Федак І.В. Вибрані задачі XVII Всеукраїнського турніру юних математиків

1. ***Кути у трикутнику.*** *У трикутнику* ABC, *один з кутів якого дорівнює* 48°, *довжини сторін задовольняють співвідношення* $(a-c)(a+c)^2+bc(a+c)=ab^2$. *Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника*.

Розв'язання. Нехай $BC=a,\ AC=b,\ AB=c.$ Зауважимо, що задане в умові задачі співвідношення можна записати у вигляді $(b-a-c)(c^2-a^2-ab)=0,$ причому для сторін трикутника $b-a-c\neq 0.$ Звідси $c^2=a^2+ab,$ тобто $\frac{c}{a}=\frac{a+b}{c}.$ Продовжимо сторону BC трикутника ABC поза точку C до точки D такої, що $CD=CA.$ Оскільки при цьому $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB},$ то трикутники ABC та DBA подібні. Отже, $\angle BAC=\angle BDA=\angle CAD.$ Тому $\angle BCA=2\angle BAC.$ Таким чином, маємо три можливі варіанти для кутів трикутника ABC:

$$\angle A=48^\circ,\ \angle B=36^\circ,\ \angle C=96^\circ;$$

$$\angle A=44^\circ,\ \angle B=48^\circ,\ \angle C=88^\circ;$$

$$\angle A=24^\circ,\ \angle B=108^\circ,\ \angle C=48^\circ.$$

2. ***Дивна тотожність.*** *Орися записала у зошиті подвійну тотожність, після чого зачитала її вголос:* ***Ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс*** *дорівнює* ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс*** *дорівнює* ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс****. Наведіть приклад тотожності, яку могла записати Орися, або доведіть, що дівчина помилилася.*

Розв'язання. Така тотожність можлива. Наприклад,

$$(x+x)\cdot(x+x)\equiv(x+x)\cdot x+x\cdot(x+x)\equiv(x+x)\cdot(x+x)\cdot(x+x)\div(x+x)\equiv 4x^2,\ \ x\neq 0.$$

Зауважимо, що фрагментів ***ікс плюс ікс*** у фразі Орисі зі збереженням тотожності можна використати й довільну кількість разів $n\geq 5$. Зокрема, якщо умовно позначити через $[...]$ взятий у дужки вираз із n таких фрагментів, то $[...]\cdot(x+x)\div(x+x)$ збереже тотожність для $n+2$ фрагментів.

Інше цікаве узагальнення отримуємо, замінивши фрагменти ***ікс плюс ікс*** у фразі Орисі фрагментами ***ікс плюс ікс плюс ікс***. При цьому тотожність матиме вигляд

$$(x+x+x)\cdot(x+x+x)\equiv(x+x+x)\cdot x+(x+x)\cdot(x+x+x)\equiv$$

$$\equiv(x+x+x)\cdot(x+x+x)\cdot(x+x+x)\div(x+x+x)\equiv 9x^2,\ \ x\neq 0.$$

Справедлива також наступна тотожність

$$\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\cdot\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\equiv\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\cdot x+\Big(\underbrace{x+...+x}_{k-1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\equiv$$

$$\equiv\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\cdot\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\cdot\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\div\Big(\underbrace{x+...+x}_{k}\Big)\equiv k^2x^2,\ \ x\neq 0.$$

Зберегти її вдасться і при використанні $n\geq 5$ фрагментів $\underbrace{x+...+x}_{k}$ у фразі Орисі.

3. ***Тригонометричні добутки.*** *Обчислити добутки:*

а). $\left(1-\dfrac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\dfrac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)...\left(1-\dfrac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right);$

б). $(1-\operatorname{ctg}1^\circ)(1-\operatorname{ctg}2^\circ)...(1-\operatorname{ctg}44^\circ);$

в). $(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)...(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ).$

Розв'язання. Враховуючи, що $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, отримаємо:

а). $$\left(1-\frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1-\frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right)=\frac{\cos 1^\circ-\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\frac{\cos 2^\circ-\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\frac{\cos 59^\circ-\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}=\frac{2\sin 30^\circ\cdot\sin 31^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\frac{2\sin 30^\circ\cdot\sin 32^\circ}{\sin 88^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{2\sin 30^\circ\cdot\sin 89^\circ}{\sin 31^\circ}=1.$$

б). $$\left(1-\mathrm{ctg}1^\circ\right)\left(1-\mathrm{ctg}2^\circ\right)\ldots\left(1-\mathrm{ctg}44^\circ\right)=\left(1-\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}\right)\ldots\left(1-\frac{\cos 44^\circ}{\sin 44^\circ}\right)=$$
$$=\frac{\sin 1^\circ-\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ}\cdot\frac{\sin 2^\circ-\sin 88^\circ}{\sin 2^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin 44^\circ-\cos 46^\circ}{\sin 44^\circ}=\frac{-2\sin 44^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 1^\circ}\cdot$$
$$\cdot\frac{-2\sin 43^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 2^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{-2\sin 1^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 44^\circ}=2^{22}.$$

в). $$\left(\sqrt{3}+\mathrm{tg}1^\circ\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{tg}2^\circ\right)\ldots\left(\sqrt{3}+\mathrm{tg}29^\circ\right)=\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}+\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}+\frac{\sin 29^\circ}{\cos 29^\circ}\right)=\frac{\sin 60^\circ\cos 1^\circ+\sin 1^\circ\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ\cos 1^\circ}\cdot\frac{\sin 60^\circ\cos 2^\circ+\sin 2^\circ\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ\cos 2^\circ}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\frac{\sin 60^\circ\cos 29^\circ+\sin 29^\circ\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ\cos 29^\circ}=2^{29}\cdot\frac{\sin 61^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\frac{\sin 62^\circ}{\sin 88^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin 89^\circ}{\sin 61^\circ}=2^{29}.$$

4. ***Алгебраїчні суми.*** *Обчислити знакозмінні суми біноміальних коефіцієнтів:*

а) $C_{2013}^0-C_{2012}^1+C_{2011}^2-C_{2010}^3+\ldots-C_{1008}^{1005}+C_{1007}^{1006}$;

б) $C_{2014}^0-C_{2013}^1+C_{2012}^2-C_{2011}^3+\ldots+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}$;

в) $C_{2015}^0-C_{2014}^1+C_{2013}^2-C_{2012}^3+\ldots+C_{1009}^{1006}-C_{1008}^{1007}$.

Розв'язання.

І спосіб. Позначимо
$$A_n=C_{2n-1}^0-C_{2n-2}^1+C_{2n-3}^2-C_{2n-4}^3+\ldots+(-1)^{n-2}C_{n+1}^{n-2}+(-1)^{n-1}C_n^{n-1};$$
$$B_n=C_{2n}^0-C_{2n-1}^1+C_{2n-2}^2-C_{2n-3}^3+\ldots+(-1)^{n-1}C_{n+1}^{n-1}+(-1)^nC_n^n.$$
Легко обчислити
$$A_1=C_1^0=1;\ A_2=C_3^0-C_2^1=1-2=-1;\ A_3=C_5^0-C_4^1+C_3^2=1-4+3=0.$$
Для $n\ge 4$, скориставшись формулою $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-2}^{k-1}+C_{m-2}^k$, з врахуванням рівності $C_n^{n-1}-C_{n-1}^{n-2}=1=C_{n-2}^{n-2}$ отримаємо
$$A_n=C_{2n-1}^0-\left(C_{2n-3}^0+C_{2n-4}^0+C_{2n-4}^1\right)+\left(C_{2n-4}^1+C_{2n-5}^1+C_{2n-5}^2\right)-$$
$$-\left(C_{2n-5}^2+C_{2n-6}^2+C_{2n-6}^3\right)+\ldots+(-1)^{n-2}\left(C_n^{n-3}+C_{n-1}^{n-3}+C_{n-1}^{n-2}\right)+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=$$
$$=-C_{2n-4}^0+C_{2n-5}^1-C_{2n-6}^2+C_{2n-7}^3-\ldots-(-1)^{n-3}C_{n-1}^{n-3}-(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}=-B_{n-2}=$$
$$=-C_{2n-4}^0+\left(C_{2n-6}^0+C_{2n-7}^0+C_{2n-7}^1\right)-\left(C_{2n-7}^1+C_{2n-8}^1+C_{2n-8}^2\right)+\left(C_{2n-8}^2+C_{2n-9}^2+C_{2n-9}^3\right)-$$
$$-\ldots-(-1)^{n-3}\left(C_{n-2}^{n-4}+C_{n-3}^{n-4}+C_{n-3}^{n-3}\right)-(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}=$$
$$=C_{2n-7}^0-C_{2n-8}^1+C_{2n-9}^2-\ldots+(-1)^{n-4}C_{n-3}^{n-4}=A_{n-3}.$$
Таким чином, послідовність сум A_n періодична з періодом $T=3$. Крім того, з доведеного випливає, що $B_n=-A_{n+2}$. Повертаючись до умов задачі, знаходимо:

а) $C_{2013}^{0}-C_{2012}^{1}+C_{2011}^{2}-C_{2010}^{3}+...-C_{1008}^{1005}+C_{1007}^{1006}=A_{1007}=A_{2}=-1;$

б) $C_{2014}^{0}-C_{2013}^{1}+C_{2012}^{2}-C_{2011}^{3}+...+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}=B_{1007}=-A_{1009}=-A_{1}=-1;$

в) $C_{2015}^{0}-C_{2014}^{1}+C_{2013}^{2}-C_{2012}^{3}+...+C_{1009}^{1006}-C_{1008}^{1007}=A_{1008}=A_{3}=0.$

II спосіб. Домовимось вважати, що $C_m^k=0$ для $k>m$ і позначимо

$$A_n=C_n^0-C_{n-1}^1+C_{n-2}^2-C_{n-3}^3+...+(-1)^{n-1}C_1^{n-1}+(-1)^nC_0^n.$$

Маємо $A_1=C_1^0-C_0^1=1-0=1;$ $A_2=C_2^0-C_1^1+C_0^2=1-1+0=0.$ Для $n\geq 3,$ скориставшись формулою $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k,$ з врахуванням рівностей $C_n^0=C_{n-1}^0$ та $C_0^n=0$ отримаємо

$$A_n=C_{n-1}^0-\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1\right)+\left(C_{n-3}^1+C_{n-3}^2\right)-\left(C_{n-4}^2+C_{n-4}^3\right)+...+(-1)^{n-1}\left(C_0^{n-2}+C_0^{n-1}\right)+(-1)^nC_0^n=$$

$$=\left(C_{n-1}^0-C_{n-2}^1+C_{n-3}^2-C_{n-4}^3+...+(-1)^{n-1}C_0^{n-1}\right)-\left(C_{n-2}^0-C_{n-3}^1+C_{n-4}^2-...+(-1)^{n-2}C_0^{n-2}\right)=A_{n-1}-A_{n-2}.$$

Послідовно знаходимо

$$A_3=A_2-A_1=-1,\ A_4=A_3-A_2=-1,\ A_5=A_4-A_3=0,$$
$$A_6=A_5-A_4=1,\ A_7=A_6-A_5=1=A_1,\ A_8=A_7-A_6=0=A_2.$$

Звідси впливає, що послідовність $A_n,\ n\in\mathbb{N},$ періодична з періодом 6. Тому

а) $C_{2013}^{0}-C_{2012}^{1}+C_{2011}^{2}-C_{2010}^{3}+...-C_{1008}^{1005}+C_{1007}^{1006}=A_{2013}=A_{3}=-1;$

б) $C_{2014}^{0}-C_{2013}^{1}+C_{2012}^{2}-C_{2011}^{3}+...+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}=A_{2014}=A_{4}=-1;$

в) $C_{2015}^{0}-C_{2014}^{1}+C_{2013}^{2}-C_{2012}^{3}+...+C_{1009}^{1006}-C_{1008}^{1007}=A_{2015}=A_{5}=0.$

6. ***Суми коренів.*** *Задані два натуральні числа* k та $m.$ *Нехай* $a_1,\ a_2,\ ...\ ,a_k$ *та* $b_1,\ b_2,\ ...\ ,b_m$ *– такі додатні дійсні числа, що*

$$\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+...+\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+...+\sqrt[n]{b_m}$$

для всіх натуральних $n\geq 2.$

6.1. *Довести, що* $k=m.$

6.2. *Довести, що* $a_1a_2...a_k=b_1b_2...b_m.$

6.3. *Якщо кожен із двох заданих наборів чисел впорядкувати за зростанням, то після цього ці набори стануть однаковими. Довести.*

Розв'язання.

6.1. Зауважимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ для всіх $a>0.$ Тому, перейшовши у заданій рівності до границі при $n\to\infty,$ отримаємо $k=m.$

6.2. Позначимо $u_i=\sqrt[m!]{a_i},\ v_i=\sqrt[m!]{b_i},\ i=\overline{1,m}.$ Вибираючи $n_s=\dfrac{m!}{s},\ s=\overline{1,m},$ з умов задачі отримуємо систему рівностей $\sigma_s(u)=\sigma_s(v),\ s=\overline{1,m},$ де

$$\sigma_s(u)=\sum_{i=1}^m u_i^s,\ \sigma_s(v)=\sum_{i=1}^m v_i^s,\ s=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$p_s(u)\ =\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_s\leq m}u_{i_1}u_{i_2}...u_{i_s},\quad p_s(v)\ =\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_s\leq m}v_{i_1}v_{i_2}...v_{i_s},\ s=\overline{1,m}.$$

Зауважимо, що для симетричних многочленів σ_s та p_s для кожного $s\in\mathbb{N}$ існує функція F_s така, що $p_s=F_s(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_s).$ Наприклад, $p_1=\sigma_1,$ $p_2=0,5\left(\sigma_1^2-\sigma_2\right),... .$ Тому з рівностей $\sigma_s(u)=\sigma_s(v),\ s=\overline{1,m},$ отримуємо $p_s(u)=p_s(v),\ s=\overline{1,m}.$ Зокрема, для $s=m$ будемо мати $u_1u_2...u_m=v_1v_2...v_m,$ а отже, й $a_1a_2...a_k=b_1b_2...b_m.$

6.3. Розглянемо рівняння

$$t^m - p_1(u)t^{m-1} + p_2(u)t^{m-2} - ... + (-1)^{m-1} p_{m-1}(u)t + (-1)^m p_m(u) = 0.$$

Внаслідок теореми, оберненої до теореми Вієта, набір його коренів співпаде з набором чисел $u_i,\ i=\overline{1,m}.$ Враховуючи, що $p_s(u)=p_s(v),\ s=\overline{1,m},$ він співпаде також з набором чисел $v_i,\ i=\overline{1,m}.$ Тому у випадку впорядкування таких двох наборів чисел за зростанням, у них відповідні елементи з однаковими номерами співпадатимуть. Отже, співпадатимуть також впорядковані за зростанням набори $a_i,\ i=\overline{1,m},$ та $b_i,\ i=\overline{1,m}.$

8. ***Рівні кути.*** *У трикутнику ABC на промені BA відмітили точку K так, що $\angle BCA = \angle KCA,$ а на медіані BM відмітили точку T так, що $\angle CTK = 90^\circ.$ Довести, що $\angle MTC = \angle MCB.$*

Розв'язання. Оскільки у трикутниках MTC та MCB кути при вершині M рівні, то достатньо довести подібність цих трикутників, обґрунтувавши рівність $\dfrac{MT}{MC} = \dfrac{MC}{MB}$ або ж $MT \cdot MB = MC^2.$

Розглянемо систему координат з центром у точці $M(0,0),$ трикутник ABC з вершинами $A(-c,0),$ $B(b,d),$ $C(c,0)$ та точку $D(b,-d),$ $c>0,\ d>0,\ b<0.$ (При $b \ge 0$ потрібної точки K на промені BA не існує.)

Оскільки $\angle BCA = \angle KCA,$ то точка K лежить на перетині променів

$$BA:\quad \frac{x+c}{b+c} = \frac{y}{d} \qquad \text{та} \qquad CD:\quad \frac{x-c}{b-c} = \frac{y}{-d}.$$

Із системи цих двох рівнянь знаходимо $K\left(\dfrac{c^2}{b}, \dfrac{cd}{b}\right).$

Нехай $T(x_0, y_0).$ Внаслідок перпендикулярності прямих KT та TC для добутку їх кутових коефіцієнтів виконується рівність

$$\frac{y_0 - \dfrac{cd}{b}}{x_0 - \dfrac{c^2}{b}} \cdot \frac{y_0}{x_0 - c} = -1.$$

Оскільки $\dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{d}{b},$ то з попередньої рівності отримуємо $x_0 = \dfrac{bc^2}{b^2+d^2},$ $y_0 = \dfrac{dc^2}{b^2+d^2}.$

Отже, $MT \cdot MB = \sqrt{b^2+d^2} \cdot \sqrt{x_0^2+y_0^2} = c^2 = MC^2,$ що й слід було довести.

9. ***Будуємо точку.*** *Побудувати у трикутнику ABC таку точку $Q,$ що принаймні два з відрізків AQ, BQ, CQ діляться вписаним колом навпіл. Для яких трикутників це можливо?*

Розв'язання. Нехай для конкретності у трикутнику ABC сторона AC є найменшою. Побудуємо трикутники AKL та $MNC,$ гомотетичні з трикутником ABC з коефіцієнтом гомотетії 2 та центрами гомотетії у точках A та C відповідно. Відстань між центрами вписаних у них кіл дорівнює $AC,$ а їх радіуси R задовольняють умову

$$R \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2}\right) = 2AC.$$

Якщо $R \ge \dfrac{AC}{2},$ то ці кола матимуть принаймні одну спільну точку, яка знаходиться всередині трикутника ABC і є однією із шуканих точок $Q.$ Необхідною і достатньою умовою існування такої точки є виконання нерівності $\operatorname{ctg}\dfrac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\angle C}{2} \le 4$ для двох більших кутів трикутника.

Зауважимо, що у довільному трикутнику вказаних точок може бути щонайбільше 6.

10. *Зображення чисел Ферма.* *Числа* $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \ge 0,$ *називаються числами Ферма. При* $n \ge 3$ *подайте кожне з них у вигляді суми квадратів трьох різних натуральних чисел.*

Розв'язання. Представлення випливає з рівності:

$$2^{2^n} + 1 = \left(\frac{2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 2^{2^{n-1}} - 2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2^{2^{n-1}} + 2}{3} \right)^2 .$$

Позначивши $a_n = 2^{2^{n-1}}$, цю рівність легко подати у вигляді очевидної тотожності:

$$F_n = a_n^2 + 1 \equiv \left(\frac{2a_n + 1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2a_n - 2}{3} \right)^2 + \left(\frac{a_n + 2}{3} \right)^2 .$$

Зауваживши, крім того, що $a_3 = 16 \equiv 1 \pmod 3$ та $a_{n+1} = a_n^2,$ переконуємося, що $a_n \equiv 1 \pmod 3$ при кожному $n \ge 3.$ Звідси випливає, що всі записані у попередній формулі дроби при $n \ge 3$ є натуральними числами, причому всі ці числа різні.

Зауважимо, що, відмовившись від вимоги, що всі доданки мають бути квадратами різних натуральних чисел, легко отримати ще й таке представлення чисел Ферма у вигляді суми квадратів трьох натуральних чисел

$$F_n = \left(F_{n-1} - 2\right)^2 + \left(F_{n-2} - 1\right)^2 + \left(F_{n-2} - 1\right)^2,\ n \ge 2.$$

Справедливою є й наступна тотожність

$$F_n = a_n^2 + 1 \equiv \left(\frac{4a_n + 1}{5} \right)^2 + \left(\frac{2a_n - 2}{5} \right)^2 + \left(\frac{2a_n - 2}{5} \right)^2 + \left(\frac{a_n + 4}{5} \right)^2,\ n \ge 3.$$

Оскільки $a_3 = 16 \equiv 1 \pmod 5$ та $a_{n+1} = a_n^2,$ то $a_n \equiv 1 \pmod 5$ при кожному $n \ge 3.$ Отже, всі виписані тут дроби є натуральними числами. Щоправда, два з них співпадають.

11. *Викладаємо квадрати.* *У Миколки є набір із 2014 фігурок: 1007 кутиків та 1007 зигзагів (див. рис. 1). Яку найбільшу кількість квадратів, кожен з яких складається з непарної кількості клітинок, зможе викласти Миколка, якщо кутики та зигзаги дозволяється довільним чином повертати чи перевертати?Вже викладені квадрати він не розбирає. Жодні два з викладених квадратів не мають спільних клітинок і не дотикаються.*

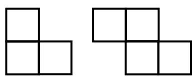

Рис. 1

Розв'язання. На рис. 2 показано, як викласти квадрат із 49 клітинок, використовуючи 15 кутиків та 1 зигзаг. Оскільки $67 \cdot 15 = 1005 < 1007 < 68 \cdot 15 = 1020,$ то цим способом можна викласти щонайбільше 67 таких квадратів.

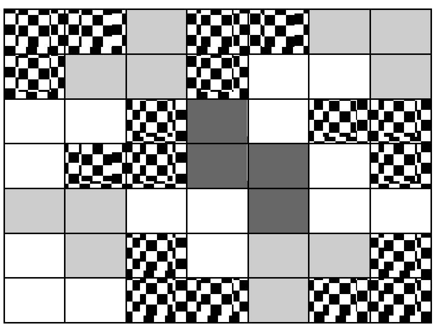

Рис. 2

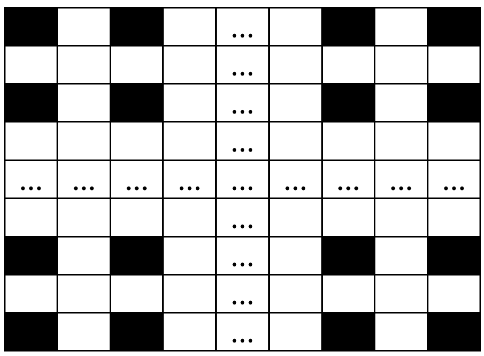

Рис. 3

Доведемо, що більшої кількості квадратів з непарною кількістю клітинок викласти не вдасться. Розглянемо квадрат розмірами $(2n-1) \times (2n-1),\ n \in \mathbb{N},$ і припустимо, що для його викладання використали x кутиків та y зигзагів. Тоді $3x+4y=(2n-1)^2$. Виділимо у ньому n^2 клітинок (див. рис. 3). Кожна фігурка набору покриває не більше однієї виділеної клітинки, тому $x+y\ge n^2$ чи $3x+3y\ge 3n^2$. З врахуванням попередньої рівності звідси отримуємо

$$y\le(2n-1)^2-3n^2=n^2-4n+1,\ \ x\ge 4n-1.$$

Оскільки $y<0$ при $n<4$, то $n\ge 4$. Отже, менше 15 кутиків для викладання жодного квадрата з непарною кількістю клітинок використати не вдасться. Таким чином, Миколка зможе викласти максимум 67 квадратів, використавши при цьому 1005 кутиків та 67 зигзагів.

Зауважимо, що всі вони повинні складатися з 49 клітинок, бо, навіть за наявності серед них хоч одного квадрата з більшою кількістю клітинок, загальна кількість кутиків збільшиться принаймні на 4 і перевершить 1007. Відзначимо також, що за наявності m кутиків та m зигзагів вдасться викласти щонайбільше $\left[\dfrac{m}{15}\right]$ квадратів з непарною кількістю клітинок у кожному.

Крім того, розв'яжемо аналогічну задачу, вважаючи, що *розміри всіх викладених квадратів мають бути попарно різними.*

Оскільки запропонованими 2014-ма фігурками можна викласти площу із 7049 клітинок, а $7^2+9^2+...+35^2=7735>7049$, то утворити більше 14 квадратів попарно різних розмірів не вдасться. Доведемо, що 14 таких квадратів розмірами $7\times7,\ 9\times9,\ ...\ ,\ 33\times33$ викласти можна.

Зауважимо, що для викладання прямокутника розмірами $2\times k$, де k – непарне число, $k\ge 3$, достатньо використати два кутики (по одному на кожному з країв) та $\dfrac{k-3}{2}$ зигзагів між ними. Таким чином, маючи викладений квадрат розмірами $(2n-1)\times(2n-1),\ n\ge 4$, і приклавши до нього з двох боків викладені перпендикулярні смуги $(2n-1)\times 2$ та $2\times(2n+1)$, отримуємо викладений квадрат розмірами $(2n+1)\times(2n+1)$.

Поступаючи у такий спосіб, для викладання вказаних 14 квадратів нам знадобилось би $15+19+23+27+31+35+39+43+47+51+55+59+63+67=574$ кутики та $1+6+13+22+33+46+61+78+97+118+141+166+193+222=1197$ зигзагів.

Оскільки зигзагів у наявності на 190 менше, то три останні квадрати розмірами $29\times29,\ 31\times31,\ 33\times33$ перекладемо по-іншому. Виділимо у кожному з них повністю викладений кутиками та зигзагами квадрат розміром 27×27. Такий існує, враховуючи описаний вище спосіб побудови квадратів. Розіб'ємо його на 9 менших квадратиків розмірами 9×9 і окремо викладемо кожен з них кутиками та зигзагами. У результаті загальна кількість використаних кутиків збільшиться на $3\cdot(9\cdot19-55)=348$ і становитиме $574+348=922$, а загальна кількість використаних зигзагів зменшиться на $3\cdot(141-9\cdot6)=261$ і становитиме $1197-261=936$. Отже, кутиків і зигзагів для викладання таких 14 квадратів вистачить.

12. ***Різниця обернених квадратів.*** *Задане додатне число* a *є різницею обернених квадратів, тобто* $a=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{m^2}$, *де* n, m *– деякі натуральні числа. Чи може так трапитися, що* $2a$ *також є різницею обернених квадратів?*

Розв'язання. Може. Наприклад, $a=\frac{8}{225}=\frac{1}{5^2}-\frac{1}{15^2}$, $2a=\frac{16}{225}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}$. Зрозуміло, що помноживши кожен із записаних тут знаменників на квадрат довільного натурального числа, більшого за 1, отримаємо нескінченну кількість чисел a із вказаною властивістю.

Доведемо, що нескінченною є й множина розв'язків рівняння

$$2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{l^2},$$

де $n, m, k, l -$ натуральні числа, для яких $n<m$ і $НСД(n, m, k, l)=1.$

Покладаючи тут $l=n, m=kn,$ приходимо, до співвідношення $3k^2-n^2=2,$ яке задовольняє пара $k_1=3, n_1=5$ з наведеного вище прикладу. Далі, з рівності $3k_i^2-n_i^2=2$ отримуємо $3(2k_i+n_i)^2-(3k_i+2n_i)^2=3k_i^2-n_i^2=2,$ тобто пара чисел $k_{i+1}=2k_i+n_i>k_i$ та $n_{i+1}=3k_i+2n_i>n_i$ також є розв'язком. При цьому $НСД(n_i,k_i)=1$ для всіх натуральних $i\ge 1,$ бо він є дільником числа 2, але не дорівнює 2.

Таким чином, ми отримали нескінченну кількість додатних чисел $a_i=\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{(k_in_i)^2}$, $i\in\mathbb{N},$ для яких $2a_i=\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{n_i^2}$ і $НСД(n_i, k_i)=1.$ Зокрема, число $a_1=\frac{8}{225}=\frac{1}{5^2}-\frac{1}{15^2}$ співпадає із вказаним вище числом $a,$ $a_2=\frac{120}{43681}=\frac{1}{19^2}-\frac{1}{209^2}.$

14. ***Умовний мінімум.*** *Знайти найменше можливе значення суми* $x+y+z,$ *де* $x, y, z -$ *невід'ємні числа, що задовольняють умову* $(x-y)(y-z)(z-x)\ge 1.$

Розв'язання. Зауважимо, що одночасно всі три множники у заданій нерівності додатними бути не можуть. Тому додатним є лише один з них, а два інші – від'ємні. Враховуючи циклічність умов задачі, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $x-y<0,$ $y-z<0,$ $z-x>0.$ Покладаючи $y-x=a>0,$ $z-y=b>0,$ отримаємо $z-x=a+b,$ причому $ab(a+b)=c\ge 1.$ Звідси знаходимо $a=\frac{1}{2}\left(-b+\sqrt{b^2+\frac{4c}{b}}\right).$ Отже,

$$x+y+z=3x+2a+b\ge 2a+b=\sqrt{b^2+\frac{4c}{b}}\ge\sqrt{b^2+\frac{2}{b}+\frac{2}{b}}\ge\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{108}.$$

Рівність досягається для $x=0,$ $b=\sqrt[3]{2},$ $y=a=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{108}\right),$ $z=a+b=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{108}\right).$

Тому найменшим значенням суми $x+y+z$ при заданому обмеженні є $\sqrt[6]{108}.$

16. ***Суперпозиція многочленів.*** *Дано функції* $f(x)=x^2+1$ *та* $g(x)=x^3-1.$

16.1. *Чи можна функцію* $h(x)=\left(x^2+2\right)^{6^{2014}}$ *подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій* f *та* g *? (Тобто чи існує розклад* $h(x)=h_1(h_2(...h_n(x)...))$*, де кожна* h_k *– це* f *або* g *?)*

16.2. *Довести, що при всіх натуральних* k *многочлен* $h(x)=\left(x^4-6x^2+1\right)^k$ *не можна подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій* f *та* g *.*

16.3 *Описати якомога ширші класи многочленів, які можна подати, та класи многочленів, які не можна подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій* f *та* g *.*

Розв'язання.

16.1. Не можна. Зауважимо, що при застосуванні кожної з функцій f або g до многочлена з цілими коефіцієнтами знову отримуємо многочлен з цілими коефіцієнтами, але при цьому парність вільного члена змінюється на протилежну. Тому для отримання многочлена $h(x) = \left(x^2+2\right)^{6^{2014}}$ необхідно у сукупності використати парну кількість цих функцій. Нехай для конкретності використано p функцій f та s функцій g. Степінь такого многочлена дорівнюватиме $2^p \cdot 3^s = 2 \cdot 6^{2014} = 2^{2015} \cdot 3^{2014}$. Отже, $p = 2015$, $s = 2014$, що суперечить парності суми $p+s$.

16.2. Обчислимо $f(0)=1$, $g(0)=-1$, $f(1)=2$, $g(1)=0$, $f(-1)=2$, $g(-1)=-2$. Далі зауважимо, що $f(x)\ge 2$, $g(x)\ge 2$ для $x \ge 2$ та $f(x)\ge 2$, $g(x)\le -2$ для $x\le -1$. Тому значення $h(0)=\left(0^4-6\cdot 0^2+1\right)^k=1$ отримаємо лише у разі $h(x)=f(g(f(...(g(f(x)...)))))$, де функції f та g чергуються. Послідовно записуючи $f(x)=x^2+1$, $g(f(x))=\left(x^2+1\right)^3-1=x^6+3x^4+3x^2, \ldots$, зауважимо, що кожного разу всі коефіцієнти отримуваних многочленів будуть невід'ємними. Але у многочлені $h(x)=\left(x^4-6x^2+1\right)^k$ після піднесення до степеня коефіцієнт біля x^2 дорівнює $-6k<0$. Тому при всіх натуральних k многочлен $h(x)=\left(x^4-6x^2+1\right)^k$ не можна подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій f та g.

21. *Опуклі многогранники*.

21.1. *Доведіть, що коли жодна грань опуклого многогранника не є трикутником, то існує не менше восьми його вершин, з яких виходить рівно по три ребра.* (*У куба таких вершин рівно вісім*).

21.2. *Доведіть, що коли з кожної вершини опуклого многогранника виходить не менше чотирьох ребер, то існує не менше восьми його граней, кожна з яких – трикутник.* (*У октаедра таких граней рівно вісім*).

Розв'язання. Якщо в опуклому многограннику m вершин, n граней та k ребер, то згідно формули Ейлера $m+n=k+2$. Нехай з вершин A_i, $i=\overline{1,m}$, виходить α_i ребер, а грані G_j, $j=\overline{1,n}$, мають β_j сторін відповідно. Враховуючи, що кожне ребро з'єднує рівно дві вершини та є спільним рівно двох граней, отримуємо $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_j=2k$.

21.2. Оскільки за умовою всі $\beta_j\ge 4$, то $2k=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\ge 4n \Rightarrow n\le \frac{k}{2}$. Тоді

$$k+2=m+n\le m+\frac{k}{2}\Rightarrow 2k+8\le 4m.$$

Припустивши, що по 3 ребра виходять із s вершин, отримаємо

$$2k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\ge 3s+4\left(m-s\right)\Rightarrow 2k+s\ge 4m.$$

Отже, $2k+8\le 2k+s$, тобто $s\ge 8$, що й треба було довести.

21.2. За умовою всі $\alpha_i\ge 4$, тому $2k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\ge 4m\Rightarrow m\le\frac{k}{2}$. Тоді

$$k+2=m+n\le n+\frac{k}{2}\Rightarrow 2k+8\le 4n.$$

Припустивши, що трикутниками є s граней, отримаємо

$$2k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \geq 3s + 4(n - s) \Rightarrow 2k + s \geq 4n.$$

Отже, $2k + 8 \leq 2k + s,$ тобто $s \geq 8,$ що й треба було довести.