Вибрані задачі XVI Всеукраїнського турніру юних математиків

О.Г. Кукуш, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, І.В. Федак, В.А. Ясінський

З 28 жовтня по 2 листопада 2013 р. у м. Сімферополі пройшов XVI турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. Про перебіг фіналу турніру розповідалося у попередньому номері нашого журналу. У заочному турі турніру було запропоновано 21 задачу. Ми наводимо розв'язання частини цих задач, зберігаючи початкову нумерацію.

Після чвертьфінальних боїв серед команд-учасниць було проведено рейтингове опитування з метою виявити 10 задач, які будуть грати у півфіналах. Найвищий рейтинг отримали задачі 9 «Коло шести точок» і 16 «Тригонометрія та многочлени».

1. «Спрощення виразу». Нехай дано многочлен $Q(x)$ n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і набір дійсних чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1}$. Спростіть вираз

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i Q\left(x + \lambda_i\right),$$

де $a_i = \prod\limits_{j \neq i} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)^{-1},\ 1 \le i \le n+1$ (добуток береться за усіма $1 \le j \le n+1$, $j \neq i$).

Розв'язання. Якщо $P(t)$ — многочлен степеня не вище n, то

$$P(t) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \left(P(\lambda_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right),\ t \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Справді, права частина $(*)$ є многочленом степеня не вище n та дорівнює $P(\lambda_i)$ при $t = \lambda_i$, $1 \le i \le n+1$, а многочлени степеня не вище n, значення яких збігаються у $n+1$ точках, є тотожно рівними. (Вираз у правій частині $(*)$ називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

Нехай $Q(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n$, $q_0 \neq 0$. Запишемо рівність $(*)$ для многочлена n-го степеня від t з параметром x

$$P_x(t) = Q(x+t) = q_0 t^n + p_1(x) t^{n-1} + \ldots + p_0(x).$$

Маємо

$$P_x(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(P_x(\lambda_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(a_i Q(x + \lambda_i) \cdot \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j) \right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^n справа і зліва, дістаємо, що $\varphi(x) = q_0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $\varphi(x)$ тотожно дорівнює старшому коефіцієнту многочлена $Q(x)$.

2. «Нерівність з параметром». Знайдіть усі такі значення параметра a, при яких нерівність

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{a}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$$

має місце для всіх $x>0$ та $y>0$.

Розв'язання. Після рівносильних перетворень дістаємо нерівність

$$\frac{x+y}{xy}(x+y-\sqrt{x^2+y^2})>a, \quad \text{або} \quad \frac{(1+t)(1+t-\sqrt{1+t^2})}{t}>a,$$

де $t=\frac{y}{x}>0$. Домножимо чисельник та знаменник лівої частини на $1+t+\sqrt{1+t^2}$. Враховуючи, що $(1+t-\sqrt{1+t^2})(1+t+\sqrt{1+t^2})=(1+t)^2-(1+t^2)=2t$, дістанемо

$$f(t)=\frac{2(1+t)}{1+t+\sqrt{1+t^2}}>a,\ t>0.$$

Оскільки $\sqrt{1+t^2}<\sqrt{1+2t+t^2}=1+t$, то $f(t)>1$ при всіх $t>0$. Отже, всі $a\le 1$ задовольняють умову задачі. З іншого боку, функція $f(t)$ є неперервною на $[0,+\infty)$ та $f(0)=1$, тому якщо $a>1$, то при достатньо маленьких додатних значеннях t маємо $f(t)<a$.

Відповідь: $a\le 1$.

4. «Пірати, скарб та математика». Нехай N і k — задані натуральні числа. N піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили поділити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходитимуть до скрині за скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще k-ту частину від решти монет. Коли у такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з'ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну.

4.1. Для $N=2027$ та $k=2013$ знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, при якій описаний поділ є можливим.

4.2. Дослідіть величину $S(N,k)$ — найменшу кількість монет у скарбі, при якій описаний поділ є можливим.

Розв'язання. Якщо $k=1$, то вже після підходу першого пірата монет у скарбі не залишиться. Тому надалі вважаємо, що $k>1$. Крім того, при $N=1$ умову задачі задовольняє мінімальна кількість монет у скарбі, яка дорівнює $k+1$. Надалі вважатимемо, що $N>1$.

Нехай m — деяка кількість монет у скарбі, при якій описаний поділ є можливим. Позначимо через x_i, $1\le i\le N$, кількість монет, які залишаються у скарбі після того, як свою долю взяв i-тий пірат. Враховуючи умову задачі, послідовно знаходимо

$$x_1=m-1-\tfrac{m-1}{k}=(m-1)\tfrac{k-1}{k},$$
$$x_2=(x_1-1)\tfrac{k-1}{k}=(m-1)\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^2-\tfrac{k-1}{k},$$
$$x_3=(x_2-1)\tfrac{k-1}{k}=(m-1)\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^3-\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^2-\tfrac{k-1}{k},$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$x_N = (x_{N-1} - 1)\,\tfrac{k-1}{k} = (m-1)\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^N - \left(\tfrac{k-1}{k}\right)^{N-1} - \left(\tfrac{k-1}{k}\right)^{N-2} - \ldots - \tfrac{k-1}{k} =$$
$$= (m-1)\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^N + k\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^N - (k-1) = (m+k-1)\left(\tfrac{k-1}{k}\right)^N - (k-1)\,.$$

Оскільки $k-1$ та k — взаємно прості числа, то x_N, а разом з ним і всі попередні x_i, буде цілим, якщо $m+k-1 = l\cdot k^N$ при деякому натуральному l. При цьому отримаємо, що $x_N = l\,(k-1)^N - (k-1)$. Вибравши найменше $l \geq 1$, при якому x_N ділиться на N, знайдемо $S(N,k) = m = l\cdot k^N - k + 1$.

Проаналізуємо отримані результати:

а) При $k = 2$ найменшим є $l = N+1$, тоді $S(N,2) = (N+1)2^N - 1$.

б) Якщо $k-1$ ділиться на N, то $l = 1$ та $S(N,k) = k^N - k + 1$.

в) Якщо N — просте число, то при кожному $k > 2$ можна покласти $l = 1$, бо внаслідок малої теореми Ферма $(k-1)^N - (k-1)$ ділиться на N. У цьому випадку $S(N,k) = k^N - k + 1$. Зокрема ми можемо навести відповідь до задачі 4.1: оскільки $N = 2027$ — просте число, то $S\,(2027, 2013) = 2013^{2027} - 2012$.

г) Нехай $k > 2$ і НСД$(k-1, N) = 1$. Тоді за теоремою Ойлера $(k-1)^{\varphi(N)} - 1$ ділиться на N, де $\varphi(N)$ — функція Ойлера, тобто кількість натуральних чисел, не більших за N та взаємно простих з N. Знайдемо найменше натуральне число s таке, що $q = s\varphi(N) - N + 1 \geq 0$. Тоді при $l = (k-1)^q$ дістанемо, що

$$x_N = l\,(k-1)^N - (k-1) = (k-1)\left((k-1)^{s\varphi(N)} - 1\right)$$

ділиться на N, а тому розподіл скарбу можливий та $S(N,k) \leq m = k^{s\varphi(N)+1} - k + 1$.

д) Нехай $k > 2$ та НСД$\,(k-1, N) = d > 1$. Покладемо $M = \frac{N}{d}$. Покажемо, що розподіл скарбу є неможливим за умови НСД$(k-1, M) > 1$. Справді, нехай p — простий дільник числа НСД$\,(k-1, M)$. Тоді p входить у розклад на множники числа $k-1$ з деяким степенем n та у розклад на множники числа N зі степенем більшим за n. Отже, $x_N = l(k-1)^N - (k-1)$ не ділиться на p^{n+1} при жодному натуральному l, а тому не ділиться на N.

При НСД$(k-1, M) = 1$ аналогічно до міркувань з пункту г) знайдемо найменше натуральне число s таке, що $q = s\varphi(M) - N + 1 \geq 0$, та покладемо $l = (k-1)^q$. Тоді $l(k-1)^{N-1} - 1 = (k-1)^{s\varphi(M)} - 1$ ділиться на M, а отже x_N ділиться на $Md = N$. Тому розподіл скарбу можна здійснити та $S(N,k) \leq m = k^{s\varphi(M)+1} - k + 1$.

5. «Многочлен».

5.1. Чи існує такий многочлен $P\,(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x + x^2\right) = x + x^2 + \ldots + x^{2013} + x^{2014}?$$

5.2. Чи існує такий многочлен $P\,(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх дійсних чисел a і b та для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x + x^2 + x^3\right) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2010} + ax^{2011} + bx^{2012} + x^{2013}?$$

Розв'язання.

5.1. При $x=1$ дістаємо $P(2)=2014$, а при $x=-2$ маємо

$$P(2)=(-2+4)+(-8+16)+\ldots+\left(-2^{2013}+2^{2014}\right)=2+8+\ldots+2^{2013}\neq 2014,$$

суперечність. Отже, такого многочлена $P(x)$ не існує.

5.2. Якщо значення двох многочленів співпадають у нескінченній кількості точок, то ці многочлени є рівними. Тому рівність з умови задачі має виконуватися і при всіх комплексних значеннях x. Зокрема при $x=-1$ та $x=i$ дістаємо $P(-1)=-a+b-1$ та $P(-1)=i-1-ai+b+i$ відповідно. Прирівнюючи дійсні та уявні частини отриманих значень, приходимо до системи рівнянь $-a+b-1=b-1$ та $2-a=0$, яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена $P(x)$ не існує.

6. «Геометричне місце точок». Дано коло ω, на якому позначено точки A, B, C. Нехай BF і CE — висоти трикутника ABC, M — середина сторони AC. Знайдіть геометричне місце точок перетину прямих BF і EM для всіх положень точки A на колі ω.

Розв'язання. Нехай O – центр кола ω, H – точка перетину висот трикутника ABC, T — точка перетину прямих BF і EM, G — точка перетину кіл, побудованих на BC та CO як на діаметрах (рис. 1). Тоді $\angle CGO=\angle CGB=90°$, а отже точки B,O,G лежать на одній прямій. Також маємо

$$\angle MGO=\angle MCO=90°-\angle MOC=90°-\angle EBC=\angle ECB=\angle EGB=\angle EGO,$$

тому точки M,G,E теж лежать на одній прямій.

Подальші міркування проведемо для розташування точок, зображеного на рис. 1. Нехай $\angle BAC=\alpha$, $45°<\alpha<90°$. Маємо $\angle EBT=90°-\alpha$, $\angle AEM=\alpha$, $\angle ETB=\angle AEM-\angle EBT=2\alpha-90°$, а тому за теоремою синусів

$$BT=-BE\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=-BH\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Отже, точка T є образом точки H при гомотетії з центром B та коефіцієнтом $-\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. Аналогічні обчислення для інших значень α показують, що останнє твердження має місце для всіх $0°<\alpha<180°$, $\alpha\neq 45°$, $\alpha\neq 135°$. При $\alpha=45°$ та $\alpha=135°$ прямі BF та EM паралельні або збігаються, тобто точку T не визначено.

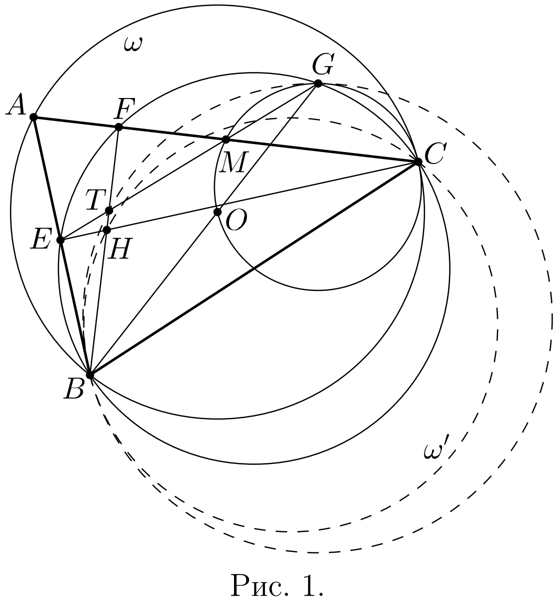

Рис. 1.

Нехай тепер хорда BC розбиває коло ω на дуги α та $180°-\alpha$, відмінні від $45°$ та $135°$. Оскільки $\angle BHC=\angle EHF=180°-\angle EAF=180°-\alpha$, то точка H завжди належить колу ω', симетричному до кола ω відносно прямої BC. Неважко встановити, що коли A пробігає коло ω, $A \neq B$, $A \neq C$, точка H пробігає коло ω' з двома виколотими точками. Відповідно точка T пробігає коло, яке є образом ω' при гомотетії з центром B та коефіцієнтом $-\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$, з двома виколотими точками.

7. «Сума степенів та зростання послідовності». Знайдіть усі такі трійки додатних дійсних чисел a, b, c, для яких послідовність $u_n = a^n + b^n + c^n,\ n \geq 1$, зростає.

Розв'язання. Умова $u_2 > u_1$ є необхідною для зростання послідовності $u_n,\ n \geq 1$. Доведемо, що ця умова є ще й достатньою. Справді, за нерівністю Коші-Буняковського при кожному $n \geq 2$ маємо

$$\begin{aligned} u_{n-1}u_{n+1} =&(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1})(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}) \geq \\ \geq&(a^{\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}} + b^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} + c^{\frac{n-1}{2}}c^{\frac{n+1}{2}})^2 = (a^n + b^n + c^n)^2 = u_n^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{u_2}{u_1} > 1,$$

а отже $u_{n+1} > u_n,\ n \geq 1$.

Таким чином, послідовність $u_n,\ n \geq 1$, зростає тоді й лише тоді, коли $u_2 > u_1$, тобто при $a^2 + b^2 + c^2 > a + b + c$. Цю умову можна переписати у вигляді

$$\left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 > \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

тому шукані трійки (a, b, c) це координати тих точок першого октанту, які лежать зовні сфери радіуса $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ з центром у точці $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8. «Функціональне рівняння». Знайдіть усі такі монотонні на відрізку $[1;2]$ функції $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, що для довільних дійсних $r \geq 0$ і $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ виконується рівність

$$f\left(r\cos\varphi\right) + f\left(r\sin\varphi\right) = f\left(r\right).$$

Розв'язання. При $r = 0$ маємо $f(0) + f(0) = f(0)$, тому $f(0) = 0$. При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ для всіх $r \geq 0$ дістаємо

$$f\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = f\left(r\right), \text{ а тому } f\left(r\right) = 2f\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right), f\left(\tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2f\left(\tfrac{r}{2}\right), f\left(r\right) = 4f\left(\tfrac{r}{2}\right).$$

Звідси випливає, що $f(r \cdot 2^k) = 2^{2k}f(r)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому функція f буде монотонною не лише на відрізку $[1;2]$, а й на всіх відрізках $[2^k; 2^{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$. При цьому f або зростає, або спадає на всіх відрізках, а отже функція f монотонна на $(0; +\infty)$.

Визначимо функцію $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ так, що $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$. Тоді $g(0) = 0$ та $f(x) = g(x^2)$. При цьому з монотонності функції f на $(0; +\infty)$ випливає, що функція g теж є монотонною на $(0; +\infty)$.

За умовою задачі $g\left(r^2\cos^2\varphi\right) + g\left(r^2\sin^2\varphi\right) = g\left(r^2\right)$ для довільних дійсних $r \geq 0$ та $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$. Отже, $g(u) + g\left(v\right) = g\left(u + v\right)$ для всіх $u, v > 0$ таких, що $1 \leq \frac{u}{v} \leq 3$.

Доведемо індукцією за $n \geq 1$, що

$$g(nx) = ng(x), \ x > 0. \qquad (*)$$

При $n = 1$ це очевидно. Припустимо, що $(*)$ має місце при всіх $n \leq k-1$, та доведемо $(*)$ для $n = k$. Справді, якщо $k = 2m$, то при $u = v = m$ маємо

$$g(kx) = g(mx) + g(mx) = mg(x) + mg(x) = kg(x).$$

Якщо ж $k = 2m+1$, то при $u = (m+1)x$ та $v = mx$ маємо $1 < \frac{u}{v} = \frac{m+1}{m} < 3$, а тому

$$g(kx) = g((m+1)x) + g(mx) = (m+1)g(x) + mg(x) = kg(x).$$

Отже, рівність $(*)$ виконується при всіх $n \geq 1$.

Нехай $g(1) = c$. При всіх $m, n \geq 1$ з $(*)$ дістаємо $ng\left(\frac{m}{n}\right) = g(m) = mg(1) = mc$, тобто $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}c$. Таким чином, $g(x) = cx$ для всіх додатних раціональних x.

Нехай тепер x — довільне додатне ірраціональне число. З монотонності функції g випливає, що при $c \geq 0$ для довільних раціональних чисел $0 < r' < x < r''$ маємо $cr' = g(r') \leq g(x) \leq g(r'') = cr''$, звідки $g(x) = cx$. Аналогічно розглядається випадок $c < 0$. Отже, ми встановили, що $g(x) = cx$ при всіх $x \geq 0$. Відповідно $f(x) = cx^2, \ x \geq 0$.

Перевірка показує, що такі функції задовольняють умову задачі при всіх $c \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $f(x) = cx^2, \ x \geq 0$, де $c \in \mathbb{R}$ довільне.

9. «Коло шести точок». Дано трикутник PQR, вписане коло ω якого дотикається сторін QR, RP та PQ в точках A, B та C відповідно, причому $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$. Доведіть, що точка перетину відрізків PA, QB і RC, центр кола ω, точка перетину медіан трикутника ABC, точка A та середини відрізків AC і AB лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, AA_1, BB_1, CC_1 — медіани трикутника ABC, M — точка перетину медіан, O — центр кола ω (рис. 2). Тоді $\angle AB_1O = \angle AC_1O = 90°$, оскільки B_1O, C_1O — серединні перпендикуляри до AC та AB. Отже, точки A, B_1, C_1 та O лежать на колі з діаметром AO.

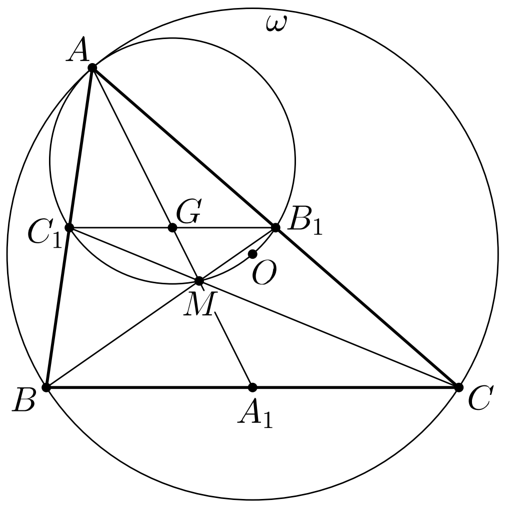

Рис. 2.

Нехай G — точка перетину медіани AA_1 з середньою лінією B_1C_1. За формулою довжини медіани внаслідок умови задачі дістаємо

$$AA_1^2 = \tfrac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \tfrac{3}{4}a^2, \text{ а отже}$$

$$AG \cdot MG = \tfrac{1}{2}AA_1 \cdot \tfrac{1}{6}AA_1 = \tfrac{a^2}{16} = \tfrac{a}{4} \cdot \tfrac{a}{4} = B_1G \cdot C_1G.$$

Тому точка M належить колу, описаному навколо трикутника AB_1C_1.

Залишилося показати, що відрізки PA, QB та RC мають спільну точку, яка належить цьому ж колу.

Опустимо з точки P перпендикуляри PD та PE на прямі AB та AC відповідно (рис. 3). Тоді $PB = PC$, $\angle PBD = C$ та $\angle PCE = B$, звідки $\frac{PD}{PE} = \frac{PB \sin C}{PC \sin B} = \frac{c}{b}$. Неважко перевірити (зробіть це самостійно), що промінь AP є геометричним місцем точок, які лежать всередині кута $\angle BAC$ та відстані від яких до сторін AB та AC відносяться як c до b. Нехай L — точка перетину AP та BQ, h_a, h_b, h_c — відстані від точки L до сторін BC, AC та AB відповідно. Тоді $h_c : h_b = c : b$ та аналогічно $h_a : h_c = a : c$. Звідси $h_b : h_a = b : a$, а тому L належить CR. Таким чином, ми встановили, що відрізки PA, QB та RC перетинаються у спільній точці L.

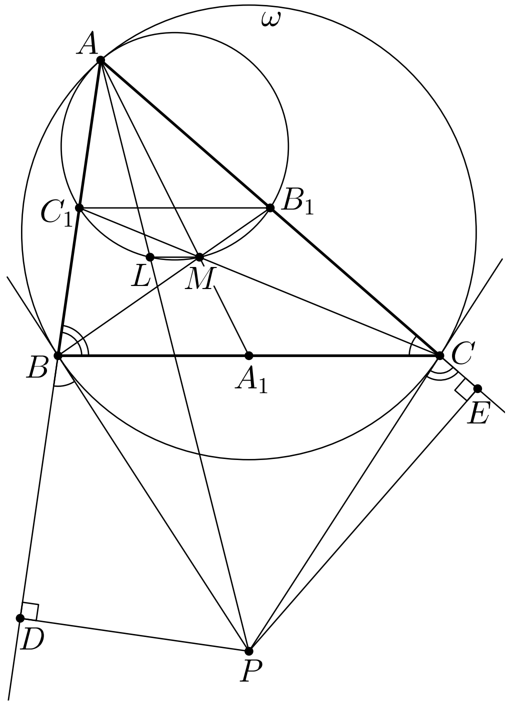

Рис. 3.

Далі, $S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$, тому відстані від точки A_1 до сторін AB та AC відносяться як b до c. Звідси випливає, що точка, симетрична до A_1 відносно бісектриси кута $\angle BAC$, потрапить на промінь AP. Тому $\angle BAL = \angle A_1AC$. Оскільки

$$S_{BCL} : S_{ACL} : S_{ABL} = ah_a : bh_b : ch_c = a^2 : b^2 : c^2,$$

то внаслідок умови $b^2+c^2 = 2a^2$ дістаємо, що $S_{BCL} = \frac{1}{3}S_{ABC} = S_{BCM}$, а отже $LM \parallel BC$.

Нарешті, нехай промінь AP перетинає описане коло трикутника AB_1C_1 в точці L_1. Тоді $\smile C_1L_1 = \smile MB$, звідки $L_1M \parallel C_1B_1 \parallel BC$, а отже точки L_1 та L збігаються, що завершує розв'язання.

11. «Прості числа та точні квадрати». Знайдіть усі такі прості числа p, для яких $37p^2 - 47p + 4$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Нехай $37p^2 - 47p + 4 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $p\,(37p - 47) = (n-2)\,(n+2)$. Отже, $n - 2$ або $n + 2$ ділиться на просте число p.

Якщо $n - 2 = kp$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $n + 2 = kp + 4$, $p\,(37p - 47) = kp\,(kp + 4)$, $(37 - k^2)\,p = 4k + 47$. Звідси $k \le 6$ та перебором знаходимо два розв'язки: $p = 3$ при $k = 4$ та $p = 71$ при $k = 6$.

Якщо ж $n + 2 = lp$, $l \in \mathbb{N}$, то $n - 2 = lp - 4$, $(37 - l^2)\,p = 47 - 4l$. Перебором значень $l \le 6$ знаходимо ще один розв'язок $p = 23$ при $l = 6$, а при $l > 6$ інших розв'язків немає, бо $(l^2 - 37)\,p > 6l - 37 > 4l - 47$.

Відповідь: $p = 3$, $p = 23$ та $p = 71$.

13. «Рекурентне співвідношення та подільність». Розглянемо послідовність

$$\{a_n, n \ge 1\} : \; a_1 = 0, \; a_2 = \alpha, \; a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}, \; n \ge 3.$$

Чи існують такі натуральні числа α, λ, μ, що для кожного простого числа $p > 2$ число a_{p^2} ділиться на p?

Розв'язання. Нехай $\alpha = 6$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$. Індукцією за $n \geq 1$ доведемо, що

$$a_n = 2^n + 2(-1)^n, \ n \geq 1.$$

Справді, при $n = 1$ та $n = 2$ ця рівність є очевидною, а якщо вона правильна при $n = m$ та $n = m + 1$, то при $n = m + 2$ маємо

$$a_{m+2} = a_{m+1} + 2a_m = 2^{m+1} + 2(-1)^{m+1} + 2(2^m + 2(-1)^m) = 2^{m+2} + 2(-1)^{m+2}.$$

Нехай тепер $n = p^2$, де p — непарне просте число. За малою теоремою Ферма $2^{p-1} - 1$ ділиться на p, тому

$$a_{p^2} = 2^{p^2} - 2 = 2(2^{p^2-1} - 1) = 2(2^{p-1} - 1)(2^{p(p-1)} + \ldots + 2^{2(p-1)} + 2^{p-1} + 1)$$

ділиться на p.

Відповідь: існують.

16. «Тригонометрія та многочлени». Знайдіть усі $k \in \mathbb{Z}$, для кожного з яких існує такий многочлен від трьох змінних $P(u, v, w)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\cos(20x + 13y) = P(\cos x, \cos y, \cos(x + ky)).$$

Розв'язання. 1) Доведемо, що $\cos(ax+by)$, де a, b — ненульові цілі числа, неможливо подати як многочлен з дійсними коефіцієнтами від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x + ky)$, якщо b не ділиться на k.

Справді, якщо $k = 0$, то при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ маємо

$$\cos(ax - by) = P(\cos x, \cos(-y), \cos x) = P(\cos x, \cos y, \cos x) = \cos(ax + by),$$

зокрема при $x = \frac{\pi}{2a}$, $y = \frac{\pi}{2b}$ дістаємо $1 = -1$, суперечність.

Надалі вважаємо, що $k \neq 0$. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y = \pm\frac{\pi}{k}$ маємо

$$\cos\big(ax - \tfrac{\pi b}{k}\big) = P(\cos x, \cos(-y), \cos(x - \pi)) = P(\cos x, \cos y, \cos(x + \pi)) = \cos\big(ax + \tfrac{\pi b}{k}\big).$$

При $x = \frac{\pi b}{ak}$ з останньої рівності дістаємо $1 = \cos(\frac{2\pi b}{k})$, а отже $\frac{b}{k}$ має бути цілим.

2) Доведемо, що при всіх цілих a та b, для яких b ділиться на k, функцію $\cos(ax+by)$ можна подати як многочлен з дійсними коефіцієнтами від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x + ky)$.

Спочатку покажемо, що при кожному $a \in \mathbb{Z}$ існує такий многочлен $T_a(t)$, що $\cos ax = T_a(\cos x)$. Справді, $T_0(t) = 1$ та $T_1(t) = t$, а якщо існують многочлени $T_n(t)$ та $T_{n+1}(t)$, то завдяки рівності

$$\cos(n + 2)x = 2\cos x \cos(n + 1)x - \cos nx$$

можна покласти $T_{n+2}(t) = 2tT_{n+1}(t) - T_n(t)$, $n \geq 0$. Отже, многочлени $T_a(t)$ існують при всіх цілих $a \geq 0$ та залишилося при $a < 0$ покласти $T_a(t) = T_{-a}(t)$.

Тепер покажемо, що при кожному $a \in \mathbb{Z}$ можна подати $\cos(ax + ky)$ як многочлен від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x + ky)$. Справді, при $a = 0$ та $a = 1$ маємо $\cos ky = T_k(\cos y)$ та $\cos(x + ky) = \cos(x + ky)$, а рівність

$$\cos(nx + ky) = 2\cos x \cos\big((n \pm 1)x + ky\big) - \cos\big((n \pm 2)x + ky\big)$$

дозволяє зробити індукційний перехід від $a = n - 2$, $a = n - 1$ до $a = n$ при $n \geq 2$ та від $a = n + 1$, $a = n + 2$ до $a = n$ при $n \leq -1$.

Нарешті, зафіксуємо довільне $a \in \mathbb{Z}$ та покажемо, що $\cos(ax + cky)$ можна подати як многочлен від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x + ky)$ при всіх $c \in \mathbb{Z}$. При $c = 0$ та $c = 1$ це вже доведено, а рівність

$$\cos(ax + nky) = 2T_k(\cos y)\cos\big(ax + (n \pm 1)ky\big) - \cos\big(ax + (n \pm 2)ky\big)$$

дозволяє зробити індукційний перехід від $c = n - 2$, $c = n - 1$ до $c = n$ при $n \geq 2$ та від $c = n + 1$, $c = n + 2$ до $c = n$ при $n \leq -1$.

Отже, ми встановили, що $\cos(ax+by)$, де a, b — ненульові цілі числа, можна подати як многочлен від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x + ky)$ тоді й лише тоді, коли b ділиться на k.

Зокрема у вихідній задачі $\cos(20x+13y)$ є многочленом від $\cos x$, $\cos y$ та $\cos(x+ky)$ за умови, що 13 ділиться на k, тобто при $k = \pm 1$, ± 13.

Відповідь: $k = \pm 1$, ± 13.

17. «Ортоцентричний тетраедр». Через точку перетину медіан кожної з граней тетраедра перпендикулярно до цієї грані проведено пряму. Доведіть, що всі ці чотири прямі перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли перетинаються в одній точці чотири прямі, що містять висоти цього тетраедра.

Розв'язання. Розглянемо довільний тетраедр $A_1A_2A_3A_4$. Нехай G_1, G_2, G_3, G_4 — точки перетину медіан його граней $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ відповідно. Відомо, що відрізки A_1G_1, A_2G_2, A_3G_3 та A_4G_4 (їх називають медіанами тетраедра) перетинаються в одній точці G, яка ділить кожну медіану тетраедра у відношенні $3 : 1$, рахуючи від вершини. Тому тетраедр $G_1G_2G_3G_4$ є гомотетичним тетраедру $A_1A_2A_3A_4$ з центром гомотетії у точці G і коефіцієнтом $k = -\frac{1}{3}$. Вказані перпендикуляри до граней тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ містять висоти тетраедра $G_1G_2G_3G_4$. Залишається зауважити, що висоти тетраедра $G_1G_2G_3G_4$ перетинаються в одній точці тоді й лише тоді, коли висоти тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ перетинаються в одній точці.

21. «Найбільше значення». Нехай $n \geq 2$. Знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

для додатних a_1, a_2, $\ldots$, a_n, які задовольняють умову $a_1a_2\ldots a_n = 1$.

Розв'язання. Доведемо, що

$$\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,. \qquad (*)$$

Оскільки при $a_1 = \ldots = a_n = 1$ досягається рівність, то звідси випливатиме, що шукане найбільше значення дорівнює $\sqrt{2}$.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2} + \frac{\ln x}{\sqrt{2}}$ та покажемо, що $f(x) \leq 0$ при всіх $x > 0$. Маємо

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{2x^2 - 2\sqrt{2}x\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{2x\sqrt{x^2+1}}.$$

Перетворимо чисельник останнього виразу:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} = \big(\sqrt{2}x - \sqrt{x^2+1}\big)^2 + \sqrt{x^2+1}\big(\sqrt{2} - \sqrt{x^2+1}\big).$$

При $0 < x < 1$ цей вираз очевидно є додатним, а при $x > 1$ вираз є від'ємним, бо $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{2}x - \sqrt{x^2+1} > 0$ та

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} > \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x + \sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2}x - \sqrt{x^2+1} > 0,$$

а отже $\sqrt{x^2+1}\big(\sqrt{2} - \sqrt{x^2+1}\big) < -\big(\sqrt{2}x - \sqrt{x^2+1}\big)^2$.

Таким чином, функція $f(x)$ зростає при $0 < x < 1$ та спадає при $x > 1$, а тому при всіх $x > 0$ маємо $f(x) \leq f(0) = 0$. Отже,

$$f(a_1) + \ldots + f(a_n) = \sqrt{a_1^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1} - \sqrt{2}\,(a_1 + \ldots + a_n) \leq 0$$

(ми врахували, що $\ln a_1 + \ldots + \ln a_n = 0$). Нерівність $(*)$ доведено.