Математические заметки

Том 97 выпуск 2 февраль 2015

УДК 517

Аналог теоремы Винера для бесконечномерных банаховых пространств

А. В. Загороднюк, М. А. Митрофанов

В работе исследованы различные обобщения классической алгебры Винера на банаховом пространстве и доказаны аналоги теоремы Винера об обратимости элементов таких алгебр.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9371

1. Введение

Классическая теорема Винера утверждает, что если комплекснозначная функция

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

задается абсолютно сходящимся рядом Фурье и для произвольного $t\in[0,2\pi)$ функция f не обращается в нуль, то функция $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Доказательство этой теоремы, предложенное Гельфандом в 40-х годах двадцатого века, является первым ярким примером применения теории Гельфанда и легко обобщается на многомерный случай. Идея Гельфанда заключалась в том, чтобы описать множество комплексных гомоморфизмов (или, что то же самое, характеров) $M(W(\mathbb{R}))$ алгебры Винера $W(\mathbb{R})$. Эти характеры естественным образом отождествляются с функционалами вычислений значений в точках $t\in[0,2\pi)$. Поэтому все функции, которые не принимают нулевых значений на $[0,2\pi)$, являются обратимыми. Положив $z=e^{it}$, $g(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, получим, что $M(W(\mathbb{R}))$ можно описать как множество $S_1=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Используя данный подход, можно рассмотреть также аналогичный вопрос для алгебры $W^+(\mathbb{R})\subset W(\mathbb{R})$, которая состоит из абсолютно сходящихся рядов Фурье по неотрицательным степеням, а именно каждая функция $f\in W^+(\mathbb{R})$ имеет вид

$$f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{ikt}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № Ф35/531-2011).

В этом случае функции $g(z) = g(e^{ikt}) = f(t)$ можно однозначно продолжать до аналитических функций $\widetilde{g}(z)$ на множестве $D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$. Таким образом, каждый характер алгебры $W^+(\mathbb{R})$ имеет вид $\delta_z\colon g \to \widetilde{g}(z)$, $z \in D_1$. Поэтому функция $g(z)$ является обратимой в $W^+(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}(z)$ не имеет нулей в D_1. Заметим, что алгебра $W(\mathbb{R})$ изоморфна сверточной алгебре ℓ_1. В случае функции от n переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье множество характеров $M(W(\mathbb{R}^n))$ совпадает с множеством $T^n = S_1 \times \cdots \times S_1$. Наша задача – обобщить эти результаты для бесконечномерных банаховых пространств.

Полученные в данной работе результаты тесно связаны с проблемой описания множества характеров, которое принято отождествлять с множеством максимальных идеалов (см. теорему 2.3 в [1]) равномерных алгебр аналитических функций в областях банаховых пространств. Изучение различных алгебр аналитических функций, которые приближаются полиномами в равномерной топологии на банаховых пространствах, началось с работ [2], [3]. В фундаментальной статье [4] рассмотрен вопрос о множестве максимальных идеалов таких алгебр. В дальнейшем эта тематика развивалась многими авторами в различных направлениях (см., например, обзор [5]).

2. Основные обозначения и вспомогательные результаты

В этом пункте приведем некоторые известные факты из теории полиномиальных и аналитических отображений на банаховых пространствах, которыми мы пользуемся.

Пусть X, Y – банаховы пространства над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Отображение $P_n\colon X \to Y$ называется *n-однородным полиномом*, если существует симметрическое n-линейное отображение $B\colon X^n \to Y$ такое, что $P_n(x) = B(x, \dots, x)$ для всех $x \in X$. Если

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x),$$

то P называется *полиномом степени n* при условии, что $P_n \neq 0$. Через $\mathcal{P}({}^nX, Y)$ будем обозначать пространство *n-однородных непрерывных полиномов* из X в Y. В случае $Y = \mathbb{K}$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{P}({}^nX)$ вместо $\mathcal{P}({}^nX, \mathbb{K})$. Очевидно, что $\mathcal{P}({}^1X) = X'$ – пространство линейных непрерывных функционалов на X.

Полином $P \in \mathcal{P}({}^nX)$ называется полиномом *конечного типа*, если P является конечной суммой конечных произведений линейных непрерывных функционалов. Пополнение пространства n-однородных полиномов конечного типа в топологии равномерной сходимости на единичном шаре называют пространством n-однородных *аппроксимируемых* полиномов и обозначают $\mathcal{P}_{\mathrm{c}}({}^nX)$.

Пусть X – банахово пространство. Полином $P \in \mathcal{P}({}^nX)$ называется *ядерным*, если существует ограниченная последовательность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X'$ и числовая последовательность $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ такие, что

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^n(x) \qquad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Полином $P \in \mathcal{P}(^n X)$ называется *интегральным*, если существует регулярная борелевская мера μ конечной вариации на единичном шаре $(\overline{B_{X'}}, \sigma(X', X))$ такая, что

$$P(x) = \int_{\overline{B_{X'}}} \phi(x)^n \, d\mu(\phi) \tag{2.1}$$

{eq2.

для всех $x \in X$, где $\phi \in \overline{B_{X'}}$. Интегральные полиномы были введены в работе Динина [6].

Пусть $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ – симметрическая проективная n-я тензорная степень пространства X. То есть, $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ является пополнением алгебраического симметрического тензорного произведения $\bigotimes_s^n X$ относительно нормы

$$\|w\| = \inf\biggl\{ \sum_{i_1,\dots,i_n} \|x_{i_1}\| \cdots \|x_{i_n}\| : w = \sum_{i_1,\dots,i_n} x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n} \biggr\},$$

где $w \in \bigotimes_s^n X$. Тогда справедлива следующая теорема (см. раздел 2 в работе [7]):

Теорема 1. *Существует эквивалентная норма $|||\cdot|||$ на $\bigotimes_{s,\pi}^n X$, которая имеет вид*

$$|||w||| = \inf\biggl\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^n : w = \sum_{i=1}^{\infty} \bigotimes^n x_i \biggr\},$$

такая, что пространство линейных непрерывных операторов из пространства $\bigotimes_{s,\pi}^n X$ с нормой $|||\cdot|||$ в пространство Y – $\mathcal{L}((\bigotimes_{s,\pi}^n X, |||\cdot|||), Y)$ – изометрично $\mathcal{P}(^n X, Y)$ для произвольного банахова пространства Y и для $|||\cdot|||$ выполняется оценка

$$\|w\| \leqslant |||w||| \leqslant c(n, X)\|w\|, \qquad 1 \leqslant c(n, X) \leqslant \frac{n^n}{n!}. \tag{2.2}$$

{eq2.

Наряду с проективным тензорным произведением часто рассматривается *инъективное* $\bigotimes_{s,\varepsilon}^n X$, которое можно определить как пополнение пространства $\bigotimes_s^n X$ относительно нормы

$$\|w\|_\varepsilon = \sup_{f_1,\dots,f_n \in X',\ \|f_1\| \leqslant 1,\dots,\|f_n\| \leqslant 1} \sum |f_1(x_{i_1}) \cdots f_n(x_{i_n})|,$$

где $w \in \bigotimes_s^n X$.

Пусть X, Y – банаховы пространства, Ω – открытое подмножество в X. Отображение $f\colon \Omega \to Y$ называется *аналитическим в* Ω, если для каждой точки $x_0 \in \Omega$ существует окрестность нуля $V_0 \subset X$ такая, что $V_0 + x \subset \Omega$ и для каждого $x \in V_0$

$$f(x + x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x), \tag{2.3}$$

{eq2.

где P_k – непрерывные k-однородные полиномы, P_0 – константа в Y и ряд (2.3) сходится равномерно в окрестности V_0. Разложение (2.3) совпадает с рядом Тейлора функции f, а $P_k(x) = \widehat{d_{x_0}^k} f(x)/k!$ – сужение на диагональ $(x, \dots, x)$ k-й производной Фреше функции f в точке x_0. Обозначим $H(\Omega, Y)$ пространство всех *аналитических* отображений из Ω в Y. Аналитическая функция f называется *целой*, если она определена на всем пространстве X. Пусть $f \in H(\Omega, Y)$, где Ω – открытое подмножество в X и $x \in \Omega$. *Радиус равномерной сходимости* $\varrho_x(f)$ функции f в точке x определяется как супремум $|\lambda|$ для $\lambda \in \mathbb{K}$ таких, что $x + \lambda B \subset \Omega$ и ряд Тейлора функции f в окрестности точки x сходится к f равномерно на множестве $x + \lambda B$, где B – открытый единичный шар в X. *Радиус ограниченности* f в точке x определяется как супремум тех λ, $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых f является ограниченной функцией на множестве $x + \lambda B$.

Напомним, что $H_{\mathrm{b}}(X)$ обозначают алгебру целых аналитических на X, ограниченных на ограниченных множествах функций, а $H^{\infty}_{\mathrm{uc}}(B)$ алгебру всех равномерно непрерывных аналитических в шаре $B \subset X$ функций (детально см. [8], [9]).

Следующий результат является частным случаем утверждения 4.7 из [10].

Теорема 2. *Пусть X – комплексное банахово пространство. Радиус равномерной сходимости аналитической функции $f\colon X \to \mathbb{C}$ в точке x_0, $\varrho_{x_0}(f)$, совпадает с радиусом ограниченности f в x_0 и определяется формулой*

$$\varrho_{x_0}(f) := \Bigl(\limsup_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k}\Bigr)^{-1}.$$

При этом, очевидно, что $f \in H_{\mathrm{b}}(X)$, тогда и только тогда, когда $\varrho_{x_0}(f) = \infty$.

Мы также используем теорему 2.4 из [4], которая сформулирована ниже.

Теорема 3. *Пусть задана произвольная последовательность функционалов $\phi_n \in \mathcal{P}({}^nX)'$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда, если для норм функционалов ϕ_n выполняется неравенство $\|\phi_n\| \leqslant cs^n$ для некоторых $c, s > 0$, то существует единственный функционал $\phi \in H_{\mathrm{b}}(X)'$, сужение которого на $\mathcal{P}({}^nX)$ совпадает с ϕ_n.*

Детальную информацию по теории полиномов и аналитических функций на банаховых пространствах можно найти в [8]–[10].

3. Алгебры Винера от бесконечного числа переменных

Рассмотрим некоторое множество индексов Γ. Мы будем при необходимости обозначать через $\ell_p^{\mathbb{R}}(\Gamma)$ и $\ell_p^{\mathbb{C}}(\Gamma)$ действительные и комплексные пространства $\ell_p(\Gamma)$ соответственно для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и через $c_{00}(\Gamma)$ – пространство конечных последовательностей проиндексированых элементами из множества Γ. Пусть

$$\mathbf{k} = (k_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} = (k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_l}, 0, \dots) \in c_{00}(\Gamma)$$

такое, что $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Пусть $|\mathbf{k}| = \sum_{\alpha\in\Gamma} k_\alpha$.

Рассмотрим всевозможные отображения $f\colon \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ вида

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},x)} := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} a_{k_{\alpha_1}\cdots k_{\alpha_l}} e^{i\sum_{\alpha\in\Gamma} k_\alpha x_\alpha}, \tag{3.1}$$ {eq3.

где i – мнимая единица и $(\mathbf{k}, x) = \sum_{\alpha\in\Gamma} k_\alpha x_\alpha$.

Коэффициенты $a_{\mathbf{k}}$ взяты из пространства $\ell_1^{\mathbb{C}}(\Gamma)$, т.е.

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} |a_{\mathbf{k}}| < +\infty. \tag{3.2}$$ {eq3.

Обозначим через W множество элементов вида (3.1) при условии (3.2). Легко проверить, что W является алгеброй (доказательство этого факта аналогично конечномерному случаю и как в [11; лемма 11.6] мы оставляем его читателю). Пусть G – локально компактная абелева группа, определенная как прямая сумма аддитивных групп $\mathbb{Z}$ индексированых множеством Γ. Тогда алгебра W с поточечным умножением изометрически изоморфна сверточной алгебре $L_1(G)$. Следовательно, W является банаховой алгеброй с нормой

$$\|f\| = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} |a_{\mathbf{k}}|, \qquad \text{где} \quad f = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},x)}.$$

Следующая теорема показывает, что алгебра W удовлетворяет аналогу теоремы Винера.

Теорема 4. *Пусть $f \in W$. Если для каждого $x \in \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $f(x) \neq 0$, то $1/f \in W$.*

Доказательство. Рассмотрим действие характера φ из алгебры W. Заметим, что из того, что $\|e^{ik_\alpha x_\alpha}\| = 1$ следует, что

$$|\varphi(e^{ik_\alpha x_\alpha})| \leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{|\varphi(e^{ik_\alpha x_\alpha})|} = |\varphi(e^{-ik_\alpha x_\alpha})| \leqslant 1.$$

Поэтому $\varphi(e^{ik_\alpha x_\alpha}) = e^{ik_\alpha d_\alpha}$ для некоторого действительного числа d_α. Поскольку $\mathbf{k}$ является финитной последовательностью, то

$$\varphi(e^{i\mathbf{k}(\,\cdot\,)}) = \varphi\biggl(\prod_j e^{ik_{\alpha_j} x_{\alpha_j}}\biggr) = \prod_j e^{ik_{\alpha_j} d_{\alpha_j}}$$

для некоторой последовательности $\{d_{\alpha_j}\}_{\alpha_j\in\Gamma}^{\infty}$.

Каждая функция $f_j = (e^{id_{\alpha_j}})^{k_{\alpha_j}}$ является 2π-периодической, поэтому можно считать, что функции $e^{i\sum_{j=1}^{+\infty} k_{\alpha_j} d_{\alpha_j}}$ заданы на $[0,2\pi]^\Gamma$. Используя периодичность функции $e^{i\varphi(\mathbf{k})} = e^{i\sum_{j=1}^{\infty} d_{\alpha_j} k_{\alpha_j}}$ по каждой переменной d_{α_j}, мы без ограничения общности можем считать, что $\varphi = \{d_{\alpha_j}\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\Gamma)$, и $\|\varphi\|_{\ell_\infty}(\Gamma) \leqslant 2\pi$. С другой стороны, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty(\Gamma)$, $\|\varphi_1\| < 2\pi$ и $\|\varphi_2\| < 2\pi$, то $\varphi_1(\mathbf{k}) \neq \varphi_2(\mathbf{k})$, для некоторого $\mathbf{k}$. Обозначим через $M = \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\Gamma)/[0,2\pi)^\Gamma$ фактор-множество по отношению эквивалентности:

$$\{d_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \sim \{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}, \qquad \text{если} \quad g_\alpha = d_\alpha + 2\pi r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Каждый характер φ задается значениями f в некоторой точке $x_0 = \{d_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \in M$, т.е. $f(\varphi) = \varphi(x_0)$. Следовательно, множество характеров алгебры W можно отождествить с множеством M.

Элемент коммутативной банаховой алгебры является обратимым тогда и только тогда, когда значения произвольного характера на этом элементе не равны нулю (см. [1; с. 15]). Следовательно, если для произвольного $x \in \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $f(x) \neq 0$, то $f(x) \neq 0$ и для произвольного $x \in M$, поэтому элемент $1/f$ определен и принадлежит алгебре W.

Заметим, что если положить $(e^{ix_\alpha}) = z_\alpha$, то функция $z_\alpha^{k_\alpha} = (e^{ix_\alpha})^{k_\alpha}$ задана на единичной окружности $S \in \mathbb{C}$. Поэтому функция $\prod_{j=1}^{\infty} z_{\alpha_j}^{k_j}$ задана на бесконечном (мощности множества Γ) произведении окружностей S^∞ в банаховом пространстве $\ell_\infty^{\mathbb{C}}(\Gamma)$. Для $z = \{z_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$, функция (3.1) принимает вид

$$f(z) = \sum_{k_1+\dots+k_l=0}^{+\infty} a_{k_{\alpha_1}\cdots k_{\alpha_l}} \prod_{\alpha\in\Gamma} z_\alpha^{k_\alpha} = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{+\infty} a_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}. \tag{3.3}$$ {eq3.

Обозначим через W^+ алгебру, порожденную функциями вида (3.3), при условии, что все $k_\alpha \geqslant 0$. Легко убедиться, что W^+ является банаховой алгеброй. Заметим, что для случая, когда Γ – счетное множество, теорема 4 доказана в [12] без использования теории Гельфанда.

Следствие 1. *Каждая функция из алгебры W^+ продолжается до аналитической в шаре B пространства $\ell_\infty^{\mathbb{C}}(\Gamma)$.*

Доказательство. Пусть f имеет вид (3.3). Очевидно, что ряд (3.3) сходится при $z = 0$, следовательно, $f(0) = a_0$. Согласно аналогу формулы Коши–Адамара для бесконечномерного случая (см. формулу в теореме 2), получаем, что радиус равномерной сходимости ϱ_0 степенного ряда (3.3) в нуле равен

$$\varrho_0(f) = \left(\limsup_n \left|\sum_{|\mathbf{k}|=n} a_{\mathbf{k}}\right|^{1/n}\right)^{-1}.$$

Поскольку коэффициенты $a_{\mathbf{k}}$ взяты из пространства $\ell_1^{\mathbb{C}}(\Gamma)$, то, начиная с некоторого n, $|\sum_{|\mathbf{k}|=n} a_{\mathbf{k}}| < 1$ и, следовательно, $|\sum_{|\mathbf{k}|=n} a_{\mathbf{k}}|^{1/n} < 1$. Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{|\mathbf{k}|=n} a_{\mathbf{k}}\right|^{1/n} \leqslant 1,$$

следовательно, $\varrho_0 \geqslant 1$. Таким образом, согласно теореме 12.5 из [8] f – аналитическая функция в единичном шаре.

В результате мы получили алгебру аналитических функций с абсолютно сходящимся рядом Тейлора. Заметим, что теорему 4 и следствие 1 можно получить методами гармонического анализа, изложенными в статье [13].

В следующем пункте в более общем случае рассмотрен вопрос описания характеров этой алгебры.

4. Алгебры типа Винера аналитических функций на шаре банахова пространства

Всюду в этом пункте мы рассматриваем банаховы пространства над полем комплексных чисел. Множество характеров (максимальных идеалов) алгебры $H_{\mathrm{uc}}^\infty(B)$ обозначим через M_{uc}, а алгебры $H_{\mathrm{b}}(X)$ – через M_{b}. Согласно [4]

$$M_{\mathrm{uc}} = \{\phi \in M_b : R(\phi) \leqslant 1\}, \qquad \text{где} \quad R(\phi) = \limsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|^{1/n} \tag{4.1}$$ {eq4.

и ϕ_n – сужение ϕ на подпространство $\mathcal{P}(^n X)$.

Под *алгебрами типа Винера* мы будем понимать алгебры функций с абсолютно сходящимся рядом Тейлора.

4.1. Алгебры полиномов со структурой тензорного произведения. Пусть X – комплексное банахово пространство. Заметим, что $\bigotimes_{s,\pi}^n X'$ является подпространством в $(\bigotimes_{s,\pi}^n X)' = \mathcal{P}(^n X)$. Действительно, пусть $w \in \bigotimes_{s,\pi}^n X'$. Тогда

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \otimes^n x_i'$$

для некоторых $x_i' \in X'$. Определим полином

$$P_w(x) = \left(\bigotimes^n x, w\right) := \sum_{i=1}^{\infty} (x_i'(x))^n.$$

Поскольку

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |P_w(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^n,$$

то по теореме 1 для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать представление вектора w так, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^n = |||w|||_{\bigotimes_{s,\pi}^n X'} + \varepsilon$. Поэтому,

$$P_w(x) \in \mathcal{P}(^n X) = \left(\bigotimes_{s,\pi}^n X\right)', \qquad \sup_{\|x\| \leqslant 1} |P_w| \leqslant |||w|||_{\bigotimes_{s,\pi}^n X'}.$$

Рассматривая $\bigotimes_{s,\pi}^n X'$ как пространство полиномов с нормой $\|P_w\| := |||w|||_{\bigotimes_{s,\pi}^n X'}$, обозначим его через $\mathcal{P}_\pi(^n X)$.

Утверждение 1. *Пусть $P_{w_1} \in \mathcal{P}_\pi(^n X)$ и $P_{w_2} \in \mathcal{P}_\pi(^m X)$. Тогда $P_{w_1} P_{w_2}$ принадлежит пространству $\mathcal{P}_\pi(^{n+m} X)$ и*

$$\|P_{w_1} P_{w_2}\| \leqslant \|P_{w_1}\| \|P_{w_2}\|.$$

Доказательство. Пусть $w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \bigotimes^n x_i'$ и $w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \bigotimes^m y_i'$ – некоторые представления элементов w_1 и w_2 в виде абсолютно сходящихся рядов. Как было отмечено выше, для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такие представления элементов w_1 и w_2, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^n \leqslant |||w_1||| + \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i'\|^m \leqslant |||w_2||| + \varepsilon.$$

Определим произведение

$$P_{w_1}(x) P_{w_2}(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i'(x) y_j'(x) = \left(\bigotimes^{n+m} x, w_1 \bigotimes_s w_2\right).$$

Более того,

$$\|P_{w_1} P_{w_2}\| = \left|\left|\left| w_1 \bigotimes_s w_2 \right|\right|\right| = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\|^{n+m}$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} \|x_i'\|^n \|y_j'\|^m \leqslant (\|P_{w_1}\| + \varepsilon)(\|P_{w_2}\| + \varepsilon),$$

где инфимум берется по всем представлениям элемента $w_1 \bigotimes_s w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \bigotimes^{n+m} z_i$.

Поскольку это неравенство верно для произвольного $\varepsilon > 0$, то

$$\|P_{w_1}P_{w_2}\| \leqslant \|P_{w_1}\|\|P_{w_2}\|.$$

Обозначим $W^+(X) = (\sum \mathcal{P}_\pi(^nX))_{\ell_1}$ – ℓ_1-сумму пространств $\mathcal{P}_\pi(^nX)$, $n \in \mathbb{N}$. Произвольный элемент $w \in W^+(X)$ можно представить в виде

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \qquad w_n \in \mathcal{P}_\pi(^nX) = \bigotimes_{s,\pi}^{n} X', \quad w_0 \in \mathbb{C}.$$

При этом $W^+(X)$ является банаховым пространством относительно нормы ℓ_1-суммы $|||w||| := \sum_{n=0}^{\infty} |||w_n|||$, как ℓ_1-сумма банаховых пространств.

Таким образом, $W^+(X)$ состоит из абсолютно сходящихся рядов полиномов на пространстве X. Следующая теорема показывает, что элементы $W^+(X)$ на самом деле являются аналитическими функциями в единичном шаре B пространства X.

Теорема 5. *Каждому элементу $w \in W^+(X)$ соответствует аналитическая функция f_w, ограниченная и равномерно непрерывная на замкнутом единичном шаре банахова пространства X, определенная формулой $f_w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n = P_{w_n}$. При этом пространство $W^+(X)$ является банаховой алгеброй с единицей относительно поточечного умножения функций.*

Доказательство. Для произвольного $x \in \overline{B}$, где $\overline{B}$ – замыкание B, выполняется оценка

$$|f_w(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} P_{w_n}(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |P_{w_n}(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|P_{w_n}\| = |||w||| < \infty.$$

С другой стороны, очевидно, что сумма абсолютно сходящегося ряда f_w является G-аналитической (Гато-аналитической), т.е. целой аналитической на каждом конечномерном подпространстве. Поэтому вследствие ограниченности функции f_w на замкнутом единичном шаре получим по теореме 14.9 [8], что f_w является аналитической на B и, учитывая теорему 2, равномерно непрерывной на $\overline{B}$.

Пусть $f, g \in W^+(X)$. Используя утверждение 1 и то, что $W^+(X)$ является ℓ_1 суммой пространств однородных полиномов, легко проверить, что $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$. Таким образом, $W^+(X)$ является банаховой алгеброй и единичная функция является единицей этой алгебры.

Согласно теореме 5 алгебру $W^+(X)$ можно реализовать в виде подалгебры $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$. Заметим, что она не совпадает с $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$. Если X' имеет свойство аппроксимации, то пространство $\bigotimes_{s,\pi}^n X'$ изоморфно пространству n-однородных ядерных полиномов на X (см. [9; с 93]). Если пространство X' имеет свойство Радона–Никодима, то пространство ядерных полиномов на X изоморфно пространству интегральных полиномов (см. [9; с. 108]). Если X – бесконечномерное банахово пространство, то множество интегральных полиномов является собственным подмножеством в множестве всех непрерывных полиномов. Поэтому не все абсолютно сходящиеся ряды полиномов принадлежат алгебре $W^+(X)$. Поскольку $(\mathcal{P}_\pi(^nX))' = (\bigotimes_{s,\pi}^n X')' = \mathcal{P}(^nX')$, то

$$(W^+(X))' = \Big(\sum \mathcal{P}(^nX')\Big)_{\ell_\infty}.$$

В случае, когда $X = c_0$, алгебра $W^+(X)$ совпадает с алгеброй W^+, введенной в предыдущем пункте, поскольку W^+ состоит из ℓ_1-суммы пространств ядерных полиномов на c_0.

Обозначим через M_{W^+} множество максимальных идеалов алгебры $W^+(X)$. Заметим, что естественные включения $X' \subset W^+(X)$ и $M_{W^+} \subset (W^+(X))''$ задают вложение $\Pi\colon M_{W^+} \hookrightarrow X''$.

Теорема 6. *Множество M_{W^+} совпадает как топологическое пространство с замкнутым единичным шаром $\overline{B}_{X''}$ второго сопряженного пространства, а топология Гельфанда совпадает с $*$-слабой топологией пространства X'', в том смысле, что отображение Π является гомеоморфизмом из M_{W^+} на $\overline{B}_{X''}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что из включения $\bigotimes_{s,\pi}^n X' \subset \bigotimes_{s,\varepsilon}^n X'$ и равенства $\bigotimes_{s,\varepsilon}^n X' = \mathcal{P}_c({}^nX)$ (см. [9; с. 112]) следует, что каждый комплексный гомоморфизм на $W^+(X)$, который равен нулю на всех линейных функционалах является тождественным нулем на всех однородных полиномах из $W^+(X)$. Здесь $\bigotimes_{s,\varepsilon}^n X'$ – инъективная симметрическая тензорная степень пространства X'.

Пусть $\phi \in M_{W^+}$, тогда

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n, \qquad \text{где} \quad \phi_n \in \mathcal{P}({}^nX').$$

Для произвольных $P_n \in \mathcal{P}_\pi({}^nX)$, $P_m \in \mathcal{P}_\pi({}^mX)$ имеем

$$\phi(P_nP_m) = \phi_{n+m}(P_nP_m) = \phi(P_n)\phi(P_m) = \phi_n(P_n)\phi_m(P_m).$$

Поэтому сужение ϕ на n-однородные полиномы конечного типа равно n-й тензорной степени ϕ_1, ϕ_1^n. Поскольку пространство полиномов конечного типа всюду плотно в $\mathcal{P}_\pi({}^nX)$, $\phi_n = \phi_1^n$. Следовательно,

$$\phi = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_1^n, \qquad \text{где} \quad \phi_0(P) = P(0). \tag{4.2}$$
{eq4.

То есть каждый комплексный гомоморфизм $\phi \in M_{W^+}$ однозначно определяется некоторым $\phi_1 \in X''$. Кроме того, норма произвольного ненулевого комплексного гомоморфизма равна единице. Поэтому

$$\|\phi\| = \sup_n \|\phi_n\| = \sup_n \|\phi_1^n\| = 1.$$

Таким образом $\|\phi_1\| \leqslant 1$, т.е. $\phi_1 \in \overline{B_{X''}}$. С другой стороны, каждый вектор $\phi_1 \in \overline{B_{X''}}$ порождает некоторый комплексный гомоморфизм $\phi \in M_{W^+}$ по формуле (4.2).

Напомним, что каждую ограниченную аналитическую функцию на шаре банахова пространства X можно продолжить до ограниченной аналитической функции на шаре второго сопряженного пространства X'' так, что оператор продолжения $f \to \widetilde{f}$ является линейным и мультипликативным и на X' совпадает с каноническим вложением X' в X'''. Это продолжение называется *продолжением Арона–Бернера* (см. [4], [9]).

Следствие 2. *Если $f \in W^+(X)$ и продолжение Арона–Бернера $\widetilde{f}$ функции f не равно нулю на $\overline{B_{X''}}$, то функция g, $g(x) := 1/f(x)$, также принадлежит алгебре $W^+(X)$.*

Доказательство. Пусть $\phi \in M_{W^+}$. Если f – линейный функционал, то согласно определению продолжения Арона–Бернера, $\phi(f) = \phi_1(f) = \widetilde{f}(\phi_1)$. Пусть f – полином конечного типа. Тогда f можно представить в виде конечной алгебраической комбинации линейных функционалов $h_1, \ldots, h_n$:

$$f(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}.$$

Поэтому

$$\phi(f) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} \phi_1(h_1)^{i_1} \cdots \phi_1(h_n)^{i_n} = \widetilde{f}(\phi_1).$$

Наконец, поскольку полиномы конечного типа плотны в $W^+(X)$, то равенство $\phi(f) = \widetilde{f}(\phi_1)$ выполняется для произвольной функции f из $W^+(X)$. Таким образом, если $\widetilde{f}$ не равно нулю на $\overline{B_{X''}}$, то $\phi(f) \neq 0$ для произвольного функционала $\phi \in M_{W^+}$. Поэтому f является обратимым элементом в $W^+(X)$, следовательно, $g = 1/f \in W^+(X)$.

4.2. Алгебра типа Винера, содержащая все непрерывные полиномы. Обозначим ℓ_1-сумму банаховых пространств $\mathcal{P}(^nX)$ (с sup-нормой на единичном шаре), где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через $\mathcal{W}^+(X)$. Каждый элемент $f \in \mathcal{W}^+(X)$ имеет вид

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad f_n \in \mathcal{P}(^nX), \qquad \text{где} \quad \|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|.$$

Очевидно, что для произвольного $x \in B$, $|f(x)| \leqslant \|f\|$. Поэтому sup-норма на B меньше нормы f в пространстве $\mathcal{W}^+(X)$. То есть $\mathcal{W}^+(X)$ является подпространством в $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$. Поскольку $\mathcal{W}^+(X)$ содержит все непрерывные полиномы, а непрерывные полиномы порождают плотное подпространство в $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$, то $\mathcal{W}^+(X)$ является плотным подпространством в $H^\infty_{\mathbf{uc}}(B)$. Мы будем обозначать $M_{\mathcal{W}^+}$ множество максимальных идеалов алгебры $\mathcal{W}^+(X)$.

Теорема 7. *Множество $M_{\mathcal{W}^+}$ совпадает с множеством M_{uc} в теоретико-множественном смысле.*

Доказательство. Покажем сначала, что $M_{\mathrm{uc}} \subset M_{\mathcal{W}^+}$. Пусть $\phi \in M_{\mathrm{uc}}$. Поскольку $\mathcal{W}^+(X)$ является подалгеброй в $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$, то сужение ϕ на $\mathcal{W}^+(X)$ является комплексным гомоморфизмом (характером). Если $\phi_1 \neq \phi_2$, $\phi_1, \phi_2 \in M_{\mathrm{uc}}$, то $\phi_1(f) \neq \phi_2(f)$ для некоторой функции $f \in H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$. Из плотности алгебры $\mathcal{W}^+(X)$ в $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$ и непрерывности комплексных гомоморфизмов следует, что для некоторой функции $g \in \mathcal{W}^+(X)$ выполнено $\phi_1(g) \neq \phi_2(g)$. То есть множество M_{uc} инъективно вложено в $M_{\mathcal{W}^+}$.

С другой стороны, пусть $\psi \in M_{\mathcal{W}^+}$ и ψ_n – сужение ψ на пространство n-однородных полиномов. Из определения нормы на $\mathcal{W}^+(X)$ видно, что каждая функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{W}^+(X)$ является пределом частичных сумм своего ряда Тейлора. То есть

$$\psi(f) = \lim_{m\to\infty} \psi\left(\sum_{n=0}^{m} f_n\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \psi_n(f).$$

Другими словами, произвольный комплексный гомоморфизм $\psi \in M_{\mathcal{W}^+}$ можно представить в виде формального ряда $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n$, который сходится на элементах из $H^{\infty}_{\mathrm{uc}}(X)$. Поскольку ψ принадлежит единичному шару пространства сопряженного к $\mathcal{W}^+(X)$, для него выполняется равенство

$$\|\psi\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|\psi_n\| = 1. \tag{4.3}$$ {eq4.

Поэтому $\|\psi_n\| \leqslant 1$, следовательно $R(\psi) = \limsup_{n\to\infty} \|\psi_n\|^{1/n} \leqslant 1$. Из теоремы 3 и равенства (4.1) следует, что $\psi \in M_{\mathrm{uc}}$.

Если $f \in \mathcal{W}^+(X)$, то вследствие теоремы 7 спектр элемента f в $\mathcal{W}^+(X)$ – $S_f^+ := \{\psi(f) \mid \psi \in M_{\mathcal{W}^+}\}$ – совпадает со спектром f в H^{∞}_{uc} – $S_f = \{\psi(f) \mid \psi \in M_{\mathrm{uc}}\}$. Поэтому согласно [14; с. 242] $\mathcal{W}^+(X)$ и $H^{\infty}_{\mathrm{uc}}(B)$ образуют винеровскую пару. Напомним, что согласно определению винеровской пары, если элемент алгебры $\mathcal{W}^+(X)$ является обратимым в $H^{\infty}_{\mathrm{uc}}(B)$, то он обратим в $\mathcal{W}^+(X)$.

Рассмотрим алгебру A, порожденную полиномами и комплексно-сопряженными к полиномам функциями. Каждый элемент q алгебры A представляется в виде конечной суммы $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$, где функции q_j действительно j-однородные, т.е. $q_j(tx) = t^j q_j(x)$ для произвольного $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $K(^nX)$ пополнение пространства действительно n-однородных функций из A относительно нормы супремум на единичном шаре в X (см. [15]). Обозначим $\mathcal{W}(X)$ – ℓ_1-сумму пространств $K(^nX)$ пополненную в норме ℓ_1. Легко видеть, что $\mathcal{W}(X)$ является алгеброй. Обозначим множество максимальных идеалов алгебры $\mathcal{W}(X)$ через $M_{\mathcal{W}}$.

Рассмотрим пополнение A относительно нормы супремум на единичном шаре в X, обозначим это пополнение $C_{\mathrm{uc}}(B)$. Поскольку $C_{\mathrm{uc}}(B)$ является C^*-алгеброй, то множество максимальных идеалов $M(C_{\mathrm{uc}}(B)) = \mathfrak{M}_{\mathrm{uc}}$ этой алгебры будет некоторой компактификацией шара B.

Утверждение 2. *Множество $M_{\mathcal{W}}$ содержит множество $\mathfrak{M}_{\mathrm{uc}}$ в теоретико-множественном смысле.*

Доказательство этого утверждения повторяет рассуждения, приведенные в первой части теоремы 7, где вместо M_{uc} используется $\mathfrak{M}_{\mathrm{uc}}$, а вместо $M_{\mathcal{W}^+}$ используется $M_{\mathcal{W}}$.

Вопрос о том, образуют ли $\mathcal{W}$ и $H_{\mathrm{uc}}(B)$ винеровскую пару, остается открытым.

Напомним, что в [4] доказано, что для каждого характера φ алгебры $H^{\infty}_{\mathrm{uc}}(B)$ существует направленность $x_\alpha \in X$ такая, что

$$\varphi(P) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha) \tag{4.4}$$ {eq4.

для каждого непрерывного полинома P на X. Заметим, что x_α не обязательно принадлежит единичному шару B и, в общем случае, может быть неограниченной.

Очевидно, что формула (4.4) позволяет определить φ на сопряженных полиномах $\varphi(\overline{P}) = \lim_\alpha \overline{P(x_\alpha)} = \overline{\varphi(P)}$ и, естественным образом, продолжить φ до характера на все элементы алгебры A. Если направленность $x_\alpha \in B$, то φ допускает продолжение на пополнение A в равномерной топологии в B, т.е. на $C_{\mathrm{uc}}(B)$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{M}_{\mathrm{uc}}$ – компактификация B в топологии Гельфанда, для каждого характера ψ на $C_{\mathrm{uc}}(B)$ существует направленность $(y_\beta) \in B$ такая, что для произвольного $f \in C_{\mathrm{uc}}(B)$ выполняется равенство $\psi(f) = \lim_\beta f(y_\beta)$. Очевидно, что сужение ψ на $H^\infty_{\mathrm{uc}}(B)$ будет характером этой алгебры. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3. *Множество $\mathfrak{M}_{\mathrm{uc}}$ является подмножеством множества M_{uc} и состоит из тех характеров φ, для которых существует направленность x_α в B, удовлетворяющая равенству* (4.4).

Формула (4.1) указывает на связь множества максимальных идеалов M_{uc} с множеством характеров M_{b} алгебры $H_{\mathrm{b}}(X)$. В работах [16], [5] дано явное описание множества характеров алгебры $H_{\mathrm{b}}(X)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973.

[2] А. С. Немировский, “Об одной цепочке алгебр на гильбертовом шаре”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:1 (1971), 85–86.

[3] А. С. Немировский, С. М. Семенов, “О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве”, *Матем. сб.*, **92**:2 (1973), 257–281.

[4] R. M. Aron, B. J. Cole, T. W. Gamelin, “Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space”, *J. Reine Angew. Math.*, **415** (1991), 51–93.

[5] A. Zagorodnyuk, “Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces”, *Function spaces*, Contemp. Math., **435**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 381–394.

[6] S. Dineen, “Holomorphy types on a Banach space”, *Studia Math.*, **34** (1971), 241–288.

[7] K. Floret, “Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces”, *Note Mat.*, **17** (1997), 153–188.

[8] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces. Holomorphic Functions and Domains of Holomorphy in Finite and Infinite Dimensions*, North-Holland Math. Stud., **120**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1986.

[9] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[10] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Math. Stud., **57**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1981.

[11] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.

[12] R. H. Cameron, “Analytic functions of absolutely convergent generalized trigonometric sums”, *Duke Math. J.*, **3**:4 (1937), 682–688.

[13] R. Arens, I. M. Singer, “Generalized analytic functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81**:2 (1956), 379–393.

[14] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, ГИТТЛ, М., 1956.

[15] М. А. Митрофанов, “Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 557–570.

[16] A. Zagorodnyuk, “Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134**:9 (2006), 2559–2569.

А. В. Загороднюк
Прикарпатский национальный университет
им. В. Стефаника, Украина
E-mail: andriyzag@yahoo.com

Поступило
13.13.2012
Исправленный вариант
12.08.2014

М. А. Митрофанов
Институт прикладных проблем механики и
математики им. Я. С. Пидстригача НАН Украины
E-mail: mishmit@rambler.ru