ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 91–100
doi:10.15330/cmp.7.1.91-100

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2015, Т.7, №1, С.91–100

Неня О.І.

ПРО ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ МОДЕЛІ ХИЖАК-ЖЕРТВА З НЕМОНОТОННОЮ ФУНКЦІЄЮ ВПЛИВУ ТА НЕСКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботі розглянуто систему рівнянь, яка є дискретним аналогом моделі хижак-жертва з немонотонною функцією впливу та нескінченним запізненням. Досліджується проблема побудови умов перманентної поведінки динамічної моделі. Умова перманентності забезпечує обмеженість розв'язків зверху та знизу, але при цьому вимагає щоб розв'язки залишалися постійно додатними. Для отримання достатніх умов перманентної поведінки розв'язків системи використано методи, які базуються на застосуванні теорем порівняння.

Ключові слова і фрази: модель хижак-жертва, перманентність, функціональний вплив.

Kyiv National Economic University, 54/1 Prospect Peremogy, 03680, Kyiv, Ukraine
E-mail: alexni@ukr.net

Вступ

Дослідження різноманітних питання динамічної взаємодії між елементами моделі хижак-жертва було та є одним з домінуючих, як в екології, так і в математичній біології [3]. Актуальними є проблеми локальної та глобальної стікості, періодичності, перманентної поведінки розв'язку моделі хижак-жертва [7, 8].

Існують численуі біологічні та фізіологічні свідоцтва [1, 2, 6], що у випадках, коли хижаки вимушені в пошуках здобичі ділитися жертвою або конкурувати за жертву, більш повною, в порівнянні з класичною моделлю, є модель, у якій темп приросту чисельності хижака має бути функцією не однієї змінної чисельності популяції жертви і не двох незалежних змінних чисельності жертв та хижаків, а однієї змінної — відношення чисельності популяції жертви до популяції хижака. Дану функцію звичайно називають трофічною функцією хижака або функціональним впливом.

У роботах [4], [5] розглядається модель хижак-жертва з нескінченним запізненням

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left[a(t) - b(t)\int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds\right] - c(t)g\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)y(t), \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + e(t)g\left(\frac{x(t-\tau(t))}{y(t-\tau(t))}\right)\right]. \end{cases} \tag{1}$$

У мікробіологічній динаміці та хімічній кінетиці функціональний вплив описує поглинання субстрату мікроорганізмами. В більшості випадків трофічна функція $g(u)$ монотонна. Хоча, існують експеременти які показують, що немонотонні впливи трапляються на мікробіологічному рівні: коли концентрація поживної речовини досягає високого рівня може трапитися ефект сповільнення зростання кількості мікроорганізмів. Таке

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39A22, 39A60.

часто спостерігається коли мікроорганізми використовуються для непродуктивного розкладання або для водного очищення.

Для кожної обмеженої послідовності $a(n)$ введемо позначення

$$a^u = \sup_{n\in\mathbb{N}} a(n), \quad a^l = \inf_{n\in\mathbb{N}} a(n).$$

У даній роботі розглядається система рівнянь, яка є дискретним аналогом системи (1):

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n)\exp\left\{a(n) - b(n)\sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)x(n-s) - c(n)g\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right)\frac{y(n)}{x(n)}\right\}, \\ y(n+1) = y(n)\exp\left\{-d(n) + e(n)g\left(\frac{x(n-\tau(n))}{y(n-\tau(n))}\right)\right\}, n = 0,1,2,..., \end{cases} \tag{2}$$

де $x(n), y(n)$ — представляють щільності популяцій жертви та хижака, $n \geq 0$, $a(n), b(n)$, $c(n), e(n), d(n), \tau(n)$ — обмежені, невід'ємні послідовності такі, що

$$0 < a^l \leq a^u, \quad 0 < b^l \leq b^u, \quad 0 < c^l \leq c^u, \quad 0 < d^l \leq d^u, \quad 0 < e^l \leq e^u, \quad 0 < \tau^l \leq \tau^u.$$

Дискретна функція $K(\cdot)$ задовольняє наступні умови:

(H_1) $K(s) \in [0,\infty)$ і обмежена для $s = 1,2,3,\ldots;$

(H_2) $\sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s) = 1.$

В даній роботі досліджується перманентна поведінка розв'язку $(x(n), y(n))$ системи рівнянь (2) з початковими умовами:

$$x(\theta) = \varphi_1(\theta), \quad y(\theta) = \varphi_2(\theta), \quad \varphi_i(0) > 0, \quad \varphi_i(\theta) \geq 0, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

для $\theta \in \mathbb{Z}^- = \{\ldots, -2, -1, 0]$.

Для системи (2) з додатними початковими умовами (3) розв'язок $(x(n), y(n))$ існує для всіх $n \geq 0$, може бути однозначно побудований послідовно і, згідно з видом рівнянь системи (2), задовольняє умови $x(n) > 0, y(n) > 0, n \geq 0$.

Функція $g(u)$ системи (2) є немонотонною і задовольняє таким умовам (**NM**):

(i) $g \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}), g(0) = 0;$

(ii) існує така стала $p > 0$, що $(u-p)g'(u) < 0$ для $u \neq p$;

(iii) $\lim\limits_{u\to+\infty} g(u) = 0;$

(iv) $h'(u) < 0$ для всіх $u \geq 0$, та $h(0) = \lim\limits_{u\to 0} \frac{g(u)}{u}$, де $h(u) = \frac{g(u)}{u}$.

Розглянемо функцію

$$g(u) = \frac{\beta u^{\alpha-1}}{\gamma + u^{\alpha}}, \quad \alpha \geq 2,$$

яка, як неважко пересвідчитись, задовольняє умови (i)–(iv).

На основі умов (**NM**) можна довести, що при виконанні нерівності $d^u < e^l g(p)$ рівняння $g(u) = \frac{d^u}{e^l}$ має два додатні корені $0 < r_1 < r_2$.

Допоміжні результати

Означення 1. *Систему рівнянь* (2) *будемо називати перманентною, якщо існують додатні сталі m_i, M_i, $i = 1,2$ такі, що*

$$m_1 \leq \lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup x(n) \leq M_1,$$

$$m_2 \leq \lim_{n\to+\infty} \inf y(n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup y(n) \leq M_2,$$

для будь якого розв'язку $u(n) = (x(n), y(n))$ *системи* (2) *з додатними початковими даними.*

Поняття перманентності грає важливу роль у математичній біології. Біологічно це означає, що коли система при взаємодії різних видів стала у певному сенсі, то всі види виживають у довгостроковому проміжку часу.

Лема 1 ([9]). *Нехай* $\{x(n)\}$ *задовольняє умови* $x(n) > 0$ *та*

$$x(n+1) \leq x(n) exp\left(r(n)\left(1 - ax(n)\right)\right)$$

для $n \in [n_1, \infty)$, *де* $a > 0$, $\{r(n)\}$ *— додатна послідовність. Тоді*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x(n) \leq \frac{1}{ar^u} exp\left\{r^u - 1\right\}.$$

Лема 2 ([9]). *Нехай* $\{x(n)\}$ *задовольняє умови:*

$$x(n+1) \geq x(n) exp\left(r(n)\left(1 - ax(n)\right)\right), \quad n \geq N_0,$$

та $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup x(n) \leq M$, $x(N_0) > 0$, $\quad N_0 \in \mathbb{N}$, *де* $aM > 1$, $\{r(n)\}$ *— додатна послідовність. Тоді* $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf x(n) \geq \frac{1}{a} exp\left\{r^u\left(1 - aM\right)\right\}$.

Лема 3 ([10]). *Нехай* $\{x(n)\}$, $\{b(n)\}$ *— невід'ємні послідовності, визначені на* $\mathbb{N}$, $c \geq 0$ *— стала. Якщо*

$$x(n) \leq c + \sum_{s=0}^{n-1} b(s)x(s), \quad n \in \mathbb{N},$$

то

$$x(n) \leq c \prod_{s=0}^{n-1} [1 + b(s)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лема 4. *Нехай для* $\{x(n)\}$ *виконуються умови* $x(n) > 0$ *та*

$$x(n+1) \geq x(n) exp\left\{r(n)\left(-1 + ag\left(\frac{K}{x(n)}\right)\right)\right\} \tag{4}$$

для $n \in [n_1, \infty)$, *де* $\{r(n)\}$ *— додатна послідовність,* $a > 0$, $K > 0$, $g'(u) > 0$ *при* $u < p$. *Тоді*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}} exp\left\{-r^u\right\} \tag{5}$$

при $g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p} < p$.

Доведення. Нехай існує таке $l_0 \in [n_1, +\infty)$, що $x(l_0 + 1) < x(l_0)$. Тоді з (4) випливає, що

$$x(l_0) > \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}.$$

Використовуючи останню нерівність отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} x(l_0+1) &\geq x(l_0)exp\left\{r(l_0)\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(l_0)}\right)\right)\right\} \\ &\geq x(l_0)exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(l_0)}\right)\right)\right\} \\ &> x(l_0)exp\left\{-r^u\right\} \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}exp\left\{-r^u\right\} = m. \end{aligned} \tag{6}$$

Доведемо, що $x(n) \geq m$ для всіх $n \in [l_0, +\infty)$. Припустимо, що існує число $\tilde{p}_0 \in [l_0, +\infty)$ таке, що $x(\tilde{p}_0) < m$. Тоді $\tilde{p}_0 \geq l_0 + 2$. Нехай p_0 — найменше ціле число таке що $x(p_0) < m$. Тоді $x(p_0 - 1) > x(p_0)$, звідки випливає, що застосувавши вищеприведені перетворення до $x(p_0)$, отримаємо, що $x(p_0) \geq m$. Отримуємо протиріччя.

Розглянемо випадок, коли $x(n+1) > x(n)$ для всіх $n \in [n_1, +\infty)$. Нехай існує $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = L$. Стверджуємо, що

$$L \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}.$$

Припустимо протилежне: $L < \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\big|_{u<p}}$. Тоді існує число $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x(n) < \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}$$

для всіх $n > N_0$. З цього випливає, що

$$x(n+1) \geq x(n)exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(n)}\right)\right)\right\}. \tag{7}$$

Перейшовши до границі в (7), одержимо:

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}.$$

Отримуємо протиріччя.

Враховуючи, що $exp(-r^u) < 1$ для $r^u > 0$, маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}} \geq \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\Big|_{u<p}}exp(-r^u), \tag{8}$$

що і доводить справедливість твердження (5). □

Основні результати

Теорема 1. *Якщо виконується умова*

$$a^l - b^u M_1 - c^u h(0) > 0, \tag{9}$$

де

$$M_1 = \frac{\exp\left\{a^u - 1\right\}}{b^l \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\left\{-sa^u\right\}},$$

тоді існує таке число

$$m_1 = \frac{\left(a^l - c^u h(0)\right) \exp\left\{a^u - c^l h(0) - \exp\left\{a^u - c^l h(0) - 1\right\}\right\}}{b^u \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s) \exp\left\{-s(a^l - b^u M_1 - c^u h(0))\right\}}, \tag{10}$$

що для розв'язку $x(n)$ *системи* (2) *виконуються оцінки:*

$$m_1 \le \lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \le \lim_{n\to+\infty} \sup x(n) \le M_1.$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $g'(u) > 0$ для всіх $u < p$, де $u = \frac{x(n)}{y(n)}$. Тоді з першого рівняння системи (2) маємо:

$$x(n+1) \le x(n) exp\{a^u - c^l h(p)\}.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$x(n) \le x(n-s) exp\{s(a^u - c^l h(p))\},$$

з якої випливає, що

$$x(n-s) \ge x(n) exp\{-s(a^u - c^l h(p))\}.$$

Підставивши останню нерівність у перше рівняння системи (2), отримуємо:

$$\begin{aligned} &x(n+1) \\ &\le x(n) \exp\left\{a(n) - b(n) \sum_{s=1}^{\infty} K(s) x(n) \exp\left\{-s(a^u - c^l h(p))\right\} - c(n) h(p)\right\} \le x(n) \\ &\times \exp\left\{(a(n) - c(n)h(p)) \left(1 - \frac{b^l}{a^u - c^l h(p)} \sum_{s=1}^{\infty} K(s) x(n) \exp\left\{-s(a^u - c^l h(p))\right\}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

З умови (9), маємо $a^l - c^u h(p) \ge a^l - b^u M_1 - c^u h(0) > 0$; тому застосовуючи Лему 1 до нерівності (11) маємо наступну оцінку:

$$\lim_{n\to\infty} \sup x(n)\Big|_{u<p} \le \frac{\exp\left\{a^u - c^l h(p) - 1\right\}}{b^l \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s) \exp\left\{-s(a^u - c^l h(p))\right\}} = M_1^*.$$

Розглянемо випадок, коли $g'(u) < 0$ для всіх $u > p$. З першого рівняння системи (2) маємо:

$$x(n+1) \le x(n) exp\{a^u\}.$$

Тоді

$$x(n) \le x(n-s) exp\{s a^u\},$$

звідки отримуємо

$$x(n-s) \ge x(n) exp\{-s a^u\}.$$

Підставивши останню нерівність у перше рівняння системи (2) отримуємо:

$$\begin{aligned} x(n+1) &\le x(n) \exp\left\{a(n) - b(n) \sum_{s=1}^{\infty} K(s) x(n) \exp\left\{-s a^u\right\}\right\} \\ &\le x(n) \exp\left\{a(n) \left(1 - \frac{b^l}{a^u} \sum_{s=1}^{\infty} K(s) x(n) \exp\left\{-s a^u\right\}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Застосовуючи Лему 1 до нерівності (12) маємо наступну оцінку:

$$\lim_{n\to\infty}\sup x(n)\Big|_{u>p} \leq \frac{\exp\{a^u - 1\}}{b^l \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\{-sa^u\}} = M_1^+.$$

Взявши $\max(M_1^*, M_1^+) = M_1^+ = M_1$ отримаємо оцінку:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup x(n) \leq M_1. \tag{13}$$

Нехай $g'(u) > 0$ для всіх $u < p$. З оцінки (13) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, що $x(n) \leq M_1 + \varepsilon$ для всіх $n > N_1$. Тому з першого рівняння системи (2) маємо:

$$\begin{aligned} x(n+1) &\geq x(n)exp\{a(n) - b(n)(M_1+\varepsilon) - c(n)h(0)\} \\ &\geq x(n)exp\{a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(0)\}; \end{aligned}$$

звідки отримуємо

$$x(n-s) \leq x(n)exp\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(0))\}.$$

Підставивши останню нерівність у перше рівняння системи (2), отримуємо:

$$\begin{aligned} &x(n+1) \geq x(n) \\ &\times \exp\left\{a(n) - b(n)\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(0))\right\} - c(n)h(0)\right\} \\ &\geq x(n)\exp\Bigg\{(a(n) - c(n)h(0)) \\ &\times\left(1 - \frac{b^u}{a^l - c^u h(0)}\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(0))\right\}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{14}$$

З умови (9) маємо $a^l - c^u h(0) \geq a^l - b^u M_1 - c^u h(0) > 0$, тому, застосовуючи Леми 1 та 2 до нерівності (14), отримаємо наступну оцінку при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\inf x(n)\Big|_{u<p} &\geq \frac{a^l - c^u h(0)}{b^u \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\{-s(a^l - b^u M_1 - c^u h(0))\}} \\ &\times \exp\left\{a^u - c^l h(0) - \exp\left\{a^u - c^l h(0) - 1\right\}\right\} = m_1^*. \end{aligned}$$

Умова $aM > 1$ леми 2 набуде вигляду

$$\frac{exp\{a^u - c^l h(0) - 1\}}{a^u - c^l h(0)} > 1. \tag{15}$$

Оскільки $e^{(x-1)} \geq x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то звідси випливає, що нерівність (15) виконується.

З першого рівняння системи (2) при $u > p$ маємо:

$$\begin{aligned} x(n+1) &\geq x(n)exp\{a(n) - b(n)(M_1+\varepsilon) - c(n)h(p)\} \\ &\geq x(n)exp\{a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(p)\}. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що

$$x(n-s) \leq x(n) exp\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(p))\}.$$

Підставивши останню нерівність у перше рівняння системи (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} x(n+1) &\geq x(n) \\ &\times \exp\left\{a(n) - b(n)\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(p))\right\} - c(n)h(p)\right\} \\ &\geq x(n)\exp\Bigg\{(a(n) - c(n)h(p)) \\ &\times \left(1 - \frac{b^u}{a^l - c^u h(p)}\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l - b^u(M_1+\varepsilon) - c^u h(p))\right\}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{16}$$

З умови (9) маємо $a^l - c^u h(p) \geq a^l - b^u M_1 - c^u h(p) \geq a^l - b^u M_1 - c^u h(0) > 0$. Тому, застосовуючи Леми 1 та 2 до нерівності (16), отримаємо наступну оцінку при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf x(n)\Big|_{u>p} &\geq \frac{a^l - c^u h(p)}{b^u \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\left\{-s(a^l - b^u M_1 - c^u h(p))\right\}} \\ &\times \exp\left\{a^u - c^l h(p) - \exp\left\{a^u - c^l h(p) - 1\right\}\right\} = m_1^+. \end{aligned}$$

Взявши $\min(m_1^*, m_1^+) = m_1^* = m_1$ отримаємо число (10) та оцінку

$$\lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \geq m_1. \tag{17}$$

□

Розглянемо друге рівняння системи (2) при $\tau(n) = k$.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови*

$$\frac{d^u}{e^l} < g(p) \tag{18}$$

та

$$a^u - b^l m_1 + d^u > 0, \tag{19}$$

то існують такі числа

$$M_2 = \exp\left\{2(e^u g(p) - d^l)\right\}$$

та

$$m_2 = \ min(m_2^*, m_2^+), \tag{20}$$

де

$$m_2^* = \frac{m_1 \exp\left\{k\left(e^l g\left(\frac{m_1}{M_2}\right) - d^u\right)\right\}}{g^{-1}\left(\frac{d^u}{e^l}\right)\Big|_{u<p}} \exp\left\{-d^u\right\},$$

$$m_1^+ = \frac{m_1}{\exp\left\{2(a^u - b^l m_1 + d^u)\right\}},$$

що для розв'язку $y(n)$ системи (2) виконуються оцінки

$$m_2 \leq \lim_{n\to+\infty} \inf y(n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup y(n) \leq M_2.$$

Доведення. З другого рівняння системи (2) для всіх $u \geq 0$ маємо:

$$y(n+1) \leq y(n)exp\{-d^l + e^u g(p)\}. \tag{21}$$

Зробивши заміну змінних $z(n) = \ln y(n)$ в (21) отримуємо нерівність:

$$z(n+1) \leq z(n) + e^u g(p) - d^l. \tag{22}$$

Якщо взяти $c = e^u g(p) - d^l$, $b(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq n-1, \\ 1, & s = n, \end{cases}$ нерівність (22) набуде вигляду:

$$z(n+1) \leq \sum_{s=0}^{n} b(s)z(s) + c. \tag{23}$$

Врахувавши умову (18) $\frac{d^l}{e^u} < \frac{d^u}{e^l} < g(p)$ та застосувавши Лему 3 до нерівності (23), отримаємо оцінку розв'язку $z(n)$:

$$z(n) \leq 2(e^u g(p) - d^l),$$

а отже і оцінку розв'язку $y(n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup y(n) \leq \exp\left\{2(e^u g(p) - d^l)\right\} = M_2. \tag{24}$$

Розглянемо випадок, коли $g'(u) > 0$ для всіх $u < p$.

З оцінок (17) та (24) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > N_1$ виконуються оцінки $x(n) \geq m_1 - \varepsilon$ та $y(n) \leq M_2 + \varepsilon$.

Тому з другого рівняння системи (2) маємо:

$$y(n+1) \geq y(n)exp\{e^l g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{M_2+\varepsilon}\right) - d^u\};$$

звідки отримуємо оцінку:

$$y(n-k) \leq y(n)exp\left\{-k\left(e^l g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{M_2+\varepsilon}\right) - d^u\right)\right\}.$$

Підставивши останню нерівність у друге рівняння системи (2), отримуємо:

$$\begin{aligned} y(n+1) &\geq y(n)\exp\left\{e(n)g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{y(n)exp\left\{-k\left(e^l g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{M_2+\varepsilon}\right)-d^u\right)\right\}}\right) - d(n)\right\} \\ &\geq y(n)\exp\left\{d(n)\left(-1 + \frac{e^l}{d^u}g\left(\frac{(m_1-\varepsilon)exp\left\{k\left(e^l g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{M_2+\varepsilon}\right)-d^u\right)\right\}}{y(n)}\right)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Застосовуючи лему 4 до нерівності (25) та врахувавши умову (18) отримаємо наступну оцінку при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \inf y(n)\Big|_{u<p} \geq \frac{m_1 \exp\left\{k\left(e^l g\left(\frac{m_1}{M_2}\right) - d^u\right)\right\}}{g^{-1}\left(\frac{d^u}{e^l}\right)\Big|_{u<p}} \exp\{-d^u\} = m_2^*.$$

Розглянемо випадок, коли $u > p$. Введемо заміну $z(n) = \frac{x(n)}{y(n)}$. Тоді з системи (2) маємо:

$$z(n+1) = z(n)\exp\left\{a(n) - b(n)\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n-s) - c(n)\frac{g(z(n))}{z(n)} + d(n) - e(n)g(z(n-k))\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$z(n+1) \leq z(n)exp\{a^u - b^l(m_1 - \varepsilon) + d^u\}.$$

Зробивши заміну змінних $\xi(n) = \ln z(n)$ в останній нерівності отримуємо:

$$\xi(n+1) \leq \sum_{s=0}^{n} b(s)\xi(s) + c, \tag{26}$$

де $c = a^u - b^l(m_1 - \varepsilon) + d^u$, $b(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq n-1, \\ 1, & s = n. \end{cases}$

Врахувавши умову (19) та застосувавши Лему 3 до нерівності (26), отримаємо оцінку розв'язку $\xi(n)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\xi(n) \leq 2(a^u - b^l m_1 + d^u),$$

а отже і оцінку розв'язку $z(n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup z(n) \leq \exp\left\{2(a^u - b^l m_1 + d^u)\right\} = M_2^*. \tag{27}$$

З оцінки (27) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > N_1$ виконується $\frac{x(n)}{y(n)} \leq M_2^* + \varepsilon$. Звідси випливає:

$$y(n) \geq \frac{x(n)}{M_2^* + \varepsilon} \geq \frac{m_1 - \varepsilon}{M_2^* + \varepsilon}.$$

При $\varepsilon \to 0$ маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} \inf y(n) \geq \frac{m_1}{\exp\left\{2(a^u - b^l m_1 + d^u)\right\}} = m_2^+.$$

Взявши $\min(m_2^*, m_2^+)$, отримаємо число (20) та оцінку:

$$\lim_{n\to+\infty} \inf y(n) \geq m_2.$$

□

Висновки

У роботі досліджено властивість перманентності системи різницевих рівнянь моделі хижак-жертва з немонотонною функцією впливу та нескінченним запізненням. На основі теорем порівняння побудовано нові умови перманентної поведінки динамічної моделі.

Відкритими залишаються питання побудови оцінок розв'язку $y(n)$ рівняння хижака системи (2) при $\tau(n) \neq const$ та покращення отриманих у роботі умов та оцінок.

References

[1] Arditi R., Ginzburg L.R. *Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-dependence*. J. Theoret. Biol. 1989, **139** (3), 311–326. doi:10.1016/S0022-5193(89)80211-5

[2] Arditi R., Saiah H. *Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio-dependent consumption*. Ecology 1992, **73** (5), 1544–1551. doi:10.2307/1940007

[3] Berryman A.A. *The origins and evolution of predator–prey theory*. Ecology 1992, **75** (5), 1530–1535. doi:10.2307/1940005

[4] Fan Y.H., Li W.T., Wang L.L. *Periodic solutions of delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic or nonmonotonic functional responses*. Nonlinear Anal. Real World Appl. 2004, **5** (2), 247–263. doi:10.1016/S1468-1218(03)00036-1.

[5] Fan M., Wang K. *Periodicity in a delayed ratio-dependent predator–prey system*. J. Math. Anal. Appl. 2001, **262** (1), 179–190. doi:10.1006/jmaa.2001.7555.

[6] Gutierrez A.P. *The physiological basis of ratio-dependent predator-prey theory: A metabolic pool model of Nicholson's blowflies as an example*. Ecology 1992, **73** (5), 1552–1563. doi:10.2307/1940008

[7] Hsu S.B., Hwang T.W., Kuang Y. *Global analysis of Michaelis-Menten type ratio-dependent predator-prey system*. J. Math. Biol. 2003, **42** (6), 489–506. doi:10.1007/s002850100079.

[8] Kuang Y., Beretta E. *Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey systems*. J. Math. Biol. 1998, **36** (4), 389–406. doi:10.1007/s002850050105

[9] Yang X.T. *Uniform persistence and periodic solutions for a discrete predator–prey system with delays*. J. Math. Anal. 2006, **316** (1), 161–177. doi:10.1016/j.jmaa.2005.04.036.

[10] Yang W.S., Li X.P. *Permanence for a delayed discrete ratio-dependent predator–prey model with monotonic functional responses*. Nonlinear Anal. 2009, **10** (2), 1068—1072. doi:10.1016/j.nonrwa.2007.11.022.

Надійшло 05.04.2014

Nenya O. I. *Permanence of a discrete predator-prey system with nonmonotonic functional responses and endless delay*. Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 91–100.

A discrete-time analogue of predator-prey model with nonmonotonic functional responses and endless delay is considered in the paper. We investigate the question of obtaining conditions of permanent behavior of the dynamic model. The condition of permanence provides the limiting of the solutions but it requires the positiveness of the solutions. Sufficient conditions of permanence are obtained when the functional response function is nonmonotonic. The methods based on the estimation theorems are used to receive the sufficient permanent conditions of the solutions. These results are applied to some special population model with endless delay, some new results are obtained.

Key words and phrases: predator-prey model, permanence, functional response function.