені похідні від функцій $\beta_i(x),\alpha_j(x)\in BV^{+}_{loc}(I)$ відповідно ($b_i(x)=\beta_i'(x)$, $a_j(x)=\alpha_j'(x)$) [4]. До того ж приймаємо функцію $b_1(x)$, а у випадку

* m і n $(m>n)$ – порядки лінійних однорідних диференціальних виразів $M[y]$ і $N[y]$ відповідно.

$m-n=1$ й функцію $\alpha_1(x)$ такими, що не містять на I дискретних компонент. Іншими словами, $\beta_1(x)$ і $\alpha_1(x)$ – неперервні функції локально обмеженої на I варіації.

Означення 1 [3]. Якщо деяка функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), одночасно задовольняє рівняння $M[y]=0$ і $N[y]=0$, то такий розв'язок називаємо *виродженим за параметром* λ. В протилежному випадку – *невиродженим*.

Очевидно, що вироджені за параметром λ розв'язки рівняння (1) не залежать від λ і, отже, в цьому тривіальному випадку мають по λ нульовий порядок зростання. Далі розглядаємо лише невироджені розв'язки.

Диференціальне рівняння (1) звичайним чином зводиться до еквівалентної диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n)} \\ y^{(n+1)} \\ \vdots \\ y^{(m-2)} \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_m-\lambda a_m & b_{m-1}-\lambda a_{m-1} & \cdots & b_{m-n}-\lambda a_{m-n} & b_{m-n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n)} \\ y^{(n+1)} \\ \vdots \\ y^{(m-2)} \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

або

$$Y'(x) = C'(x,\lambda)\cdot Y(x), \tag{4}$$

де $Y(x)\in\Im(I^{m\times 1}),\, C'(x,\lambda)\in\Im(I^{m\times m})$.

Покажемо, що система (4) є коректною в сенсі теорії узагальнених функцій [5]. Насправді, матриця стрибків для системи (4) має вигляд

$$\Delta C(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Delta\beta_m-\lambda\Delta\alpha_m & \cdots & \Delta\beta_{m-n}-\lambda\Delta\alpha_{m-n} & \Delta\beta_{m-n-1} & \cdots & \Delta\beta_2 & \Delta\beta_1 \end{pmatrix}$$

або ж у випадку $m-n=1$

$$\Delta C(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Delta\beta_m-\lambda\Delta\alpha_m & \cdots & \Delta\beta_2-\lambda\Delta\alpha_2 & \Delta\beta_1-\lambda\Delta\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

При зроблених припущеннях щодо функцій $\beta_1(x)$ і $\alpha_1(x)$ можна стверджувати, що на I справедливими є рівності $\Delta\beta_1(x)\equiv 0$ й $\Delta\alpha_1(x)\equiv 0$ (остання у випадку $m-n=1$). Тоді безпосередньою перевіркою з (5) чи (6) відповідно переконуємось у виконанні умови $[\Delta C(x,\lambda)]^2 = 0\ \forall x\in I$.

Означення 2. Під *розв'язком* диференціального рівняння (1) розуміємо першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ диференціальної системи (4), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Теорема 1. Фундаментальна матриця $Y\ (x,s,\lambda)$ диференціальної системи (4) є цілою функцією параметра λ, порядок зростання якої не перевищує одиниці.

Доведення. Матрицю $C'(x,\lambda)$ в (5) подано у вигляді

$$C'(x,\lambda) = B'(x) + \lambda A'(x).$$

Покладемо $\lambda = 0$ і знайдемо фундаментальну матрицю $\Phi(x,s) \in \Im(I^{m \times m})$, що задовольняє умови

$$\Phi'(x,s) = B'(x) \cdot \Phi(x,s), \quad \Phi(s,s) = E.$$

Очевидно, що $\Phi(x,s)$ задовольняє також інтегральне рівняння

$$\Phi(x,s) = E + \int_s^x dB(t) \cdot \Phi(t,s)$$

з класичним матричним інтегралом (насправді набором скалярних інтегралів) типу Рімана-Стільтьєса. Переходячи до норм, отримуємо таку оцінку

$$|\Phi(x,s)| = |E| + \int_s^x |\Phi(t,s)| \cdot |dB(t)|,$$

що після застосування узагальненої леми Гронуолла-Беллмана [6] приводить до оцінки

$$|\Phi(x,s)| \le m \cdot \exp\left\{ V_s^x B(t) \right\} \le m \cdot \exp\left\{ V_a^b B(t) \right\} = c, \tag{7}$$

де $c = const > 0$.

Розглядаючи тепер рівняння

$$Y\ ' = B'(x) \cdot Y\ + \lambda A'(x) \cdot Y$$

як неоднорідне, запишемо його розв'язок з урахуванням умови $Y\ (s,s,\lambda) = E$ у вигляді інтегрального рівняння

$$Y\ (x,s,\lambda) = \Phi(x,s) + \lambda \int_s^x \Phi(x,t) \cdot dA(t) \cdot Y\ (t,s,\lambda). \tag{8}$$

Враховуючи оцінку (7), з (8) отримуємо, що

$$|Y\ (x,s,\lambda)| \le c + |\lambda| \cdot c \cdot \int_s^x |Y\ (t,s,\lambda)| \cdot |dA(t)|,$$

звідки

$$|Y\ (x,s,\lambda)| \le c \cdot \exp\left\{ |\lambda| \cdot c \cdot V_s^x A(t) \right\} \le c \cdot \exp\left\{ |\lambda| \cdot c \cdot V_a^b A(t) \right\}. \tag{9}$$

Нехай $|\lambda| < r < \infty$, де $r > 0$ – довільне дійсне число. Тоді з (9) випливає, що

$$|Y\ (x,s,\lambda)| \le c \cdot \exp\left\{ r \cdot c \cdot V_a^b A(t) \right\}, \tag{10}$$

тобто $Y\ (x,s,\lambda)$ рівномірно обмежена в довільній скінченній частині комплексної λ-площини при $(x,s) \in [a;b] \times [a;b]$.

Позначимо для $\mu \ne \lambda, |\mu| < r$,

$$\omega(x,s,\lambda,\mu) = \frac{Y\ (x,s,\mu) - Y\ (x,s,\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

Тоді, використовуючи інтегральне рівняння (8), отримуємо, що

$$\omega(x,s,\lambda,\mu)=\frac{\mu\cdot\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot Y\ (t,s,\mu)-\lambda\cdot\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot Y\ (t,s,\lambda)}{\mu-\lambda}=$$

$$=\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot Y\ (t,s,\mu)+\lambda\cdot\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot\frac{Y\ (t,s,\mu)-Y\ (t,s,\lambda)}{\mu-\lambda}$$

або

$$\omega(x,s,\lambda,\mu)=\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot Y\ (t,s,\mu)+\lambda\cdot\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot\omega(t,s,\lambda,\mu). \tag{11}$$

Очевидно, що остання рівність суть інтегральне рівняння для $\omega(x,s,\lambda,\mu)$.

Використовуючи тепер (7) і (10), отримуємо оцінку

$$\left|\int\limits_s^x\Phi(x,t)\cdot dA(t)\cdot Y\ (t,s,\mu)\right|\le c^2\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\cdot\exp\left\{r\cdot c\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\right\}.$$

Тоді з інтегрального рівняння (11) випливає, що

$$|\omega(x,s,\lambda,\mu)|\le c^2\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\cdot\exp\left\{r\cdot c\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\right\}+r\cdot c\cdot\int\limits_s^x|\omega(t,s,\lambda,\mu)|\cdot|dA(t)|$$

або після повторного застосування узагальненої леми Гронуолла – Беллмана

$$|\omega(x,s,\lambda,\mu)|\le c^2\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\cdot\exp\left\{2rc\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\right\}.$$

Функція $\omega(x,s,\lambda,\mu)$ рівномірно обмежена в довільній скінченій μ-області при фіксованому λ і, отже, $Y\ (x,s,\lambda)$ неперервна як функція від μ в точці $\mu=\lambda$.

Щоб переконатися в тому, що функція $Y\ (x,s,\lambda)$ є цілою, покажемо, що вона має похідну при всіх комплексних λ або (що те саме) функція $\omega(x,s,\lambda,\mu)$ має границю при $\mu\to\lambda$. Визначимо функцію $\omega(x,s,\lambda,\lambda)$ як розв'язок інтегрального рівняння (11) при $\mu=\lambda$ і розглянемо вираз

$$\omega_1(x,s,\lambda,\mu)=\frac{\omega(x,s,\lambda,\mu)-\omega(x,s,\lambda,\lambda)}{\mu-\lambda}.$$

Міркуючи аналогічно, як і вище, приходимо до оцінки

$$|\omega_1(x,s,\lambda,\mu)|\le c^3\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\cdot\exp\left\{3rc\cdot \mathrm{V}_a^b A(x)\right\}.$$

Це означає, що $\omega(x,s,\lambda,\mu)\to\omega(x,s,\lambda,\lambda)$ при $\mu\to\lambda$ по довільному шляху і, отже, $Y\ (x,s,\lambda)$ – аналітична (ціла) функція. На основі нерівності (9) порядок зростання цієї функції по λ не перевищує одиниці. Теорема доведена.

З цієї теореми та означення 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. Всі розв'язки диференціального рівняння (1) і їх похідні до порядку $(m-1)$ включно є цілими функціями параметра λ і мають по λ порядок зростання, що не перевищує одиниці.

Зауважимо, однак, що оцінка $\rho\le 1$ для порядку зростання розв'язків рівняння (1) при $m-n>1$ не є задовільною [7]. Тому спробуємо її уточнити.

Теорема 2. При накладених вище умовах на коефіцієнти всі невироджені розв'язки диференціального рівняння (1) і їх похідні до порядку $(m-1)$ включно мають по λ порядок зростання $\rho \le \dfrac{1}{m-n}$.

Доведення. Наслідуючи [8], систему (4) запишемо у вигляді

$$Z' = D'(x,\lambda)\cdot Z, \tag{12}$$

де $Z = col\left(y, y',..., y^{(n)}, \lambda^{\frac{1}{m-n}} y^{(n+1)}, \lambda^{\frac{2}{m-n}} y^{(n+2)},..., \lambda^{\frac{(m-n)-1}{m-n}} y^{(m-1)}\right)$, а матриця-функція $D'(x,\lambda) \in \mathfrak{S}(I^{m\times m})$ визначається рівністю

$$D'(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{\frac{1}{m-n}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{\frac{1}{m-n}} \\ \lambda^{\frac{1}{m-n}}\left(\dfrac{a_m}{\lambda} - b_m\right) & \lambda^{\frac{1}{m-n}}\left(\dfrac{a_{m-1}}{\lambda} - b_{m-1}\right) & \cdots & \lambda^{\frac{1}{m-n}}\left(\dfrac{a_{m-n}}{\lambda} - b_{m-n}\right) & a_{m-n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Для норми фундаментальної матриці $Z\,(x,s,\lambda)$ системи (12) після застосування узагальненої леми Гронуолла – Беллмана маємо подібну до (7) оцінку

$$\left|Z\,(x,s,\lambda)\right| \le m\cdot\exp\left\{\mathrm{V}_s^x D(t,\lambda)\right\} \le m\cdot\exp\left\{\mathrm{V}_a^b D(x,\lambda)\right\}. \tag{13}$$

За означенням повної варіації маємо, що при $|\lambda| \to \infty$

$$\mathrm{V}_a^b D(x,\lambda) \le c_2\cdot|\lambda|^{\frac{1}{m-n}} + O(1)$$

і оцінка (13) набуває вигляду

$$\left|Z\,(x,s,\lambda)\right| \le c_1\cdot\exp\left\{c_2\cdot|\lambda|^{\frac{1}{m-n}} + O(1)\right\},$$

де $c_i = const > 0,\ i = 1,2$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $c(\varepsilon)$ таке, що при $|\lambda| \to \infty$

$$\left|Z\,(x,s,\lambda)\right| \le \exp\left\{c(\varepsilon)\cdot|\lambda|^{\frac{1}{m-n}+\varepsilon}\right\}$$

Це фактично означає, що порядок цілої функції $Z\,(x,s,\lambda)$ не перевищує $\dfrac{1}{m-n}$.

Фундаментальні матриці $Y\,(x,s,\lambda)$ і $Z\,(x,s,\lambda)$ пов'язані формулою

$$Y\ (x,s,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^{\frac{1}{m-n}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{\frac{(m-n)-1}{m-n}} \end{pmatrix}\cdot Z\ (x,s,\lambda)=\Re(\lambda)\cdot Z\ (x,s,\lambda).$$

Порядок функції $\Re(\lambda)\in\Im(l^{m\times m})$ як многочлена відносно λ дорівнює нулеві. Тому порядок цілої функції $Y\ (x,s,\lambda)$

$$\rho\le\max\left(0,\frac{1}{m-n}\right)=\frac{1}{m-n},$$

що й завершує доведення теореми.

Наслідок. Якщо диференціальні вирази $M[y]$ і $N[y]$ такі, що $m-n>1$, то всі невироджені розв'язки рівняння (1) є цілими функціями параметра λ нульового роду.

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 2. Титчмарш Е. Теория функций / Пер. с англ. М., 1980. 3. Таций Р.М. О порядке роста характеристического ряда // Математ. методы и физ.-мех. поля. 1981. № 13. С. 38–48. 4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем / Пер. с рум. М., 1971. 5. Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные уравнения с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1988. № 222. С. 89–90. 6. Пахолок Б.Б. Об одном неравенстве типа Гронуолла – Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1989. № 232. С. 109–110. 7. Мазуренко В.В. Про порядок зростання розв'язків векторного квазідиференціального рівняння другого порядку як функцій параметра // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1999. № 364. С. 83–87. 8. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

УДК 539.3:537.22

Ткачук О.М, Дудка О.М., Ткачук В.М.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ МЕССБАУЕРІВСЬКИХ СПЕКТРІВ

The effectivity of the usage of the regularization method as alternative to the least squares fitting for the mathematical analysis of the mossbauer spectroscopy results have been analyzed.

Проаналізовано ефективність використання методу регуляризації як альтернативи методові найменших квадратів для математичного аналізу результатів мессбауерівської спектроскопії.