Розв’язання вибраних завдань ТЮМ-18 2015-2016 н. р.

1. «Складене число»

Знайдіть таке найменше складене число n, що $2^{n-1}-1$ ділиться без остачі на n. Чи буде множина всіх таких складених чисел n нескінченною?

Розв’язання. $n=341=11\cdot 31$. За малою теоремою Ферма $2^{340}-1=\left(2^{34}\right)^{10}-1\vdots 11$ та $2^{340}-1=\left(2^{5}\right)^{68}-1=\left(32^{68}-1^{68}\right)\vdots(32-1)=31.$ Нескладно переконатися, що менші складені числа умову не задовольняють. Для цього достатньо побачити, що n не може бути парним, та перевірити менші за 341 непарні складені числа, які діляться на 3, 5, 7 та 11.

2. «2015»

Для кожного натурального числа n знайдіть усі пари натуральних чисел $x, y,$ що $x^n-y^n=2015.$

Розв’язання. Для $n=1$ отримуємо нескінченну кількість пар розв’язків вигляду $x=y+2015,$ де $y-$ довільне натуральне число. Для $n\geq 2$ запишемо рівняння у вигляді $(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=2015.$ Оскільки ж $2015=5\cdot 13\cdot 31,$ то $x-y$ може набувати лише значень 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015. Крім того, якщо $x-y=k,$ то $x^n-y^n\geq k\left[(k+1)^{n-1}+(k+1)^{n-2}+...+1\right]=(k+1)^n-1.$ Тому $(k+1)^n\leq 2016\Rightarrow n\leq 10.$ Звідси для $n=2$ отримуємо $k\leq 31,$ для $n=3$ та $n=4$ знаходимо $k\leq 5,$ а для $5\leq n\leq 10$ матимемо $k=1.$ Розглядаючи відповідні чотири випадки можливих значень k для $n=2,$ знайдемо пари (x,y) розв’язків: $(1008,1007)$, $(204,199)$, $(84,71)$, $(48,17)$. Оскільки серед них немає пар, складених з точних квадратів, то для парних $n>2$ задане рівняння не має розв’язків у натуральних числах. Для $n=3$, підставивши $k=1$ та $k=5$, знайдемо ще один розв’язок $(14,9)$. Оскільки числа цієї пари не є точними кубами, то для $n=9$ розв’язків у натуральних числах не існує. І, нарешті, для $n=5$ та $n=7$, підставивши $k=1,$ з врахуванням монотонності виразу $x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}$ а, з ним і різниці x^n-y^n, перебором переконуємося, що інших розв’язків у натуральних числах задане рівняння не має.

5. «Кількість складів і сума цифр»

Знайдіть кількість натуральних чисел, менших за 1000, що мають таку властивість: сума цифр числа у десятковій системі числення дорівнює кількості складів (тобто голосних букв) у його назві (відповідному числівнику української мови).

Розв’язання. Випишемо у таблиці слова, з яких можна утворити назви всіх натуральних чисел, менших за 1000.

Число - слово	Σ	Число - слово	Σ	Число - слово	Σ	Число - слово	Σ
1 - один	2	11 - одинадцять	4	10 - десять	2	100 - сто	1
2 - два	1	12 - дванадцять	3	20 - двадцять	2	200 - двісті	2
3 - три	1	13 - тринадцять	3	30 - тридцять	2	300 - триста	2
4 - чотири	3	14 - чотирнадцять	4	40 - сорок	2	400 - чотириста	3
5 - п’ять	1	15 - п’ятнадцять	3	50 - п’ятдесят	3	500 - п’ятсот	2
6 - шість	1	16 - шістнадцять	3	60 - шістдесят	3	600 - шістсот	2
7 - сім	1	17 - сімнадцять	3	70 - сімдесят	3	700 - сімсот	2

8 - вісім	2	18 - вісімнадцять	4	80 - вісімдесят	4	800 - вісімсот	3
9 - дев’ять	2	19 - дев’ятнадцять	4	90 - дев’яносто	4	900 - дев’ятсот	3

Перебором переконуємося, що з чисел, менших за 100, умову задачі задовольняють лише числа 12, 20 та 31. Тоді з врахування четвертої суми з двох останніх стовпчиків отримаємо ще й такі 12 чисел: 100, 112, 120, 131, 200, 212, 220, 231, 400, 412, 420, 431. Далі, з перших та третіх сум отримуємо числа 1, 10 та 21, у яких сума цифр на 1 більша, ніж кількість складів. Тому як розв’язки підійдуть ще 3 такі числа: 301, 310, 321. А оскільки з першої та третьої сум не вдасться отримати числа, в яких сума цифр принаймні на 3 більша, ніж кількість складів, то шуканих чисел з першою цифрою, більшою за 4, не існує. Отже, остаточно маємо 18 таких чисел, менших за 1000, які виписані вище.

6. «Країна чотирьох островів»

На островах A, B і C живе по 2000 людей, а на острові D – 2015 жителів. Кожні два острови з’єднані між собою окремим мостом. Час від часу по мостах із якогось із островів три жителі переселяються на три інші острови – по одному на кожен острів. Чи може у результаті вийти, що на острові A житимуть 2015 осіб, а на островах B, C та D – по 2000 осіб?

Розв’язання. Не може. Кожне переселення з острова A чи B змінює різницю між числом жителів на цих островах на 4, а кожне переселення з островів C та D не змінює такої різниці. Оскільки спочатку ця різниця дорівнювала нулю, то після кожного переселення вона ділитиметься на 4, тому не може стати рівною $2015-2000=15$.

8. «Нелінійна система рівнянь»

Розв’яжіть у додатних дійсних числах $x,\ y,\ z$ систему рівнянь:

$$\frac{1}{x}-20y+15z=11,\quad \frac{1}{y}-15z+11x=20,\quad \frac{1}{z}-11x+20y=15.$$

Розв’язання. Покладемо $11=a$, $20=b$, $15=c$ і запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases}\frac{1}{x}-by+cz=a,\\ \frac{1}{y}-cz+ax=b,\\ \frac{1}{z}-ax+by=c,\end{cases} \text{ або, що те саме, } \begin{cases}a+yb-zc=\frac{1}{x},\\ -xa+b+zc=\frac{1}{y},\\ xa-yb+c=\frac{1}{z}.\end{cases}$$

Визначник отриманої системи трьох лінійних рівнянь відносно невідомих a, b, c

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & y & -z\\ -x & 1 & z\\ x & -y & 1\end{vmatrix}=1+xy+yz+zx\neq 0$$

для довільних додатних чисел $x,\ y,\ z$, тому за таких $x,\ y,\ z$ вона має єдиний розв’язок. Легко переконатися, що $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$. Звідси $x=\frac{1}{a}=\frac{1}{11}$, $y=\frac{1}{b}=\frac{1}{20}$, $z=\frac{1}{c}=\frac{1}{15}$.

10. «Різниця середніх гармонічних»

Доведіть, що для довільних додатних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ виконується нерівність:

$$\frac{n}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq 1..$$

Розв’язання. Доведемо, що

$$\Delta_n=\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\ge\frac{1}{n}.$$

Для $n=1$ маємо $\Delta_1=1\ge\frac{1}{1}$.

Припустимо, що $\Delta_k\ge\frac{1}{k}$, і покладемо $\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_k}=a,\quad \frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=b.$

За припущенням $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\ge\frac{1}{k}$, звідки $a\le\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{k}}$. Тоді для $a_{k+1}=x>0$ отримаємо

$$\Delta_{k+1}=\frac{1}{a+\frac{1}{1+x}}-\frac{1}{b+\frac{1}{x}}\ge\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{k}}+\frac{1}{1+x}}-\frac{1}{b+\frac{1}{x}}=\frac{(b+k)(1+x)}{bk(1+x)+b+k}-\frac{x}{bx+1}\equiv y(x).$$

Оскільки $y'(x)=\frac{(b+k)^2}{\left(bk(1+x)+b+k\right)^2}-\frac{1}{(bx+1)^2}$, то з умови $y'(x)=0$ знайдемо точку екстремуму $x=\frac{k}{b}$. Це є точка мінімуму, бо $y'\left(\frac{k}{2b}\right)<0,\ y'\left(\frac{2k}{b}\right)>0$. Тому $\Delta_{k+1}\ge y\left(\frac{k}{b}\right)=\frac{1}{k+1}$.

Отже, також $\Delta_n\ge\frac{1}{n}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що для кожного $k\ge1$ рівність досягається за умови $\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{x}=\frac{b}{k}=\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}}{k}$, тобто за умови, що всі a_i рівні між собою.

11.

Нехай $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ – довільна перестановка невід’ємних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Доведіть, що

$$\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)\ldots\left(1+a_n+a_n^2\right)\ge\left(1+a_1+a_1b_1\right)\left(1+a_2+a_2b_2\right)\ldots\left(1+a_n+a_nb_n\right).$$

Розв’язання. Для $n\ge1$ твердження задачі очевидне. Нехай тепер $n\ge2$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$. Якщо при цьому послідовність $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ не впорядкована за зростанням, то знайдуться такі номери $k<p$, що $b_k\ge b_p$. Тоді помінявши b_k та b_p місцями, отримаємо, що

$$\left(1+a_k+a_kb_p\right)\left(1+a_p+a_pb_k\right)-\left(1+a_k+a_kb_k\right)\left(1+a_p+a_pb_p\right)=\left(a_p-a_k\right)\left(b_k-b_p\right)\ge0,$$

тобто від такої перестановки добуток не зменшується. Тому він буде найбільшим за умови, що $b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$, тобто за умови $b_k=a_k,\ k=\overline{1,n}$, звідки й випливає задана нерівність.

13. «Ще одна нерівність»

Нехай дійсні числа x,y,z задовольняють одночасно дві рівності

$$(x+y)\left(x^2+y^2+2z\right)=1,\qquad \left(x^2+z\right)^2+z(x+y)^2=1.$$

Доведіть, що тоді виконується нерівність $\left(y^2+z\right)^2+z(x+y)^2\ge z.$

З’ясуйте, коли в цій нерівності досягається рівність

Розв'язання. Маємо

$$\left(x+y\right)\left(x^2+y^2+2z\right)=1\Rightarrow y^2+z=\frac{1}{x+y}-\left(x^2+z\right),$$

$$\left(x^2+z\right)^2+z\left(x+y\right)^2=1\Rightarrow\frac{1}{\left(x+y\right)^2}=\left(\frac{x^2+z}{x+y}\right)^2+z.$$

Тому

$$\left(y^2+z\right)^2+z\left(x+y\right)^2=\frac{1}{\left(x+y\right)^2}-\frac{2\left(x^2+z\right)}{x+y}+\left(x^2+z\right)^2+z\left(x+y\right)^2=$$

$$=\left(\frac{x^2+z}{x+y}\right)^2+z-\frac{2\left(x^2+z\right)}{x+y}+1=\left(\frac{x^2+z}{x+y}-1\right)^2+z\ge z.$$

Рівність досягається, якщо $x^2+z=x+y.$

З іншого боку, у разі рівності маємо

$$\left(y^2+z\right)^2-\left(x^2+z\right)^2=z-1\Rightarrow\left(y-x\right)\left(x+y\right)\left(x^2+y^2+2z\right)=z-1\Rightarrow y-x=z-1.$$

Додавши два отримані співвідношення між x,y,z, отримаємо $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1,\ y=z.$

Підставивши їх у друге рівняння умови, отримуємо $\left(1+z\right)^2+z\left(1+z\right)^2=1\Rightarrow\left(1+z\right)^3=1\Rightarrow z=0.$

Отже, рівність досягається лише у випадку $x=1,\ y=z=0.$

16. «Потрійні точки»

На площині задано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві із заданих точок провели пряму. Точку площини, яка відмінна від заданих, називатимемо *потрійною*, якщо через неї проходить рівно три проведені прямі. Знайдіть максимальну можливу кількість *потрійних* точок.

Розв'язання. 10 потрійних точок отримаємо, якщо задати 6 точок у вершинах та центрі правильного п'ятикутника. Доведемо, що на кожній з 15 проведених прямих може бути не більше, ніж 2 потрійні точки, відмінні від заданих, тобто всіх потрійних точок не більше, ніж $\left(15\cdot2\right):3=10.$ При цьому підрахунку враховано, що кожна потрійна точка належить трьом прямим. Для доведення зауважимо, що 6 прямих, які попарно проходять через довільні 4 точки можуть перетинатися по дві щонайбільше у трьох різних точках (можливі дві принципові конструкції, коли ці точки у вершинах опуклого чи не опуклого чотирикутника), які не лежать на одній прямій (за умови, що жодні дві з цих прямих не паралельні). Тому на прямій, яка проходить через решту дві точки може лежати щонайбільше дві потрійні точки, що й слід було довести.

17. «Точки кільця»

Яку найбільшу кількість точок координатної площини можна відмітити в кільці $\left\{\left(x,y\right)\middle|1\le x^2+y^2\le2\right\}$ так, щоб відстань між будь-якими двома з них була не меншою за 1?

Розв'язання. Зрозуміло, що 8 таких точок вказаному кільцю може належати. Для достатньо розмістити їх у вершинах квадрата зі стороною 2, розміщених на колі $x^2+y^2=2,$ та у точках дотику цього квадрата до кола $x^2+y^2=1$. При цьому найменші з відстаней між точками дорівнюють 1. Також можна, наприклад, вибрати їх у вершинах правильного восьмикутника, вписаного у коло $x^2+y^2=2,$ зі стороною $a=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=4-2\sqrt{2}>1.$

Доведемо, що 9 точок таким чином розмістити не вдасться. Справді, для 9 точок найменший кут, під яким з центра O кільця видно відрізок, який з'єднує деякі дві з цих точок A та B, не перевищує 40^0. Враховуючи, що у трикутнику AOB принаймні один з кутів A та B гострий, отримуємо, що найбільшою відстань між цими точками буде, якщо принаймні одна з цих точок лежатиме на колі $x^2+y^2=2,$ а друга – або на цьому ж колі, або на колі $x^2+y^2=1.$ У першому випадку отримуємо $AB\le\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{9}\approx 0,936<1,$ а у другому – $AB\le\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2-2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{9}\approx 0,834<1.$

18. «Розбиваємо круг»

Чи можливо трьома різними хордами, відмінними від діаметрів, розбити круг на декілька рівновеликих частин.

Розв'язання. Можливо. Проведемо хорду AB так, щоб вона відтинала від круга його п'яту частину. Відкладемо від її кінців хорди AC та BD, кожна з яких відтинає від круга площу у його дві п'ятих частини, і які перетинаються у деякій точці M. Тоді площі частинок AMD та BMC круга рівні і площі частинок AMB та CMD круга також рівні, причому площа трикутника AMB менша площі фігури AMD. Справді, вважаючи радіус круга рівним 1, з точністю до шістьох знаків після коми з рівняння $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{\pi}{5}\approx 0,628319$ отримаємо у радіанах $\angle AOB=\alpha\approx 2{,}113139,$ а з рівняння $\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sin\beta=\frac{2\pi}{5}\approx 1,256637$ будемо мати $\angle DOB=\beta\approx 2,824797.$ Тоді

$$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}AB\cdot tg\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\sin^2\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha+\beta}{2}\approx 0,603831<\frac{\pi}{5},$$

$$S_{AMD}\approx 1,256637-0,603831=0,652806>\frac{\pi}{5}.$$

Будемо тепер рухати хорди BD та AC вздовж кола так, щоб точка D рухалася у напрямі точки A, а точка C - у напрямі точки B. При цьому для деякого положення цих хорд площі CMD та AMD стануть рівними. Таким чином три хорди поділять круг на 5 рівновеликих частин.

Доведемо, що поділ на 7 частин неможливий. З рівняння $\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}\sin\varphi=\frac{3\pi}{7}\approx 1,3464$ знайдемо $\varphi\approx 2,9162$. Три такі хорди відсічуть всередині правильний трикутник з радіусом вписаного кола $r=\cos\frac{\varphi}{2}\approx 0,2226$ і площею $S=3\sqrt{3}r^2\approx 0,2574\ne\frac{\pi}{7}\approx 0,4488.$

Неможливий також поділ на парну кількість частин, бо тоді одна з хорд буде діаметром.

Крім того, не вдасться отримати при поділі менше чотирьох та більше семи частин.

<u>20.</u> «Геометрія трикутника та екстремум»

Знайдіть мінімум відношення бічної сторони рівнобедреного трикутника до радіуса вписаного у нього кола.

Розв'язання. Нехай у трикутнику $AB = AC = b,\ BC = a,\ \angle ABC = \angle ACB = \beta.$ Тоді

$$\frac{a}{2} = b\cos\beta,\ r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ r = b\cos\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow \left(\frac{r}{b}\right)^2 = \cos^2\beta\cdot\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Позначивши $\cos\beta = x,$ розглянемо функцію $f(x) = x^2\cdot\frac{1-x}{1+x}.$ Оскільки $f'(x) = -2x\cdot\frac{x^2+x-1}{(1+x)^2},$ то з умови $f'(x)=0$ знайдемо точку максимуму $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$ Таким чином,

$$\min\left(\frac{b}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

21. «Відновлюємо трикутник»

Нехай CH – висота зображеного на дошці трикутника ABC, в якому $\angle C = 90^\circ,\ CA \neq CB.$ Учитель математики провів серединні перпендикуляри до сторін CA та CB, які перетнули пряму CH у точках K та M відповідно, а потім витер рисунок, залишивши на дошці тільки точки C, K, M. Відновіть трикутник ABC, використовуючи лише циркуль та лінійку.

Розв'язання. Оскільки $CA \neq CB,$ то точки K та M не збігаються. Зрозуміло, що вершина A знаходиться на колі радіуса KC з центром у точці K, а вершина B – на колі радіуса MC з центром у точці M. Виберемо на цих колах точки A та B так, щоб прямі AB та KC були перпендикулярними і $\angle C = 90^\circ.$ Якщо для конкретності вважати , що $KB < MB$, то на відрізку KM відкладемо точку H таку, що $KH : MH = KC : MC$ і проведемо пряму AB через точку H, вибравши вершини A та B по різні сторони від прямої KC. З подібності прямокутних трикутників AKH та BMH, отримаємо, що $\angle AKH = \angle BMH$. Оскільки при цьому $\angle ACH = \frac{1}{2}\angle AKH$, $\angle BCH = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle BMH$, то кут ACB – прямий. Зрозуміло, що при цьому шуканих трикутників отримаємо два, які симетричні один до одного відносно прямої KC.

24. «Діаметрально протилежні точки»

Вписане коло ω трикутника ABC дотикається сторін BC, CA, AB у точках D, E, F відповідно. Нехай точки X, Y, Z кола ω діаметрально протилежні до точок D, E, F відповідно. Прямі BC, BY, CZ перетинають сторони BC, CA, AB у точках D', E', F' відповідно. На відрізках AD', BE', CF' відзначили точки X', Y', Z' відповідно так, що $D'X' = AX$, $E'Y' = BY$, $F'Z' = CZ$. Доведіть, що точки X', Y', Z' збігаються.

Розв'язання. Будемо розв'язувати цю задачу методом комплексних координат. Не зменшуючи загальності можна вважати, що радіус кола ω дорівнює 1, а його центр має комплексну координату 0. Нехай $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$. Тоді $X(-d)$. Враховуючи Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990. – 224с., отримаємо

$$A\left(\frac{2ef}{e+f}\right);\quad BC:\quad \bar{d}z + d\bar{z} = 2;\qquad AX:\quad (\bar{a}-\bar{x})z + (x-a)\bar{z} + a\bar{x} - x\bar{a} = 0.$$

Звідси для точки $D'(d')$ перетину прямих BC та BC знайдемо

$$d' = \frac{2(a-x) + d\left(a\bar{x} - x\bar{a}\right)}{d\left(\bar{a} - \bar{x}\right) + \bar{d}\,(a-x)}.$$

Далі, з умови $D'X' = AX$ для точки $X'(x')$ отримаємо $x' = a - x + d'.$ Враховуючи тут $a = \dfrac{2ef}{e+f}$, $\bar{a} = \dfrac{2\bar{e}\bar{f}}{\bar{e}+\bar{f}} = \dfrac{2}{e+f}$, $x = -d$, $\bar{x} = -\dfrac{1}{d}$, $\bar{d} = \dfrac{1}{d}$, послідовно знайдемо

$$a - x = \frac{2ef}{e+f} + d = \frac{2ef + de + ef}{e+f},$$

$$d\left(a\bar{x} - x\bar{a}\right) = d\left(-d \cdot \frac{2}{e+f} + \frac{2ef}{e+f} \cdot \frac{1}{d}\right) = \frac{2\left(ef - d^2\right)}{e+f},$$

$$d\left(\bar{a} - \bar{x}\right) + \bar{d}\,(a-x) = d\left(\frac{2}{e+f} + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{2ef}{e+f} + d\right) = \frac{2\left(de + ef + fd + d^2\right)}{d\,(e+f)},$$

$$x' = \frac{2\left(3def\,(d+e+f) + d^2e^2 + e^2f^2 + f^2d^2\right)}{(d+e)(e+f)(f+e)}.$$

Оскільки координата x' точки X' симетрично виражається через координати точок D, E, F, то аналогічно отримаємо $y' = x'$ та $z' = x'$ для координат точок $Y'(y')$ та $Z'(z')$ відповідно. Тому точки X', Y', Z' збігаються.