УДК 517.91

В. В. Мазуренко

Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

The necessary and sufficient conditions of equivalence for two discrete-continuous boundary-value problems are given.

Нехай I — відкритий інтервал дійсної осі; $BV_{loc}^{+}(I)$ — простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації; $\Delta\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(x) - \mathrm{C}(x-0)$ — стрибок матриці-функції $\mathrm{C}(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$ в точці $x \in I$; $\mathrm{C}'(x)$ — її узагальнена похідна, тобто міра на I.

У роботі [1] детально вивчається узагальнена однорідна диференціальна система

$$\mathrm{J} \cdot \mathrm{Y}' = (\mathrm{B}'(x) + \lambda \mathrm{A}'(x)) \cdot \mathrm{Y}, \qquad x \in [a, b] \subset I, \tag{1}$$

де $\mathrm{Y}(x)$ — k-вимірний вектор; λ — (комплексний) параметр; J, $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ — квадратні $(k \times k)$ матриці, причому J — стала й неособлива косоермітова матриця, $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ — ермітові,

$$\mathrm{J}^{*} = -\mathrm{J}, \qquad \mathrm{A}(x)^{*} = \mathrm{A}(x), \qquad \mathrm{B}(x)^{*} = \mathrm{B}(x).$$

Вважається, що $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$, а диференціювання в (1) розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій. На матриці-функції $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ крім цього накладаються умови коректності [2], які в даному випадку набувають вигляду

$$\left[\mathrm{J}^{-1}(\Delta\mathrm{B}(x) + \lambda\Delta\mathrm{A}(x))\right]^{2} = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Вимагається також, щоб для довільного нетривіального розв'язку $\mathrm{Y}(x)$ рівняння (1) виконувалась умова

$$\int_{a}^{b} \mathrm{Y}(x)^{*}\, d\mathrm{A}(x)\, \mathrm{Y}(x) > 0.$$

Нехай сталі квадратні $(k \times k)$ матриці M і N такі, що

$$\mathrm{M}^{*}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{N}^{*}\mathrm{J}\mathrm{N}, \tag{2}$$

причому з рівностей $\mathrm{M}\mathrm{v} = 0$, $\mathrm{N}\mathrm{v} = 0$ (v — сталий вектор) випливає, що $\mathrm{v} \equiv 0$. Ставиться задача: знайти розв'язок рівняння (1), який для деякого $\mathrm{v} \neq 0$ задовольняє крайові умови

$$\mathrm{Y}(a) = \mathrm{M}\mathrm{v}, \qquad \mathrm{Y}(b) = \mathrm{N}\mathrm{v}. \tag{3}$$

Описану вище постановку крайової задачі називатимемо узагальненою схемою Аткінсона. Слід зауважити, що в роботі Ф. Аткінсона [3] матриці-функції $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ вважаються сумовними за Лебегом на $[a, b]$.

а сталі матриці M, N визначаються рівностями (10). При цьому умова звідності (9) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{r_{11}} & \overline{r_{21}} \\ \overline{r_{12}} & \overline{r_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_{11}} & \overline{s_{21}} \\ \overline{s_{12}} & \overline{s_{22}} \end{pmatrix},$$

де $\overline{r_{ij}}$, $\overline{s_{ij}}$ $\forall i, j = 1, 2$ — числа, що комплексно спряжені до чисел r_{ij}, s_{ij}, відповідно. Після перемноження матриць приходимо до системи рівностей

$$r_{i1}\overline{r_{j2}} - r_{i2}\overline{r_{j1}} = s_{i1}\overline{s_{j2}} - s_{i2}\overline{s_{j1}}, \qquad i, j = 1, 2. \tag{13}$$

Виконання умов (13) забезпечує дійсність всіх власних значень задачі (11), (12), причому умова ортогональності власних функцій набуває вигляду

$$\int_a^b y(x, \lambda_m) y(x, \lambda_n)\, dM(x) = \delta_{mn}.$$

Зауваження 2. Якщо $\overline{r_{ij}}$, $\overline{s_{ij}}$ — дійсні числа $\forall i, j = 1, 2$, то умови (13) зводяться до умови $\det \mathrm{R} = \det \mathrm{S}$.

1. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 269 с.
2. *Стасюк М. Ф., Тацій Р. М.* Корректные дифференциальные уравнения с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Диф. уравн. и их приложен. – Львов: Вища шк., 1988. – № 222. – С. 89–90.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1968. – 749 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – Москва: Наука, 1972. – 720 с.

Державний університет "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 29.03.2000

УДК 517

Є. В. Черемних

Несамоспряжена модель Фрідріхса і функція Вейля

(Представлено академіком НАН України Ю. М. Березанським)

The spectral singularities of nonself-adjoint operators of a Friedrichs' model are studied. The analogs of the notions of maximal operator and Weyl function are used. It is possible to apply the results to Sturm-Liouville operators.

Оператори із спектральними особливостями розглядалися багатьма авторами. Вкажемо в першу чергу на такі роботи як [1–4]. Метою даної роботи є подальший аналіз ролі спектральних особливостей в моделі Фрідріхса, особливо при побудові функції від оператора. Запропонований підхід до цього кола питань базується на введеному в абстрактну схему понятті максимального оператора.

Для прикладу розглянемо крайову задачу для скалярного квазідиференціального рівняння другого порядку

$$-(a_{00}(x)y' + a_{10}(x)y)' + a_{01}(x)y' + (a_{11}(x) - \lambda m(x))y = 0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} r_{11}y(a) + r_{12}y^{[1]}(a) = s_{11}y(b) + s_{12}y^{[1]}(b), \\ r_{21}y(a) + r_{22}y^{[1]}(a) = s_{21}y(b) + s_{22}y^{[1]}(b). \end{cases} \tag{12}$$

Тут $y^{[1]}(x) = a_{00}(x)y'(x) + a_{10}(x)y(x)$ — квазіпохідна, а сталі r_{ij}, s_{ij} $\forall i,j = 1,2$ вибрані таким чином, що

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & s_{11} & s_{12} \\ r_{21} & r_{22} & s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = 2.$$

Припускатимемо, що всі коефіцієнти квазідиференціального рівняння (11) дійсні, причому виконуються умови:

1) $a_{00}^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна за Лебегом на I функція;

2) $a_{11}(x)$, $m(x)$ — міри на I, тобто $a_{11}(x) = b'_{11}(x)$, $b_{11}(x) \in BV^{+}_{loc}(I)$, $m(x) = M'(x)$, $M(x) \in BV^{+}_{loc}(I)$ і неспадна на I;

3) $a_{01}(x)$, $a_{10}(x)$ — квадратично сумовні за Лебегом на I функції;

4) $a_{01}(x) = a_{10}(x)$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що за допомогою вектора $\mathbf{Y}(x) = \operatorname{colon}(y(x), y^{[1]}(x))$ і сталих матриць $\mathbf{R} = (r_{ij})_1^2$, $\mathbf{S} = (s_{ij})_1^2$ задача (11), (12) зводиться до задачі (4), (5), де

$$\mathbf{Q}'(x) = \begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{00}^{-1}(x) \\ a_{11}(x) - a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m(x) & 0 \end{pmatrix},$$

Виберемо, наприклад,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що в такому випадку справедливими є рівності (7) і оскільки

$$\Delta\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_{11}(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta M(x) & 0 \end{pmatrix},$$

то виконується також умова коректності (6). Вимога (8) набуває вигляду

$$\int_a^b y^2(x)\, dM(x) > 0$$

і, очевидно, має місце для всякого нетривіального розв'язку $y(x)$ рівняння (11), бо $M(x)$ — неспадна на I (тобто $m(x)$ — додатна міра). Тоді, згідно з теоремою, задача (11), (12) зводиться до задачі (1), (3), де

$$\mathbf{B}'(x) = \begin{pmatrix} -a_{11}(x) + a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & -a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) \\ -a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{00}^{-1}(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}'(x) = \begin{pmatrix} m(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Розглянемо тепер крайову задачу

$$\mathbf{Y}' = (\mathbf{Q}'(x) + \lambda \mathbf{P}'(x))\mathbf{Y}, \qquad x \in [a, b] \subset I, \tag{4}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{Y}(a) = \mathbf{S}\mathbf{Y}(b). \tag{5}$$

Тут $\mathbf{P}(x)$, $\mathbf{Q}(x)$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ — квадратні $(k \times k)$ матриці, причому $\mathbf{P}(x), \mathbf{Q}(x) \in BV^{+}_{loc}(I)$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ — сталі матриці і $\operatorname{rang}(\mathbf{R}|\mathbf{S}) = k$. До того ж виконуються умови коректності

$$(\Delta \mathbf{Q}(x) + \lambda \Delta \mathbf{P}(x))^2 = 0, \qquad \forall x \in I. \tag{6}$$

Вважатимемо, що для деякої сталої й неособливої косоермітової матриці $\mathbf{J}$

$$\mathbf{P}(x)^* = -\mathbf{J}\mathbf{P}(x)\mathbf{J}^{-1}, \qquad \mathbf{Q}(x)^* = -\mathbf{J}\mathbf{Q}(x)\mathbf{J}^{-1} \tag{7}$$

і для всякого нетривіального розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ рівняння (4)

$$\int_a^b \mathbf{Y}(x)^* \mathbf{J}\, d\mathbf{P}(x)\, \mathbf{Y}(x) > 0. \tag{8}$$

Означення. Будемо говорити, що задача (4), (5) зводиться до узагальненої схеми Аткінсона, якщо існують квадратні матриці $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ з властивістю (2), за допомогою яких крайова умова (5) зводиться до крайових умов (3).

Теорема. *Нехай виконуються умови (6)–(8). Для того, щоб задача (4), (5) зводилася до узагальненої схеми Аткінсона, необхідно і достатньо виконання умови*

$$\mathbf{R}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^* = \mathbf{S}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}^*. \tag{9}$$

Доведення цієї теореми випливає з того, що матриці $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ конструктивно будуються за відомими матрицями $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ з (5):

$$\mathbf{M} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^*, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}^*. \tag{10}$$

Зауваження 1. Якщо $k = 2m$ — парне число, то умова (9) зустрічається при дослідженні гамільтонових систем з параметром [4, с. 174].

На основі результатів роботи [1] з цієї теореми, зокрема, випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Власні значення λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, задачі (4), (5) при виконанні умов (6)–(9) дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки; при цьому $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} |\lambda_n|^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

Наслідок 2. Власні функції $\mathbf{Y}(x, \lambda_n)$ (включаючи кратні власні значення) задовольняють умови ортогональності

$$\int_a^b \mathbf{Y}(x, \lambda_m)^* \mathbf{J}\, d\mathbf{P}(x)\, \mathbf{Y}(x, \lambda_n) = \delta_{mn},$$

де δ_{mn} — символ Кронекера.