Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА III

Івано-Франківськ

2015

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73
П 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як навчальний посібник для студентів математичних та технічних напрямів підготовки (протокол № 2 від 23 жовтня 2015 р.).

Рецензенти:

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка"),

Мойсишин В.М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу).

П 69 Практикум з математичного аналізу. – Частина III. / А.В. Загороднюк, М.І. Копач, Г.П. Малицька, М.В. Марцінків, Г.М. Петрів, А.В. Соломко. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – Івано-Франківськ : Сімик, 2015. – 189 с.

У посібнику наведені короткі відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та приклади розв'язування деяких з них. Третя частина посібника розкриває наступні теми: невизначений інтеграл та методи його розв'язування, визначений інтеграл та його застосування, невласні інтеграли та інтеграли, залежні від параметра.

Для студентів математичних та технічних напрямів підготовки, які вивчають курси "математичний аналіз I", "математичний аналіз II".

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання практичного курсу математичного аналізу на факультеті математики та інформатики і фізико-технічному факультеті Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів математичних та технічних напрямів підготовки.

Матеріал третьої частини посібника охоплює поняття невизначеного інтеграла та методів його розв'язування, властивості та застосування визначеного інтеграла, теорію і методи дослідження невласних інтегралів та інтегралів, залежних від параметра.

На початку кожного параграфу подаються короткі теоретичні відомості з кожної теми, які містять основні означення, формулювання важливих теорем та основні формули. Далі поміщено вправи для розв'язування. Друга частина кожного параграфу містить повне розв'язування вибраних вправ. В кінці перших двох розділів подані індивідуальні завдання.

Маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних прикладів, викладач може зосередити увагу студентів на розв'язуванні більш складніших задач. Наявність теоретичного матеріалу та прикладів розв'язування задач допоможе студенту опрацьовувати матеріал посібника самостійно.

Слід зазначити, що для досконалого вивчення матеріалу перед тим, як починати розв'язувати вправи, необхідно добре засвоїти теоретичний матеріал з кожної теми. Потім розібрати наведені вправи з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ для самостійного виконання.

РОЗДІЛ І. Невизначений інтеграл

§1.1. Первісна функції. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ в заданому проміжку називається ***первісною функції*** $f(x)$ або ***інтегралом від*** $f(x)$, якщо на всьому проміжку $f(x)$ є похідною для $F(x)$, або, що одне і те ж, що $f(x)dx$ є диференціалом для $F(x)$. Очевидно, що в цьому випадку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Відшукання для функції всіх її первісних називається її ***інтегруванням*** і є однією з основних задач інтегрального числення.

Якщо $F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$ на довільному проміжку $\mathfrak{X}$, то множина всіх первісних заданої функції у цьому проміжку має вигляд $\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$, і навпаки, кожна функція, яка є первісною для $f(x)$ в проміжку $\mathfrak{X}$, може бути зображена у вигляді $F(x)+C$. Цей вираз називають ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$ на заданому проміжку $\mathfrak{X}$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{де } C = \text{const}.$$

Добуток $f(x)dx$ називається ***підінтегральним виразом***, $f(x)$ – ***підінтегральною функцією***, x – ***змінною інтегрування***, а символ $\int$ – ***знаком невизначеного інтеграла***.

Таблиця основних інтегралів

$$1)\ \int 0 \cdot dx = C,$$

$$2)\ \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \ \ \mu \neq -1,$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$4)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ \ a > 0, \ a \neq 1,$$

$$5)\ \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$6)\ \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$7)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$8)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$9)\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0,$$

$$10)\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0,$$

$$11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \ a > 0,$$

$$12)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \ a \neq 0,$$

$$13)\ \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$14)\ \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$15)\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$16)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $d\Big(\int f(x)dx\Big) = f(x)dx.$

2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$, де $C = \text{const}.$

3. Якщо $a = \mathrm{const}$, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

4. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні на певному проміжку $\mathfrak{X}$ відповідно для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

тобто $F(x) \pm G(x)$ є первісною для функції $f(x) \pm g(x)$.

5. Якщо $\int f(t)dt = F(t) + C$, де $C = \mathrm{const}$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Зокрема, якщо $a = 1$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C_1$, якщо $b = 0$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C_2$.

Спираючись на останню властивість, до таблиці основних інтегралів можна додати ще декілька:

$$17)\ \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$
$$18)\ \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \ \ k \neq 1,$$
$$19)\ \int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C, \ m \neq 0,$$
$$20)\ \int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + C, \ m \neq 0.$$

Вправи

1. Перевірити, чи функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\mathfrak{X}$:

1) $F(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $\quad f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $\quad$ а) $\mathfrak{X} = (-\infty; 1)$, б) $\mathfrak{X} = [1; 3)$,

2) $F(x) = x^2 + 3x + 5$, $\quad f(x) = 2x + 3$, $\quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R}$,

3) $F(x) = \sin^2 x + \cos 2x$, $\quad f(x) = -\sin 2x$, $\quad \mathfrak{X} = [0; 1]$,

4) $F(x) = \ln(1-x^2)$, $\quad f(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, $\quad$ а) $\mathfrak{X} = (-1; 1)$, б) $\mathfrak{X} = \Big[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\Big]$,

5) $F(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+7}$, $\quad f(x) = \dfrac{6x^2+2x-4}{(x^2+x+7)^2}$, $\quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R}$,

6) $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}$, $\quad f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\quad$ а) $\mathfrak{X} = (0; +\infty)$, б) $\mathfrak{X} = [0; +\infty)$,

7) $F(x) = \dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$, $\quad f(x) = 0$, $\quad \mathfrak{X} = (-1; 0)$,

8) $F(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$, $\quad f(x) = \dfrac{2}{(\cos x - \sin x)^2}$, $\quad \mathfrak{X} = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$,

9) $F(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^6+1}$, $\mathfrak{X} \equiv \mathbb{R}$,

10) $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases} \qquad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R}.$

2. Знайти всі первісні для заданих функцій на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = |x+2|$, $\qquad$ 2) $f(x) = |2+x| - |2-x|$,

3) $f(x) = e^{-|x|}$, $\qquad$ 4) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ x^3-1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{якщо } |x| \leqslant 1, \\ 1-|x|, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$ $\qquad$ 6) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

3. Для заданої функції знайти первісну, графік якої проходить через вказану точку M_0 :

1) $f(x) = (x+2)x(x-1)$, $\quad M_0(1; 1)$, $\qquad$ 2) $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$, $\quad M_0(0; 2)$,

3) $f(x) = \sin 5x \cos 7x$, $\quad M_0(0; 0)$, $\qquad$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $\quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$,

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}$, $\quad M_0(0; 0)$, $\qquad$ 6) $f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x$, $\quad M_0(\ln 2; 0)$.

4. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int (4x^2+6)^4 dx,$ 2) $\displaystyle\int (3x+1)(8x^2+5x+3)dx,$

3) $\displaystyle\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int (12x+6)\sqrt{x^2+x+1}\,dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{3x^3+2}}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[5]{x^4}+3\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[9]{x^5}}dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}-4}{\sqrt{x^2+2}}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}},$

11) $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x-1}\,dx,$ 12) $\displaystyle\int \frac{x^6}{x+1}\,dx,$

13) $\displaystyle\int 3^{2x+5}dx,$ 14) $\displaystyle\int (2^{x+1}-3^{x-1})6^{-x}dx,$

15) $\displaystyle\int \frac{9^x+\frac{1}{27}}{3^x+\frac{1}{3}}\,dx,$ 16) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}dx,$

17) $\displaystyle\int \frac{e^{-3x}-1}{e^{-2x}+e^{-x}+1}\,dx,$ 18) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}},$

19) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,e^{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$ 20) $\displaystyle\int \frac{x\log_3(x^2+3)}{x^2+3}\,dx,$

21) $\displaystyle\int \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{1-x^2},$ 22) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx,$

23) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{3}\,dx,$ 24) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx,$

25) $\displaystyle\int \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}\,dx,$ 26) $\displaystyle\int \mathrm{th}^2 x\,dx,$

27) $\displaystyle\int \mathrm{cth}^2 2x\,dx,$ 28) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx,$

29) $\displaystyle\int (\cos x+\sin x)^4\,dx,$ 30) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,dx,$

31) $\displaystyle\int \frac{8\sin^2 x-3\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx,$ 32) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx,$

33) $\displaystyle\int \frac{1+7\cos^2 x}{1-\cos 2x}\,dx,$ 34) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x},$

35) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x},$ 36) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x},$

37) $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx,$ 38) $\displaystyle\int e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx,$

39) $\int \operatorname{th} x \ln \operatorname{ch} x \, dx$, 40) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \, dx$.

Приклади розв'язування вправ

1.7. Знаходимо область визначення функції $F(x) = \dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$. Маємо

$$D(F) = \{x: \ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}.$$

Оскільки за умовою $\mathfrak{X} = (-1; 0) \subset D(F)$, то залишилось перевірити співвідношення $(F(x))' = f(x)$. Маємо

$$F'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}\right)' = \left(-\frac{2x^2+8}{\sqrt{x^4+8x^2+16}}\right)' =$$

$$= \left(-\frac{2(x^2+4)}{\sqrt{(x^2+4)^2}}\right)' = 0.$$

Отже, $f(x) = 0$. ▶

2.4. Задана функція $f(x)$ визначена на всій дійсній осі і на кожному з проміжків $x \in (-\infty; 1]$ та $x \in (1; +\infty)$ має первісну $F(x)$.

Якщо $x \in (-\infty; 1]$, то $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + C$, де C – стала, є первісною для $f_1(x) = x^2 - 1$. Якщо $x \in (1; +\infty)$, то первісною для $f_2(x) = x^3 - 1$ є $F_2(x) = \dfrac{x^4}{4} - x + C_1$, де C_1 – стала.

В точці $x = 1$ первісна $F(x)$ функції $f(x)$ має бути неперервною і мати похідну. Тому $\lim\limits_{x\to 1-0} F_1(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} F_2(x)$, тобто

$$\frac{1}{3} - 1 + C = \frac{1}{4} - 1 + C_1.$$

Звідси $C_1 = \dfrac{1}{12} + C$.

Односторонні похідні $F_1(x)$ та $F_2(x)$ в точці $x = 1$ також рівні.

Отже, $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x + C, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ \dfrac{x^4}{4} - x + \dfrac{1}{12} + C, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$ є первісною для функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ x^3 - 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$ ▶

4.12. Виділимо спочатку цілу частину раціонального дробу $\dfrac{x^6}{1+x}$. Поділивши кутом многочлен x^6 на двочлен $x+1$, отримаємо

$$\frac{x^6}{x+1} = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^6}{x+1}\,dx = \int (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \quad ▶$$

4.20. Оскільки $(\log_3(x^2+3))' = \dfrac{2x}{x^2+3} \cdot \dfrac{1}{\ln 3}$, то

$$\int \frac{x\log_3(x^2+3)}{x^2+3}\,dx = \frac{\ln 3}{2}\int \log_3(x^2+3)\,d(\log_3(x^2+3)) =$$
$$= \frac{\ln 3}{4} \cdot \log_3^2(x^2+3) + C. \quad ▶$$

§ 1.2. Основні методи інтегрування

1. Метод введення нової змінної. Якщо $U = \varphi(x)$ – неперервно диференційовна функція на проміжку $\mathfrak{X}$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(U)dU.$$

2. Метод підстановки. Якщо $f(x)$, $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – неперервні функції у відповідних проміжках, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3. Формула інтегрування частинами. Нехай функції $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – неперервно диференційовні у визначеному проміжку $\mathfrak{X}$ та існує первісна функції $U'V$ на цьому проміжку. Тоді функція $V'U$ також має первісну на $\mathfrak{X}$, причому виконується рівність

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

У випадку застосування цієї формули на практиці заданою вважається її ліва частина, тобто $\int UdV$ і обчислення цього інтеграла зводиться до відшукання інтеграла $\int VdU$. Функція V, взагалі кажучи, визначається неоднозначно, з точністю до довільної сталої C, тому вибирають для зручності $C = 0$.

Якщо припустити, що функції $U = U(x)$ та $V = V(x)$ мають похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то n-кратне застосування формули інтегрування частинами до інтеграла виду $\int UV^{(n+1)}dx$ приведе до ***узагальненої формули інтегрування частинами***:

$$\int UV^{(n+1)}dx = UV^{(n)} - U'V^{(n-1)} + U''V^{(n-2)} - \ldots +$$
$$+(-1)^n U^{(n)}V + (-1)^{n+1}\int U^{(n+1)}V dx.$$

Розглянемо деякі види інтегралів, до яких зручно застосовувати формулу інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin\beta x\,dx$, $\int P(x)\cos\beta x\,dx$, де $P(x)$ – многочлен n-го степеня від змінної x, $a \neq 0$, $\beta \neq 0$ – дійсні числа. У цих інтегралах $P(x)$ позначають через U. Після n-кратного застосування формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться відповідно до інтегралів $\int e^{ax}dx$, $\int \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\beta x\,dx$.

2. Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{ax}\cos\beta x\,dx$, $a \neq 0$, $\beta \neq 0$ – дійсні числа. Після двократного застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримаємо вираз, що містить початковий інтеграл. Його знаходимо як розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння.

3. Інтеграли виду $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$, де $P(x)$ – многочлен n-го степеня від змінної x. Через U в цих інтегралах беруть множники $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$ і $\operatorname{arcctg} x$.

Зауважимо, що формула інтегрування частинами є корисною для виведення цілого ряду рекурентних формул інтегрального числення.

Виведемо, наприклад, рекурентну формулу для інтеграла вигляду $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Тоді

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{ll} U = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & dV = dx, \\ dU = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx, & V = x \end{array} \right| = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$$

$$+2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Звідси

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n, \quad I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\, I_n.$$

Отже,

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\, I_{n-1}.$$

В окремих випадках при інтегруванні функцій, до складу яких входять радикали вигляду $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, доцільно використовувати тригонометричні підстановки $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = \frac{a}{\sin t}$ або гіперболічні підстановки $x = a\operatorname{sh} t$, $x = a\operatorname{ch} t$.

Однак, слід зауважити, що якщо інтегрування з використанням тригонометричних або гіперболічних підстановок виконане і є потреба повернутись до попередньої змінної, записавши остаточний результат в радикалах, то це можна зробити, скориставшись основними властивостями обернених тригонометричних і гіперболічних функцій:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x,$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos x = \pi - \arccos x,$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

де $x \in [-1; 1]$,

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

де $x \in \mathbb{R}$,

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \ \ x \in (0; 1),$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \ x \in (0; 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \ \ x \in (0; +\infty),$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \ \ x \in (0; +\infty),$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \ \ x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ \ x \in (1; +\infty),$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \ \ x \in (-1; 1),$$

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \ \ x \in (1; +\infty).$$

Вправи

1. Знайти задані інтеграли, скориставшись методом введення нової змінної або методом підстановки:

1) $\int x(x-3)^{200} dx$, 2) $\int \frac{x^2}{(2-x)^{12}}\, dx$,

3) $\int x^2 \sqrt[5]{1+x^3}\, dx$, 4) $\int \frac{x^3}{x^8 - 2}\, dx$,

5) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 6}}\, dx$, 6) $\int \frac{2x^3 - x}{x^4 - x^2}\, dx$,

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + e^x}}$, 8) $\int \sqrt{e^x - 2}\, dx$,

9) $\displaystyle\int \frac{2016^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$

11) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^4} dx,$ 12) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}},$

13) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx,$ 14) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx,$

15) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,dx,$ 16) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{9-\cos^2 x}}\,dx,$

17) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[6]{\sin x-\cos x}}\,dx,$ 18) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-2\cos^2 x}}\,dx,$

19) $\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\,dx,$ 20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx.$

2. Знайти інтеграли, використовуючи тригонометричні або гіперболічні підстановки:

1) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}},$

5) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}},$ 8) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}},$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

3. Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx,$ 2) $\displaystyle\int (3x+4)e^{-3x}dx,$

3) $\displaystyle\int x^2\cos 3x\,dx,$ 4) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx,$

5) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx,$ 8) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx,$

9) $\displaystyle\int x^2\arccos x\,dx,$ 10) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx,$

$$11)\ \int x^{-2}\arcsin x\,dx, \qquad 12)\ \int \ln(x^2+1)dx,$$
$$13)\ \int x\sec^2 x\,dx, \qquad 14)\ \int e^{2x}\cos 3x\,dx,$$
$$15)\ \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx, \qquad 16)\ \int x^5 e^{x^3}\,dx,$$
$$17)\ \int \arcsin^2 x\,dx, \qquad 18)\ \int e^{2x}\sin^2 x\,dx,$$
$$19)\ \int \sin x\ln\operatorname{tg} x\,dx, \qquad 20)\ \int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx.$$

4. Методом інтегрування частинами вивести рекурентні формули для знаходження інтегралів (для довільного $n \in \mathbb{N}$):

$$1)\ \int \ln^n x\,dx, \qquad 2)\ \int x^n e^{ax}dx,\ a \neq 0,$$
$$3)\ \int \cos^n x\,dx, \qquad 4)\ \int \operatorname{tg}^n x\,dx,$$
$$5)\ \int \operatorname{sh}^n x\,dx, \qquad 6)\ \int \operatorname{th}^n x\,dx,$$
$$7)\ \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx, \qquad 8)\ \int \sqrt{(x^2+a^2)^n}\,dx,$$
$$9)\ \int e^{ax}\sin^n x\,dx,\ a \neq 0, \qquad 10)\ \int \frac{dx}{\cos^n ax}.$$

5. Знайти інтеграли:

$$1)\ \int (e^{2x}-\sin 3x)^2\,dx, \qquad 2)\ \int \frac{15^x}{25^x-9^x}\,dx,$$
$$3)\ \int \frac{dx}{x^2+8x+1}, \qquad 4)\ \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx,$$
$$5)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+2}}\,dx, \qquad 6)\ \int x^2\arcsin x\,dx,$$
$$7)\ \int \frac{x}{x^2+6x+2}\,dx, \qquad 8)\ \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^4}}\,dx,$$
$$9)\ \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx, \qquad 10)\ \int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx,$$
$$11)\ \int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,dx, \qquad 12)\ \int \frac{x^4}{x^{10}-8}\,dx,$$

13) $\int \sin x \ln \cos x \, dx$,
14) $\int \frac{\sin 2x}{3+2\sin^2 x}\, dx$,
15) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}\, dx$,
16) $\int \ln x^n \, dx$,
17) $\int \frac{dx}{x^4-8}$,
18) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$,
19) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\, dx$,
20) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$.

Приклади розв'язування вправ

1.18. Інтеграл $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 2\cos^2 x}}\, dx$ обчислюється методом введення нової змінної.

Дійсно, оскільки $d(\sin x) = \cos x \, dx$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то

$$I = \int \frac{\sin x \, d(\sin x)}{\sqrt{3\sin^2 x - 2}} = \Big|\sin x = t\Big| = \int \frac{t}{\sqrt{3t^2-2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{d(t^2 - \frac{2}{3})}{\sqrt{t^2 - \frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{t^2 - \frac{2}{3}} + C.$$

Зауважимо, що при знаходженні цього інтеграла ми скористались методом внесення змінної під знак диференціала.

Повертаючись до початкової змінної, остаточно отримуємо

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sin^2 x - \frac{2}{3}} + C = \sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 x - \frac{2}{9}} + C. \qquad \blacktriangleright$$

2.7. Підінтегральна функція не визначена в точці $x = 0$ і парна. В знаменнику під знаком квадратного кореня є вираз $x^2 + 4$, який можна зробити точним квадратом за рахунок підстановки $x = 2\,\mathrm{tg}\, t$. При цьому достатньо припустити, що t змінюється між 0 і $\frac{\pi}{2}$. В такому випадку отримаємо

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{matrix} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}\, dt}{16\,\mathrm{tg}^4 t \sqrt{4(\mathrm{tg}^2 t + 1)}} = \frac{1}{16} \int \frac{dt}{\cos t \,\mathrm{tg}^4 t} =$$

$$= \frac{1}{16} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\, dt = \frac{1}{16} \int \frac{(1-\sin^2 t) d(\sin t)}{\sin^4 t} = \Big|\sin t = z\Big| =$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^2}\right)dz = -\frac{1}{48z^3}+\frac{1}{16z}+C = -\frac{1}{48\sin^3 t}+\frac{1}{16\sin t}+C.$$

Повертаючись до початкової змінної і враховуючи формулу

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{x/2}{\sqrt{1+x^2/4}}\right) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}},$$

остаточно отримаємо

$$I = -\frac{1}{48}\cdot\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+C =$$

$$= -\frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\left(\frac{4+x^2}{3x^2}-1\right)+C = -\frac{1}{24}\cdot\frac{(2-x^2)\sqrt{4+x^2}}{x^3}+C. \quad \blacktriangleright$$

3.5. Застосовуючи двічі метод інтегрування частинами до інтеграла $I = \int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$, отримаємо:

$$I = \left|\begin{matrix} U=\ln^2 x, & dV=\sqrt{x}\,dx, \\ dU=\frac{2\ln x}{x}\,dx, & V=\frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{matrix}\right| = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\ln^2 x - \frac{4}{3}\int\sqrt{x}\ln x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} U=\ln x, & dV=\sqrt{x}\,dx, \\ dU=\frac{dx}{x}, & V=\frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{matrix}\right| = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \frac{8}{9}\int\sqrt{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \frac{16}{27}x\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right)+C. \quad \blacktriangleright$$

5.6. Оскільки підінтегральна функція $x^2\arcsin x$ визначена при $x\in(-1;1)$, то для знаходження інтеграла зручно використовувати метод інтегрування частинами:

$$I = \int x^2\arcsin x\,dx = \left|\begin{matrix} U=\arcsin x, & dV=x^2dx, \\ dU=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & V=\frac{x^3}{3} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Останній інтеграл містить радикал $\sqrt{1-x^2}$, тому для його знаходження використаємо заміну $x=\sin t$, взявши $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$I_1 = \frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{matrix} x=\sin t, \\ dx=\cos t\,dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int\sin^3 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1-\cos^2 t)d(\cos t) = -\frac{1}{3}\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C.$$

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, то

$$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(1 - \frac{1-x^2}{3}\right) + C = -\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(2+x^2) + C.$$

Звідси остаточно отримаємо

$$I = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(2+x^2) + C. \quad \blacktriangleright$$

§1.3. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли вигляду

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad I_2 = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad I_4 = \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad I_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

де $a, b, c \in \mathbb{R},\ b^2 - 4ac \neq 0$.

Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені:

$$ax^2+bx+c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) = a\Big(\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\Big) + \Big(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\Big)\Big) =$$

$$= a\Big(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big).$$

Якщо позначити $x + \dfrac{b}{2a} = t,\ dx = dt,\ \dfrac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm k^2$, то інтеграли I_1 та I_3 зведуться до табличних. Тобто

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2},$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}},\ a>0,\ \text{або}\ I_3 = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 \pm t^2}},\ a<0.$$

Інтеграли виду I_2 та I_4 зводяться до інтегралів відповідно I_1 та I_3, якщо виділити в чисельнику похідну квадратного тричлена. В нашому випадку маємо:

$$I_2 = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + \big(N - \frac{Mb}{2a}\big)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

$$I_4 = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Останні інтеграли у виразах для I_2 та I_4 – це інтеграли виду I_1 та I_3. В перших інтегралах робимо заміну $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx = dt$. Тоді

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C,$$

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Інтеграли I_5 після виділення під коренем повного квадрату і відповідної заміни зведуться до вигляду:

$$I_5 = \sqrt{a} \int \sqrt{t^2 \pm k^2}\, dt,\ a>0, \quad \text{або}\ I_5 = \sqrt{-a} \int \sqrt{k^2 \pm t^2}\, dt,\ a<0.$$

Якщо $a>0$, то застосовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо

$$I_5 = \left| \begin{matrix} U = \sqrt{t^2 \pm k^2}, & dV = dt, \\ dU = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, & V = t \end{matrix} \right| = \sqrt{a}t\sqrt{t^2 \pm k^2} - \sqrt{a} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} =$$

$$= \sqrt{a}t\sqrt{t^2 \pm k^2} - \sqrt{a} \int \frac{(t^2 \pm k^2 \mp k^2)\, dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \sqrt{a}t\sqrt{t^2 \pm k^2} - I_5 \pm \sqrt{a}k^2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}.$$

Звідси

$$I_5 = \frac{\sqrt{a}t\sqrt{t^2 \pm k^2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a}k^2}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}.$$

Якщо $a<0$, то

$$I_5 = \left| \begin{matrix} U = \sqrt{k^2 \pm t^2}, & dV = dt, \\ dU = \frac{\pm tdt}{\sqrt{k^2 \pm t^2}}, & V = t \end{matrix} \right| = \sqrt{-a}t\sqrt{k^2 \pm t^2} - \sqrt{-a} \int \frac{(k^2 \pm t^2 - k^2)dt}{\sqrt{k^2 \pm t^2}} =$$

$$= \sqrt{-a}t\sqrt{k^2 \pm t^2} - I_5 + \sqrt{-a}k^2 \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 \pm t^2}}.$$

Звідси

$$I_5 = \frac{\sqrt{-a}t\sqrt{k^2 \pm t^2}}{2} + \frac{\sqrt{-a}k^2}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 \pm t^2}}.$$

Отже, перелічені інтеграли за допомогою наведених вище способів інтегрування зводяться до табличних:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C,$

5) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$

6) $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C.$

Вправи

1. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2},$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1},$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}},$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+4}},$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}},$

6) $\displaystyle\int \sqrt{8+3x-x^2}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+4}\,dx,$

8) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x-9}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+4}}\,dx,$

10) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}\,dx,$

11) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,$

12) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5}\,dx,$

13) $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-x^4-3}\,dx,$

14) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx,$

15) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx,$

16) $\displaystyle\int \frac{6x+1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx,$

17) $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx,$

18) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-x^2+2}\,dx,$

19) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2-x^4-3}\,dx,$

20) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^6-x^3-2}\,dx.$

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - 2 + 6e^{-x}}$, 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{-x} + e^{-2x}}}$,

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$, 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x}$,

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$, 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$,

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 1}}$, 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}$,

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$, 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$,

11) $\displaystyle\int x\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}\,dx$, 12) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}\,dx$,

13) $\displaystyle\int \frac{1 - x + x^2}{x\sqrt{1 + x - x^2}}\,dx$, 14) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{1 + x^4}}\,dx$,

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 3)^2}$, 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 2x)^2}$,

17) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$, 18) $\displaystyle\int \frac{x}{(2x^2 + 3x + 5)^2}\,dx$,

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + 1}}$, 20) $\displaystyle\int \frac{x - 1}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2}}\,dx$.

Приклади розв'язування вправ

1.11. Спочатку в квадратному тричлені $x^2 + x + 1$ виділимо повний квадрат:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Тоді

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}\,dx = \left| \begin{matrix} x + \frac{1}{2} = t, \\ x = t - \frac{1}{2}, \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t - \frac{1}{2} + 1}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}}\,dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} = \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\right| + C.$$

Повернувшись до початкової змінної, остаточно отримаємо:

$$I = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C. \quad \blacktriangleright$$

2.5. В інтегралі $I = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$ використаємо тригонометричні формули

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}, \quad \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1.$$

Тоді

$$I = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + 5 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5} = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right| = \int \frac{dt}{t^2+2t+5} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} + C.$$

Отже,

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2} + C. \quad \blacktriangleright$$

2.19. В інтегралі виду $I = \int \frac{x^2-1}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}\,dx$ з виразу $\frac{x^2-1}{x+2}$ виділимо цілу частину:

$$\frac{x^2-1}{x+2} = x - 2 + \frac{3}{x+2}.$$

Тоді

$$I = \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + 3\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+1}} = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+1} - 2\ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C_1.$$

$$I_2 = 3\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x+2} = t, \\ x = \frac{1}{t} - 2, \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = -3\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} + 5}} =$$

$$= -3\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}}} =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{5}} \ln \left| t - \frac{2}{5} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{5} t + \frac{1}{5}} \right| + C_2 =$$

$$-\frac{3}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1}{x+2} - \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{1}{5}} \right| + C_2.$$

Отже,

$$I = \sqrt{x^2+1} - 2\ln|x + \sqrt{x^2+1}| -$$

$$-\frac{3\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{1}{x+2} - \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{1}{5}} \right| + C. \quad \blacktriangleright$$

§ 1.4. Інтегрування раціональних функцій

Оскільки інтегрування цілої раціональної функції або многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, проводиться тривіальним чином, то розглянемо способи інтегрування раціонального дробу $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Зауважимо, що якщо степінь многочлена $P(x)$ менший за степінь многочлена $Q(x)$, то раціональний дріб називається ***правильним***, в протилежному випадку – ***неправильним***.

Якщо раціональний дріб неправильний, то діленням многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ його можна подати у вигляді суми цілої раціональної функції (ціла частина) та правильного раціонального дробу (дробова частина), тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $T(x)$ – многочлен, $R(x)$ – остача від ділення $P(x)$ на $Q(x)$.

Відомо, що правильний нескоротний раціональний дріб можна подати, причому єдиним способом, у вигляді суми скінченної кількості елементарних раціональних простих дробів вигляду:

$$1)\ \frac{A}{x-a}, \quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k}, \quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

де A, M, N, a, p, q – дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо алгоритм інтегрування раціональної функції, вважаючи її правильним раціональним дробом $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

1) Розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні тричлени, що не мають дійсних коренів.

2) Записати дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ через суму елементарних простих дробів, дотримуючись таких правил:

а) кожному множнику $(x-a)^k$ в многочлені $Q(x)$ поставити у відповідність суму з k доданків

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a},$$

де $A_i, i=\overline{1,k}$, – дійсні числа, які називають ***невизначеними коефіцієнтами***;

б) для кожного множника вигляду $(x^2+px+q)^m$, де $p^2-4q<0$, в многочлені $Q(x)$ скласти суму з m доданків

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+px+q},$$

де $B_i, C_i, i=\overline{1,m}$, – невизначені коефіцієнти.

3) Отриману суму елементарних дробів звести до спільного знаменника і прирівняти чисельник до многочлена $R(x)$.

4) Знайти невизначені коефіцієнти із умови рівності двох многочленів.

Цей метод відшукання невідомих коефіцієнтів називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Зауважимо, що при інтегруванні правильного раціонального дробу, знаменник якого має кратні множники, доцільно користуватись формулою Остроградського:

$$\int\frac{R(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{R_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{R_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

де $\dfrac{R_1(x)}{Q_1(x)}$ і $\dfrac{R_2(x)}{Q_2(x)}$ – правильні раціональні дроби.

Якщо многочлен $Q(x)$ має вигляд

$$Q(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^m\cdot\ldots,$$

то

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^{m-1} \cdot \ldots,$$

$$Q_2(x) = (x-a) \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q) \cdot \ldots$$

Очевидно, що $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$.

Якщо n_1, n_2, n – відповідні степені многочленів $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ і $Q(x)$, тобто $n = n_1 + n_2$, то степені многочленів $R_1(x)$, $R_2(x)$ і $R(x)$ рівні відповідно $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ і $n - 1$. Коефіцієнти многочленів $R_1(x)$ та $R_2(x)$ шукаємо, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Для цього спочатку диференціюємо обидві частини формули Остроградського, а потім прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x зліва і справа.

В результаті отримуємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими коефіцієнтами, яка має єдиний розв'язок.

Зауважимо, що многочлени $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ в формулі Остроградського можуть бути знайдені і без розкладу многочлена $Q(x)$. Дійсно, оскільки похідна $Q'(x)$ містить всі прості множники, на які розкладається $Q(x)$ з показниками, на одиницю меншими, то $Q_1(x) = \text{НСД}(Q(x),\, Q'(x))$. Тоді $Q_2(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}$.

Вправи

1. Розкласти раціональні дроби на суму простих дробів:

1) $\dfrac{x}{2x^2-3x-2}$, 2) $\dfrac{x^3}{x^4-5x^2+4}$,

3) $\dfrac{x-2}{x^2-5x-6}$, 4) $\dfrac{x^2-5}{x^4-5x^2+6}$,

5) $\dfrac{x}{x^3+5x^2+8x+4}$, 6) $\dfrac{1}{x^3+1}$,

7) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$, 8) $\dfrac{x^3+x-1}{x^4+4x^2+4}$,

9) $\dfrac{x^2-5}{x^4+6x^2+8}$, 10) $\dfrac{x^5}{x^6+27x^4+243x^2+729}$.

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{4x^3-x}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3},$

11) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}\,dx,$ 12) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx,$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)},$ 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)},$

15) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx,$ 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1},$

17) $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx,$ 18) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,dx,$

19) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx,$ 20) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}\,dx.$

3. Знайти інтеграли, використовуючи формулу Остроградського:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2},$ 2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4+1)^2}\,dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{9}{5x^2(3-2x^2)^3}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^3}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^3}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{x(2x^2+2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^3}.$

4. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^2}{x^6+1}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{x^8}{x^{18}+2}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^6+9x^3+8}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+3)^2}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^8+1)^2}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

5. Вивести рекурентні формули для обчислення інтегралів:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(a+bx)^m},\ \ n,m\in\mathbb{N},$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^n}{(a+bx)^m}\,dx,\ \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ m\in\mathbb{N},$

3) $\displaystyle\int x\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)^m dx,\ \ m\in\mathbb{N},$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)^m(c+dx)^n},\ \ n,m\in\mathbb{N},$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^n},\ \ n\in\mathbb{N},$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2+b^2x^2)^n},\ \ n\in\mathbb{N},$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(a^2+b^2x^2)^m},\ \ n,m\in\mathbb{N},$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)^n},\ \ n\in\mathbb{N},$

9) $\displaystyle\int \frac{x^n}{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx,\ \ n,m\in\mathbb{N},$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(a^2-b^2x^2)^m},\ \ n,m\in\mathbb{N}.$

Приклади розв'язування вправ

2.20. Розкладемо знаменник підінтегрального правильного раціонального дробу $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}$. Тоді

$$(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)=(x^2+1)^2(x-2).$$

За методом невизначених коефіцієнтів подамо підінтегральний дріб у вигляді

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів зліва і справа:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+D)(x-2)(x^2+1)+(Ex+F)(x-2)=$$

$$=(A+B)x^4+(D-2B)x^3+(2A+B-2D+E)x^2+(D-2B-2E+F)x+A-2D-2F.$$

Отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{c|c} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+D=0, \\ x^2 & 2A+B-2D+E=2, \\ x & -2B+D-2E+F=2, \\ x^0 & A-2D-2F=13. \end{array}$$

З першого і другого рівнянь маємо відповідно $A=-B,\ D=2B$. Тоді

$$E=2+2B-B+4B=5B+2,$$

$$F=2+10B+4=10B+6.$$

З останнього рівняння отримуємо $B=-1$. Тоді $A=1,\ D=-2,\ E=-3,$ $F=-4$.

Отже,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx = I_1 - I_2 - I_3.$$

Знайдемо кожен інтеграл зокрема:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| + C_1,$$

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + C_2,$$

$$I_3 = \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg} x + C_3 = \frac{4x-3}{2(x^2+1)} + 2\operatorname{arctg} x + C_3.$$

Тоді остаточно отримаємо

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\operatorname{arctg} x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C. \ ▶$$

3.4. Спочатку використаємо в інтегралі заміну змінних:

$$\int \frac{x^9}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^8}{(x^4+1)^2}\,d(x^2) = \left|x^2=t\right| = \frac{1}{2}\int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

В дробі $\dfrac{t^4}{(t^2+1)^2}$ виділимо цілу і дробову частини:

$$\frac{t^4}{(t^2+1)^2} = 1 - \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}.$$

Тоді

$$\int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\,dx = \int dt - \int \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

До другого інтеграла справа застосуємо формулу Остроградського:

$$\int \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{At+B}{t^2+1} + \int \frac{Dt+E}{t^2+1}\,dt.$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2} = \frac{At^2+A-2At^2-2Bt}{(t^2+1)^2} + \frac{Dt+E}{t^2+1}.$$

Звівши до спільного знаменника дроби справа і прирівнявши чисельники, отримаємо рівність

$$2t^2+1 = -At^2 - 2Bt + A + Dt^3 + Et^2 + Dt + E.$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної t зліва і справа, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} D = 0, \\ -A+E = 2, \\ -2B+D = 0, \\ A+E = 1. \end{cases}$$

Тоді $A = -\dfrac{1}{2},\ B = 0,\ D = 0,\ E = \dfrac{3}{2}.$

В результаті отримаємо

$$\int \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C_1.$$

Тоді

$$\int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\,dt = t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Для початкового інтеграла отримаємо результат

$$\int \frac{x^9}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{x^4+1} - \frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\,x^2 + C. \qquad \blacktriangleright$$

4.6. В підінтегральному виразі $\dfrac{x^5}{x^6+9x^3+8}\,dx$ внесемо x^2 під знак диференціалу. Тоді

$$I = \int \frac{x^5}{x^6+9x^3+8}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,d(x^3)}{x^6+9x^3+8} = \Big|x^3 = t\Big| = \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+9t+8}\,dt.$$

Для розкладу правильного раціонального дробу використаємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{t}{(t+1)(t+8)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+8} = \frac{(A+B)t+8A+B}{(t+1)(t+8)}.$$

Звідси $A = -\dfrac{1}{7},\ B = \dfrac{8}{7}$.

Для інтеграла I маємо розклад

$$\int \frac{t}{(t+1)(t+8)}\,dt = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{8}{7}\int \frac{dt}{t+8} =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|t+1| + \frac{8}{7}\ln|t+8| + C.$$

Після повернення до початкової змінної одержимо остаточний результат:

$$I = -\frac{1}{7}\ln|x^3+1| + \frac{8}{7}\ln|x^3+8| + C. \qquad \blacktriangleright$$

5.7. Введемо позначення

$$I_{n,m} = \int \frac{dx}{x^n(a^2+b^2x^2)^m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Нехай $n \geqslant 2,\ m \in \mathbb{N}$. Тоді

$$I_{n,m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+b^2x^2-b^2x^2}{x^n(a^2+b^2x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^n(a^2+b^2x^2)^{m-1}} -$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}(a^2+b^2x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^n(a^2+b^2x^2)^{m-1}} - \frac{b^2}{a^2} I_{n-2,\,m}.$$

Для першого інтеграла позначимо

$$U = \frac{1}{(a^2+b^2x^2)^{m-1}}, \quad dV = \frac{dx}{x^n}.$$

Тоді

$$dU = \frac{2b^2x(1-m)}{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx, \quad V = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$$

і

$$I_{n,m} = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(n-1)x^{n-1}(a^2+b^2x^2)^{m-1}} - \frac{2b^2(1-m)}{a^2(1-n)}I_{n-2,m} - \frac{b^2}{a^2}I_{n-2,\,m} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(n-1)x^{n-1}(a^2+b^2x^2)^{m-1}} - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2m+n-3}{n-1}I_{n-2,m}.$$

Отже, якщо n парне, то виведена рекурентна формула приведе до обчислення інтеграла

$$I_{0,m} = \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^m} = \frac{1}{b^{2m}}\int\frac{dx}{\left(\frac{a^2}{b^2}+x^2\right)^m}.$$

Рекурентна формула для останнього інтеграла одержана в § 1.2.

Якщо n непарне, то встановлена нами рекурентна формула приведе до обчислення інтеграла

$$I_{1,m} = \int\frac{dx}{x(a^2+b^2x^2)^m}.$$

Виведемо рекурентну формулу для знаходження цього інтеграла. Для $m>1$ отримаємо

$$I_{1,m} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+b^2x^2-b^2x^2}{x(a^2+b^2x^2)^m}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x(a^2+b^2x^2)^{m-1}}\,dx - \frac{b^2}{a^2}\int\frac{x}{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{1,m-1} + \frac{b^2}{2a^2(m-1)(a^2+b^2x^2)^{m-1}},$$

а для $m=1$ маємо

$$I_{1,1} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+b^2x^2-b^2x^2}{x(a^2+b^2x^2)}\,dx = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x} - \frac{b^2}{a^2}\int\frac{x}{a^2+b^2x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\ln|x| - \frac{1}{2a^2}\ln(a^2+b^2x^2) + C = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{a^2+b^2x^2} + C. \quad \blacktriangleright$$

§ 1.5. Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо деякі типи інтегралів від ірраціональних функцій, які за допомогою певної підстановки можна звести до інтегралів від раціональної функції, які вже вміємо інтегрувати.

1. Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx$, де $m_i, n_i, i=\overline{1,p}$, – натуральні числа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – задані дійсні числа, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, бо інакше $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ не залежатиме від x.

Такі інтеграли зводяться до інтегралів від раціональної функції за допомогою підстановки $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$, $i=\overline{1,p}$.

2. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, $a \neq 0$, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок Ейлера. Вибір підстановки залежить від квадратного тричлена ax^2+bx+c :

а) якщо $a>0$, то використовується одна із наступних підстановок:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x, \quad t=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\,x,$$

$$t=-\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x, \quad t=-\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}\,x,$$

яка називається ***першою підстановкою Ейлера***;

б) якщо $c>0$, то використовується одна із наступних підстановок:

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}, \quad t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x},$$

$$t=\frac{-\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x}, \quad t=\frac{-\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x},$$

яка називається ***другою підстановкою Ейлера***;

в) якщо x_1, x_2 – дійсні різні корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то використовується одна із підстановок

$$t=\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}}, \quad t=\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}},$$

яка називається ***третьою підстановкою Ейлера***.

Зауважимо, що способи інтегрування а), б), в) вичерпують всеможливі випадки. Однак, обчислення інтегралів за допомогою підстановок Ейлера, як правило, приводить до достатньо складних раціональних функцій. Тому слід попередньо перевірити, чи не можна обчислити інтеграл більш зручнішим способом.

3. Інтеграли виду

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

де m, n, p – раціональні числа, зводяться до інтегралів від раціональної функції за допомогою ***підстановок Чебишева***.

Вираз $x^m(a + bx^n)^p \, dx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називається ***диференціальним біномом*** або ***біноміальним диференціалом***. Інтеграл від диференціального бінома обчислюється в скінченному виді лише в трьох випадках:

а) якщо $p \in \mathbb{Z}$, то використовується підстановка $x = t^k$, де k – спільний знаменник чисел m та n;

б) якщо $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то використовується підстановка $a + bx^n = t^k$, де k – знаменник числа p;

в) якщо $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то використовується підстановка $\dfrac{a + bx^n}{x^n} = t^k$, де k – знаменник числа p.

Теорема Чебишева. *Якщо жодна із умов* $p \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ *не виконується, то диференціальний біном в елементарних функціях не інтегрується.*

4. Інтеграли виду $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$, $P(x)$ – многочлен n-го степеня, можна обчислити, використовуючи його зображення у вигляді співвідношення

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q(x)$ – многочлен $(n-1)$-го степеня з невідомими коефіцієнтами, λ – невідома константа.

Коефіцієнти многочлена $Q(x)$ і λ знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів, попередньо продиференціювавши обидві частини вище наведеного співвідношення.

В результаті, обчислення інтеграла $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ зведеться до обчислення інтеграла $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (що містить квадратний тричлен).

5. Інтеграли виду $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де A, α, a, b, c – дійсні числа, $k \in \mathbb{N}$, за допомогою підстановки $x = \dfrac{1}{t} + \alpha$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, зводяться до розглянутих вище.

6. Інтеграли виду $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, де M, N, p, q, a, b, c – дійсні числа, $m \in \mathbb{N}$, причому $p^2 - 4q < 0$. Розглянемо для таких інтегралів два способи інтегрування.

а) Якщо $ax^2+bx+c = a(x^2+px+q)$, то наведений інтеграл зводиться до обчислення інтеграла виду $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx$, який, в свою чергу, зводиться до обчислення суми двох інтегралів

$$\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

Скориставшись підстановкою $x^2+px+q = t$, обчислюємо перший інтеграл.

При обчисленні другого інтеграла можна скористатись ***підстановкою Абеля***, а саме

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}} \quad \text{або} \quad \sqrt{x^2+px+q} = x + \frac{p}{2}.$$

Якщо піднести обидві частини останньої рівності до квадрату, то дістанемо

$$t^2(x^2+px+q) = x^2+px+\frac{p^2}{4} \quad \text{або} \quad x^2+px+q = \frac{q-\frac{p^2}{4}}{1-t^2}.$$

Якщо цю саму рівність продиференціювати, то отримаємо

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{x^2+px+q} + t\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = 1 \quad \text{або} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{dt}{1-t^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} =$$

$$= \Big(\frac{4}{4q-p^2}\Big)^m \int (1-t^2)^{m-1} dt.$$

б) Якщо $ax^2+bx+c \neq a(x^2+px+q)$, то при $b=ap$ виконаємо заміну $x+\dfrac{p}{2}=t$, яка обчислення інтеграла $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ зведе до обчислення інтеграла виду

$$\int \frac{Mt-\frac{p}{2}M+N}{(t^2+q-\frac{p^2}{4})^m\sqrt{at^2+c-\frac{ap^2}{4}}}\,dx.$$

Якщо $b\neq ap$, то виконуємо дробово-лінійну підстановку $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$ таку, щоб у поданні квадратних тричленів x^2+px+q і ax^2+bx+c через змінну t були відсутні доданки з t.

Підставивши вираз для x в квадратний тричлен і прирівнявши коефіцієнти біля змінної t до нуля, отримаємо систему

$$\begin{cases} 2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+2q=0, \\ 2a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+2c=0. \end{cases}$$

Відносно невідомих $\alpha\beta$ та $\alpha+\beta$ система є лінійною і її визначник $2b-2ap\neq 0$. Отже, вона має єдиний розв'язок

$$\alpha\beta=\frac{cp-bq}{b-ap}, \quad \alpha+\beta=2\,\frac{aq-c}{b-ap},$$

тобто α і β є коренями квадратного рівняння

$$(b-ap)z^2+2(c-aq)z+cp-bq=0$$

з додатним дискримінантом.

Після такої підстановки початковий інтеграл зведеться до інтеграла виду

$$\int \frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\mu t^2+\nu}}\,dt,$$

де $P(t)$ – многочлен степеня $2m-1$ і $\lambda>0$.

Останній, в свою чергу, зводиться до обчислення інтегралів виду

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\mu t^2+\nu}}\,dt,$$

де $k=\overline{1,m}$.

Зауважимо, що такого самого виду є інтеграл у випадку, коли $b=ap$.

Подавши останній інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, отримуємо, що інтеграл $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\mu t^2+\nu}}\,dt$ раціоналізується підстановкою $\mu t^2+\nu=u^2$, а інтеграл $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\mu t^2+\nu}}$ – підстановкою Абеля $u=\dfrac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2+\nu}}$.

Вправи

1. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$, 2) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$,

3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}\,dx$, 4) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x}$,

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$,

7) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx$, 8) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$,

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx$, 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$,

11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$, 12) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2\sqrt{x}}$,

13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$, 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^5}}$,

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$, 16) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$,

17) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{1+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{dx}{x^2}$, 18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$,

19) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,dx$, 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $a\neq b$.

2. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

$$1)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}, \qquad 2)\ \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}},$$

$$3)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}, \qquad 4)\ \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$5)\ \int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx, \qquad 6)\ \int \frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}\,dx,$$

$$7)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx, \qquad 8)\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}},$$

$$9)\ \int \sqrt{x^6-x^4}\,dx, \qquad 10)\ \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$$

3. Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

$$1)\ \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx, \qquad 2)\ \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$3)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}\,dx, \qquad 4)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}},$$

$$5)\ \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^{15}+x^{14}}}, \qquad 6)\ \int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}},$$

$$7)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}, \qquad 8)\ \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx,$$

$$9)\ \int \frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}\,dx, \qquad 10)\ \int \sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+x\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

4. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}, \qquad 2)\ \int \frac{x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}\,dx,$$

$$3)\ \int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}\,dx, \qquad 4)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}},$$

$$5)\ \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx, \qquad 6)\ \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}},$$

$$7)\ \int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}, \qquad 8)\ \int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx,$$

$$9)\ \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}, \qquad 10)\ \int \frac{x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx.$$

Приклади розв'язування задач

1.9. В підінтегральному виразі наявні радикали $\sqrt{2x-3}$ і $\sqrt[3]{2x-3}$, тому робимо заміну $2x-3=t^6$. Тоді $x=\dfrac{t^6+3}{2}$. Отже,

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\frac{t^6+3}{2}, \\ dx=3t^5dt \end{matrix}\right| = 3\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt.$$

В останньому інтегралі маємо неправильний раціональний дріб $\dfrac{t^8}{t^2+1}$. Виділимо цілу і дробову частини цього дробу:

$$\frac{t^8}{t^2+1} = t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

Тоді

$$3\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt = 3\int (t^6-t^4+t^2-1)\,dt + 3\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\frac{3t^7}{7}-\frac{3t^5}{5}+t^3-3t+3\operatorname{arctg} t + C.$$

Повернувшись до початкової змінної, отримуємо остаточну відповідь

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx = \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-3)^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-3)^5}+$$

$$+\sqrt{2x-3}-3\sqrt[6]{2x-3}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}+C. \quad \blacktriangleright$$

2.3. Оскільки в квадратному тричлені $1-2x-x^2$ маємо, що $c=1>0$, то використаємо другу підстановку Ейлера:

$$\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату:

$$1-2x-x^2 = t^2x^2-2tx+1.$$

Тоді

$$x = 2\cdot\frac{t-1}{t^2+1}, \quad dx = 2\cdot\frac{2t-t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \left|\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2t-t^2+1}{(t^2+1)^2}}{t\cdot\frac{t-1}{t^2+1}}\,dt = \int \frac{2t-t^2+1}{t(t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

В результаті застосування другої підстановки Ейлера отримали інтеграл від раціональної функції. Розкладемо підінтегральну функцію за методом невизначених коефіцієнтів на прості дроби:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Dt+E}{t^2+1} =$$

$$= \frac{(A+B+D)t^3 + (-A-D+E)t^2 + (A+B-E)t - A}{t(t-1)(t^2+1)}.$$

Звідси маємо систему

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ -A-D+E=-1, \\ A+B-E=2, \\ -A=1, \end{cases}$$

розв'язком якої є $A=-1,\ B=1,\ D=0,\ E=-2$.

Отже,

$$\int \frac{\frac{2t-t^2+1}{(t^2+1)^2}}{t\cdot\frac{t-1}{t^2+1}}\,dt = -\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dt}{t-1} - 2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Зробивши зворотню заміну $t = \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}$, отримаємо остаточний результат

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right| - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + C. \blacktriangleright$$

3.10. Перетворимо підінтегральний вираз $\sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+x\sqrt[3]{x}}\,dx$ до вигляду диференціального бінома $x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{7}}dx$. Тоді отримаємо, що $m=\dfrac{1}{3}$, $p=\dfrac{1}{7}$, $n=\dfrac{4}{3}$.

Оскільки $p = \dfrac{1}{7} \notin \mathbb{Z}$, то перша підстановка Чебишева на підходить. Оскільки $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{4}{3}} = 1 \in \mathbb{Z}$, то можемо використати другу підстановку Чебишева, тобто $1 + x^{\frac{4}{3}} = t^7$. Тоді $x = (t^7-1)^{\frac{3}{4}}$.

Отже,

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{7}} dx = \left|\begin{array}{c} x = (t^7-1)^{\frac{3}{4}}, \\ dx = \frac{21}{4}t^6(t^7-1)^{-\frac{1}{4}}\,dt \end{array}\right| = \frac{21}{4}\int t^7\,dt = \frac{21}{32}\,t^8 + C.$$

Повертаючись до початкової змінної x, отримаємо результат:

$$\int \sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+x\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{21}{32}\,\sqrt[7]{(1+x\sqrt[3]{x})^8} + C. \quad \blacktriangleright$$

4.5. Підінтегральний вираз $\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ перетворимо до вигляду $\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Тоді

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} = I_1 + I_2.$$

Звідси

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + C_1.$$

При обчисленні інтеграла I_2 використаємо підстановку Абеля, а саме

$$t = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Тоді

$$x^2+x+1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-t^2}.$$

З іншого боку

$$\frac{dt}{dx}\,\sqrt{x^2+x+1} + t\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = 1,$$

тобто

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{dt}{1-t^2}.$$

Отже,

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}\,t + C_2 = \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C_2.$$

Тоді

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C = \frac{2x-2}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C. \quad ◄$$

§ 1.6. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо методи інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

1. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція, що залежить від $\sin x$ та $\cos x$, в загальному випадку зводяться до інтегрування раціональної функції нової змінної підстановкою $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Дійсно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже, інтеграли $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ завжди беруться у скінченному виді. Дана підстановка називається ***універсальною тригонометричною підстановкою***.

Зауважимо, що в багатьох випадках вона приводить до громіздких інтегралів.

Розглянемо випадки, використовуючи які суттєво вдасться спростити знаходження інтегралів $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$:

а) якщо виконується рівність $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то корисно використовувати підстановку $\cos x = t$;

б) якщо виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то корисно використовувати підстановку $\sin x = t$;

в) якщо виконується рівність $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то корисно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, де m, n – раціональні числа, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Розглянемо наступні випадки:

а) хоча б одне із чисел m або n – непарне додатне число. Якщо n – непарне число, то застосовується підстановка $\sin x = t$, якщо m – непарне число, то застосовується підстановка $\cos x = t$;

б) обидва показники степенів m і n – парні невід'ємні числа. Тоді при інтегруванні потрібно застосовувати формули

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

в) якщо $m + n = -2k,\ k \in \mathbb{N}$ ($m + n$ є цілим парним від'ємним числом), то доцільно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$;

г) в інших випадках інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ зручно зводити заміною $\sin x = t$ до інтегралів від диференціального бінома $\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt$.

Останній інтеграл береться в скінченному виді тільки у трьох випадках:

1) якщо $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, то використовується заміна $t = z^k$, де k – знаменник числа m;

2) якщо $\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$, то використовується заміна $1 - t^2 = z^k$, де k – знаменник числа $\frac{n-1}{2}$;

3) якщо $\frac{n-1}{2} + \frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$, то застосовується заміна $\frac{1 - t^2}{t^2} = z^k$, де k – знаменник числа $\frac{n-1}{2}$.

3. Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ або $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$, де m – ціле додатне число, знаходять, використовуючи формули

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{або} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

4. Інтеграли $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$ зводять до простіших за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x \right),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right),$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

Вправи

1. Знайти інтеграли, використовуючи універсальну тригонометричну підстановку:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\sin x}$, 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x}$,

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$, 4) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$,

5) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$,

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$, 8) $\displaystyle\int \frac{6+\cos x}{5+4\sin x}\,dx$,

9) $\displaystyle\int \frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\,dx$, 10) $\displaystyle\int \frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}\,dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$, 2) $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$,

3) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx$, 4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x+\cos 2x}\,dx$,

5) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos 2x}\,dx$,

7) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos 2x\,dx$, 8) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos 3x}\,dx$,

9) $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{\sin x+\cos 2x}\,dx$, 10) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$,

11) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$, 12) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx$,

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$, 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$,

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, 16) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$,

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}$, 18) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^6 x\,dx$,

19) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx,$ 20) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3\,dx.$

3. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}},$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}},$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}},$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}},$

5) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 5x\,dx,$

7) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \sin x \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{3}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \cos^2 ax \cos^2 bx \cos 3x\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx,$

11) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx,$ 12) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx,$

13) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}\,dx,$ 14) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx,$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x},$ 16) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx,$

17) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx,$ 18) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x},$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x},$ 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

4. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \sin(n+1)x \cos^{n-1} x\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \cos(n+1)x \sin^{n-1} x\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\,dx,$

5) $\displaystyle\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int \frac{\cos 2nx}{\sin x}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{\sin(2n+1)x}{\cos x}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int \frac{\sin 2nx}{\cos x}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{\cos 2nx}{\cos x}\,dx,$

11) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}\,dx,$ 12) $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin^n x}\,dx,$

13) $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{\sin^n x}\,dx,$ 14) $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\cos^n x}\,dx,$

15) $\displaystyle\int \frac{\sin 5x}{\cos^n x}\,dx,$ 16) $\displaystyle\int \frac{\cos 5x}{\sin^n x}\,dx.$

Приклади розв'язування вправ

1.8. Зробимо заміну $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}.$ Тоді

$$\int \frac{6+\cos x}{5+4\sin x}\,dx = \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| = \int \frac{6+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{5t^2+7}{5t^2+8t+5} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2+\frac{7}{5}}{(t^2+\frac{8}{5}t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

До останнього інтеграла застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{t^2+\frac{7}{5}}{(t^2+\frac{8}{5}t+1)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+\frac{8}{5}t+1} + \frac{Dt+E}{t^2+1} =$$

$$= \frac{At^3+At+Bt^2+B+Dt^3+\frac{8}{5}Dt^2+Dt+Et^2+\frac{8}{5}Et+E}{(t^2+\frac{8}{5}t+1)(t^2+1)}$$

Звідси приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} A+D=0, \\ B+\frac{8}{5}D+E=1, \\ A+D+\frac{8}{5}E=0, \\ B+E=\frac{7}{5}. \end{cases}$$

Розв'язком системи є $A=\dfrac{1}{4},\ B=\dfrac{7}{5},\ D=-\dfrac{1}{4},\ E=0.$ Тоді

$$2\int \frac{t^2+\frac{7}{5}}{(t^2+\frac{8}{5}t+1)(t^2+1)}\,dt = 2\int \frac{\frac{1}{4}t+\frac{7}{5}}{t^2+\frac{8}{5}t+1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+1} = I_1+I_2.$$

Знаходимо $I_1,\ I_2:$

$$I_1 = 2\int \frac{\frac{1}{4}t+\frac{7}{5}}{(t+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}\,dt = \left| \begin{matrix} t+\frac{4}{5}=z, \\ dt=dz \end{matrix} \right| = 2\int \frac{\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}}{z^2+\frac{9}{5}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{zdz}{z^2+\frac{9}{25}} + \frac{12}{5}\int \frac{dz}{z^2+\frac{9}{25}} = \frac{1}{4}\ln\left(z^2+\frac{9}{25}\right) + 4\operatorname{arctg}\frac{5z}{3} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\Big(t^2 + \frac{8}{5}t + 1\Big) + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{5t+4}{4} + C_1.$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t^2+1} = -\frac{1}{4}\ln(t^2+1) + C_2.$$

Остаточно отримаємо:

$$2\int\frac{t^2+\frac{7}{5}}{(t^2+\frac{8}{5}t+1)(t^2+1)}\,dt = \frac{1}{4}\ln\frac{t^2+\frac{8}{5}t+1}{t^2+1} + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{5t+4}{3} + C.$$

Зробивши зворотну заміну, матимемо:

$$\int\frac{6+\cos x}{5+4\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{8}{5}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+4}{3} + C. \qquad \blacktriangleright$$

2.19. Використаємо формулу $1+\mathrm{tg}^2\,x = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$ Тоді $\mathrm{tg}^2\,x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ і

$$\int\mathrm{tg}^5\,x\,dx = \int\mathrm{tg}^3\,x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)\,dx = \int\frac{\mathrm{tg}^3\,x}{\cos^2 x}\,dx - \int\mathrm{tg}^3\,x\,dx =$$

$$= \int\mathrm{tg}^3\,x\,d(\mathrm{tg}\,x) - \int\mathrm{tg}\,x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)\,dx =$$

$$= \int\mathrm{tg}^3\,x\,d(\mathrm{tg}\,x) - \int\mathrm{tg}\,x\,d(\mathrm{tg}\,x) + \int\mathrm{tg}\,x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^4\,x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{2} - \ln|\cos x| + C. \qquad \blacktriangleright$$

3.5. Маємо інтеграл вигляду $\displaystyle\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, де m – непарне, n – раціональне. Виділивши $\sin x$, внесемо його під знак диференціалу і замінимо $\sin^2 x$ виразом $1-\cos^2 x$. Отже,

$$I = \int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx = -\int\frac{\sin^2 x\,d(\cos x)}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = -\int\frac{(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

В отриманому інтегралі зробимо заміну $\cos x = t$. Тоді

$$I = \Big|\cos x = t\Big| = -\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt[3]{t^4}}\,dt = -\int(t^{-\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}})\,dt =$$

$$= -\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{t}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + C.$$

Підставивши замість t функцію $\cos x$, отримаємо:

$$I = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C. \qquad \blacktriangleright$$

4.14. Зведемо до інтеграла вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, понизивши в підінтегральній функції кратність аргумента. Тоді

$$\int \frac{\sin 4x}{\cos^n x}\,dx = \int \frac{4\sin x\cos x(2\cos^2 x - 1)}{\cos^n x}\,dx =$$

$$= -4\int \frac{(2\cos^3 x - \cos x)\,d(\cos x)}{\cos^n x} = \Big|\cos x = t\Big| = -4\int \frac{(2t^3 - t)\,dt}{t^n} =$$

$$= -8\int t^{-n+3}\,dt + 4\int t^{1-n}\,dt = -8\cdot\frac{t^{-n+4}}{4-n} + 4\cdot\frac{t^{2-n}}{2-n} + C =$$

$$= \frac{8}{n-4}\cdot\frac{1}{t^{n-4}} + \frac{4}{2-n}\cdot\frac{1}{t^{n-2}} + C.$$

Зробивши зворотну заміну $t = \cos x$, остаточно отримаємо:

$$I = \frac{8}{n-4}\cdot\frac{1}{\cos^{n-4} x} + \frac{4}{2-n}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2} x} + C. \quad \blacktriangleright$$

§ 1.7. Інтегрування деяких трансцендентних функцій

Розглянемо інтегрування виразів, що містять трансцендентні функції.

1. Інтеграли виду $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ беруться в скінченному виді за допомогою підстановки $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

Дійсно,

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arth} t, \quad dx = 2\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big)' = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Тоді,

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = \int R\Big(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\Big)\cdot\frac{2dt}{1-t^2}$$

є інтегралом від раціональної функції.

За аналогією до інтегрування тригонометричних функцій можна розглянути окремі випадки, коли інтегрування виразу $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$ суттєво спрощується:

а) якщо $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то використовується підстановка $\operatorname{ch} x = t$,

б) якщо $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то використовується підстановка $\operatorname{sh} x = t$,

в) якщо $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то використовується підстановка $\operatorname{th} x = t$.

2. Інтеграл виду $\displaystyle\int R(e^x)\,dx$, де $R(e^x)$ – раціональна функція, що залежить від e^x, береться в скінченному виді за допомогою підстановки $t = e^x$.

Дійсно, тоді $x = \ln t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ і $\displaystyle\int \frac{R(t)}{t}\,dt$ – інтеграл від раціональної функції.

3. Інтеграли виду $\displaystyle\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx$ і $\displaystyle\int x^n e^{ax} \sin bx\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, беруться в скінченному вигляді за допомогою формули інтегрування частинами з врахуванням того, що

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C.$$

Дійсно,

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\,dx = \left| \begin{matrix} U = x^n, & dV = e^{ax} \sin bx\,dx, \\ dU = nx^{n-1}\,dx, & V = \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\,dx +$$

$$+ \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\,dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx = \left| \begin{matrix} U = x^n, & dV = e^{ax} \cos bx\,dx, \\ dU = nx^{n-1}\,dx, & V = \dfrac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} - \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\,dx -$$

$$- \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\,dx.$$

Ці рекурентні формули дозволяють за скінченну кількість кроків звести вихідні інтеграли до вигляду $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ або $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

4. Відомо, що інтеграли виду $\int P(x)\sin bx\,dx$, де $P(x)$ – многочлен n-го степеня, беруться в скінченному виді за допомогою формули інтегрування частинами. Однак, дробові вирази $\dfrac{e^x}{x^n}\,dx$, $\dfrac{\sin x}{x^n}\,dx$, $\dfrac{\cos x}{x^n}\,dx$, де $n\in\mathbb{N}$, вже не інтегруються в скінченному виді.

За допомогою відповідних рекурентних формул вони можуть бути зведені до трьох основних інтегралів:

$$\int\frac{e^x}{x}\,dx=\left|\begin{array}{c}e^x=t,\\ x=\ln t,\\ dx=\frac{dt}{t}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\ln t}=\operatorname{li}t \text{ – інтегральний логарифм,}$$

$$\int\frac{\cos x}{x}\,dx=\operatorname{ci}x \text{ – інтегральний косинус,}$$

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{si}x \text{ – інтегральний синус.}$$

Вправи

1. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+2\operatorname{ch}x}$,

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{3\operatorname{ch}x+5\operatorname{sh}x+2}$,

3) $\displaystyle\int\frac{1+\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x(1+2\operatorname{ch}x)}\,dx$,

4) $\displaystyle\int\frac{1+\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}x(1+\operatorname{ch}x)}\,dx$,

5) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}^5x}{\operatorname{ch}^3x}\,dx$,

6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^3x\operatorname{ch}^4x}$,

7) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}4x}{\operatorname{ch}^4x}\,dx$,

8) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}2x}{\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}2x}\,dx$,

9) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}^7x}{\operatorname{sh}^2x}\,dx$,

10) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}^3x}{\operatorname{sh}^5x}\,dx$,

11) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}4x}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}2x}\,dx$,

12) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}3x}{\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}2x}\,dx$,

13) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x-4\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x+9\operatorname{ch}^2x}$,

14) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^6x}$,

15) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{th}^2x}{\operatorname{ch}^4x}\,dx$,

16) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\operatorname{sh}^4x}$,

17) $\displaystyle\int\operatorname{th}^5x\,dx$,

18) $\displaystyle\int\operatorname{cth}^7x\,dx$,

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x}, \quad n > 2,$ 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}, \quad n > 2.$

2. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \frac{e^x-3}{e^x+1}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2},$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^x)^3},$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}},$ 6) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}-e^x-3}{e^{2x}-2e^x-3}\,dx,$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}},$ 8) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{1-e^x}},$ 10) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$

3. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int \operatorname{arsh}\frac{x}{a}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int \operatorname{arch}\frac{x}{a}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \operatorname{arth}\frac{x}{a}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int \operatorname{arcth}\frac{x}{a}\,dx,$

5) $\displaystyle\int x\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\,dx,$ 6) $\displaystyle\int x\operatorname{arch}\frac{x}{a}\,dx,$

7) $\displaystyle\int x\operatorname{arth}\frac{x}{a}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int x\operatorname{arcth}\frac{x}{a}\,dx,$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arsh}x\,dx,$ 10) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arch}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx.$

4. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int e^{-x}\arcsin e^x\,dx,$ 2) $\displaystyle\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg}x}\,dx,$

3) $\displaystyle\int \sqrt{3^x-1}\,dx,$ 4) $\displaystyle\int e^{2x}\sin e^x\,dx,$

5) $\displaystyle\int e^x\ln(e^x+2)\,dx,$ 6) $\displaystyle\int x^2e^{2x}\sin 3x\,dx,$

7) $\displaystyle\int xe^{3x}\sin 3x\cos 2x\,dx,$ 8) $\displaystyle\int x^3e^x\cos^2 x\,dx,$

9) $\displaystyle\int x^2e^{2x}\sin^3 x\cos x\,dx,$ 6) $\displaystyle\int xe^{4x}\sin^3 x\cos^5 x\,dx.$

Приклади розв'язування вправ

1.4. Маємо інтеграл вигляду $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$. Тоді використаємо підстановку $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$:

$$\int \frac{1+\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x(1+\operatorname{ch} x)}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{th}\frac{x}{2}, \\ dx = \frac{2dt}{1-t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1+\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}(1+\frac{1+t^2}{1-t^2})} \cdot \frac{2dt}{1-t^2} =$$

$$= 2\int \frac{1+2t-t^2}{4t}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}+2-t\right)dt = \frac{1}{2}\Big(\ln|t| + 2t - \frac{t^2}{2}\Big) + C.$$

Виконуючи зворотню заміну, отримаємо

$$\int \frac{1+\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x(1+\operatorname{ch} x)}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln\Big|\operatorname{th}\frac{x}{2}\Big| + 2\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{2}\Big) + C. \quad ▶$$

2.8. Проведемо заміну $\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}} = t$. Підінтегральна функція визначена при $x \geqslant 0$, дріб $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} < 1$, тому $0 \leqslant t < 1$. В такому випадку $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = t^2$, $e^x = \dfrac{t^2+1}{1-t^2}$. Звідси $x = \ln\dfrac{t^2+1}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{4t\,dt}{(t^2+1)(1-t^2)}$.

Отже,

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = \int t\cdot\frac{4t\,dt}{(t^2+1)(1-t^2)} = -4\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)} =$$

$$= -2\int\frac{dt}{t^2+1} - 2\int\frac{dt}{t^2-1} = -2\operatorname{arctg} t - \ln\frac{1-t}{t+1} + C.$$

Оскільки, $t = \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$, то

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} - \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}+\sqrt{e^x+1}} + C. \quad ▶$$

3.10. Зробимо заміну $\operatorname{arch} x = t$. Тоді $x = \operatorname{ch} t$, $dx = \operatorname{sh} t\,dt$.

Отже,

$$\int \frac{\operatorname{arch} x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx = \int \frac{t\operatorname{sh} t dt}{\sqrt{(1+\operatorname{ch}^2 t)^3}}.$$

Останній інтеграл зручно проінтегрувати частинами, позначивши $U = t$, $dV = \dfrac{\operatorname{sh} t\,dt}{\sqrt{(1+\operatorname{ch}^2 t)^3}}$. Тоді $dU = dt$, а $V = \displaystyle\int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\sqrt{(1+\operatorname{ch}^2 t)^3}}$.

Провівши заміну $\operatorname{ch} t = z$, маємо

$$V = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}} = \left| \begin{matrix} z = \operatorname{tg} y, \\ dz = \frac{dy}{\cos^2 y} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dy}{\cos^2 y}}{\frac{1}{\cos^3 y}} = \int \cos y \, dy =$$

$$= \sin y + C = \sin(\operatorname{arctg} z) + C = \sin\left(\arcsin \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) + C =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C = \frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}} + C.$$

Тоді

$$\int \frac{t \operatorname{sh} t \, dt}{\sqrt{(1+\operatorname{ch}^2 t)^3}} = \frac{t \operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}} - \int \frac{\operatorname{ch} t \, dt}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}} = \frac{t \operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}} - \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{\sqrt{2+\operatorname{sh}^2 t}} =$$

$$= \frac{t \operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 t}} - \ln|\operatorname{sh} t + \sqrt{2+\operatorname{sh}^2 t}| + C.$$

Повертаючись до початкової змінної і враховуючи, що $\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x$, $\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) = \sqrt{x^2-1}$, матимемо

$$\int \frac{\operatorname{arch} x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \, dx = \frac{x \operatorname{arch} x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln|\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}| + C. \quad \blacktriangleright$$

4.7. В підінтегральному виразі $xe^{3x} \sin 3x \cos 2x \, dx$ перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму

$$\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x).$$

Тоді

$$\int xe^{3x} \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int xe^{3x} \sin 5x \, dx + \frac{1}{2} \int xe^{3x} \sin x \, dx = I_1 + I_2.$$

Враховуючи, що

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \, e^{ax} + C$$

і

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \, e^{ax} + C,$$

проінтегруємо інтеграли I_1 та I_2 частинами:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int xe^{3x} \sin 5x \, dx = \left| \begin{matrix} U = x, & dV = e^{3x} \sin 5x \, dx, \\ dU = dx, & V = \frac{3 \sin 5x - 5 \cos 5x}{34} e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{68}x(3\sin 5x - 5\cos 5x)e^{3x} - \frac{1}{68}\int (3\sin 5x - 5\cos 5x)e^{3x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{68}x(3\sin 5x - 5\cos 5x)e^{3x} - \frac{3}{68}\int \sin 5x\, e^{3x}\,dx + \frac{5}{68}\int \cos 5x\, e^{3x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{68}x(3\sin 5x - 5\cos 5x)e^{3x} - \frac{3}{68}\Big(\frac{3\sin 5x - 5\cos 5x}{34}\,e^{3x}\Big) +$$

$$+ \frac{5}{68}\Big(\frac{5\sin 5x + 3\cos 5x}{34}\,e^{3x}\Big) + C_1 = \Big(\frac{3}{68}x + \frac{2}{289}\Big)\sin 5x\, e^{3x} -$$

$$- \Big(\frac{5}{68}x - \frac{15}{1156}\Big)\cos 5x\, e^{3x} + C_1.$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int x e^{3x}\sin x\,dx = \begin{vmatrix} U = x, & dV = e^{3x}\sin x\,dx, \\ dU = dx, & V = \dfrac{3\sin x - \cos x}{10}\,e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}x(3\sin x - \cos x)e^{3x} - \frac{1}{20}\int (3\sin x - \cos x)e^{3x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{20}x(3\sin x - \cos x)e^{3x} - \frac{3}{20}\int \sin x\, e^{3x}\,dx + \frac{1}{20}\int \cos x\, e^{3x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{20}x(3\sin x - \cos x)e^{3x} - \frac{3}{20}\Big(\frac{3\sin x - \cos x}{10}\,e^{3x}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{20}\Big(\frac{\sin x + 3\cos x}{10}\,e^{3x}\Big) + C_2 = \Big(\frac{3}{20}x - \frac{1}{25}\Big)\sin x\, e^{3x} -$$

$$- \Big(\frac{1}{20}x - \frac{3}{100}\Big)\cos x\, e^{3x} + C_2.$$

Тоді

$$I_1 + I_2 = e^{3x}\Big(\Big(\frac{3}{68}x + \frac{2}{289}\Big)\sin 5x + \Big(\frac{3}{20}x - \frac{1}{25}\Big)\sin x -$$

$$- \Big(\frac{5}{68}x - \frac{15}{1156}\Big)\cos 5x - \Big(\frac{1}{20}x - \frac{3}{100}\Big)\cos x\Big) + C. \quad \blacktriangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу I

1. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - 1}$, 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$, 3) $\displaystyle\int \frac{5x^4\,dx}{\sqrt{x^5 + 2}}$,

4) $\displaystyle\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx$, 5) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$,

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, 8) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}}\,dx$, 9) $\displaystyle\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{5 - 2x^2}}$,

10) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, 11) $\int \frac{(\ln x+5)^2}{x}\,dx$, 12) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^7 x}$,
13) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x\,dx}{1+x^2}$, 14) $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x\,dx$, 15) $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$,
16) $\int \frac{\arccos x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 17) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$, 18) $\int (e^x-e^{2x}+3)e^x\,dx$,
19) $\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{6x}}$, 20) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 21) $\int \frac{4\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$,
22) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$, 23) $\int \frac{(4-\operatorname{ctg} x)^2}{\sin^2 x}\,dx$, 24) $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$,
25) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$, 26) $\int 2xe^{x^2}\,dx$, 27) $\int 6x^2e^{x^3}\,dx$,
28) $\int (e^{2x}+1)e^x\,dx$, 29) $\int \frac{(\arccos x)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 30) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{2\sin 2x}{\sin^2 x-9}\,dx$, 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$, 3) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$,
4) $\int 5^{x+1}e^x\,dx$, 5) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+5}\,dx$, 6) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$,
7) $\int \sqrt[5]{5-3x}\,dx$, 8) $\int \cos^2 x\,dx$, 9) $\int \cos^3 x\,dx$,
10) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{8-2x}}$, 11) $\int \cos^2 5x\,dx$, 12) $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx$,
13) $\int 2^x e^{x+3}\,dx$, 14) $\int 18x^8\sqrt{1-x^9}\,dx$, 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$,
16) $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$, 17) $\int \frac{2\sin 2x}{9+\sin^2 x}\,dx$, 18) $\int 8x^3\sqrt[3]{4-x^4}\,dx$,
19) $\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$, 20) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$, 21) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$,
22) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$, 23) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$, 24) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^2 x+1}\,dx$,
25) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx$, 26) $\int \frac{3\,dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$, 27) $\int e^{e^x}\cdot e^x\,dx$,
28) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$, 29) $\int 5^{2x+3}e^{3x}\,dx$, 30) $\int x^2e^{x^3}\,dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3+3x-1}{x+2}\,dx$, 2) $\int \frac{2x-5}{x-3}\,dx$, 3) $\int \frac{x^4+x^3+5x^2+4x+5}{x^2+4}\,dx$,
4) $\int \frac{x^2+8}{3-x}\,dx$, 5) $\int \frac{x^2+5}{x^2+4}\,dx$, 6) $\int \frac{2^{x+1}+5^x}{10^x}\,dx$,
7) $\int \frac{3^x-2^{x-1}}{6^x}\,dx$, 8) $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$, 9) $\int \frac{x^5-1}{x+2}\,dx$,
10) $\int \frac{e^{3x}-3}{e^x+1}\,dx$, 11) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx$, 12) $\int \frac{x^2+9}{x^2+10}\,dx$,

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, 14) $\int \frac{x^3+9x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$, 15) $\int (3x+2)^3\,dx$,

16) $\int (2^x+3)^2\,dx$, 17) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 18) $\int \frac{x^2+2x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$,

19) $\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$, 20) $\int e^{-x}(e^x+5)\,dx$, 21) $\int (3^x+2^x)^2\,dx$,

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}$, 23) $\int \frac{x^3+2x^2-1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$, 24) $\int 2^x(3-3^x)^2\,dx$,

25) $\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 26) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$, 27) $\int \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$,

28) $\int \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}\,dx$, 29) $\int \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$, 30) $\int (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)\,dx$.

4. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, 2) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$, 3) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$,

4) $\int 5^{\sin x+1}\cos x\,dx$, 5) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, 6) $\int e^{\sin x-1}\cos x\,dx$,

7) $\int \cos 4x\cos 7x\,dx$, 8) $\int 2x\,\mathrm{ctg}(x^2+1)\,dx$, 9) $\int \frac{1-5x^2}{x^2(1-x^2)}\,dx$,

10) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2}$, 11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, 12) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$,

13) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$, 14) $\int \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}\,dx$, 15) $\int 2^x\cdot 3^{2x}\,dx$,

16) $\int e^{3x+2}4^{2x}\,dx$, 17) $\int \cos^2 x\sin 2x\,dx$, 18) $\int \sin^2 x\cos 2x\,dx$,

19) $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}\,x}+x\ln^2(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$, 20) $\int \frac{4\cdot 3^x-3\cdot 4^x}{2^x}\,dx$, 21) $\int \sin 2x\sin 4x\,dx$,

22) $\int x\sqrt{4+2x^2}\,dx$, 23) $\int \frac{e^{\arcsin x}+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 24) $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 x+1}{1+x^2}\,dx$,

25) $\int \frac{e^{-\mathrm{tg}\,x}}{1+\cos 2x}\,dx$, 26) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}+3}}{x^2}\,dx$, 27) $\int \frac{\mathrm{tg}^3 x}{1+\cos 2x}\,dx$,

28) $\int 2\sin^2 x\,dx$, 29) $\int \frac{3-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}\,dx$, 30) $\int 9x^8\sqrt[3]{1-x^9}\,dx$.

5. Знайти невизначені інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен:

1) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$, 2) $\int \frac{dx}{16-3x-x^2}$, 3) $\int \frac{dx}{x^2+7x+10}$,

4) $\int \frac{dx}{1-x-x^2}$, 5) $\int \frac{dx}{3-x-x^2}$, 6) $\int \frac{dx}{x^2+8x+11}$,

7) $\int \frac{dx}{x^2+9x+23}$, 8) $\int \frac{dx}{3-x-4x^2}$, 9) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$,

10) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$, 11) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, 12) $\int \frac{dx}{x^2-8x+7}$,

13) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$, 14) $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$, 15) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$,

16) $\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$, 17) $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$, 18) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$,

19) $\int \frac{dx}{x^2-6x+1}$, 20) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$, 21) $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$,

22) $\int \frac{dx}{8-6x-x^2}$, 23) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$, 24) $\int \frac{dx}{x^2-8x+12}$,

25) $\int \frac{dx}{3x^2-7x+1}$, 26) $\int \frac{dx}{3x^2+2x+10}$, 27) $\int \frac{dx}{10x-x^2+20}$,

28) $\int \frac{dx}{2x-x^2+3}$, 29) $\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}$, 30) $\int \frac{dx}{x^2+2x-10}$.

6. Знайти невизначені інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен:

1) $\int \frac{3+x}{x^2-7x+6}\,dx$, 2) $\int \frac{x-1}{2x^2-2x+1}\,dx$, 3) $\int \frac{x+8}{6-2x-x^2}\,dx$,

4) $\int \frac{x}{x^2+3x-6}\,dx$, 5) $\int \frac{x+14}{x^2-4x+5}\,dx$, 6) $\int \frac{x+1}{1-x-x^2}\,dx$,

7) $\int \frac{x-3}{3x^2-4x+7}\,dx$, 8) $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+5}\,dx$, 9) $\int \frac{x+2}{5x^2+6x+1}\,dx$,

10) $\int \frac{4x-1}{16-6x+x^2}\,dx$, 11) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+7}\,dx$, 12) $\int \frac{x+1}{3+4x+4x^2}\,dx$,

13) $\int \frac{x+1}{2x^2-x-1}\,dx$, 14) $\int \frac{x+5}{8x^2+3x+1}\,dx$, 15) $\int \frac{x+4}{2-x-x^2}\,dx$,

16) $\int \frac{x}{5x^2-2x+1}\,dx$, 17) $\int \frac{4x-3}{3x^2-2x+6}\,dx$, 18) $\int \frac{3x-6}{5+4x+x^2}\,dx$,

19) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$, 20) $\int \frac{3x+4}{x^2+6x-8}\,dx$, 21) $\int \frac{x+1}{2x^2-7x+12}\,dx$,

22) $\int \frac{3x+1}{x^2-3x+5}\,dx$, 23) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$, 24) $\int \frac{2x+3}{2x^2-6x+15}\,dx$,

25) $\int \frac{6x-5}{3x^2-7x+6}\,dx$, 26) $\int \frac{3x-2}{x^2+3x-2}\,dx$, 27) $\int \frac{2x-3}{5x^2-7x+6}\,dx$,

28) $\int \frac{2x-1}{4x^2-4x-3}\,dx$, 29) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx$, 30) $\int \frac{x+3}{4x^2+4x+3}\,dx$.

7. Знайти невизначені інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$, 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+7}}$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$,

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+19}}$, 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-x-x^2}}$, 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+11}}$,

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+10}}$, 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$, 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$,

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-12x-9x^2}}$, 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$, 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$,

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+6x-x^2}}$, 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$,

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$, 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$, 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$,

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$, 21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-x^2}}$,
22) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+12}}$, 23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-12+8x-x^2}}$, 24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$,
25) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$, 26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7x+1}}$, 27) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2+3}}$,
28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{20+10x-x^2}}$, 29) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x-x^2}}$, 30) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+5}}$.

8. Знайти невизначені інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен:

1) $\displaystyle\int \frac{x+7}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$, 2) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx$, 3) $\displaystyle\int \frac{5-2x}{\sqrt{x^2+6x-11}}\,dx$,
4) $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{12-3x-x^2}}\,dx$, 5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+5x-9}}\,dx$,
7) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$, 8) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{6+7x-x^2}}\,dx$, 9) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{\sqrt{16-6x+x^2}}\,dx$,
10) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{5x^2+6x+1}}\,dx$, 11) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$, 12) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{7-4x-x^2}}\,dx$,
13) $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{8x^2+3x+1}}\,dx$, 14) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-x-1}}\,dx$, 15) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$,
16) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$, 17) $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$, 18) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x+6}}\,dx$,
19) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}\,dx$, 20) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$, 21) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-x+5}}\,dx$,
22) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{3+3x-x^2}}\,dx$, 23) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-6x+16}}\,dx$, 24) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx$,
25) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{2-3x-5x^2}}\,dx$, 26) $\displaystyle\int \frac{6x-5}{\sqrt{1+6x-x^2}}\,dx$, 27) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$,
28) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-7x+8}}\,dx$, 29) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$, 30) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$.

9. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int x2^{3x}\,dx$, 2) $\int xe^x\,dx$, 3) $\int x\sin 2x\,dx$,
4) $\int (x-1)\cos x\,dx$, 5) $\int (x^2+1)\cos x\,dx$, 6) $\int (x+5)e^x\,dx$,
7) $\int (x+7)\sin 5x\,dx$, 8) $\int x^2\sin 2x\,dx$, 9) $\int (x+3)\cos 2x\,dx$,
10) $\int (2x-1)\cos 2x\,dx$, 11) $\int x^2\sin x\,dx$, 12) $\int (4x+3)\sin 4x\,dx$,
13) $\int (3x-2)e^{-2x}\,dx$, 14) $\int (x^2-1)\cos x\,dx$, 15) $\int xe^{3x}\,dx$,
16) $\int (x-1)3^x\,dx$, 17) $\int 2x\sin 2x\,dx$, 18) $\int (x+3)e^{-2x}\,dx$,
19) $\int (x-1)\cos(x-1)\,dx$, 20) $\int (x^2+2x-1)\cos x\,dx$, 21) $\int 8x\cos(x-1)\,dx$,

22) $\int 4x \sin\frac{x}{4}\,dx$, 23) $\int (2-x)e^{2x+1}\,dx$, 24) $\int (x^2-1)\cos\frac{x}{2}\,dx$,

25) $\int x5^x\,dx$, 26) $\int (2x-5)e^{3x}\,dx$, 27) $\int (x+4)\cos(2-x)\,dx$,

28) $\int (2x^2+1)\sin\frac{x}{4}\,dx$, 29) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$, 30) $\int (x+5)\sin(x+5)\,dx$.

10. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, 2) $\int x\arcsin x\,dx$, 3) $\int x\arccos x\,dx$,

4) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$, 5) $\int \frac{\log_3 x}{x^2}\,dx$, 6) $\int x\ln x\,dx$,

7) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$, 8) $\int \frac{\arccos\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx$, 9) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$,

10) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, 11) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$, 12) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$,

13) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, 14) $\int (x+1)\operatorname{arctg} x\,dx$, 15) $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$,

16) $\int (x+3)\ln x\,dx$, 17) $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\,dx$, 18) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$,

19) $\int \sin x\ln(\cos x)\,dx$, 20) $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$, 21) $\int (x^2-1)\ln(x-1)\,dx$,

22) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, 23) $\int (x-1)\ln^2 x\,dx$, 24) $\int \ln(x^2+1)\,dx$,

25) $\int (x^2-1)\ln^2 x\,dx$, 26) $\int x^2\ln x\,dx$, 27) $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

28) $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$, 29) $\int \arcsin^2 x\,dx$, 30) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx$.

11. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int e^x\cos x\,dx$, 2) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, 3) $\int e^x\sin(x+1)\,dx$,

4) $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$, 5) $\int 4^x\sin 3x\,dx$, 6) $\int 4^{-x}\sin 4x\,dx$,

7) $\int e^{-2x}\cos x\,dx$, 8) $\int e^{-x}\cos(x+1)\,dx$, 9) $\int e^x\cos 2x\,dx$,

10) $\int e^x\sin(2x-1)\,dx$, 11) $\int \cos(\ln x)\,dx$, 12) $\int e^{2x}\sin(x-1)\,dx$,

13) $\int e^{-3x}\sin x\,dx$, 14) $\int e^{2x}\sin(x+1)\,dx$, 15) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$,

16) $\int e^x\sin 7x\,dx$, 17) $\int \sin(\ln x)\,dx$, 18) $\int e^{-2x}\cos(1-2x)\,dx$,

19) $\int e^{-x}\sin 3x\,dx$, 20) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$, 21) $\int 2^x\cos x\,dx$,

22) $\int 5^x\sin x\,dx$, 23) $\int e^{2x}\sin 2x\,dx$, 24) $\int 2^x\sin(x-1)\,dx$,

25) $\int \sin(3x+1)e^x\,dx$, 26) $\int 2^x \cos 2x\,dx$, 27) $\int \sin x \ln(\cos x)\,dx$,

28) $\int e^x \cos(2x+1)\,dx$, 29) $\int 3^x \sin x\,dx$, 30) $\int \cos(2\ln x)\,dx$.

12. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}\,dx$, 2) $\int \frac{x-1}{x^3+5x^2+6x}\,dx$,

3) $\int \frac{x+8}{(x+1)(x^2+4x-12)}\,dx$, 4) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3+4x}\,dx$,

5) $\int \frac{3x+5}{x^3-9x^2+20x}\,dx$, 6) $\int \frac{x^6+1}{x^3-9x}\,dx$,

7) $\int \frac{x^4-3x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$, 8) $\int \frac{-8x+10}{x^3-7x^2+10x}\,dx$,

9) $\int \frac{3x^2+12x+4}{(x^2-4)(x+6)}\,dx$, 10) $\int \frac{4x^2+2x-10}{(x+3)(x^2-3x+2)}\,dx$,

11) $\int \frac{3x^2-4x-5}{(x-4)(x^2+2x-15)}\,dx$, 12) $\int \frac{x^2-8x+25}{(x+5)(x^2-7x+12)}\,dx$,

13) $\int \frac{x^4+15x-20}{x^3-7x^2+10x}\,dx$, 14) $\int \frac{x^4+4x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$,

15) $\int \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$, 16) $\int \frac{2x^2-7x}{(x-2)(x^2-5x)}\,dx$,

17) $\int \frac{2x^2-2x-4}{(x-1)(x^2+x-6)}\,dx$, 18) $\int \frac{4x^2+12x-8}{(x+6)(x^2-4)}\,dx$,

19) $\int \frac{3x^2-14x+10}{(x^2-2x)(x-5)}\,dx$, 20) $\int \frac{x^2-4x+10}{x^3-7x^2+10x}\,dx$,

21) $\int \frac{2x^2-6x+10}{(x-3)(x^2+x-20)}\,dx$, 22) $\int \frac{5x^2+8x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$,

23) $\int \frac{4x^2+7x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$, 24) $\int \frac{x^2-6x-1}{(x^2+x-20)(x-3)}\,dx$,

25) $\int \frac{2x^2+8x+8}{(x-2)(x^2+8x+12)}\,dx$, 26) $\int \frac{3x^2-7}{(x-2)(x^2+2x-3)}\,dx$,

27) $\int \frac{x^2-3x+5}{(x^2+x-6)(x-1)}\,dx$, 28) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$,

29) $\int \frac{2x^2+4x-16}{(x+2)(x^2+4x-12)}\,dx$, 30) $\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx$.

13. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1) $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx$, 2) $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$, 3) $\int \frac{x^2+x}{x^3(x-1)}\,dx$,

4) $\int \frac{x^5+1}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx$, 5) $\int \frac{x^3+7}{x^2(x-2)^2}\,dx$, 6) $\int \frac{x-3}{x(x-3)^3}\,dx$,

7) $\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-x^2}\,dx$, 8) $\int \frac{-9x^2+13x-6}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$, 9) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$,

10) $\int \frac{14x^2+16}{x(x+2)^2}\,dx$, 11) $\int \frac{3x^2+x+8}{x(x+2)^2}\,dx$, 12) $\int \frac{x+8}{x(x-1)^2}\,dx$,

13) $\int \frac{-7x^2+7x-1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$, 14) $\int \frac{4x^2-x-2}{x^2-x^3}\,dx$, 15) $\int \frac{5x^2+4}{x^2(x+1)}\,dx$,

16) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)}\,dx$, 17) $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^2(x-2)}\,dx$, 18) $\int \frac{-2x^2-3x+4}{x^2(x-2)}\,dx$,

19) $\int \frac{6x^2+4x+1}{x^2(x+1)}\,dx$, 20) $\int \frac{x^2+3x+1}{x(x+1)^2}\,dx$, 21) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2}\,dx$,

22) $\int \frac{x^2-x+2}{x^2(x+4)}\,dx$, 23) $\int \frac{2x^2+10x+8}{x(x+2)^2}\,dx$, 24) $\int \frac{-18x^2+26x-12}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$,

25) $\int \frac{2x^2-6x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$, 26) $\int \frac{3x^2+x-8}{x(x+2)^2}\,dx$, 27) $\int \frac{2x^2+2x+2}{x^2(x+1)}\,dx$,

28) $\int \frac{2x^2+x+5}{(x-1)x^2}\,dx$, 29) $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$, 30) $\int \frac{x^2+x-2}{x^2-x^3}\,dx$.

14. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1) $\int \frac{x^4+1}{x^3+4x}\,dx$, 2) $\int \frac{x^5-1}{x^3+1}\,dx$, 3) $\int \frac{x-1}{x^3+4x}\,dx$,

4) $\int \frac{x^2+4x+5}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$, 5) $\int \frac{x-3}{x^2(x^2+4)}\,dx$, 6) $\int \frac{x}{(x-2)(x^3+4x)}\,dx$,

7) $\int \frac{x+8}{x^3+4x}\,dx$, 8) $\int \frac{2x^2+6x+9}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$, 9) $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3+4x^2+5x}\,dx$,

10) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$, 11) $\int \frac{x^2-2x-16}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$, 12) $\int \frac{dx}{x^3+1}$,

13) $\int \frac{2x^2+3x+8}{x^3+4x}\,dx$, 14) $\int \frac{dx}{x^3+x}$, 15) $\int \frac{4x^2+10x+10}{x(x^2+4x+5)}\,dx$,

16) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$, 17) $\int \frac{2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$, 18) $\int \frac{2}{x^3+2x}\,dx$,

19) $\int \frac{x^2+2x-4}{4x+x^3}\,dx$, 20) $\int \frac{3x^2+2x+9}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$, 21) $\int \frac{x^2-5}{x(x^2+4x+5)}\,dx$,

22) $\int \frac{4}{(x-2)(x^2+3)}\,dx$, 23) $\int \frac{5x^2+14x-2}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$, 24) $\int \frac{x}{1+x^3}\,dx$,

25) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$, 26) $\int \frac{-18}{x^3+9x}\,dx$, 27) $\int \frac{3x^3-x-4}{x^3+4x}\,dx$,

28) $\int \frac{x^2-5}{x^3+4x^2+5x}\,dx$, 29) $\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}\,dx$, 30) $\int \frac{-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}\,dx$.

15. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}+2}\,dx$, 2) $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$, 3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+2}\,dx$,

4) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$, 5) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$, 6) $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}\,dx$,

7) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt{x})}\,dx$, 8) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$, 9) $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$,

10) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$, 11) $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+3\sqrt[3]{x}}\,dx$, 12) $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$,

13) $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$, 14) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$, 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$,

16) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$, 17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, 18) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$,

19) $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}\,dx$, 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$, 21) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-1)}\,dx$,

22) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx$, 23) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt[3]{x}-1)\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, 24) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$,

25) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$, 26) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$, 27) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$,

28) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$, 29) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, 30) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}\,dx$.

16. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$, 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, 3) $\int \frac{\sqrt{x-2}+1}{x-2-\sqrt{x-2}}\,dx$,

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+2\sqrt[3]{1+x}}$, 5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$, 6) $\int (x-3)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$,

7) $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$, 8) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx$, 9) $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$,

10) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$, 11) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$, 12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}-\sqrt[4]{2-x}}$,

13) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$, 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}$, 15) $\int \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\,dx$,

16) $\int \frac{x+2}{x-2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$, 17) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$, 18) $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}\,dx$,

19) $\int \frac{1}{x-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$, 20) $\int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}\,dx$, 21) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$,

22) $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$, 23) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$, 24) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$,

25) $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}}\,dx$, 26) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$, 27) $\int \frac{1}{(x-1)^3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$,

28) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)^4}}$, 29) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}-1}{(x+3)(1+\sqrt[6]{x+3})}\,dx$, 30) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}$.

17. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, 2) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\,\sqrt[10]{x^9}}\,dx$, 3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx$,

4) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x\sqrt[5]{x^3}}\,dx$, 5) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\,dx$, 6) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x\sqrt[5]{x}}\,dx$,

7) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\,dx$, 8) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\,\sqrt[20]{x^7}}\,dx$, 9) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^8}}\,dx$,

10) $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^11}}\,dx$, 11) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}\,dx$, 12) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}\,dx$,

13) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}}\,dx$, 14) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}\,dx$, 15) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$,

16) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx$, 17) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,dx$, 18) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}\,dx$,

19) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$, 20) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$, 21) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}\,dx$,

22) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx$, 23) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}}\,dx$, 24) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx$,

25) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}}\,dx$, 26) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$, 27) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}\,dx$,

28) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}\,dx$, 29) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}\,dx$, 30) $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx$.

18. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x+5}$, 2) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$, 3) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$,

4) $\int \frac{dx}{2-\sin x+3\cos x}$, 5) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+3}$, 6) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x+5}$,

7) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$, 8) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$, 9) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}$,

10) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$, 11) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, 12) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$,

13) $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$, 14) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, 15) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$,

16) $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$, 17) $\int \frac{dx}{2-\sin x}$, 18) $\int \frac{dx}{4\cos x+5}$,

19) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$, 20) $\int \frac{dx}{5-2\sin x}$, 21) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$,

22) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$, 23) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, 24) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$,

25) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx$, 26) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$, 27) $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$,

28) $\int \frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}\,dx$, 29) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$, 30) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

19. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3-\sin x}$, 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{9+\cos^2 x}$, 3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$,

4) $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)^2}$, 5) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x}$, 6) $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\cos x-\cos^2 x}$,

7) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$, 8) $\int \frac{\sin x\,dx}{5+\cos x}$, 9) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$,

10) $\int \frac{\cos x}{7+\sin x}\,dx$, 11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$, 12) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-6\cos x+5}$,
13) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$, 14) $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)^3}$, 15) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^3}$,
16) $\int \frac{\sin x\,dx}{4+\cos^2 x}$, 17) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$, 18) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$,
19) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-2\cos x+5}$, 20) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$, 21) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$,
22) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^2 x}$, 23) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-2\sin x+5}$, 24) $\int \frac{\cos^3 x-\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}\,dx$,
25) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$, 26) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$, 27) $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)^2}$,
28) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin x}$, 29) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x)^2}$, 30) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$.

20. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, 2) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$,
3) $\int \frac{dx}{1+4\cos^2 x}$, 4) $\int \frac{dx}{1-7\sin^2 x}$,
5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x-5}$, 6) $\int \frac{dx}{6-5\sin^2 x+3\cos^2 x}$,
7) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x+4}$, 8) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{ctg} x}$,
9) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$, 10) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$,
11) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$, 12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$,
13) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+5\sin x\cos x}$, 14) $\int \frac{dx}{3\sin x\cos x-2\cos^2 x}$,
15) $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3\sin x\cos x}$, 16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$,
17) $\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$, 18) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$,
19) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-\cos^2 x}$, 20) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$,
21) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$, 22) $\int \frac{\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx$,
23) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$, 24) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+8\sin x\cos x+12\cos^2 x}$,
25) $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$, 26) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$,
27) $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x-9\cos^3 x}\,dx$, 28) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos x\sin x+\cos^2 x}$,
29) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$, 30) $\int \frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx$.

21. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$, 2) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,dx$, 3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^3 x}\,dx$,

4) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$, 5) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^7 x\,dx$, 6) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx$,

7) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$, 8) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$, 9) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$,

10) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$, 11) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^7 x\,dx$, 12) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^3 2x\,dx$,

13) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$, 14) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$, 15) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$,

16) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$, 17) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$, 18) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$,

19) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$, 20) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin x}}\,dx$, 21) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$,

22) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}}\,dx$, 23) $\displaystyle\int \cos^4 2x\,dx$, 24) $\displaystyle\int \sin^7 2x\,dx$,

25) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}\,dx$, 26) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}\,dx$, 27) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 3x\,dx$,

28) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin^5 x}{\cos x}}\,dx$, 29) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^4 x\,dx$, 30) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$.

22. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 7x\,dx$, 2) $\displaystyle\int \sin 2x \sin^2 x\,dx$, 3) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{6}\,dx$,

4) $\displaystyle\int \sin^2 2x \cos^3 4x\,dx$, 5) $\displaystyle\int \cos 5x \cos 8x\,dx$, 6) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 6x\,dx$,

7) $\displaystyle\int \sin 3x \sin 6x\,dx$, 8) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 5x\,dx$, 9) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 5x\,dx$,

10) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$, 11) $\displaystyle\int \sin(2x+3)\cos(3x+2)\,dx$, 12) $\displaystyle\int \sin 3x \sin x\,dx$,

13) $\displaystyle\int \cos x \cos^2 2x\,dx$, 14) $\displaystyle\int \sin(2x-1)\cos^2(3x+2)\,dx$, 15) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}\,dx$,

16) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$, 17) $\displaystyle\int \sin^2(x+1)\cos(2x-1)\,dx$, 18) $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x\,dx$,

19) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$, 20) $\displaystyle\int \sin(3x-2)\sin(3x+2)\,dx$, 21) $\displaystyle\int \sin 10x \sin 15x\,dx$,

22) $\displaystyle\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$, 23) $\displaystyle\int \cos(5x-1)\cos(6x+2)\,dx$, 24) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 3x \cos 4x\,dx$,

25) $\displaystyle\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$, 26) $\displaystyle\int \cos(2x+3)\cos(2x-3)\,dx$, 27) $\displaystyle\int \sin x \cos 2x \cos x\,dx$,

28) $\displaystyle\int \sin^2 3x \cos x\,dx$, 29) $\displaystyle\int \sin^2 4x \cos^3 x\,dx$, 30) $\displaystyle\int \cos 4x \sin^3 2x\,dx$.

РОЗДІЛ II. Визначений інтеграл

§ 2.1. Поняття визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок довільним чином на частини точками x_i, $i=\overline{0,n}$, причому $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$. Найбільшу з різниць $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n-1}$, будемо позначати через λ.

В кожному з частинних відрізків $[x_i;x_{i+1}]$ довільно візьмемо точку $x=\xi_i$, $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$, $i=\overline{0,n-1}$, і складемо суму $\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$. Скінченна границя I суми σ при $\lambda\to 0$ називається ***визначеним інтегралом функції*** $f(x)$ ***на проміжку від*** a ***до*** b і позначається

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

У випадку існування такої границі функція $f(x)$ називається ***інтегровною*** на відрізку $[a;b]$.

Наведене означення належить Ріману і досить часто такий інтеграл називається ***інтегралом Рімана***, а суму σ називають ***рімановою сумою*** або ***інтегральною сумою***.

Позначимо через m_i та M_i відповідно точну нижню і точну верхню межу значень функції $f(x)$ в i-ому відрізку $[x_i;x_{i+1}]$ і складемо відповідні суми

$$s=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i,\quad S=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i.$$

Ці суми називаються відповідно ***нижньою і верхньою сумами Дарбу.***

Для інтегральної суми σ виконується нерівність $s \leqslant \sigma \leqslant S$. Отже, при фіксованому розбитті суми s, S будуть сталими, тоді як сума σ змінюється в силу довільності вибору точки ξ_i, $i = \overline{0, n-1}$.

Суми Дарбу мають наступні властивості:

1) якщо до точок поділу додати нові точки, то нижня сума Дарбу від цього може тільки зрости, а верхня сума Дарбу може тільки зменшитись,

2) кожна нижня сума Дарбу не перевищує кожної верхньої суми Дарбу, навіть для випадку іншого розбиття.

Множина $\{s\}$ нижніх сум Дарбу обмежена зверху, наприклад будь-якою верхньою сумою Дарбу S. В цьому випадку ця множина має точну верхню межу $I_* = \sup\{s\}$ і $I_* \leqslant S$.

Оскільки множина $\{S\}$ верхніх сум Дарбу обмежена знизу числом I_*, то вона має точну нижню межу $I^* = \inf\{S\}$, отже, $I_* \leqslant I^*$. В результаті отримаємо нерівність

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$$

для будь-яких нижніх та верхніх сум Дарбу.

Числа I_* та I^* називаються відповідно ***нижнім і верхнім інтегралом Дарбу.***

Критерії інтегровності функції $f(x)$ ***на відрізку*** $[a;b]$**.** Для того, щоб визначена і обмежена на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0.$$

Сформульований критерій дає змогу виділити класи інтегровних функцій.

1. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то вона є інтегровною на цьому відрізку.

2. Якщо обмежена функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має лише скінченну кількість точок розриву, то вона є інтегровною на цьому відрізку.

3. Монотонна обмежена функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є інтегровною на цьому відрізку.

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – її первісна, тобто $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Ця формула є основною формулою інтегрального числення.

Вправи

1. Знайти нижню і верхню суми Дарбу для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, поділивши останній на n рівних частин, якщо:

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2,\ a=-2,\ b=2,\ n=4,$

2) $f(x)=x^2+x+1,\ a=0,\ b=1,\ n=6,$

3) $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x},\ a=1,\ b=6,\ n=5,$

4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4},\ a=-4,\ b=0,\ n=4,$

5) $f(x)=\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,\ a=-2,\ b=0,\ n=4,$

6) $f(x)=|x^2+x-2|-\ln\dfrac{1}{x},\ a=\dfrac{1}{2},\ b=2,\ n=3,$

7) $f(x)=2\cdot 2^{3x}-9\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x,\ a=-1,\ b=1,\ n=4,$

8) $f(x)=3^{x^2+2x-1},\ a=-2,\ b=0,\ n=2,$

9) $f(x)=\dfrac{1}{2}x\ln x-x\ln 2,\ a=1,\ b=4,\ n=3,$

10) $f(x)=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{1}{6}x\ln 9,\ a=1,\ b=3,\ n=4.$

2. Знайти інтегральні суми для функції $f(x)=x^3$ на відрізку $[1;3]$, якщо:

1) $x_i=1+\dfrac{2i}{n},\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=x_{i-1},\ i=\overline{1,n},$

2) $x_i=1+\dfrac{2i}{n},\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=x_i,\ i=\overline{1,n},$

3) $x_i=1+\dfrac{2i}{n},\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2},\ i=\overline{1,n},$

4) $x_i=(\sqrt[n]{3})^i,\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=x_{i-1},\ i=\overline{1,n},$

5) $x_i=(\sqrt[n]{3})^i,\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=x_i,\ i=\overline{1,n},$

6) $x_i=(\sqrt[n]{3})^i,\ i=0,1,\ldots,n,\ \xi_i=\sqrt{x_{i-1}\cdot x_i},\ i=\overline{1,n}.$

3. Обчислити визначені інтеграли, розглядаючи їх як границі інтегральних сум:

$$1)\ \int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx, \qquad 2)\ \int\limits_{0}^{1} a^x\,dx,\ \ a>0,$$

$$3)\ \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx, \qquad 4)\ \int\limits_{0}^{x} \cos t\,dt,$$

$$5)\ \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^2},\ \ 0<a<b.$$

4. За допомогою визначеного інтегралу знайти границі наступних сум:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\Big),$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\Big),$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\Big),$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big),$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}},$$

$$6)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\Big),$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\Big),$$

$$8)\ \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\Big).$$

5. Чи можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца до обчислення інтегралів:

$$1)\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}, \qquad 2)\ \int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$3)\ \int\limits_{0}^{1} e^x\,dx, \qquad 4)\ \int\limits_{0}^{2} |1-x|\,dx,$$

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big)\, dx,$ 6) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx,$

7) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$ 8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big)\, dx,$

9) $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx,$ 10) $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)},\ \ 0 < b-a < \frac{\pi}{2}.$

6. Обчислити інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца:

1) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2},$ 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2},$

3) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\, dx,$

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1+x^6},$ 6) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}},$

7) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^x dx}{e^x-1},$ 8) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}},$

9) $\int\limits_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}},$ 10) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx.$

7. Розв'язати рівняння або нерівність:

1) $3^{x-\log_3 2} - 9^x = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} |1-x|\, dx,$ 2) $\int\limits_{0}^{x} \cos 2t\, dt - \int\limits_{0}^{x} \sin 2t\, dt + 1 = 0,$

3) $\log_{1-2x}(x^2-3x+5) = \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}},$ 4) $x^{1-\lg x} = \frac{d}{dx}\Big(\int\limits_{2}^{e^x} \frac{\ln t\, dt}{t}\Big)\Big|_{x=0{,}01},$

5) $\frac{3}{|4-x|} = x \lim\limits_{t\to 0} \frac{\int_0^{t^2} e^u\, du}{t},$ 6) $1 - \frac{2}{x+2} < \int\limits_{3}^{x} \frac{dt}{(t-2)^2},$

7) $\dfrac{x^2+x+3}{\lg(x-4)} < \Big(\displaystyle\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin^3 x\,dx\Big)'_x$, 8) $\log_3^2 x + 3\log_3 x < -\dfrac{4}{3}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$,

9) $\sin x + \cos 2x > \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$, 10) $\dfrac{2\cdot 3^{x^2}}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin 2x\,dx} > \dfrac{5^{3x^2}}{\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx}$.

Приклади розв'язування вправ

1.9. Оскільки $n=3$, то найбільше і найменше значення функції шукаємо на кожному з відрізків $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$.

Спочатку знайдемо похідну функції $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x - x\ln 2$. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}-\ln 2=\ln\frac{\sqrt{ex}}{2}.$$

Прирівнявши її до нуля, одержуємо, що $x=\frac{4}{e}$ є стаціонарною точкою. На проміжку $\left[1;\frac{4}{e}\right]$ функція $f(x)$ спадає, а на $\left[\frac{4}{e};4\right]$ – зростає.

Для відрізка $[1;2]$ обчислюємо значення функції $f(x)$ у трьох точках $x_1=1,\ x_2=\frac{4}{e},\ x_3=2:$

$$f(1)=-\ln 2,$$

$$f\left(\frac{4}{e}\right)=\frac{2}{e}\ln\frac{4}{e}-\frac{4}{e}\ln 2=\frac{2}{e}(2\ln 2-1)-\frac{4}{e}\ln 2=-\frac{2}{e},$$

$$f(2)=\ln 2-2\ln 2=-\ln 2,$$

Тоді $M_1=-\ln 2,\ m_1=-\frac{2}{e}$ – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[1;2]$.

Для відрізків $[2;3]$ та $[3;4]$, де функція зростаюча, шукаємо її значення на кінцях:

$$f(2)=\ln 2-2\ln 2=-\ln 2,$$

$$f(3)=\frac{3}{2}\ln 3-3\ln 2=3\ln\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f(4)=2\ln 4-4\ln 2=0.$$

Тоді $M_2 = 3\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $m_2 = -\ln 2$ – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[2;3]$, $M_3 = 0$, $m_3 = 3\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[3;4]$.

Знайдемо нижню і верхню суми Дарбу, враховуючи, що $\Delta x_i = 1$, $i = \overline{1,3}$.

Тоді

$$s = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i = -\frac{2}{e} - \ln 2 + 3\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{e} - \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - 3\ln 2 =$$

$$= -\frac{2}{e} + \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 16 = -\frac{2}{e} + \ln\frac{\sqrt{27}}{16}.$$

$$S = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i = -2\ln 2 + 3\ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{\sqrt{27}}{32}. \quad \blacktriangleright$$

4.4. Зведемо вираз $\dfrac{1}{n}\Big(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\Big)$ до вигляду інтегральної суми

$$\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Можна взяти $f(x) = \sin\pi x$, $[a;b] = [0;1]$, $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$, $\xi_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{0, n-1}$. Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x_i \to 0$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \int_0^1 \sin\pi x\,dx = -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}. \quad \blacktriangleright$$

6.10. Підінтегральна функція $f(x) = \sqrt{\cos x - \cos^3 x}$ є неперервною на відрізку $\Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$, тому застосування формули Ньютона-Лейбніца для цього інтеграла є можливим. Тоді

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}|\sin x|\,dx =$$

$$= -\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x}\sin x\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x}\,d(\cos x) -$$

$$-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,d(\cos x) = \frac{2\cos x\sqrt{\cos x}}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{2\cos x\sqrt{\cos x}}{3}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleright$$

7.8. Спочатку знайдемо інтеграл, який знаходиться в правій частині нерівності:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Тоді отримаємо логарифмічну нерівність

$$\log_3^2 x + 3\log_3 x < -2.$$

Введемо заміну $\log_3 x = t$. Квадратична нерівність $t^2 + 3t + 2 < 0$ має розв'язок $t \in (-2; -1)$. Отримаємо $-2 < \log_3 x < -1$ або $\dfrac{1}{9} < x < \dfrac{1}{3}$.

Отже, розв'язком нерівності є проміжок $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{3}\right)$. $\blacktriangleright$

§ 2.2. Властивості визначеного інтеграла. Теореми про середнє

Наведемо ряд властивостей визначеного інтеграла, які використовуються для обчислень.

1. Якщо $f(x)$ інтегровна на відрізку $[b; a]$, то вона інтегровна і на відрізку $[a; b]$, причому

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx.$$

2. Якщо $f(x)$ інтегровна в найбільшому з проміжків $[a; b]$, $[a; c]$ і $[c; b]$, то вона є інтегровною і в двох інших проміжках, причому має місце формула

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx,$$

яке б не було взаємне розміщення точок a, b і c.

3. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, то і $kf(x)$, де $k = \text{const}$, є інтегровною на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a;b]$ функції, то і $f(x) \pm g(x)$ також є інтегровною на $[a;b]$, причому

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

6. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровними на $[a;b]$ і $f(x) \leqslant g(x)$ для всіх $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то $|f(x)|$ є інтегровною на цьому відрізку, причому

$$\Bigl|\int_a^b f(x)\,dx\Bigr| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8. Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на $[a;b]$ і для всіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

9. ***Теорема про середнє значення.*** Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всіх $x \in [a;b]$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

де $\mu \in [m; M]$.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то існує $c \in [a; b]$ таке, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***середнім значенням функції*** $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

10. ***Узагальнена теорема про середнє значення.*** Нехай:

1) функції $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровними на відрізку $[a; b]$,

2) для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$,

3) функція $g(x)$ на всьому відрізку $[a; b]$ не міняє знак, тобто $g(x) \geqslant 0$ або $g(x) \leqslant 0$. Тоді

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

де $\mu \in [m; M]$.

Зокрема, якщо $f(x)$ є неперервною на $[a; b]$, то остання формула може бути переписана у вигляді

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx,$$

де $c \in [a; b]$.

11. ***Друга теорема про середнє.*** Нехай:

1) функції $f(x)$ та $g(x)$ є інтегровними на відрізку $[a; b]$,

2) функція $f(x)$ є монотонною на відрізку$[a; b]$. Тоді існує точка $\xi \in [a; b]$ така, що

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(a+0) \int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b-0) \int_{\xi}^b g(x)\,dx.$$

Зокрема, якщо $f(x)$ є монотонно спадною і невід'ємною на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi g(x)\,dx,$$

а якщо функція $f(x)$ є монотонно зростаючою і невід'ємною на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(b-0)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Дві останні формули називаються відповідно ***першою і другою формулами Боне.***

12. ***Нерівність Коші-Буняковського.*** Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ є інтегровними на відрізку $[a;b]$, то функція $f(x)\cdot g(x)$ є інтегровною на цьому відрізку, причому виконується нерівність

$$\Big(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Вправи

1. Переконатись, що кожний із заданих інтегралів дорівнює нулю:

$$1)\ \int_{-3}^{3} x\sqrt{9-x^2}\,dx,\qquad 2)\ \int_{-0,5}^{0,5} \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx,$$

$$3)\ \int_{-10}^{10} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx,\quad 4)\ \int_{-2}^{2} (|x-1|+|x+1|-2|x|)\,dx,$$

$$5)\ \int_0^1 (2\arcsin x - \arccos(1-2x^2))\,dx,$$

$$6)\ \int_0^2 \Big(\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{8}\Big)\,dx,$$

$$7)\ \int_0^1 (2\arccos x - \arccos(2x^2-1))\,dx,$$

8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{8}\Big)\, dx,$

9) $\int\limits_{-10}^{10} \lg(x + \sqrt{1+x^2})\, dx,$ 10) $\int\limits_{0}^{1} \Big(\frac{1}{2}\arccos x - \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}\Big)\, dx.$

2. Переконатись, що кожний із заданих інтегралів більший від нуля:

1) $\int\limits_{-0{,}25}^{2} \frac{4-2x}{1+3x}\, dx,$

2) $\int\limits_{-5}^{3} \frac{x+2}{x^3+x^2+x+1}\, dx,$

3) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \Big(\Big|\frac{x+2}{x-1}\Big| - 3\Big)\, dx,$

4) $\int\limits_{1}^{1{,}5} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1})\, dx,$

5) $\int\limits_{-1}^{0} (\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2} - 4^x) + 2)\, dx,$

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx,$

7) $\int\limits_{-1}^{1} (\arcsin x + \arccos x)\, dx,$

8) $\int\limits_{1}^{2} \Big(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\Big)\, dx,$

9) $\int\limits_{\frac{7\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} (\arcsin(\sin x) - x + 4\pi + 1)\, dx,$

10) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big(2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} + 1\Big)\, dx.$

3. Переконатись, що кожний із заданих інтегралів менший від нуля:

1) $\int\limits_{2}^{5} \frac{x^2-5x+6}{x-1}\, dx,$

2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} - \frac{1}{2}\Big)\, dx,$

3) $\int\limits_{-4}^{-3} \Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-|x-1|} - 16\Big)\, dx,$

4) $\int\limits_{1}^{2} (\log^2_{0{,}5} x + \log_{0{,}5} x - 2)\, dx,$

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x - 1)\, dx,$

6) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Big(x - \frac{2x^2}{\pi} - \sin x\Big)\, dx,$

7) $\displaystyle\int\limits_{\frac{7\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} (\arcsin(\sin x) - x)\, dx,$ 8) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}\, dx,$

9) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} - \arccos x \right) dx,$ 10) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{-2} \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} \right) dx.$

4. Визначити знак кожного з інтегралів

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} x \sin x\, dx,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\, dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\, dx,$ 4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - x^3 - \frac{1}{6} \right) dx,$

5) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} (\log_3^2 x + 4 \log_3 x + 3)\, dx,$ 6) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} (x^3 + 4x - 16)\, dx,$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{5}{4}}^{-1} (\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+12} - 4)\, dx,$ 8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - x + \frac{x^3}{4} \right) dx,$

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x^2}{2} + \ln \cos x \right) dx,$

10) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin 2x + \sin^2 x \right) dx.$

5. Який із двох інтегралів більший

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} e^{-x}\, dx, \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\, dx,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\, dx, \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$ 4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx, \int\limits_{0}^{1} x\, dx,$

5) $\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx,\ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \arcsin x\,dx,$ 6) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx,\ \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \ln^2 x\,dx,$

7) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dx,$ 8) $\int\limits_{0}^{2} e^{-x^2-x}\,dx,\quad e\int\limits_{0}^{1} dx,$

9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x+1}{x+2}\,dx,\quad 9\int\limits_{0}^{1} dx,$ 10) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x^3 - \sin^3 x + 1)\,dx,\ \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx.$

6. Використовуючи теореми про середнє, оцінити дані інтеграли

1) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x},$ 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}},$

3) $\int\limits_{0}^{100} \frac{e^{-x}dx}{100+x},$ 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx,$

5) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+x^2},$ 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx,$

7) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2},$ 8) $\int\limits_{0}^{e^2} \frac{\ln x}{1+x}\,dx,$

9) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx,$ 10) $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

7. Довести нерівності

1) $\frac{\pi}{16} \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{\pi}{10},$ 2) $1 < \int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\,dx < e,$

3) $0 < \int\limits_{0}^{1} x(1-x^2)\,dx \leqslant \frac{4}{27},$ 4) $\frac{\pi}{2} \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\,dx \leqslant \frac{e\pi}{2},$

5) $\dfrac{3}{16} \leqslant \int\limits_0^2 2^{x^2-4}\,dx \leqslant 3,$ 6) $0 < \int\limits_0^1 \sin(\operatorname{arctg} x)\,dx < \dfrac{\sqrt{2}}{2},$

7) $\dfrac{\pi\cos 1}{2} \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\,dx \leqslant \dfrac{\pi}{2},$ 8) $\dfrac{-5\pi}{2} < \int\limits_0^5 \arcsin(\sin x)\,dx < \dfrac{5\pi}{2},$

9) $\dfrac{\pi^2}{24} < \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)\,dx \leqslant \dfrac{\pi^2}{16},$ 10) $0,7 < \int\limits_1^{\frac{3}{2}} \arcsin(\operatorname{arctg} x)\,dx < \dfrac{\pi}{4}.$

8. Оцінити дані інтеграли, користуючись нерівністю Коші-Буняковського:

1) $\int\limits_0^{\pi} x\sqrt{\sin x}\,dx,$ 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^3}\,dx,$

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx,$ 4) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^2)\sin x}\,dx,$

5) $\int\limits_0^{\pi} x^2\sqrt{\sin x}\,dx,$ 6) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx.$

Приклади розв'язування вправ

2.5. Розв'яжемо нерівність

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x)+2>0.$$

Вона рівносильна нерівності:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x)>\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}3.$$

Звідси

$$\begin{cases} 2^{2x}-4\cdot 2^x<0,\\ 2^{2x}-4\cdot 2^x+3>0. \end{cases}$$

Зробимо заміну $2^x=t>0$. Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} t(t-4)<0,\\ t^2-4t+3>0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо, що $t \in (0;1) \cup (3;4)$. Повертаючись до початкової змінної x, матимемо, що функція $f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2} - 4^x) + 2$ приймає додатні значення для всіх $x \in (-\infty;0) \cup (\log_2 3;2)$. Оскільки $f(0) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^2 - 1) + 2 > 0$, то підінтегральна функція $f(x) > 0$ для всіх $x \in [-1;0]$.

За властивістю визначеного інтеграла маємо

$$\int\limits_{-1}^{0} (\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2} - 4^x) + 2)\, dx > 0. \quad \blacktriangleright$$

6.10. Позначимо $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$. Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ – монотонно спадає на проміжку $[100\pi; 200\pi]$, $g(x) = \sin x$ – обмежена на $[100\pi; 200\pi]$.

Тоді за першою формулою Боне можемо записати:

$$I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{100\pi} \int\limits_{100\pi}^{\xi} \sin x\, dx =$$

$$= \frac{1}{100\pi}(-\cos\xi + \cos 100\pi) = \frac{1}{100\pi}(1 - \cos\xi),$$

де $\xi \in [100\pi; 200\pi]$.

Оскільки $-1 \leqslant \cos\xi \leqslant 1$, $\xi \in [100\pi; 200\pi]$, то $0 \leqslant 1 - \cos\xi \leqslant 2$.

В результаті отримаємо оцінку інтеграла

$$0 \leqslant \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{50\pi}. \quad \blacktriangleright$$

7.9. Дослідимо функцію $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$ на найбільше і найменше значення на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Знайшовши похідну і прирівнявши її до нуля, отримаємо стаціонарні точки $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Оскільки точок, підозрілих на екстремум, які лежать всередині $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, не існує, то функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на кінцях відрізка. В нашому випадку $m = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $M = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

За властивістю 8 маємо

$$\frac{\pi}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)\,dx \leqslant \frac{\pi^2}{16}.$$

Оскільки $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} > \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, то

$$\frac{\pi^2}{24} < \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)\,dx \leqslant \frac{\pi^2}{16},$$

що й треба було довести. ▶

8.4. Нехай $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{\sin x}$. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського отримаємо:

$$\Big(\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^2)\sin x}\,dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_0^{\pi} (\sqrt{1+x^2})^2\,dx \cdot \int\limits_0^{\pi} (\sqrt{\sin x})^2\,dx =$$

$$= \Big(x + \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^{\pi} \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi\Big(1 + \frac{\pi^2}{3}\Big).$$

Отже,

$$0 \leqslant \int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^2)\sin x}\,dx \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{3}(3+\pi^2)}. \quad ▶$$

§ 2.3. Інтегрування частинами. Формула заміни змінних

Формула інтегрування частинами. Якщо функції $U = U(x)$ та $V = V(x)$ мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то виконується рівність

$$\int\limits_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU.$$

Якщо для функцій U та V існують неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно на відрізку $[a;b]$, то справджується узагальнена формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_a^b UV^{(n+1)}\,dx = (UV^{(n)} - U'V^{(n-1)} + \cdots (-1)^n U^{(n)} V)\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int\limits_a^b U^{(n+1)} V\,dx.$$

Формула заміни змінної. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, а $\varphi'(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$ для всіх $t\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

З формули заміни змінної у визначеному інтегралі випливають наступні властивості.

1. Нехай $f(x)$ – неперервна в симетричному проміжку $[-a;a]$, $a>0$. Тоді, якщо $f(x)$ є непарною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$, якщо $f(x)$ є парною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.

2. Нехай $f(x)$ – неперервна періодична функція з періодом ω, тобто $f(x+\omega)=f(x)$. Тоді для будь-якого відрізка довжиною ω отримаємо формулу

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx=\int\limits_0^\omega f(x)\,dx.$$

Зауважимо, що наведені властивості в багатьох випадках суттєво спрощують обчислення визначених інтегралів.

Вправи

1. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{10}\operatorname{sgn}\frac{-x^2+3x+18}{x+6}\,dx$, 2) $\displaystyle\int\limits_0^3\frac{|x+1|+|x+2|}{|x-1|+|x-2|}\,dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3}\operatorname{sgn}(x^3-x^2-4x+4)\,dx$, 4) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1}\log_3(\operatorname{sgn}x+3)\,dx$,

5) $\displaystyle\int\limits_{\frac12}^{\frac32}\operatorname{sgn}(\log_5(x^2+x)+1)\,dx$, 6) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)\,dx$,

7) $\displaystyle\int\limits_{-2,5}^{5,5} [x]\,dx,$ 8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \log_2([x]^2+4[x]+3)\,dx,$

9) $\displaystyle\int\limits_{1}^{5} \ln[x]\,dx,$ 10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} x\,\mathrm{sgn}[\cos x]\,dx.$

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x^2\sin x)\,dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(x^4\sin 3x + \cos\frac{x}{3} + \mathrm{tg}^5\,x\right)dx,$ 4) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7-2x^5+3x^3-x+1}{\cos^2 x}\,dx,$

5) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx,$ 6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx,$

7) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1},$ 8) $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin 3x\,dx,$

9) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{6\pi}{5}} \sin^4 x\cos^4 x\,dx,$ 10) $\displaystyle\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

3. Знайти інтеграли за допомогою формули інтегрування частинами:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} xe^{2x}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x\ln(1+x^2)\,dx,$ 4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} x^2\sin nx\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$

5) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} (1-\ln x)^2\,dx,$ 6) $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx,$

7) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^5}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x},$

9) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx,$ 10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^2}\,dx,$

11) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$,

12) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\,dx$,

13) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$,

14) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$,

15) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$,

16) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$,

17) $\displaystyle\int\limits_0^{1} (1-x^2)^n\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$,

18) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad n \in \mathbb{N}$,

19) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$,

20) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\,dx\quad n \in \mathbb{N}$.

4. Знайти інтеграли за допомогою формули заміни змінної у визначеному інтегралі:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{3+2x}}$,

2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$,

3) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,dx$,

4) $\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$,

5) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$,

6) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$,

7) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,

8) $\displaystyle\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,

9) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$,

10) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$,

11) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$,

12) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$,

13) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

14) $\displaystyle\int\limits_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$,

15) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \ln \sin x \, dx,$ 16) $\displaystyle\int\limits_{0}^{0{,}75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}},$

17) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx,$ 18) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(e^x+1)\cos x},$

19) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \, dx,$ 20) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} x^4 \arcsin^5 x \, dx.$

5. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+\frac{1}{x}} \, dx,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{\ln(4-x)}{\ln(16-x^2)} \, dx,$ 4) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + e^{\cos x}}) \, dx,$

5) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)},$ 6) $\displaystyle\int\limits_{e^{-2n\pi}}^{1} \left| \Big(\cos \ln \frac{1}{x}\Big)' \right| dx, \ \ n \in \mathbb{N},$

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x^m \ln^n x \, dx, \ \ m, n \in \mathbb{N},$ 8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x^m (1-x)^n \, dx, \ \ m, n \in \mathbb{N},$

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{ch} ax \cos bx \, dx,$ 10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{a}} x \operatorname{ch} ax \sin bx \, dx.$

Приклади розв'язування вправ

1.8. Розпишемо значення функцій $y_1 = [x]$ та $y_2 = [x^2]$ на відрізку $[0; 2]$:

$$y_1 = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1), \\ 1, & x \in [1; 2), \\ 2, & x = 2, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1), \\ 1, & x \in [1; \sqrt{2}), \\ 2, & x \in [\sqrt{2}; \sqrt{3}), \\ 3, & x \in [\sqrt{3}; 2), \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Тоді відрізок інтегрування $[0;2]$ розіб'ємо на чотири проміжки $[0;1]$, $[1;\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2};\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3};2]$ і на правому кінці кожного з них y_1 та y_2 будемо доозначувати, вибравши тут значення такі ж як на півінтервалах $[0;1)$, $[1;\sqrt{2})$, $[\sqrt{2};\sqrt{3})$, $[\sqrt{3};2)$.

Отже,

$$\int\limits_0^2 \log_2([x]^2+4[x]+3)\,dx = \int\limits_0^1 \log_2 3\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \log_2 8\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \log_2 9\,dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 \log_2 10\,dx =$$

$$= \log_2 3 + (\sqrt{2}-1)\log_2 8 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\log_2 9 + (2-\sqrt{3})\log_2 10 =$$

$$= \log_2 3 + 3(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\log_2 3 + (2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\log_2 5 =$$

$$= (2-\sqrt{3})\log_2 5 + (1-2\sqrt{2}+2\sqrt{3})\log_2 3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1. \quad \blacktriangleright$$

2.9. Знайдемо період функції $f(x) = \sin^4 x \cos^4 x$, попередньо спростивши її. Тоді

$$f(x) = \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{16}\sin^4 2x = \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) =$$

$$= \frac{1}{64}\Big(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\Big) = \frac{1}{128}(\cos 8x - 4\cos 4x + 3).$$

Звідси одержуємо, що $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ – основний період цієї функції. За властивістю інтегрування періодичної функції матимемо:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{6\pi}{5}} \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}+\pi} \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{128}\int\limits_0^{\pi} (\cos 8x - 4\cos 4x + 3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{128}\Big(\frac{\sin 8x}{8} - \sin 4x + 3x\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{128}. \quad \blacktriangleright$$

3.14. Позначимо $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Тоді

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) = \left|\begin{matrix} U = \sin^{n-1} x, & dV = d(-\cos x), \\ dU = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, & V = -\cos x \end{matrix}\right| =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Звідси

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

тоді

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Якщо $n = 2k$, то

$$I_{2k} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot \ldots \cdot 4\cdot 2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot \frac{\pi}{2}.$$

Якщо $n = 2k+1$, то

$$I_{2k+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots =$$

$$= \frac{2k(2k-2)\cdot \ldots \cdot 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}. \qquad \blacktriangleright$$

4.9. До заданого інтеграла застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тоді

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & t_1 = 0,\ t_2 = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}. \qquad \blacktriangleright$$

§2.4. Обчислення площі плоскої фігури

Многокутною областю або многокутником будемо називати довільну скінченну плоску фігуру, обмежену однією або кількома замкненими ламаними. Для такої фігури поняття площі вже достатньо вивчене в шкільному курсі геометрії.

Розглянемо тепер довільну фігуру (P) на площині, що являє собою обмежену замкнену область. Її межу або контур (K) будемо зображати у вигляді замкненої кривої (або декількох кривих). Будемо розглядати всеможливі многокутники (A), що цілком містяться в (P) і многокутники (B), що містять в собі (P). Якщо через A та B позначити відповідні їм площі, то $A \leqslant B$.

Множина чисел $\{A\}$ обмежена зверху будь-яким B. Тоді множина $\{A\}$ має точну верхню межу P_*, причому $P_* \leqslant B$.

Аналогічно, множина чисел $\{B\}$ обмежена знизу числом P_*. Отже, $\{B\}$ має точну нижню межу P^*, причому $P^* \geqslant P_*$. Ці границі досить часто називають відповідно ***внутрішньою і зовнішньою площею фігури*** (P).

Якщо обидві межі $P_* = \sup\{A\}$ і $P^* = \inf\{B\}$ співпадають, то їхнє спільне значення P називають ***площею фігури*** (P). В цьому випадку фігуру (P) називають ***квадрованою***.

Критерії квадрованості плоскої фігури.

1. Для того щоб фігура (P) була квадрованою, необхідно і достатньо, щоб існували такі дві послідовності многокутників $\{(A_n)\}$, $\{(B_n)\}$, які відповідно містяться в (P) і містять (P), площі яких мали б спільну границю:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P.$$

2. Для того щоб фігура (P) була квадрованою, необхідно і достатньо, щоб існували дві послідовності квадрованих фігур $\{(Q_n)\}$, $\{(R_n)\}$, відповідно таких, що містяться в (P) і містять (P), площі яких мають спільну границю:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} R_n = P.$$

3. Для того щоб фігура (P) була квадрованою, необхідно і достатньо, щоб її контур (K) мав площу рівну нулю.

Зауважимо, що якщо фігура (P) обмежена кількома неперервними або гладкими кривими, то вона є квадрованою.

Властивість адитивності площі. Нехай фігура (P) розкладена на дві фігури (P_1) та (P_2) таким чином, що вони не мають інших спільних точок, крім межових. З квадрованості двох з трьох фігур (P), (P_1) і (P_2) випливає квадрованість третьої, причому $P = P_1 + P_2$.

Площа криволінійної трапеції (фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox (див. рис. 1)) визначається за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

На підставі властивості адитивності площу фігури, обмеженої прямими $x = a$ і $x = b$ та кривими $y = f(x)$ і $y = g(x)$, де $f(x)$, $g(x)$ – визначені, невід'ємні і неперервні на відрізку $[a; b]$ і для довільного $x \in [a; b]$ $f(x) \geqslant g(x)$ (див. рис. 2), знаходимо за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

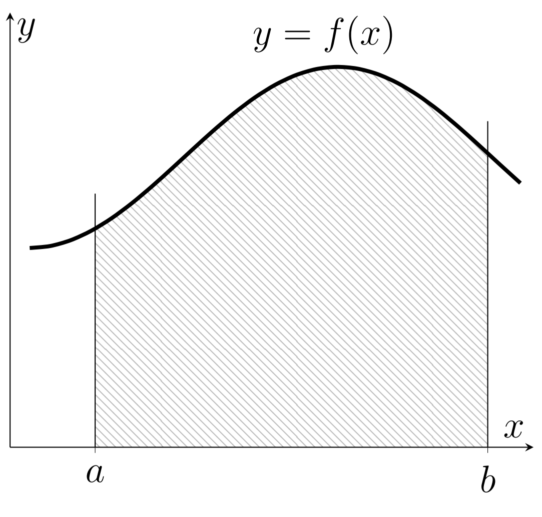

Рис. 1

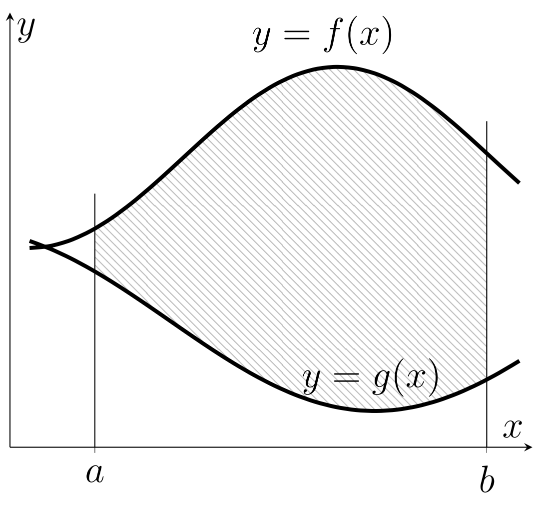

Рис. 2

Якщо фігура, обмежена кривою $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена, недодатна і неперервна на відрізку $[a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

В загальному випадку площа фігури, обмежена кривою $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox, визначається формулою

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Нехай межа плоскої фігури є кусково-гладкою замкненою кривою, заданою параметрично рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні функції на відрізку $[t_0; T]$ за винятком, можливо, скінченної кількості точок. Вважаємо, що точка $M(\varphi, \psi)$ при зміні t в межах від t_0 до T пробігає межу фігури, залишаючи найближчу її частину зліва від напряму руху. Тоді площа фігури обчислюється за однією із формул:

$$S = -\int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)\, dt, \qquad S = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\psi'(t)\, dt,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t))\, dt.$$

Розглянемо криву, яка задається в полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi)$, де функція $r(\varphi)$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Ця крива і два полярні радіуси, проведені відповідно під кутами α і β, є межею фігури, яку назвемо криволінійним сектором. Площа сектора, обмеженого кривою $r = r(\varphi)$ і полярними радіусами, проведеними під кутами α і β, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Вправи

1. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і заданими прямими:

1) $y = 4x - x^2,\ \ x = 2,\ \ y = 0,$

2) $y = 2\sqrt{x},\ \ x = 0,\ \ y = 6,$

3) $y = 2^x,\ \ x = 0,\ \ y = 2,$

4) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2,\ \ x = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{2},\ \ y = 0,$

5) $y = 2\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2},\ \ x = 0,\ \ x = 2,\ \ y = 0,$

6) $y = (2 - x)\sqrt{3x - 1},\ \ x = \dfrac{1}{3},\ \ x = \dfrac{5}{3},\ \ y = 0,$

7) $y = x^4 - 2x^2 + 5x,\ \ x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 1,$

8) $y = \ln x,\ \ y = \ln a,\ \ y = \ln b,\ \ x = 0,$

9) $y = |\lg x|,\ \ x = 0{,}1,\ \ x = 10,\ \ y = 0,$

10) $y = |x|^3 e^{-x^2},\ \ x = -1,\ \ x = 1,\ \ y = 0.$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

1) $y = \dfrac{|4 - x^2|}{4},\ \ y = 7 - |x|,$

2) $y = \sqrt{x - 2},\ \ y = \sqrt{4 - x},\ \ y = 0,$

3) $y = |x^2 - 4x + 3|,\ \ x = 2,\ \ y = x + 3,$

4) $y = \left|1 - 2\sin^2\dfrac{3x}{2}\right|,\ \ y = 1 + \dfrac{12}{\pi}x,\ \ x = \dfrac{\pi}{2},$

5) $y = \dfrac{6}{x + 5},\ \ y = |x|,$

6) $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

7) $y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x,\ \ y = 0,$

8) $y = (x + 1)^2,\ \ x = \sin \pi y,\ \ y = 0,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1,$

9) $y = \sin x,\ \ y = \sin 2x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$

10) $y = -xe^{-x},\ \ y = \ln(1 + x),\ \ x = 1.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $x^2+y^2=4,\ \ y=|x|,\ \ y>0,$

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$

3) $x^2+y^2=4,\ \ x+y=2,$

4) $x^2+y^2=2,\ \ y=x^2,\ \ y>0,$

5) $x^2+y^2=2,\ \ y^2=2x-1,\ \ x\geqslant\dfrac{1}{2},$

6) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \ y=\dfrac{9}{32}x^2,\ \ y\leqslant\dfrac{9}{32}x^2,$

7) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\ \ y=2x,$

8) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ \ y^2-6x=0,\ \ x\geqslant\dfrac{y^2}{6},$

9) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\ \ x=5,$

10) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\ \ 9x-4y=36.$

4. Знайти площу фігури, обмеженої параметрично заданою кривою:

1) $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ a>0,\ \ b>0,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$

2) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ a>0,\ \ y=0,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$

3) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ a>0,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$

4) $x=a(\cos t+t\sin t),\ \ y=a(\sin t-t\cos t),\ \ a>0,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$

5) $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ \ y=a(2\sin t-\sin 2t),\ \ a>0,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$

6) $x=3t^2,\ \ y=3t-t^3,\ \ -\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3},$

7) $x=a\sin 2t,\ \ y=a\sin t,\ \ a>0,\ \ 0\leqslant t\leqslant\pi,$

8) $x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\ \ y=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2},\ \ -1\leqslant t\leqslant 1,$

9) $x=\dfrac{a\sin 3t}{\sin t},\ \ y=\dfrac{a\sin 3t}{\cos t},\ \ -\dfrac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{3},$

10) $x=a(1+\cos t)\cos t,\ \ y=a(1+\cos t)\sin t,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

5. Знайти площі фігур, обмежених кривими, заданими в полярній системі координат:

1) $r=2\sqrt{3}a\cos\varphi,$ 2) $r=2a\sin\varphi,$

3) $r=a\sin 3\varphi,$ 4) $r=a(1+\cos\varphi),$

5) $r=2-\cos\varphi,\ \ r=\cos\varphi,$ 6) $r=a\cos\varphi,\ \ r=a(\cos\varphi+\sin\varphi),$

7) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, 8) $r = 3 + \cos 4\varphi$, $r = 1 - \cos 4\varphi$,

9) $r = a\cos 3\varphi$, 10) $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = -x^2 + 4x + 1$ і дотичними до неї, проведеними в точках з абсцисами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

7. Дві прямі перетинаються в точці B і дотикаються до параболи в точках A і C. Довести, що площа ΔABC, обмеженого дугою AC параболи і відрізками AB і BC, дорівнює $\dfrac{1}{6}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$.

8. Знайти найменшу площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$ і нормаллю до неї.

9. Знайти найменшу площу фігури, обмеженої гіперболою $xy = 3$ і прямою, яка проходить через точку $M(1; 4)$.

10. У якому відношенні пряма $x + y = 2a$ ділить площу листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$?

11. Довести, що площа фігури, обмеженої кривою $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ та її асимптотою $x = 2a$, дорівнює потроєній площі круга, який проходить через початок координат з центром в точці $O(a; 0)$.

12. Довести, що площа фігури, обмеженої кривою $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ та її асимптотою $y = 0$, у чотири рази більша за площу круга радіуса a.

13. Довести, що площа фігури, обмеженої цисоїдою Діоклеса $x = 2a\sin t$, $y = \dfrac{2a^3\sin^3 t}{\cos t}$ та її асимптотою $x = 2a$, втроє більша за площу круга радіуса a.

14. Довести, що площа трилистника $r = a\sin 3\varphi$ дорівнює чверті площі описаного навколо нього круга.

Приклади розв'язування вправ

2.9. Побудуємо плоску фігуру, обмежену заданими кривими (див. рис. 3). Площа плоскої фігури S складається із двох площ S_1 та S_2.

Знайдемо абсциси точок перетину цих кривих:

$$\sin x = \sin 2x, \qquad \sin x(2\cos x - 1) = 0,$$

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

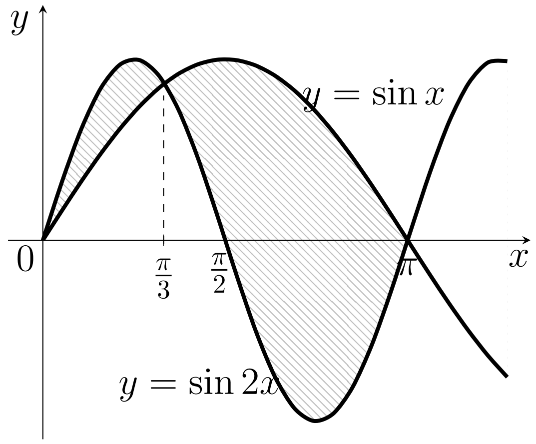

Рис. 3

Тоді

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \text{ (кв. од.).} \qquad \blacktriangleright$$

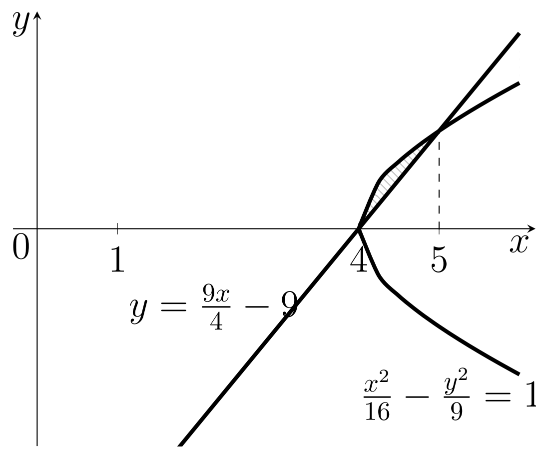

Рис. 4

3.10. Побудуємо плоску фігуру, обмежену заданими кривими (див. рис. 4). Знайдемо абсциси точок перетину гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ і прямої $9x - 4y = 36$, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ 9x - 4y = 36. \end{cases}$$

Матимемо $x_1 = 4,\ \ x_2 = 5$.

Тоді площу заданої фігури шукаємо за формулою:

$$S = \int\limits_4^5 \frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}\,dx - \int\limits_4^5 \frac{9x-36}{4}\,dx =$$

$$= \left(\frac{3}{8}x\sqrt{x^2-16} - 6\ln|x+\sqrt{x^2-16}|\right)\Big|_4^5 - \frac{1}{4}\left(\frac{9x^2}{2} - 36x\right)\Big|_4^5 =$$

$$= \frac{45}{8} + 6\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{225}{2} - \frac{144}{2} - 36\right) = \frac{45}{8} - \frac{9}{8} - 6\ln 2 = \frac{9}{2} - 6\ln 2 \text{ (кв. од.)}. \qquad \blacktriangleright$$

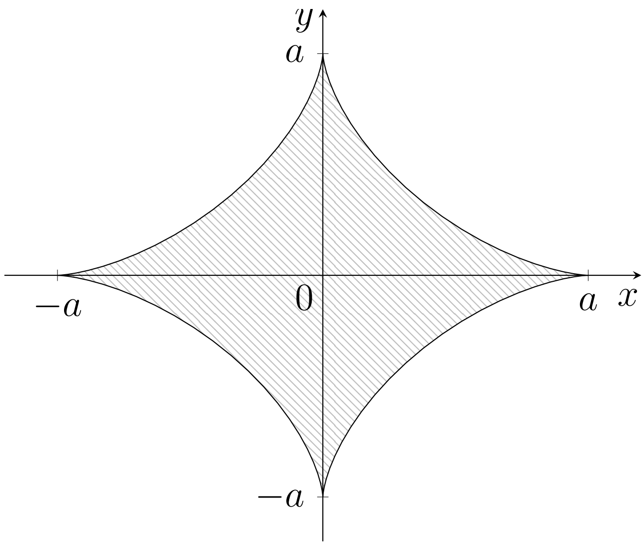

Рис. 5

4.3. Дану криву (астроїду) можна зобразити в декартовій системі координат (див. рис. 5). За формулою обчислення площі плоскої фігури, обмеженої параметрично заданою кривою, маємо

$$S = -\int\limits_0^{2\pi} a\sin^3 t\cdot(a\cos^3 t)'\,dt = 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2t - \cos 4t + \cos 2t \cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \int\limits_0^{2\pi} \Big(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t + \frac{1}{2}\cos 2t\Big)\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \int\limits_0^{2\pi} \Big(1 - \frac{1}{2}\cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\Big)\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16}\Big(t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{12}\sin 6t\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ (кв. од.).} \quad \blacktriangleright$$

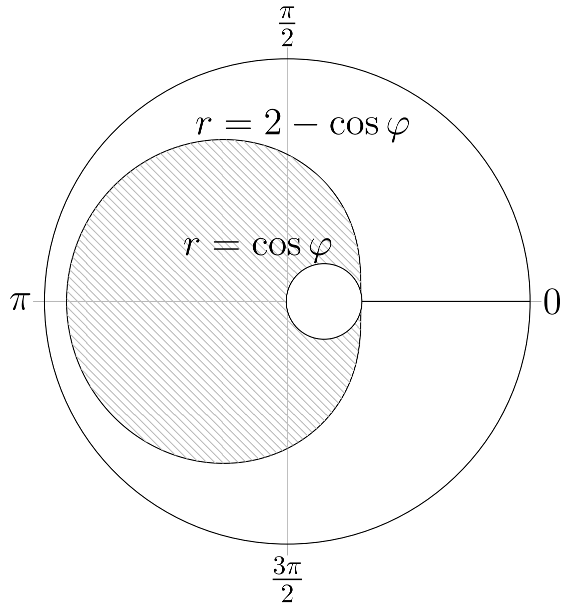

Рис. 6

5.5. Зобразимо фігуру в полярній системі координат (див. рис. 6). Тоді

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (2 - \cos\varphi)^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \Big(4 - 4\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\Big)\, d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(4\varphi - 4\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\Big(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{17}{4}\pi \text{ (кв. од.).} \quad \blacktriangleright$$

§ 2.5. Обчислення довжини дуги кривої

Нехай плоска крива Γ задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де φ і ψ – неперервні на відрізку $[a; b]$ функції. Якщо розглянути параметр t як час, то рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ визначають закон руху точки M з координатами x та y на площині, а крива Γ є траєкторією рухомої точки. Отже, довжину дуги кривої можна розглядати як шлях, пройдений рухомою точкою.

Будемо вважати, що крива є гладкою, тобто функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на відрізку $[a; b]$ мають неперервні похідні, які з фізичної точки зору задають вектор швидкості $\overrightarrow{v}(t) = (\varphi'(t); \psi'(t))$ в кожний момент часу t з часового проміжку $[a; b]$.

Тоді довжина дуги кривої Γ на проміжку $[a; b]$ обчислюється за формулою

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

Якщо крива Γ є графіком неперервно диференційовної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то довжина дуги кривої Γ обчислюється за формулою

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо крива задана в полярній системі координат, тобто $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то формула обчислення довжини дуги кривої матиме вигляд

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Нехай маємо просторову криву Γ, задану параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \lambda(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Вважаємо, що крива Γ гладка, тобто функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \lambda(t)$ є неперервно диференційовними. Тоді довжина дуги просторової кривої обчислюється за формулою

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\lambda'(t))^2}\, dt.$$

Вправи

1. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $y = x^{\frac{3}{2}},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 4,$
2) $y = \sqrt{x},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$
3) $y = e^x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \ln 5,$
4) $y = \ln \sin x,\ \ \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3,$
5) $y = \arcsin e^x,\ \ -\ln 5 \leqslant x \leqslant -\ln 2,$
6) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2,$
7) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$
8) $y = \arcsin(\sin x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$
9) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{16},$
10) $y = 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2.$

2. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $x = 3t - 1,\ \ y = -4t + 2,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$
2) $x = t^2 - t + 1,\ \ y = t^2 + t + 1,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$
3) $x = 8t^3,\ \ y = 6t^2 - 3t^4,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2},$
4) $x = 6 - 3t^2,\ \ y = 4t^3,\ \ -\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2},$
5) $x = \dfrac{2 - t}{2 + t},\ \ y = \dfrac{t}{2 + t},\ \ 1 \leqslant t \leqslant 2,$
6) $x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}},\ \ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}},\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$
7) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$
8) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 8\pi,$
9) $x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant \pi,$
10) $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ \ y = (t^2 - 2)\cos t - 2t\sin t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

3. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $r = a\cos\varphi,$ 2) $r = a\cos^3 \dfrac{\varphi}{3},$
3) $r = a(1 + \cos\varphi),$ 4) $r = a\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$

5) $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, 6) $r = \dfrac{a}{1+\cos\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

7) $r = 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, 8) $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$,

9) $r = \dfrac{a}{\sin^3\frac{\varphi}{3}}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{5\pi}{2}$, 10) $r = \dfrac{a}{\cos^4\frac{\varphi}{4}}$, $3\pi \leqslant \varphi \leqslant 5\pi$.

4. Обчислити довжину дуги просторової кривої:

1) $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, $1 \leqslant t \leqslant 2$,

2) $x = 3t - t^2$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

4) $x = at$, $y = a\sqrt{t}\sin t$, $z = a\sqrt{t}\cos t$, $4 \leqslant t \leqslant 9$,

5) $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $z = \dfrac{at^2}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$,

6) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\dfrac{t}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

7) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $z = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

8) $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, $\dfrac{a}{3} \leqslant y \leqslant 9a$,

9) $4ax = (y+z)^2$, $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $z \geqslant 0$,

10) $x = a\sin\dfrac{y}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a+x}{a-x}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{a\pi}{6}$.

5. Знайти периметр фігури, обмеженої кривими:

1) $x^2 = (y+1)^3$, $y = 4$, 2) $y^3 = x^2$, $y = \sqrt{2 - x^2}$,

3) $y^2 = 2px$, $2x = p$.

6. Знайти пряму, паралельну осі Ox, яка ділить арку циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, на три дуги однакової довжини.

7. Довести, що довжина еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, дорівнює довжині синусоїди $y = c\sin\dfrac{x}{b}$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{b}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

8. Парабола $4ay = x^2$ “котиться” без ковзання вздовж осі Ox. Довести, що фокус параболи описує ланцюгову лінію $x = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$.

9. Якщо кардіоїда $r = a(1 - \sin\varphi)$ “котиться” по циклоїді $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, то її вістря описує пряму лінію. Довести це.

Приклади розв'язування вправ

1.7. Знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = (\sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x})' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Тоді за формулою обчислення довжини дуги кривої, враховуючи, що $0 \leqslant x \leqslant 1$, запишемо:

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \text{ (лін. од.)}. \quad ▶$$

2.10. Знайдемо похідні:

$$x'_t = 2t\sin t + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$y'_t = 2t\cos t - (t^2-2)\sin t - 2\sin t - 2t\cos t = -t^2\sin t.$$

Тоді

$$l = \int\limits_0^\pi \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^\pi t^2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \text{ (лін. од.)}. \quad ▶$$

3.5. Функція $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ є періодичною, тому крива є замкненою (див. рис. 7). Знайдемо період функції, скориставшись формулою пониження степеня:

$$\sin^3\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Звідси одержуємо, що $\omega = 6\pi$ – основний період.

Тому

$$l = \int\limits_0^{6\pi} \sqrt{a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int\limits_0^{6\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^{6\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = a\int\limits_0^{6\pi} \frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\Big(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big)\Big|_0^{6\pi} = 3\pi a \text{ (лін. од.)}. \quad ▶$$

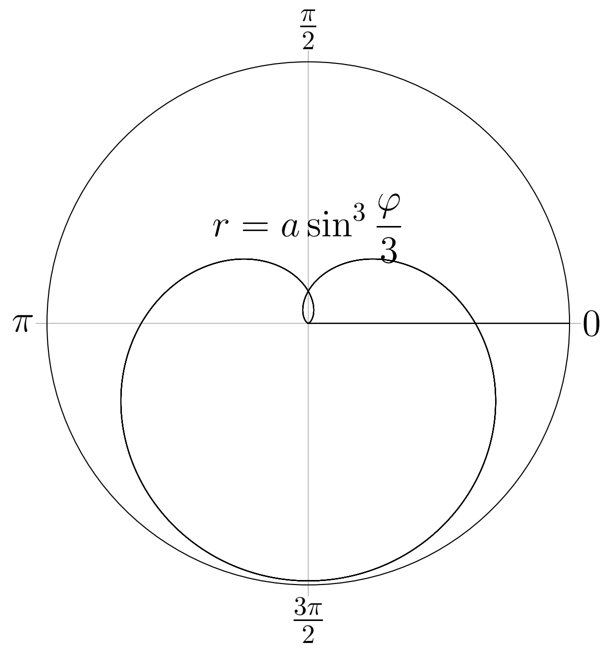

Рис. 7

6. Спочатку знайдемо довжину дуги першої арки циклоїди (див. рис. 8):

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a \text{ (лін. од.)}.$$

Нехай t_0 – параметр, який відповідає точці A на циклоїді, причому довжина дуги OA рівна $\dfrac{8a}{3}$. Для того, щоб знайти t_0, розв'яжемо рівняння:

$$\int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = \frac{8a}{3}.$$

Звідси $t_0 = 2\arccos\dfrac{1}{3}$.

Щоб знайти пряму, паралельну до осі Ox, що задовольняє умову задачі, підставимо знайдене значення t_0 у вираз $a(1-\cos t)$. Тоді

$$y_0 = a\Big(1 - \cos\Big(2\arccos\frac{1}{3}\Big)\Big) = a\Big(1 - \cos^2\Big(\arccos\frac{1}{3}\Big) + \sin^2\Big(\arccos\frac{1}{3}\Big)\Big) =$$

$$= a\Big(1 - \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\Big) = \frac{16}{9}\, a.$$

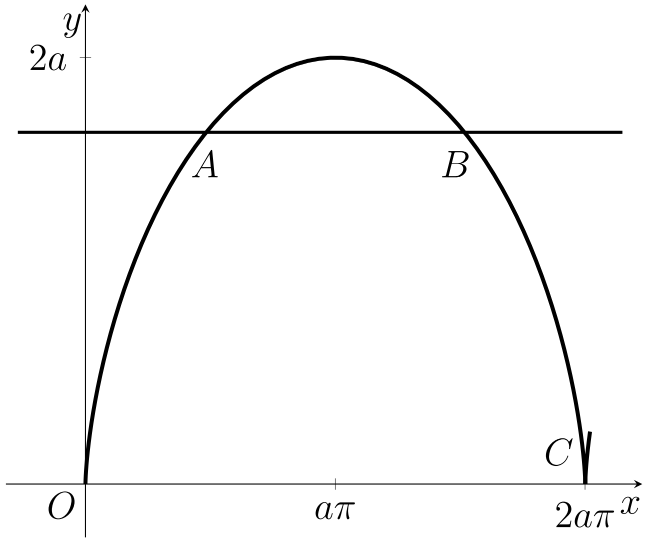

Рис. 8

Оскільки арка циклоїди має вісь симетрії $x = \pi a$, то пряма $y = \dfrac{16}{9}\,a$ перетне арку ще в точці B такій, що довжина дуги BC рівна $\dfrac{8a}{3}$ (див. рис. 8).

Отже, $y = \dfrac{16}{9}\,a$ – пряма, яка ділить першу арку циклоїди на три частини однакової довжини. ►

§ 2.6. Обчислення об'ємів просторових тіл

Нехай задано тіло (V) довільної форми, тобто обмежена замкнена область в тривимірному просторі. Межею (S) тіла (V) є замкнена поверхня (або декілька таких поверхонь).

Розглядаємо многогранники (X) об'єму X, що цілком містяться в тілі (V) і многогранники (Y) об'єму Y, що містять в собі тіло (V). Існує точна верхня межа V_* для $\{X\}$ і точна нижня межа V^* для $\{Y\}$, причому $V_* < V^*$. Їх називають відповідно внутрішнім і зовнішнім об'ємом тіла.

Якщо обидві межі $V_* = \sup\{X\}$, $V^* = \inf\{Y\}$ співпадають, то їх спільне значення V називається ***об'ємом тіла*** (V). В цьому випадку саме тіло (V) називається ***кубовним***.

Властивість адитивності. Якщо тіло (V) розкладене на два тіла (V_1) та (V_2) так, що вони не мають інших спільних точок, крім межових, то із існування об'єму для двох з цих трьох тіл виплиає існування об'єму для третього тіла, причому $V = V_1 + V_2$.

Критерії кубовності тіла.

1. Для того, щоб тіло (V) мало об'єм, необхідно і достатньо, щоб існували такі дві послідовності відповідних многогранників $\{(X_n)\}$ і $\{(Y_n)\}$, що містяться в тілі (V) і що містять в собі тіло (V), об'єми яких мали б спільну границю

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = V.$$

2. Для того, щоб тіло (V) мало об'єм, необхідно і достатньо, щоб існували такі дві послідовності відповідних кубовних тіл $\{(T_n)\}$ і $\{(U_n)\}$, що містяться в тілі (V) і що містять в собі тіло (V), об'єми яких мали б спільну границю

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = V.$$

Зауважимо, що тіло, обмежене однією або декількома неперервними поверхнями, має об'єм.

Нехай кубовне тіло (V) міститься між двома площинами $x = a$ та $x = b$, а кожна площина $x = c$, перпендикулярна до осі Ox, у перерізі з тілом (V) дає квадровану фігуру, площа якої рівна $P(x)$, де $P(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a; b]$. Тоді

$$V = \int\limits_a^b P(x)\,dx.$$

Тілом обертання називаємо просторове тіло, яке можна дістати обертанням деякої криволінійної трапеції навколо осі. Кожне тіло обертання є кубовним тілом. Об'єм тіла, яке дістаємо при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, кривою $y = f(x)$ та віссю Ox, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Нехай функція задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, де функція $\varphi(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на відрізку $[t_0; T]$ і $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(T) = b$, а функція $\psi(t)$ неперервна і невід'ємна на $[t_0; T]$. Об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої параметрично заданою кривою, прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int\limits_{t_0}^{T} \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt.$$

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a; b]$, $0 \leqslant a \leqslant b$, то об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V = 2\pi \int\limits_{a}^{b} x f(x)\, dx.$$

Якщо криволінійний сектор, що визначається кривою $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \pi$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання, що при цьому утворюється, обчислюється за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi.$$

Вправи

1. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 1 - x^2, \;\; y = 0, \;\; x = 0,$
2) $y = \dfrac{x^2 - x}{2}, \;\; y = 0,$
3) $x^2 + (y - b)^2 = a^2, \;\; 0 < a \leqslant b,$
4) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}, \;\; x = -a, \;\; x = a,$
5) $y = \sqrt{x}, \;\; y = \sqrt{2 - x}, \;\; y = 0,$
6) $y = x^2 - 2x + 4, \;\; y = 4 + x,$

7) $y = \sin^2 x, \ \ y = x\sin x, \ \ x = 0, \ \ x = \pi,$

8) $x^2 - y^2 = 1, \ \ \dfrac{x^2}{4} - y^2 = -1, \ \ x = 1,$

9) $y = \operatorname{tg} x, \ \ y = \operatorname{ctg} x, \ \ x = \dfrac{\pi}{6},$

10) $y = 2^{-|x-1|} + 1, \ \ x = 1, \ \ y = x + \dfrac{3}{2}.$

2. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1) $x = a(t - \sin t), \ \ y = a(1 - \cos t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$

2) $x = 2a\cos t - a\cos 2t, \ \ y = 2a\sin t - a\sin 2t,$

3) $x = 2a\sin t, \ \ y = a\sin t\cos t,$

4) $x = a\cos^3 t, \ \ y = a\sin^3 t, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо полярної осі фігури, обмеженої лініями:

1) $r = a\cos^2\varphi,$

2) $r = a(1 + \cos\varphi),$

3) $r = a\varphi, \ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$

4) $r = a\sqrt{2\sin 2\varphi},$

5) $r = e^{\varphi}, \ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$

6) $x^4 + y^4 = a^2x^2,$

7) $r = a\cos^3\varphi,$

8) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$

9) $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2), \ \ x = 3a,$

10) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4.$

4. Довести, що об'єм параболоїда обертання, який має із заданим циліндром спільну основу та висоту, дорівнює половині об'єму циліндра.

5. Знайти об'єм зрізаної піраміди з висотою h та площами основ S_1 та S_2.

6. Знайти об'єм зрізаного конуса з висотою h, основами якого є еліпси з півосями A, B та a, b.

7. Довести, що об'єм посудини, яка утворюється при обертанні кривої $y = r + b\sin\dfrac{2\pi}{h}x$, $0 \leqslant x \leqslant h$, навколо осі Ox, дорівнює $\pi r^2h + \dfrac{1}{2}\pi b^2h$.

8. Із нахиленої циліндричної цистерни радіусом a та висотою h виливається через край рідина. Довести, що в той момент, коли звільниться половина дна, об'єм залишеної рідини дорівнюватиме $\dfrac{2}{3}a^2h$.

Приклади розв'язування вправ

1.9. Плоска фігура, яка обертається навколо осі Ox, зображена на рис. 9. Знайдемо абсциси точок перетину кривих з рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. Тоді одержимо, що $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

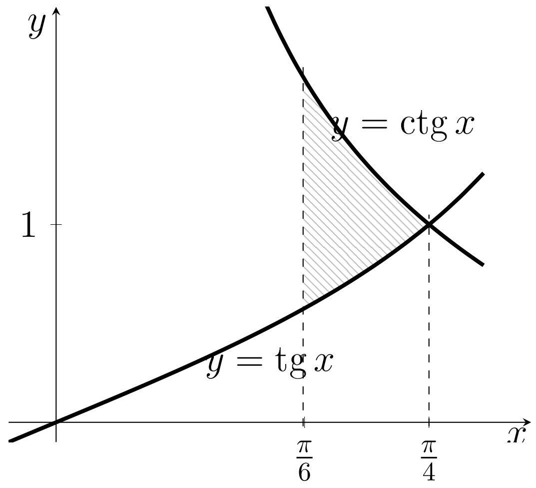

Рис. 9

Згідно формули обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, матимемо:

$$V = \pi \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \pi \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\Big) dx =$$

$$= \pi(-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi\Big(-2 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}\pi \text{ (куб. од.).} \quad \blacktriangleright$$

2.4. Астроїда є симетричною відносно осей координат, тоді об'єм тіла обертання дорівнює подвоєному об'єму тіла, утвореного при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметрично $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, прямими $x = 0,\ y = 0$.

При $x = 0$ і $x = a$ відповідно маємо, що $t = \dfrac{\pi}{2}$ і $t = 0$. Тоді

$$V = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t (a\cos^3 t)' dt = -6\pi a^3 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cos^2 t (-\sin t)\, dt =$$

$$= -6\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t \, d(\cos t) =$$

$$= -6\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) \, d(\cos t) =$$

$$= -6\pi a^3 \Big(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \Big) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -6\pi a^3 \Big(-\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7} + \frac{1}{9} \Big) = \frac{32\pi a^3}{105} \text{ (куб. од).} \quad \blacktriangleright$$

3.10. Перейдемо спочатку до полярної системи координат. Підставляючи $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ у рівняння кривої, матимемо

$$r^6(\varphi)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^3 = a^2 r^4(\varphi)\cos^4\varphi.$$

Звідси $r(\varphi) = a\cos^2\varphi = \dfrac{a}{2}(1+\cos 2\varphi)$. Функція $r(\varphi)$ періодична з періодом $\omega = \pi$ і парна, тому крива симетрична відносно горизонтальної осі і полюса. Тоді об'єм тіла обертання навколо горизонтальної осі обчислюємо за формулою:

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^6\varphi \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{4}{3}\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi \, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{\cos^7\varphi}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi a^3}{21} \text{ (куб. од.).} \quad \blacktriangleright$$

6. Нехай нижня основа зрізаного конуса лежить в площині yOz. Тоді, враховуючи властивість площ подібних фігур, можемо записати

$$\frac{S(h)}{S(0)} = \frac{(H-h)^2}{H^2},$$

де $S(h) = \pi ab$, $S(0) = \pi AB$ і H – висота конуса, побудованого як продовження зрізаного конуса. Звідси

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{AB}} = \frac{H-h}{H}, \qquad H = \frac{h\sqrt{AB}}{\sqrt{AB} - \sqrt{ab}}.$$

Аналогічно

$$\frac{S(x)}{S(0)} = \frac{(H-x)^2}{H^2}, \qquad S(x) = \frac{\pi AB}{H^2}\,(H-x)^2,$$

де $x \in (0;h)$.

Тоді

$$V = \int\limits_0^h \frac{\pi AB}{H^2}\,(H-x)^2 dx = -\frac{\pi AB}{3H^2}\,(H-x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi AB}{3H^2}\,(H^3-(H-h)^3).$$

Оскільки

$$H-h = \frac{h\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}-\sqrt{ab}} - h = \frac{h\sqrt{ab}}{\sqrt{AB}-\sqrt{ab}},$$

то

$$V = \frac{\pi AB(\sqrt{AB}-\sqrt{ab})^2 h^3}{3h^2 AB}\left(\frac{(\sqrt{AB})^3}{(\sqrt{AB}-\sqrt{ab})^3} - \frac{(\sqrt{ab})^3}{(\sqrt{AB}-\sqrt{ab})^3}\right) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\,(AB + \sqrt{ABab} + ab).$$

Враховуючи що $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b}$, остаточно отримаємо

$$V = \frac{\pi h}{3}\,(AB + Ab + ab) = \frac{\pi h}{3}\,(AB + aB + ab) \quad \text{(куб. од.)}. \qquad ▶$$

§ 2.7. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай функція $y = f(x)$ невід'ємна і неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$. Тоді площа поверхні, утвореної при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Якщо у півплощині $y \geqslant 0$ крива задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервно диференційовні, то площа поверхні, утвореної при обертанні цієї кривої навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int\limits_{t_0}^T \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Якщо крива задана в полярній системі координат $r = r(\varphi)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi$, де функція $r(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha;\beta]$, то площа поверхні, утвореної при обертанні цієї кривої навколо горизонтальної осі, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Якщо відповідні криві обертати навколо осі Oy, то формули для обчислення площі поверхні обертання для вищенаведених кривих матимуть вигляд

$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ – для явно заданої кривої,

$S = 2\pi \int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ – для параметрично заданої кривої,

$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$ – для кривої, заданої в полярній системі координат.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервно диференційовна на $[a;b]$ і $Ax + By + C = 0$ – пряма, не паралельна координатним осям, така, що довільна пряма, яка проходить через будь-яку точку проекції графіка функції на задану пряму перпендикулярно до неї, має з цим графіком лише одну спільну точку.

Тоді площа поверхні, що утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо прямої $Ax + By + C = 0$, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} \frac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Якщо крива задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційовні функції на відрізку $[t_0;T]$, і задовольняє зазначену вище умову відносно прямої $Ax+By+C = 0$, то площа поверхні, що утворюється при обертанні графіка функції навколо прямої $Ax + By + C = 0$, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{T} \frac{|A\varphi(t) + B\psi(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

Вправи

1. Обчислити площу поверхні, що утворюється при обертанні дуги кривої навколо вказаної осі:

1) $y = 2x,\ \ x \in [2; 3],\ \ Ox,\ Oy,$

2) $y = \dfrac{1}{4}x^3,\ \ x \in [0; 2],\ \ Ox,$

3) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b},\ \ |x| \leqslant b,\ \ Ox,$

4) $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a},\ \ x \in [0; a],\ \ Ox,$

5) $x^2 + (y - b)^2 = r^2,\ \ r < b,\ \ Ox,$

6) $y^2 = 4ax,\ \ x \in [0; 3a],\ \ Ox,$

7) $9y^2 = x(3 - x)^2,\ \ x \in [0; 3],\ \ Ox,$

8) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}},\ \ x \in [0; a],\ \ Ox,$

9) $y = \mathrm{tg}\,x,\ \ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right],\ \ Ox,$

10) $y^2 + 4x = 2\ln y,\ \ y \in [1; 2],\ \ Oy,$

11) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0; 2\pi],\ \ Ox,\ Oy,$

12) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ Ox,$

13) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ a > b,\ \ Ox,\ Oy,$

14) $x = a(t\sin t + \cos t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

15) $r = a(1 + \cos\varphi),\ \ Ox,$

16) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \ Ox,\ Oy,$

17) $r = 2a\sin\varphi,\ \ Ox,$

18) $r = a(1 - \cos\varphi),\ \ Ox.$

2. Обчислити площу поверхні, утвореної при обертанні заданої кривої навколо вказаної прямої:

1) $y = x^2,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ y = x$

2) $y^2 = 2px,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 4p,\ \ y = 2x,$

3) $y = \dfrac{x^3}{3},\ \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{2},\ \ y = \dfrac{\sqrt{2}x}{3},$

4) $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ x = 0,$

5) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2},\ \ y = a,$

6) $x = \sqrt{2}\sin t,\ \ y = \dfrac{1}{4}\sin 2t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \pi,\ \ x = 0,$

7) $x = t^2,\ \ y = \dfrac{t^3}{3} - t,\ \ |t| \leqslant \sqrt{6},\ \ x = 3,$

8) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ y = x,$

9) $4x^2 + y^2 = 4,\ \ x = 0,$

10) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),\ \ y = x.$

3. Тіло, утворене обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена параболою $ay = a^2 - x^2$, $a > 0$, і віссю Ox. Знайти відношення площі поверхні цього тіла до площі поверхні рівновеликої кулі.

4. Знайти площу тієї частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = ax$, яка міститься всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

5. Осі двох кругових циліндрів з однаковими основами перетинаються під прямим кутом. Обчислити площу поверхні тіла, що становить спільну частину обох циліндрів.

6. Крива $y = \cos x$, $x \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$ обертається навколо прямої $y = c$, $c \geqslant 0$. При якому значенні c площа поверхні обертання буде найменшою? Знайти найменшу площу поверхні обертання.

7. Куб обертається навколо своєї діагоналі. Знайти площу поверхні, яку описують при обертанні всі ребра кубу.

Приклади розв'язування вправ

1.15. Візьмемо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тоді $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$ і за формулою обчислення площі поверхні, що утворюється при обертанні кривої, заданої в полярній системі координат, отримаємо

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = 4\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 16\pi a^2 \int\limits_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -32\pi a^2 \int\limits_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}d\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\Big) =$$

$$= -\frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = \frac{32\pi a^2}{5} \text{ (кв. од.).} \quad \blacktriangleright$$

2.10. Крива симетрична відносно початку координат та відносно координатних осей. Перейшовши до полярної системи, матимемо

$$(r^2(\varphi)\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2(\varphi)\cos^2\varphi - r^2(\varphi)\sin^2\varphi)$$

або $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

З області визначення цієї функції бачимо, що крива знаходиться між бісектрисами I-го і III-го координатних кутів, бо $\pi n - \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Однією з таких бісектрис є задана пряма $y = x$. Тому достатньо обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо прямої $y = x$ частини кривої, що знаходиться в I-ій та IV-ій чверті. Ця дуга проектується на вісь обертання однозначно при $\varphi \in \Big(-\dfrac{\pi}{4}; 0\Big)$ і $\varphi \in \Big(0; \dfrac{\pi}{4}\Big)$, бо функція $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ у вказаних проміжках є відповідно зростаючою і спадною.

Скориставшись співвідношенням між декартовими і полярними координатами, перейдемо до параметричного зображення $x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$. Тоді

$$x'_\varphi = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi = -\frac{a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$y'_\varphi = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi = \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

За формулою для обчислення площі поверхні обертання маємо

$$S = 2\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)\sqrt{\frac{a^2\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi} + \frac{a^2\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)\sqrt{\frac{a^2\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi} + \frac{a^2\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\Big) =$$

$$= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi\Big) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\Big((\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + (\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\Big) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\bigg(\Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) + \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\Big)\bigg) = 4\pi a^2 \text{ (кв. од.).} \quad \blacktriangleright$$

6. Оскільки крива $y = \cos x,\ x \in \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big]$, обертається навколо прямої $y = c$, то здійснимо паралельне перенесення графіка функції на c одиниць вгору. Тоді площа поверхні обертання отриманої кривої навколо прямої $y = c$ обчислюється за формулою

$$S = 2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x + c)\sqrt{1 + \sin^2 x}dx =$$

$$= 2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}dx + 2\pi c\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2 x}dx.$$

Очевидно, що величина поверхні буде найменшою у випадку, коли $c = 0$, бо обидва інтеграли приймають додатні значення.

Тоді

$$S = 2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}dx = 2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2 x}d(\sin x) =$$

$$= 4\pi\Big(\frac{\sin x}{2}\sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\big|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\big|\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})\Big) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \text{ (кв. од.).} \quad \blacktriangleright$$

§ 2.8. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

З курсу фізики відомо, що статичний момент M матеріальної точки масою m відносно деякої осі рівний добутку маси m на відстань d від цієї осі. У випадку системи n матеріальних точок з масами $m_1,\ m_2, \ldots, m_n$, що лежать в одній площині з віссю відповідно на відстанях $d_1,\ d_2, \dots,\ d_n$ від осі, статичний момент можна виразити сумою $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i$. При цьому відстані до точок, що лежать по одну сторону осі беруться із знаком "$+$", а по іншу сторону – із знаком "$-$".

Нехай маси зосереджені не в окремих точках, а заповнюють лінію або плоску фігуру повністю.

Знайдемо статичні моменти M_x та M_y плоскої дуги кривої відносно координатних осей. Вважаємо при цьому криву однорідною, тобто її лінійна густина ϱ є сталою (для спрощення вважаємо, що $\varrho = 1$). Враховуючи такі припущення, маса будь-якої дуги вимірюватиметься її довжиною і поняття статичного моменту має геометричний зміст.

Отже, в нашому випадку статичні моменти однорідної дуги кривої відносно осей координат будуть рівні

$$M_x = \int\limits_0^L y(l)dl, \qquad M_y = \int\limits_0^L x(l)dl,$$

де l – параметр, що визначається довжиною дуги кривої від початкової точки до довільної точки на дузі, dl – диференціал дуги кривої, L – довжина всієї дуги.

Статичні моменти M_x і M_y дозволяють легко знайти центр ваги $C(\xi, \eta)$ дуги кривої. Точка C володіє такою властивістю, що якщо в ній зосередити всю масу кривої, то статичний момент цієї маси відносно будь-якої осі співпадатиме із статичним моментом кривої відносно тієї ж осі. Тобто

$$L\xi = M_y = \int\limits_0^L x(l)dl, \qquad L\eta = M_x = \int\limits_0^L y(l)dl,$$

звідси

$$\xi = \frac{M_y}{L} = \frac{\int\limits_0^L x(l)dl}{L}, \qquad \eta = \frac{M_x}{L} = \frac{\int\limits_0^L y(l)dl}{L}.$$

Якщо крива $y = f(x)$, де $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, є однорідною, то координати центра мас визначаються за формулами

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}, \qquad \eta = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}.$$

Якщо крива задана параметрично, то формули для знаходження координат центра мас матимуть вигляд

$$\xi = \frac{\int\limits_{t_0}^T \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt}{\int\limits_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt}, \qquad \eta = \frac{\int\limits_{t_0}^T \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt}{\int\limits_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt}.$$

Якщо крива $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, задана в полярній системі координат, то формули для обчислення центра мас дуги кривої запишуться у виді

$$\xi = \frac{\int\limits_\alpha^\beta r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi}{\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi}, \quad \eta = \frac{\int\limits_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi}{\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi}.$$

Нехай по криволінійній трапеції, що обмежується кривою $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, розподілена маса із сталою густиною, рівною одиниці. Таку фігуру часто називають ***однорідною матеріальною пластиною***.

Для статичних моментів такої пластини відносно відповідних координатних осей матимемо:

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx, \;\; M_y = \int\limits_a^b xf(x)\,dx.$$

Центром мас матеріальної плоскої фігури називають точку $C(\xi, \eta)$ таку, що коли масу фігури помістити в неї, то отримаємо матеріальну точку, статичні моменти якої відносно осей Ox і Oy рівні відповідним статичним моментам цієї фігури.

Отже, координати центра мас матеріальної плоскої однорідної пластини обчислюються за формулами

$$\xi = \frac{M_y}{S}, \qquad \eta = \frac{M_x}{S},$$

де S – площа пластини.

Якщо криволінійна трапеція обмежена зверху параметрично заданою кривою $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [t_0; T]$, з боків – прямими $x = x(t_0) = a$, $x = x(T) = b$, знизу – віссю Ox, то координати центра мас цієї трапеції обчислюються за формулами:

$$\xi = \frac{\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,dt}{\int\limits_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)\,dt}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt}{\int\limits_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)\,dt}.$$

Якщо однорідний криволінійний сектор, заданий в полярній системі координат нерівностями $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r(\varphi) \geqslant 0$, де $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $r(\varphi)$ – неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$ функція, то координати центра мас цього сектора обчислюються за формулами:

$$\xi = \frac{2\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{3\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi}, \qquad \eta = \frac{2\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi}{3\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi}.$$

Перша теорема Гульдіна. *Величина поверхні, що утворюється при обертанні кривої навколо осі, що не перетинає її, рівна довжині дуги цієї кривої, помноженій на довжину кола, що описує центр мас заданої кривої.*

Друга теорема Гульдіна. *Об'єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що не перетинає її, рівний добутку площі цієї фігури на довжину кола, що описує центр мас цієї фігури.*

Нехай матеріальна точка M під дією сили F переміщується з точки a в точку b по осі Ox, причому сила діє в напрямі, паралельному осі Ox, а величина її залежить від положення точки на осі. Робота, виконана сталою силою F при переміщенні матеріальної точки на відстань s (сила діє в напрямі переміщення), дорівнює $A = F \cdot s$. Тоді елемент роботи, виконаної змінною силою при переміщенні з точки x в точку $x + dx$ дорівнює $dA = F(x)\,dx$, а робота A змінної сили F на відрізку $[a; b]$ визначається інтегралом

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx.$$

Вправи

1. Знайти статичні моменти даних однорідних матеріальних дуг:

1) $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in [0; \pi]$, відносно координатних осей,

2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0; \pi]$, відносно координатних осей,

3) $y = \dfrac{a}{2}\big(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\big),\ x \in [0; a]$, відносно осі Ox,

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y \geqslant 0$, відносно осі Ox,

5) $y^2 = 4x,\ y \geqslant 0,\ x \in [0; 4]$, відносно координатних осей,

6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ x \in [0; a]$, відносно координатних осей,

7) $y = \cos x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, відносно осі Ox,

8) $y^2 = 2px,\ x \in \left[0; \dfrac{p}{2}\right]$, відносно прямої $x = \dfrac{p}{2}$,

9) $r = 2a\cos\varphi,\ \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, відносно координатних осей,

10) $r = a\varphi,\ \varphi \in [0; \pi]$, відносно координатних осей.

2. Знайти координати центра мас даних однорідних матеріальних дуг:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi]$, 2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \in [0; a]$,

3) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ x \in [-a; a],$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \ t \in [0; 2\pi],$

5) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y,\ y \in [1; 2],$

6) $2x + y - 2 = 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$

7) $r = a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in [0; 2\pi],$

8) $r = 2a\cos\varphi,\ \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],$

9) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right],$

10) $r = ae^{\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi].$

3. Знайти статичні моменти однорідних матеріальних пластин, обмежених даними кривими:

1) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0; 2\pi],\ y = 0,$ відносно осі Ox,

2) $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,$ відносно координатних осей,

3) $y = \dfrac{2}{1 + x^2},\ y = x^2,$ відносно осі Ox,

4) $y^2 = 2px,\ y = 0,\ x = 1,$ відносно координатних осей,

5) сторонами трикутника з основою a та висотою h, відносно основи,

6) $y = \dfrac{2}{\pi}x,\ y = \sin x,\ x \geqslant 0,$ відносно координатних осей,

7) $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ x = 0,\ y = 0,$ відносно координатних осей,

8) $x^2 + 4y - 16 = 0,\ y = 0,$ відносно координатних осей,

9) $ax = y^2,\ ay = x^2,\ a > 0,$ відносно координатних осей,

10) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right],$ відносно координатних осей.

4. Знайти координати центра мас однорідних матеріальних пластин, обмежених кривими:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0,$

2) $y = \cos x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right],\ y = 0,$

3) $x^2 + 4y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 4,\ x, y > 0,$

4) $r = a(1 + \cos\varphi),$

5) $r = a\varphi,\ \varphi \in [0; \pi],$

6) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],$

7) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2,$

8) $r = ae^{\varphi},\ \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],$

9) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2,\ x, y \geqslant 0,$

10) $x^4 - x^2y + y^3 = 0,\ x, y \geqslant 0.$

5. Обчислити об'єм та площу поверхні тора, утвореного при обертанні круга $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$: а) навколо осі Ox, б) навколо осі Oy.

6. Квадрат із стороною a обертається навколо прямої, що проходить через одну з його вершин і утворює кут φ з його діагоналлю, причому $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти об'єм тіла обертання і площу його поверхні.

7. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні півкруга радіуса r навколо дотичної, паралельної діаметру.

8. Довести, що центр мас правильного трикутника міститься на одній третій висоти від його основи.

9. Знайти роботу, яку слід затратити на викачування води з посудини, що має форму кругового півциліндра завдовжки a та радіусом r.

10. Матеріальна точка рухається по прямій під дією сили, пропорційної відстані точки від початку руху. Визначити роботу цієї сили по переміщенню точки на відстань 15м від початку руху, якщо на відстані 3м сила дорівнює 1Н.

11. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи r і висотою h. Питому вагу піску вважати рівною γ.

12. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб вилити воду з резервуара, який має форму конуса радіуса r і висотою h. Вершина конуса розміщена вгорі.

13. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з казана, який має форму параболоїда обертання з радіусом основи r і висотою h.

14. Електричний заряд q_1, вміщений у початку координат, відштовхує заряд q_2 із точки $(a;0)$ в точку $(b;0)$. Знайти роботу сили відштовхування F.

15. Водопровідна труба має діаметр 6см. Один кінець її з'єднаний із баком, в якому рівень води на 100см вищий за верхній край труби, а другий закритий заслінкою. Знайти повний тиск води на заслінку.

16. Знайти тиск на півкруг радіуса r, занурений у рідину так, що діаметр лежить на поверхні рідини. Питома вага рідини рівна γ.

17. Однорідне тіло у формі прямого кругового циліндра з висотою h і радіусом основи R обертається навколо своєї осі із сталою кутовою швидкістю ω. Знайти кінетичну енергію тіла, якщо густина матеріалу, з якого воно виготовлене, дорівнює ϱ.

18. З якою силою однорідний стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ з лінійною густиною ϱ притягує матеріальну точку $P(a)$, $a > l$, масою m?

19. За який час вода витече з конічної лійки, висота якої $H = 50$см, радіус верхньої основи $R = 5$см і радіус нижньої основи $r = 0,2$см.

20. У дні циліндричної посудини з площею основи 100см^2 і висотою 30см є отвір. Обчислити площу цього отвору, якщо відомо, що вода з посудини виливається за 2хв.

Приклади розв'язування вправ

2.7. Оскільки дуга кривої є однорідною, то вважаємо, що $\varrho = 1$. Тоді довжина, а отже, і маса заданої кривої визначається наступним чином:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|d\varphi = 2a\Big(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\Big) =$$

$$= 2a\Big(2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) = 8a.$$

Врахувавши, що

$$x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \qquad y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi,$$

отримаємо

$$M_x = a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\,d\varphi =$$

$$= 8a^2\int_0^{2\pi}\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\,d\varphi = 8a^2\Big(\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\Big) =$$

$$= 16a^2\Big(-\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\Big) + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\Big) =$$

$$= 16a^2\Big(-\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) = 0.$$

$$M_y = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\cos\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi =$$

$$= 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi|\cos\frac{\varphi}{2}|\,d\varphi = 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\Big(\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)|\cos\frac{\varphi}{2}|\,d\varphi =$$

$$= 4a^2\Big(\int\limits_0^{\pi}\Big(\cos^3\frac{\varphi}{2} - 2\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)\,d\varphi - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\Big(\cos^3\frac{\varphi}{2} - 2\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)\,d\varphi\Big) =$$

$$= 8a^2\Big(\int\limits_0^{\pi}\Big(2\sin^4\frac{\varphi}{2} - 3\sin^2\frac{\varphi}{2} + 1\Big)d\Big(\sin\frac{\varphi}{2}\Big) - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\Big(2\sin^4\frac{\varphi}{2} - 3\sin^2\frac{\varphi}{2} + 1\Big)d\Big(\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\Big) =$$

$$= 8a^2\Big(\Big(\frac{2\sin^5\frac{\varphi}{2}}{5} - \sin^3\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} - \Big(\frac{2\sin^5\frac{\varphi}{2}}{5} - \sin^3\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\Big)\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) = \frac{32}{5}\,a^2.$$

Тоді

$$\xi = \frac{M_y}{L} = \frac{\frac{32}{5}\,a^2}{8a} = \frac{4}{5}\,a, \qquad \eta = \frac{M_x}{L} = \frac{0}{8a} = 0.$$

Отже, $C\Big(\dfrac{4}{5}\,a; 0\Big)$ – центр мас заданої однорідної матеріальної кривої. ▶

4.2. Знайдемо спочатку площу однорідної плоскої фігури, вважаючи $\varrho = 1$. Тоді

$$S = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ (кв. од.)}.$$

Статичні моменти плоскої фігури відносно осей координат обчислюємо за формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx = \Big(x + \frac{\sin 2x}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$M_y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx = 0.$$

Тоді

$$\xi = \frac{M_y}{S} = 0, \qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $C\Big(0; \dfrac{\pi}{4}\Big)$ – центр мас заданої плоскої фігури. ▶

5. Для обчислення об'єму та площі поверхні тора, що утворюється при обертанні кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ навколо осей Ox та Oy, скористаємось наведеними теоремами Гульдіна.

Центр мас кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ і круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ міститься в точці $(a;b)$. Якщо коло обертається навколо осі Ox, то центр мас описує коло радіуса b, якщо коло обертається навколо осі Oy, то центр мас описує коло радіуса a. Довжини відповідних утворених кіл будуть рівні $2\pi b$ і $2\pi a$.

Довжина кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ буде рівна $2\pi r$, а площа круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ – рівна πr^2.

Тоді за першою теоремою Гульдіна площа поверхні тора, що утворюється при обертанні кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ навколо осі Ox, рівна $2\pi b \cdot 2\pi r = 4\pi^2 br$, навколо осі Oy – $4\pi^2 ar$.

За другою теоремою Гульдіна об'єм тора, що утворюється при обертанні круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ навколо осі Ox, рівний $2\pi b \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 b$, навколо осі Oy – $2\pi^2 r^2 a$. ▶

18. Відповідно до закону Ньютона ділянка стержня $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, n-1}$, з масою $\varrho \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, притягує матеріальну точку P із силою $\Delta F_i = -k\dfrac{m\varrho \Delta x_i}{(a-c_i)^2}$, де k – коефіцієнт пропорційності (гравітаційна стала), $c_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тоді шукана сила F визначається з формули

$$F = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta F_i,$$

тобто

$$F = -km\varrho \int\limits_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -\frac{km\varrho}{a-x}\Big|_0^l = \frac{km\varrho}{a} - \frac{km\varrho}{a-l} = -\frac{km\varrho l}{a(a-l)}. \quad ▶$$

Індивідуальні завдання до розділу II

1. Знайти визначений інтеграл, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$1)\ \int\limits_0^2 \sin^2 x\,dx,\quad 2)\ \int\limits_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx,\quad 3)\ \int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x},$$

$$4)\ \int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}},\quad 5)\ \int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2},\quad 6)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\,dx,$$

$$7)\ \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+4x+5},\quad 8)\ \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}},\quad 9)\ \int\limits_{-1}^1 4^x e^{2x}\,dx,$$

$$10)\ \int\limits_0^2 3^{x+2}\,dx,\quad 11)\ \int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx,\quad 12)\ \int\limits_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$13)\ \int\limits_1^2 \sqrt{x+3}\,dx,\quad 14)\ \int\limits_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad 15)\ \int\limits_1^2 \frac{x^3+x^2 2^x+1}{x^2}\,dx,$$

$$16)\ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} 3x\,dx,\quad 17)\ \int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1},\quad 18)\ \int\limits_{-2}^2 e^{2x+4}\,dx,$$

$$19)\ \int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,dx,\quad 20)\ \int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx,\quad 21)\ \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x},$$

$$22)\ \int\limits_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+1},\quad 23)\ \int\limits_{-2}^2 e^{3x+4}\,dx,\quad 24)\ \int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{3x+25}},$$

$$25)\ \int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{9+(x-2)^2},\quad 26)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx,\quad 27)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx,$$

$$28)\ \int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,\quad 29)\ \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(5x+11)^3},\quad 30)\ \int\limits_{-1}^0 \sqrt{2-3x}\,dx.$$

2. Знайти визначений інтеграл методом заміни змінної:

$$1)\ \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx,\quad 2)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}},\quad 3)\ \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

$$4)\ \int\limits_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}},\quad 5)\ \int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{1\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$7)\ \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}},\quad 8)\ \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}},\quad 9)\ \int\limits_{-3}^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+9}},$$

10) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$, 11) $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, 12) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$,

13) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$, 14) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$, 15) $\int\limits_{3}^{6} \sqrt{x^2-9}\,dx$,

16) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$, 17) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$, 18) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$,

19) $\int\limits_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6-x^2}}{5x^2}\,dx$, 20) $\int\limits_{0}^{2} x\sqrt{4+x^2}\,dx$, 21) $\int\limits_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{5} \frac{\sqrt{25+x^2}}{x^2}\,dx$,

22) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$, 23) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$, 24) $\int\limits_{-5}^{5} \frac{\sqrt{25+x^2}}{x^4}\,dx$,

25) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, 26) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\,dx$, 27) $\int\limits_{0}^{5} \sqrt{x^2+25}\,dx$,

28) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, 29) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$, 30) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

3. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(1+x)}{x-1}\,dx$, 2) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, 3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}\,dx$,

4) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$, 5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx$, 6) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

7) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$, 8) $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$, 9) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$,

10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$, 11) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\,dx$, 12) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}\,dx$,

13) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$, 14) $\int\limits_{1}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \ln\cos x\,dx$, 15) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}\,dx$,

16) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx$, 17) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^4+1}$, 18) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

19) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, 20) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$, 21) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$,

22) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5}\,dx$, 23) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, 24) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x)^2}\,dx$,

25) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}\,dx$, 26) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$, 27) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$,

28) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$, 29) $\displaystyle\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$, 30) $\displaystyle\int_2^{9} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

4. Знайти визначений інтеграл методом інтегрування частинами:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^2-5x+6)\cos 2x\,dx$, 2) $\displaystyle\int_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$, 3) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x\,dx$,

4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x^2+5x)\sin 2x\,dx$, 5) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos x\,dx$, 6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-5x^2)\sin x\,dx$,

7) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x\,dx$, 8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{3}(3x-x^2)\sin 2x\,dx$, 9) $\displaystyle\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x\,dx$,

10) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\ln^2 x\,dx$, 11) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx$, 12) $\displaystyle\int_{1}^{e^2}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$,

13) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx$, 14) $\displaystyle\int_{1}^{8}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, 15) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4x dx$,

16) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x+1)\ln^2(x+1)\,dx$, 17) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2x\,dx$, 18) $\displaystyle\int_{2}^{3}(x-1)^3\ln^2(x-1)\,dx$,

19) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3x\,dx$, 20) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+2)^3\ln^2(x+2)\,dx$, 21) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2x\,dx$,

22) $\displaystyle\int_{0}^{2}(x+1)^3\ln^2(x+1)\,dx$, 23) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4x\,dx$, 24) $\displaystyle\int_{1}^{e}\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$,

25) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$, 26) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$, 27) $\displaystyle\int_{0}^{3}(x^2-3x)\sin 2x\,dx$,

28) $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2e^{3x}\,dx$, 29) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x\,dx$, 30) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

5. Обчислити визначений інтеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$, 2) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x-\sin x}$, 3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}$,

4) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$, 5) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$, 6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$,

7) $\displaystyle\int\limits_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^3}$, 8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}\,dx$, 9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$,

10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$, 11) $\displaystyle\int\limits_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$, 12) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$,

13) $\displaystyle\int\limits_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$, 14) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$, 15) $\displaystyle\int\limits_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$,

16) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$, 17) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$, 18) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$,

19) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$, 20) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$, 21) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}$,

22) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$, 23) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$, 24) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{2+\sin x}$,

25) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}\,dx$, 26) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$, 27) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\,dx$,

28) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$, 29) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x+\cos x}$, 30) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}$.

6. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\sin 2x}$, 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{7+3\operatorname{tg}x}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_{\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{ctg}x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$, 4) $\displaystyle\int\limits_{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{2\operatorname{tg}x+5}{(5-\operatorname{tg}x)\sin 2x}\,dx$,

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{3+2\operatorname{tg}x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx$, 6) $\displaystyle\int\limits_{-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}\,dx$,

7) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + \cos^2 x}\, dx,$

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\operatorname{tg} x + 2}{2\sin 2x + 5}\, dx,$

9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}} \frac{8 + \operatorname{tg} x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx,$

10) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1}\, dx,$

11) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{2 + \operatorname{tg} x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}\, dx,$

12) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arcsin \sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{6\sin^2 x}{4 + 3\cos 2x}\, dx,$

13) $\displaystyle\int\limits_{\arccos \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\operatorname{tg} x}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}\, dx,$

14) $\displaystyle\int\limits_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^{0} \frac{11 - 3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3}\, dx,$

15) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg}^2 x - 11\operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x}\, dx,$

16) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{2\operatorname{tg} x - 5}{(4\cos x - \sin x)^2}\, dx,$

17) $\displaystyle\int\limits_{-\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}^{0} \frac{3\operatorname{tg} x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1}\, dx,$

18) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{26}}} \frac{36}{(6 - \operatorname{tg} x)\sin 2x}\, dx,$

19) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\, dx,$

20) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 - 7\operatorname{tg} x}{2 + 3\operatorname{tg} x}\, dx,$

21) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}\, dx,$

22) $\displaystyle\int\limits_{-\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(3\cos x + \sin x)^2}\, dx,$

23) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x - 4}\, dx,$

24) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{8\operatorname{tg} x}{3\cos^2 x + 8\sin^2 x - 7}\, dx,$

25) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x}\, dx,$

26) $\displaystyle\int\limits_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{26}}} \frac{12}{(6 + 5\operatorname{tg} x)\sin 2x}\, dx,$

27) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3\sin^2 x + 12\cos^2 x}\, dx,$

28) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3\cos 2x}\, dx,$

29) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} \frac{2}{3}} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7}\, dx,$

30) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}\, dx.$

7. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}\, dx,$

2) $\displaystyle\int\limits_{2}^{8} \sqrt{\frac{3 - 2x}{2x - 7}}\, dx,$

3) $\displaystyle\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,dx,$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{7} \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}\,dx,$

5) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{14}{15}}^{-\frac{7}{8}} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\,dx,$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}}{(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}\,dx,$

7) $\displaystyle\int\limits_6^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\,dx,$

8) $\displaystyle\int\limits_0^{2} e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}},$

9) $\displaystyle\int\limits_0^{5} e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{25-x^2}},$

10) $\displaystyle\int\limits_3^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,dx,$

11) $\displaystyle\int\limits_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,dx,$

12) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{24}}^{\frac{1}{3}} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx,$

13) $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}},$

14) $\displaystyle\int\limits_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx,$

15) $\displaystyle\int\limits_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}\,dx,$

16) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}\,dx,$

17) $\displaystyle\int\limits_1^{8} \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}\,dx,$

18) $\displaystyle\int\limits_1^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x^3}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx,$

19) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\,dx,$

20) $\displaystyle\int\limits_{\frac{16}{15}}^{\frac{4}{3}} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx,$

21) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \sqrt{\frac{4-x}{x-13}}\,dx,$

22) $\displaystyle\int\limits_0^{6} e^{\sqrt{\frac{6-x}{6+x}}}\frac{dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}\,dx,$

23) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}\,dx,$

24) $\displaystyle\int\limits_1^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,dx,$

25) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x\,dx}{2+\sqrt{2x+1}},$

26) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}\,dx,$

27) $\displaystyle\int\limits_0^{4} e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}}\frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}},$

28) $\displaystyle\int\limits_0^{3} e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}\frac{dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}},$

29) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,dx,$

30) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}\,dx.$

8. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 x\,dx$, 2) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^6 \dfrac{x}{2}\,\cos^2 \dfrac{x}{2}\,dx$, 3) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$,

4) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$, 5) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$, 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\cos^6 x\,dx$,

7) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 \dfrac{x}{4}\,\cos^6 \dfrac{x}{4}\,dx$, 8) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^8 x\,dx$, 9) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^8 \dfrac{x}{2}\,dx$,

10) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^8 x\,dx$, 11) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^8 x\,dx$, 12) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^6 \dfrac{x}{4}\,\cos^2 \dfrac{x}{4}\,dx$,

13) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$, 14) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \dfrac{x}{2}\,\cos^4 \dfrac{x}{2}\,dx$, 15) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$,

16) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 x\cos^6 x\,dx$, 17) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 x\cos^6 x\,dx$, 18) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^8 x\,dx$,

19) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 \dfrac{x}{4}\,dx$, 20) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^8 x\,dx$, 21) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^8 \dfrac{x}{2}\,dx$,

22) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 \dfrac{x}{4}\,\cos^4 \dfrac{x}{4}\,dx$, 23) $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$, 24) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 \dfrac{x}{2}\,\cos^6 \dfrac{x}{2}\,dx$,

25) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^8 \dfrac{x}{2}\,dx$, 26) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$, 27) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x\cos^6 x\,dx$,

28) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^8 x\,dx$, 29) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 x\,dx$, 30) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 3x\cos^4 3x\,dx$.

9. Обчислити площі фігур, що обмежені графіками функцій:

1) $y = (x-2)^3, \quad y = 4x - 8,$ 2) $y = x\sqrt{9-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3,$

3) $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x,$ 4) $y = \sin x\cos^2 x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

5) $y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1,$ 6) $y = x^2\sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$

7) $y = \cos x\sin^2 x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$ 8) $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$

9) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, \quad x = 1, \quad x = e^3,$ 10) $y = \arccos x, \quad y = 0, \quad x = 0,$

11) $y = (x+1)^2, \quad y^2 = x + 1,$ 12) $y = 2x - x^2 + 3, \quad y = x^2 - 4x + 3,$

13) $y = x\sqrt{36-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 6,$ 14) $x = \arccos y, \quad y = 0, \quad x = 0,$

15) $y = x\,\mathrm{arctg}\,x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3},$ 16) $y = x^2\sqrt{8-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2},$

17) $x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \quad y = \ln 2,$

18) $y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$

19) $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1,$

20) $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = -\dfrac{\pi}{2},$

21) $x = (y - 2)^2, \quad x = 4y - 8,$

22) $y = \cos^5 x \sin 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

23) $y = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0, \quad x = 1,$

24) $x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y,$

25) $x = \dfrac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, \quad x = 0, \quad y = 1,$

26) $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 1,$

27) $y = x^2\sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4,$

28) $x = \sqrt{4 - y^2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1,$

29) $y = (x - 1)^2, \quad y^2 = x - 1,$

30) $y = x^2 \cos x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

10. Обчислити площі фігур, обмежених заданими рівняннями:

1) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2, \ (x \geqslant 2),$

2) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4, \ (x \geqslant 4),$

3) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 2, \ (y \geqslant 2),$

4) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4, \ (y \geqslant 4),$

5) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4, \ (0 < x < 8\pi, \ y \geqslant 4),$

6) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6, \ (0 < x < 12\pi, \ y \geqslant 6),$

7) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2, \ (x \geqslant 2),$

8) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}, \ (x \geqslant 3\sqrt{3}),$

9) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3, \ (y \geqslant 3),$

10) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}, \ (y \geqslant 2\sqrt{3}),$

11) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3, \ (0 < x < 4\pi, \ y \geqslant 3),$

12) $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15, \ (0 < x < 20\pi, \ y \geqslant 15),$

13) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}, \ (x \geqslant 6\sqrt{3}),$

14) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{24}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1, \ (x \geqslant 1),$

15) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3},\ (y \geqslant \sqrt{3}),$

16) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4,\ (y \geqslant 4),$

17) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3,\ (0 < x < 6\pi,\ y \geqslant 3),$

18) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1,\ (0 < x < 2\pi,\ y \geqslant 1),$

19) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4,\ (x \geqslant 4),$

20) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1,\ (x \geqslant 1),$

21) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3,\ (y \geqslant 3),$

22) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2,\ (y \geqslant 2),$

23) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9,\ (0 < x < 12\pi,\ y \geqslant 9),$

24) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 12,\ (0 < x < 16\pi,\ y \geqslant 12),$

25) $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3},\ (x \geqslant 9\sqrt{3}),$

26) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 5,\ (y \geqslant 5),$

27) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3},\ (y \geqslant 4\sqrt{3}),$

28) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6,\ (0 < x < 8\pi,\ y \geqslant 6),$

29) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2,\ (0 < x < 4\pi,\ y \geqslant 2),$

30) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 12\sqrt{3},\ (x \geqslant 12\sqrt{3}).$

11. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані в полярних координатах:

1) $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2,\ (r \geqslant 2),$

2) $r = \cos 2\varphi,$

3) $r = \sqrt{3}\cos 3\varphi,\ r = \sin\varphi,\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right),$

4) $r = 4\sin 3\varphi,\ r = 2,\ (r \geqslant 2),$

5) $r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi,\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right),$

6) $r = \sin 3\varphi,$

7) $r = 6\sin 3\varphi,\ r = 3,\ (r \geqslant 3),$

8) $r = \cos 3\varphi,$

9) $r = \cos\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right),$

10) $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi,$

11) $r = 6\cos 3\varphi,\ r = 3,\ (r \geqslant 3),$

12) $r = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi,$

13) $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi,\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right),$

14) $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi,$

15) $r = \sin\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right),$

16) $r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi,$

17) $r = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi,$

18) $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi,$

19) $r = \dfrac{5}{2}\sin\varphi,\ r = \dfrac{3}{2}\sin\varphi$

20) $r = \dfrac{3}{2}\cos\varphi,\ r = \dfrac{5}{2}\cos\varphi,$

21) $r = 4\cos 4\varphi,$

22) $r = \sin 6\varphi,$

23) $r = 2\cos\varphi,\ r = 3\cos\varphi,$

24) $r = \cos\varphi + \sin\varphi,$

25) $r = 2\sin 4\varphi,$

26) $r = 2\cos 6\varphi,$

27) $r = \cos\varphi - \sin\varphi,$

28) $r = 3\sin\varphi,\ r = 5\sin\varphi,$

29) $r = 2\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi,$

30) $r = 6\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi.$

12. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутній системі координат:

1) $y = \ln x,\quad \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{15},$

2) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2},\quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$

3) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{9},$

4) $y = \ln\dfrac{5}{2x},\quad \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8},$

5) $y = -\ln\cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

6) $y = e^x + 6,\quad \ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{15},$

7) $y = \ln(x^2 - 1),\quad 2 \leqslant x \leqslant 3,$

8) $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\quad \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1,$

9) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{8}{9},$

10) $y = \ln(1 - x^2),\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4},$

11) $y = 2 + \operatorname{ch} x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$

12) $y = 1 - \ln\cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

13) $y = e^x + 13,\quad \ln\sqrt{15} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{24},$

14) $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4},$

15) $y = 2 - e^x,\quad \ln\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{8},$

16) $y = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{15}{16},$

17) $y = 1 - \ln\sin x,\quad \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

18) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5,\quad \dfrac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1,$

19) $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\quad 3 \leqslant x \leqslant 4,$

20) $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{16},$

21) $y = \ln\sin x,\quad \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

22) $y = \ln 7 - \ln x,\quad \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8},$

23) $y = 3 + \operatorname{ch} x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$

24) $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4},$

25) $y = \ln\cos x + 2,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

26) $y = 26 + e^x,\quad \ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{24},$

27) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3,\quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$

28) $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4},$

29) $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4},\quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$

30) $y = e^x + e,\quad \ln\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{15}.$

13. Обчислити довжини дуг кривих, заданих параметричними рівняннями:

1) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

2) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$

3) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$

4) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

5) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

6) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

7) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi,$

8) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{3},$

9) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

10) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

11) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

12) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi,$

13) $\begin{cases} x = \frac{5}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{5}{2}(1 - \cos t), \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi,$

14) $\begin{cases} x = \frac{7}{2}(2\cos t - \cos 2t), \\ y = \frac{7}{2}(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

15) $\begin{cases} x = 6(\cos t + \sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

16) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

17) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

18) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$

19) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{3},$

20) $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

21) $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4},$

22) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$

23) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4},$

24) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2},$

25) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

26) $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$

27) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

28) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi,$

29) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4},$

30) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

14. Обчислити довжини дуг кривих, заданих в полярній системі координат:

1) $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},$ 2) $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

3) $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},$ 4) $r = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

5) $r = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},$ 6) $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

7) $r = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$ 8) $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

9) $r = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$ 10) $r = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

11) $r = 1 - \cos\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{6},$ 12) $r = 2(1 - \cos\varphi), \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{2},$

13) $r = 3(1 + \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant 0,$ 14) $r = 4(1 - \sin\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

15) $r = 5(1 - \cos\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant 0,$ 16) $r = 6(1 + \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0,$

17) $r = 7(1 - \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6},$ 18) $r = 8(1 - \cos\varphi), \quad -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant 0,$

19) $r = 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{4},$ 20) $r = 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{4\pi}{3},$

21) $r = 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{5\pi}{12},$ 22) $r = 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{12\pi}{5},$

23) $r = 4\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{4},$ 24) $r = 4\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{4\pi}{3},$

25) $r = 5\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{12\pi}{5},$ 26) $r = 2\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6},$

27) $r = 8\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4},$ 28) $r = 6\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3},$

29) $r = 2\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6},$ 30) $r = 8\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

15. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0, \ (y \geqslant 0),$ 2) $z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2,$

3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3,$ 4) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12,$

5) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0,$ 6) $x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0, \ (y \geqslant 0),$

7) $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3,$ 8) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3,$

9) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16,$ 10) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0,$

11) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0, \ (y \geqslant 0),$ 12) $z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4,$

13) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2,$ 14) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12,$

15) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0,$ 16) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \ z = y\sqrt{3}, \ z = 0, \ (y \geqslant 0),$

17) $z = x^2 + 5y^2, \quad z = 5,$ 18) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 4,$

19) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1, \quad z=20,$

20) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1, \quad z=4, \quad z=0,$

21) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1, \quad z=\frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z=0, \ (y\geqslant 0),$

22) $z=4x^2+9y^2, \quad z=6,$

23) $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1, \quad z=0, \quad z=3,$

24) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1, \quad z=20,$

25) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1, \quad z=5, \quad z=0,$

26) $\frac{x^2}{27}+y^2=1, \ z=\frac{y}{\sqrt{3}}, \ z=0, \ (y\geqslant 0),$

27) $z=2x^2+18y^2, \quad z=6,$

28) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1, \quad z=0, \quad z=2,$

29) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1, \quad z=16,$

30) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1, \quad z=6, \quad z=0.$

16. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, які обмежені графіками заданих функцій. У варіантах 1-15 вісь обертання – Ox, у варіантах 16-30 вісь обертання – Oy.

1) $y=-x^2+5x-6, \quad y=0,$

2) $2x-x^2-y=0, \quad 2x^2-4x+y=0,$

3) $y=3\sin x, \quad y=\sin x, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi,$

4) $y=5\cos x, \quad y=\cos x, \quad x=0, \ x\geqslant 0,$

5) $y=\sin^2 x, \quad x=\frac{\pi}{2},$

6) $x=\sqrt[3]{y-2}, \quad x=1, \quad y=1,$

7) $y=xe^x, \quad y=0, \quad x=1,$

8) $y=2x-x^2, \quad y=-x+2, \quad x=0,$

9) $y=2x-x^2, \quad y=-x+2,$

10) $y=e^{1-x}, \quad y=0, \ x=0, \ x=1,$

11) $y=x^2, \quad y^2-x=0,$

12) $x^2+(y-2)^2=1,$

13) $y=1-x^2, \quad x=0, \ x=\sqrt{y-2},$

14) $y=x^2, \quad y=1, \quad x=2,$

15) $y=x^3, \quad y=\sqrt{x},$

16) $y=\sin\frac{\pi x}{2}, \quad y=x^2,$

17) $y=\arccos\frac{x}{3}, \quad y=\arccos x, \ y=0,$

18) $y=\arcsin\frac{x}{5}, \quad y=\arcsin x, \ y=\frac{\pi}{2},$

19) $y=x^2, \quad x=2, \ y=0,$

20) $y=x^2+1, \quad y=x, \ x=0, \ x=1,$

21) $y=\sqrt{x-1}, \quad y=0, \ y=1, \ x=\frac{1}{2},$

22) $y=\ln x, \quad x=2, \quad y=0,$

23) $y=(x-1)^2, \quad y=1,$

24) $y^2=x-2, \quad y=0, \quad y=x^3, \ y=1,$

25) $y=x^3, \quad y=x^2,$

26) $y=\arccos\frac{x}{5}, \quad y=\arccos\frac{x}{3}, \ y=0,$

27) $y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \ y=0,$

28) $y=x^2-2x+1, \quad x=2, \ y=0,$

29) $y=\arccos x, \quad y=\arcsin x, \ x=0,$

30) $y=(x-1)^2, \quad x=0, \ x=1, \ y=0.$

Розділ III. Невласні інтеграли

§ 3.1. Поняття невласного інтеграла для функцій, визначених на нескінченності

Нехай функція $f(x)$ визначена в проміжку $[a; +\infty)$ та інтегровна в будь-якій скінченній його частині $[a; A]$, тобто функція $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ має зміст для будь-якого $A > a$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ (скінченна чи нескінченна), то її називають інтегралом функції $f(x)$ від a до $+\infty$, або ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування*** і позначають

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

У випадку, якщо границя $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ є скінченною, то інтеграл називають ***збіжним***, а функцію $f(x)$ називають ***інтегровною на нескінченному проміжку*** $[a; +\infty)$. Якщо границя $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ нескінченна або не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Аналогічно означаються невласні інтеграли на проміжках $(-\infty; a]$ та $(-\infty; +\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int\limits_{A'}^{a} f(x)dx, \quad A' < a,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int\limits_{A'}^{A} f(x)dx.$$

Для останнього випадку, взявши довільне значення $a \in (-\infty; +\infty)$, інтеграл функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ можна означити рівністю

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

припустивши, що обидва інтеграли в правій частині існують, за винятком, коли вони рівні нескінченності, але різних знаків.

Властивості невласного інтеграла з нескінченними межами інтегрування.

1. Якщо збігається інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то збігається також інтеграл $\int\limits_{A}^{+\infty} f(x)dx$, де $A > a$, і навпаки. При цьому виконується рівність

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{A} f(x)dx + \int\limits_{A}^{+\infty} f(x)dx.$$

2. Якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, то

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_{A}^{+\infty} f(x)dx = 0, \ \ A > a.$$

3. Із збіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} cf(x)dx, \ \ c = \text{const}$. При цьому

$$\int\limits_{a}^{+\infty} cf(x)dx = c\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

4. Якщо збігаються обидва інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ і

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

5. Якщо $f(x) > 0$ або $f(x) \geqslant 0$, то інтеграл $F(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx$ є монотонно зростаючою функцією змінної A. Тоді для збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необхідно і достатньо, щоб $\int\limits_a^{A} f(x)dx \leqslant L$, де $L = \mathrm{const}$. Якщо ця умова не виконується, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ визначена та інтегровна на проміжку $[a; +\infty)$ і функція $F(x)$ є однією із її первісних на цьому проміжку, то інтеграл (1) існує тоді і тільки тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Тоді

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Формула інтегрування частинами. Якщо функції U і V неперервно диференційовні на проміжку $[a; +\infty)$, існує границя

$$\lim_{x \to +\infty} U(x)V(x) = U(+\infty)V(+\infty),$$

і збігається хоча б один із інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} U(x)dV(x)$, $\int\limits_a^{+\infty} V(x)dU(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} U(x)dV(x) = U(x)V(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} V(x)dU(x),$$

де

$$U(x)V(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} U(x)V(x) - U(a)V(a).$$

Інтегрування заміною змінної. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty)$, $\varphi(t)$ – неперервно диференційовна на проміжку $[\alpha;\beta)$, причому

$$a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = +\infty,$$

і збігається хоча б один із інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Критерій Коші збіжності невласного інтеграла. Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > a$, що для всіх $A_1, A_2 \in (\delta;+\infty)$ виконується нерівність

$$\Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\Big| < \varepsilon.$$

Ознаки порівняння. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $[a;+\infty)$, для довільного $A > a$ інтегровні на відрізку $[a;A]$ і $\forall x \in [a;+\infty)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Нехай функція $f(x)$ невід'ємна, а $g(x)$ додатня на $[a; +\infty)$, обидві інтегровні на цьому проміжку. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 \leqslant K \leqslant +\infty,$$

то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ при $K < +\infty$, випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності першого інтеграла при $K > 0$ випливає розбіжність другого.

Ознака Коші. Нехай для достатньо великих x функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Тоді

1) якщо $\lambda > 1$ і $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – збіжний;

2) якщо $\lambda \leqslant 1$ і $\varphi(x) \geqslant c > 0$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – розбіжний.

На практиці зручнішою є часткова форма: якщо при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ є нескінченно малою порядку λ в порівнянні з $\frac{1}{x}$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається або розбігається в залежності від того, чи $\lambda > 1$ або $\lambda \leqslant 1$.

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо він сам збігається і збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Якщо ж інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***умовно збіжним***. Про функцію $f(x)$ у першому випадку кажуть, що вона ***абсолютно інтегровна*** на проміжку $[a;+\infty)$, у другому – ***умовно інтегровна***.

Якщо функція $|f(x)|$ інтегровна на $[a;+\infty)$, то $f(x)$ також інтегровна на цьому проміжку. Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегровна на $[a;+\infty)$, а функція $g(x)$ обмежена, то добуток $f(x)g(x)$ буде функцією, абсолютно інтегровною на $[a;+\infty)$.

Ознака Абеля. Якщо функція $f(x)$ визначена та інтегровна на проміжку $[a;+\infty)$ і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, а функція $g(x)$ обмежена і монотонна на цьому проміжку, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ також збіжний.

Ознака Діріхле. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку $[a;A]$, $A > a$, та інтеграл $\int\limits_a^{A} f(x)dx$ обмежений, а функція $g(x)$ визначена на $[a;+\infty)$ і монотонно прямує до нуля при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збіжний.

Вправи

1. Дослідити на збіжність невласні інтеграли та знайти їхні значення у випадку збіжності:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$, 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx$,

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$, 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$,

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, 6) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$,

7) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, 8) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$,

9) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, 10) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$,

11) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$, 12) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}$,

13) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$, 14) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$,

15) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 a^x dx$, 16) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} \, dx$,

17) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \, dx$, 18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$,

19) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, 20) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$, 2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx$,

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$, 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \, dx$,

5) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \, dx$, 6) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$,

7) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, 8) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}$,

9) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \, dx$, 10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^n}$.

3. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$, 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, 4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$,

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$, 6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{x^4+x^2+1}$,

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+\sqrt{x+2}}\,dx$, 8) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$,

9) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$, 10) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x}$.

4. Знайти всі значення параметра α, при яких збігаються інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^\alpha}}$, 2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln x\,dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$, 4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}dx}{(x^2+1)^\alpha}$,

5) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2}\,dx$, 6) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}dx}{(x-1)^\alpha \ln x}$,

7) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, 8) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$,

9) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^\alpha + \ln x}$, 10) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^\alpha}\sin x^3\,dx$,

11) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha \ln x}\,dx$, 12) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\,dx$,

13) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^\alpha}$, 14) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x}\cdot\cos x\,dx$.

5. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt[4]{x}\,dx}{3+x\sqrt[3]{x}}$, 2) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos 5x}{x^2+2x+2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2\,dx$, 4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \cos x^2\,dx$,

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos e^x dx$, 6) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin^3(x^2+2x)\,dx$,

7) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx$, 8) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin\Big(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$,

9) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} (1-e^{\frac{\sin x}{x}})\sqrt{x}\,dx$, 10) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \sqrt{x}\ln\Big(1-\frac{\sin x^2}{x-1}\Big)\,dx$.

Приклади розв'язування вправ

1.18. Заданий інтеграл є невласним інтегралом з нескінченними межами інтегрування. Функція $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ та інтегровна в будь-якій скінченній його частині. Дослідимо його на збіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2+4} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\lim_{a\to-\infty}\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}\Big) + \lim_{b\to+\infty}\Big(\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, заданий інтеграл збіжний і значення його дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$. ▶

2.7. Скористаємось означенням невласного інтеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Тоді

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{lll} \frac{1}{x}=t, & x_1=1, & x_2=b, \\ dx=-\frac{dt}{t^2}, & t_1=1, & t_2=\frac{1}{b} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{\frac{1}{b}} \frac{t(-\frac{dt}{t^2})}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\int\limits_1^{\frac{1}{b}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}\Big) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\Big(-\int\limits_1^{\frac{1}{b}}\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}\Big) = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\ln\Big|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1)}\Big|\Big)\Big|_1^{\frac{1}{b}} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\Big(-\ln\Big|\frac{1}{b}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{b^2+b+1}{b^2}}\Big|+\ln\Big(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\Big)\Big) =$$

$$= -\ln\Big(\frac{1}{2}+1\Big)+\ln\Big(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\Big) = \ln\Big(\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}\Big) = \ln\Big(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big).$$

Отже, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\Big(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big).$ ▶

3.6. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+x^2+1}$ є нескінченно малою при $x\to+\infty$, бо $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4+x^2+1} = 0$. Порівняємо її з нескінченно малою функцією $\dfrac{1}{x^\lambda}$ при $x\to+\infty$, $\lambda>0$. Тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4+x^2+1} : \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3+\lambda}}{x^4+x^2+1} = 1$$

при $\lambda=1$. Отже, інтеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^4+x^2+1}$ є розбіжним. ▶

5.2. *I спосіб.* Дослідимо спочатку на збіжність інтеграл $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty}\Big|\frac{\cos 5x}{x^2+2x+2}\Big|\,dx$. Для всіх $x\in[2;+\infty)$ маємо нерівність $\Big|\dfrac{\cos 5x}{x^2+2x+2}\Big| \leqslant \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. Тоді

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left| \begin{array}{lll} x+1=t, & x_1=2, & x_2=+\infty, \\ dx=dt, & t_1=3, & t_2=+\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_3^{b} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} t\Big|_3^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 3) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3.$$

Отже, $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ – збіжний. За ознакою порівняння $\int\limits_2^{+\infty}\left|\frac{\cos 5x}{x^2+2x+2}\right|dx$ також збіжний. Тоді $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos 5x}{x^2+2x+2}dx$ – абсолютно збіжний.

II спосіб. Скористаємось достатньою умовою абсолютної інтегровності добутку. Подамо підінтегральну функцію у вигляді добутку, а саме $f(x)\cdot g(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}\cdot\cos 5x$. Оскільки $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ є абсолютно інтегровною на $[2;+\infty)$, а $g(x) = \cos 5x$ – обмежена на цьому ж проміжку, то їх добуток є абсолютно інтегровною функцією. ►

§3.2. Поняття невласного інтеграла для необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b]$, але є необмеженою в цьому проміжку. Для визначеності візьмемо випадок, коли в будь-якому проміжку $[a;b-\eta]$, $0<\eta<b-a$, функція $f(x)$ обмежена та інтегровна, однак є необмеженою в проміжку $[b-\eta;b]$. Точка b в цьому випадку називається ***особливою***. Якщо існує границя $\lim\limits_{\eta\to 0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$ (скінченна чи нескінченна), то її називають ***невласним інтегралом функції*** $f(x)$ ***від*** a ***до*** b

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

У випадку, якщо ця границя скінченна, то інтеграл від необмеженої функції називають ***збіжним***, а саму функцію називають ***інтегровною на*** $[a;b]$. Якщо ж така границя нескінченна або взагалі не існує, то кажуть, що інтеграл ***розбіжний***.

Нехай тепер функція $f(x)$ обмежена та інтегровна в будь-якому проміжку $[a+\eta'; b], 0 < \eta' < b - a$, але є необмеженою в кожному проміжку $[a; a+\eta']$. Тоді невласний інтеграл функції $f(x)$ від a до b визначається рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta' \to 0} \int\limits_{a+\eta'}^b f(x)dx.$$

В загальному випадку на проміжку $[a; b]$ може бути скінченна кількість особливих точок $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m$, поблизу яких функція $f(x)$ є необмеженою, а у всіх інших – обмежена та інтегровна. Нехай, наприклад, таких точок є три: a, b і $c \in (a; b)$, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta_1 \to 0 \\ \eta_2 \to 0 \\ \eta_3 \to 0 \\ \eta_4 \to 0}} \Big(\int\limits_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} f(x)dx + \int\limits_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} f(x)dx \Big),$$

або взявши всередині кожного з проміжків $[a; c]$ і $[c; b]$ по точці d і e, будемо мати

$$\int\limits_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} f(x)dx = \int\limits_{a+\eta_1}^{d} f(x)dx + \int\limits_{d}^{c-\eta_2} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} f(x)dx = \int\limits_{c+\eta_3}^{e} f(x)dx + \int\limits_{e}^{b-\eta_4} f(x)dx.$$

Легко бачити, що існування останньої границі рівносильне існуванню границь кожного з цих чотирьох інтегралів.

Якщо невласні інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігаються і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то інтеграл

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$$

збігається, причому

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ і $F(x)$ – одна із первісних цієї функції на цьому проміжку, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\eta} = \lim_{\eta\to 0}(F(b-\eta)-F(a)).$$

Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ неперервно диференційовні на проміжку $[a;b)$ та існує границя $\lim\limits_{\eta\to 0} U(x)V(x)\Big|_a^{b-\eta}$, то

$$\int\limits_a^b U(x)V(x)dx = \lim_{\eta\to 0} U(x)V(x)\Big|_a^{b-\eta} - \int\limits_a^b V(x)dU(x).$$

Ця формула є справедливою тоді, коли хоча б один із інтегралів збігається. Якщо ж один із інтегралів є розбіжним, то і другий розбігається.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна на проміжку $[\alpha;\beta)$, причому

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim_{\eta\to 0}\varphi(\beta-\eta)=b,$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ця формула є справедливою тоді, коли хоча б один із інтегралів збігається. Якщо ж один з інтегралів розбігається, то і другий є розбіжним.

Критерій Коші збіжності невласного інтеграла. Для збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, де b – особлива точка, необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon>0$ існувало таке $\delta>0$, що при $0<\eta<\delta$ і $0<\eta'<\delta$ виконувалася нерівність $\left|\int\limits_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо він сам збігається і $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ збігається, і ***умовно збіжним***, якщо він сам збігається, а інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ – розбіжний.

Ознака порівняння. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ невід'ємні на проміжку $[a;b)$, інтегровні на відрізку $[a;b-\eta]$, і для довільного $x \in [a;b)$ $f(x) \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Якщо ж встановити таку нерівність важко, але існує границя $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Коші. Нехай для достатньо близьких до b (b – особлива точка) значень x функція $f(x)$ має вигляд $f(x) = \dfrac{g(x)}{(b-x)^\lambda}$, $\lambda > 0$. Тоді:

1) якщо $\lambda < 1$ і $g(x) \leqslant c < +\infty$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

2) якщо $\lambda \geqslant 1$ і $g(x) \geqslant c > 0$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбіжний.

Зручнішою на практиці є часткова форма: якщо при $x \to b$ функція $f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ по відношенню до $\dfrac{1}{b-x}$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається або розбігається в залежності від того, чи $\lambda < 1$, чи $\lambda \geqslant 1$.

Ознака Абеля. Якщо функція $f(x) \cdot g(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$, необмежена в околі точки b, функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$, та інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, а функція $g(x)$ обмежена і монотонна на проміжку $[a;b)$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ збігається.

Ознака Діріхле. Якщо функція $f(x)\cdot g(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$, необмежена в околі точки b, функція $f(x)$ неперервна і має обмежену первісну на $[a;b)$, а функція $g(x)$ монотонна на $[a;b)$, причому $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ збігається.

Крім невласних інтегралів з нескінченними межами та інтегралів від необмежених функцій існують невласні інтеграли, в яких такі особливості поєднані. Наприклад, інтеграли виду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, де функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a;+\infty)$, в околі точки a необмежена, на будь-якому відрізку $[c;d] \subset (a;+\infty)$ інтегровна. Для таких інтегралів питання збіжності зводиться до питання збіжності двох інтегралів $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$, де $b\in(a;+\infty)$.

Тому вважають, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються обидва інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$. Якщо хоча б один із інтегралів розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним.

Вправи

1. Довести збіжність і знайти значення невласних інтегралів:

1) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$, 2) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

3) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$, 4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$,

5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$, 6) $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,dx$,

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$, 8) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$,

9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$, 10) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$,

11) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^2-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, 12) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$,

13) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$, 14) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\,dx$,

15) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$, 16) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$,

17) $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{dx}{x^3}$, 18) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$,

19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 20) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos x\ln(\cos x)\,dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли:

1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$,

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^4dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x}}$, 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $n\in\mathbb{N}$,

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx$, 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$,

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$ 10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \ln(\cos x)\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

3. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx,$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3+x^6},$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x},$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x},$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}},$ 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx,$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1},$ 8) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1},$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{e^{x^2}-\cos x},$ 10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}.$

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^2 \sin\frac{\pi}{2-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2-x}},$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^3}},$

3) $\displaystyle\int_0^1 \cos\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\Big)\frac{dx}{x},$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^2}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2}\,dx,$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{(1+x\sin\frac{1}{x})^2}dx,$ 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)\cdot\frac{dx}{\sin x},$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}\,dx,$ 8) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\,dx,$

$$9)\ \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x}, \qquad 10)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x}\,dx.$$

5. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \qquad 2)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$

$$3)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx, \qquad 4)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}},$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx, \qquad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}},$$

$$7)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx, \qquad 8)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx, \quad a\neq 0,$$

$$9)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin\frac{1}{x})}{x}\,dx, \qquad 10)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x}\sin(\sin x)}{x}\,dx.$$

Приклади розв'язування вправ

1.19. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ необмежена в околі точки $x=1$. Тоді за означенням невласного інтеграла від необмеженої функції запишемо

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_0^{1-\eta} \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} U=\arcsin x, & dV=\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dU=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & V=\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x\Big|_0^{1-\eta} - \int\limits_0^{1-\eta}\left(\frac{1}{3}(1-x^2)-1\right)dx\right) =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left(\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1-(1-\eta)^2)^3}-\sqrt{1-(1-\eta)^2}\right)\arcsin(1-\eta) -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-x\right)\Big|_0^{1-\eta}\right) = \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{x^3}{9}+\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^{1-\eta} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\Big(\frac{(1-\eta)^3}{9} + \frac{2}{3}(1-\eta)\Big) = \frac{7}{9}. \quad \blacktriangleright$$

3.5. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ має особливість в точці $x = 1$. Для дослідження невласного інтеграла на збіжність використаємо ознаку Коші. Дослідимо границю вигляду

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\lambda}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x)^5}\sqrt[3]{(1+x)^5}}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}} =$$

$$= \Big|\lambda = \frac{5}{3}\Big| = \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Оскільки $\lambda = \dfrac{5}{3} > 1$, то за ознакою Коші інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ є розбіжним. $\blacktriangleright$

5.3. Заданий інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються інтеграли $\displaystyle\int_0^c \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx$, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx$, де $c \in (0; +\infty)$.

Очевидно, що для $\lambda \leqslant 0$ перший інтеграл збігається, а другий розбігається. Якщо $\lambda > 0$, то перший інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{x^{\lambda-1}}$, бо $\displaystyle\int_0^c \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx = \int_0^c \frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{\lambda-1}}\,dx$. Останній інтеграл збігається, якщо $\lambda < 2$. В другому інтегралі підінтегральна функція $\sin x$ неперервна і має обмежену первісну на проміжку $(c; +\infty)$, а функція $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$ монотонно спадає на цьому проміжку, причому $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\lambda} = 0$. Тоді за ознакою Діріхле $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx$ збігається, якщо $\lambda > 0$.

Отже, заданий інтеграл збігається, якщо $\lambda \in (0; 2)$. $\blacktriangleright$

§ 3.3. Застосування невласних інтегралів

При знаходженні визначених інтегралів за допомогою заміни змінних може виникнути випадок, що одна або обидві межі стають нескінченними, а при інтегруванні частинами – підінтегральна функція (за рахунок диференціювання) в новому інтегралі необмежена біля одного або й двох кінців проміжка інтегрування.

В такому разі обчислення визначеного інтеграла зводиться до обчислення збіжного невласного інтеграла, який можна знайти, використовуючи означення.

Досить часто постає завдання знаходження площі необмеженої плоскої фігури. Якщо маємо криволінійну трапецію, утворену неперервною кривою $y = f(x)$, піввіссю $[a; +\infty)$ $(f(x) \geqslant 0$ для довільного $x \in [a; +\infty))$ і прямою $x = a$, то вважають, що така фігура має площу, якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається. Очевидно, що значення такого інтеграла і буде площею заданої плоскої фігури.

Аналогічно визначають площу криволінійної трапеції, утвореної кривою $y = f(x)$, необмеженою хоч біля одного з кінців відрізка $[a; b]$, відрізком $[a; b]$ і прямими $x = a$, $x = b$ (хоча б одна з цих прямих має бути асимптотою кривої $y = f(x)$).

Зрозуміло, що подібні міркування можна використовувати і для означення площ поверхонь та об'ємів нескінченних тіл обертання.

Якщо деяка фізична величина є адитивною функцією $P(x)$ проміжка $[a; +\infty)$, причому вона пов'язана з деякою функцією $p(x)$ співвідношенням $P'(x) = p(x)$ для довільного $x \in [a; +\infty)$, то у випадку збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} p(x)dx$ його називають відповідною ***інтегральною характеристикою*** певного фізичного явища.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і для довільного $A > a$ інтегровна на відрізку $[a; A]$, причому невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається. Тоді очевидно, що для довільного $x \in [a; +\infty)$ інтеграл $\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt$, і відношення, яке кожному $x \in [a;+\infty)$ ставить у відповідність число $\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt$, задає функцію, визначену на проміжку $[a;+\infty)$.

У такий спосіб визначаються для додатних x, наприклад, функції

$$Ci(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

$$Si(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x} e^{-t^2}dt.$$

Зокрема, з останньої функції можна виділити невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

який називається інтегралом Ейлера-Пуассона.

Вправи

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$, 2) $\int\limits_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$,

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4}$, 4) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos x}{3-2\cos x}\,dx$,

5) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$,

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, 8) $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$,

9) $\int\limits_0^1 (\arccos x)^2 dx$, 10) $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^3 dx$.

2. Знайти площі плоских фігур, обмежених лініями:

1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і віссю Ox,

2) $y = xe^{-\frac{x}{3}}$, піввіссю $[0; +\infty)$, прямою $x = 0$,

3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, піввіссю $[0; +\infty)$,

4) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$, піввіссю $[1; +\infty)$, прямою $x = 1$,

5) $y = x^3 e^{-\frac{3}{8}x^2}$, асимптотою $y = 0$,

6) $y = \dfrac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}$, піввіссю $[-1; +\infty)$, прямою $x = 1$,

7) $y = x^4 e^{-x}$, піввіссю $[0; +\infty)$, прямою $x = 0$,

8) $y = |\sin x| e^{-x}$, піввіссю $[0; +\infty)$, прямою $x = 0$,

9) $x = a \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2} + a\cos t$, $y = a\sin t$, асимптотою $y = 0$,

10) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$, асимптотою $x = 2a$.

3. Знайти об'єм тіла, що утворюється при обертанні фігури, обмеженої даною кривою:

1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, навколо її асимптоти,

2) $y = 2xe^{-2x}$, навколо її асимптоти,

3) $y = e^{-x}$, $y = 0$, навколо її асимптоти,

4) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$, навколо її асимптоти $x = 2a$, $a > 0$,

5) $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \geqslant 1$, навколо осі Ox,

6) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = 0$ навколо осі Ox.

4. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні навколо осі абсцис дуги кривої:

1) $y = e^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$,

2) $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$.

5. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб електричний заряд $e_0 = 1$ наблизити до заряду e з нескінченності на відстань, яка дорівнює одиниці.

6. Яку роботу треба затратити на перенесення тіла з масою m у нескінченність з поверхні Землі?

7. Знайти потенціальну енергію пружної деформації нескінченної балки, яка лежить на пружній основі і прогинається під дією зосередженої сили F.

8. Скориставшись інтегралом Ейлера-Пуассона, довести, що:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\ \ \alpha > 0,$

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}},\ \ \alpha > 0,$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2 + 2\beta x} dx = \frac{1}{2^{n-1}\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}(\beta e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}),\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0,$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2 - 2\beta x} dx = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}\Big(1 - \Phi\Big(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big),\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0,$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2 - 2\beta x} dx = -\frac{\alpha}{2\beta^2} + \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \cdot \frac{2\beta^2 + \alpha}{4} \cdot e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}\Big(1 - \Phi\Big(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big),\ \ \alpha, \beta > 0,$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (1 + 2\beta x^2) e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\alpha + \beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},$

7) $\displaystyle\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} dx = \Big(\frac{\alpha^2}{2}\Big)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!},$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2 + 2\beta x} dx = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{\frac{\beta^2}{\alpha}},\ \ \alpha > 0,$

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{x^2 + \beta^2} dx = (1 - \Phi(\alpha\beta))\frac{\pi}{2\beta} \cdot e^{(\alpha\beta)^2},$

10) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha^2 x^2}}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} - \frac{\pi\beta}{2} \cdot e^{\alpha^2\beta^2}(1 - \Phi(\alpha\beta)).$

Приклади розв'язування вправ

1.5. В заданому інтегралі проведемо універсальну тригонометричну підстановку. Тоді

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & x_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & x_2 = \pi, \ \ t_2 = +\infty \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5} = 2\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}. \quad \blacktriangleright$$

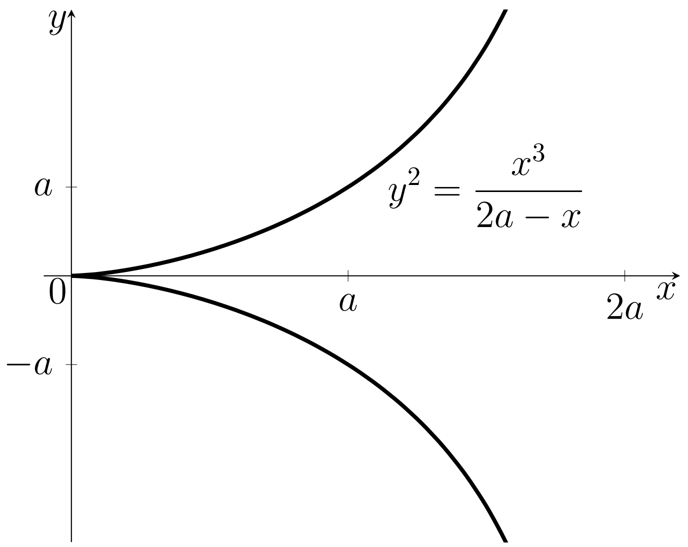

Рис. 10

3.4. Задана крива $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ симетрична відносно осі Ox (див. рис. 10). Якщо виконати паралельне перенесення системи координат на $2a$ $(a > 0)$ одиниць вправо вздовж осі Ox, то рівняння кривої матиме вигляд $y^2 = -\dfrac{(x+2a)^3}{x}$. В такому випадку можемо розглядати тіло, як тіло обертання навколо нової осі Oy. Отже, $V = \pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dy = 2\pi\int\limits_0^{+\infty} x^2 dy$.

Оскільки $y^2 = -\dfrac{(x+2a)^3}{x}$, то знайдемо спочатку y' як похідну від неявно заданої функції:

$$2yy' = -\frac{2(x+2a)^2(x-a)}{x^2}, \quad y' = -\frac{(x+2a)^2(x-a)}{x^2 y} = -\frac{(x+2a)(x-a)}{x^2\sqrt{-\frac{x+2a}{x}}},$$

для $y > 0$.

Тоді $dy = y'dx$ і $V = -2\pi \int\limits_{-2a}^{0} \frac{(x+2a)(x-a)}{\sqrt{-\frac{x+2a}{x}}}\,dx$. В останньому інтегралі введемо заміну $-\dfrac{x+2a}{x} = t^2$. Тоді з того, що $x = -\dfrac{2a}{1+t^2}$, маємо

$$dx = \frac{4at\,dt}{(1+t^2)^2}, \quad x+2a = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad x-a = -\frac{3a+at^2}{1+t^2}.$$

При $x = -2a, t = 0$ і при $x \to -0, t \to +\infty$.

Отже,

$$V = 16\pi a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2(3a+at^2)}{(1+t^2)^4}\,dt = \left| \begin{array}{lll} t = \operatorname{tg} z, & 1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 z}, & t_2 = +\infty, \\ dt = \frac{dz}{\cos^2 z}, & t_1 = 0, z_1 = 0, & z_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 16\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 z(3+\operatorname{tg}^2 z)\cos^8 z}{\cos^2 z}\,dz = 48\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z\cos^4 z\,dz +$$

$$+16\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\sin^4 z\,dz = 16\pi a^3\Big(3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z\,dz - 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 z\,dz + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z\,dz\Big).$$

Враховуючи, що для парного $n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n z\,dz = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, остаточно отримаємо

$$V = 8\pi^2 a^3\Big(3\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + 2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\Big) = 2\pi^2 a^3 \text{ (куб. од.).} \quad \blacktriangleright$$

8.8. Враховуючи, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha x^2+2\beta x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha\left(x^2+\frac{2\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}dx = e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} x - \frac{\beta}{\alpha} = t, & x_1 \to -\infty, & t_1 \to -\infty, \\ dx = dt, & x_2 \to +\infty, & t_2 \to +\infty \end{array} \right| = e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(t + \frac{\beta}{\alpha}\Big)e^{-\alpha t^2}dt =$$

$$= e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha t^2} dt + \frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt.$$

Обчислимо кожен з інтегралів:

$$e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha t^2} dt = \frac{e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}}{-2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} d(-\alpha t^2) = -\frac{e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}}{2\alpha} e^{-\alpha t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha} t)^2} d(\sqrt{\alpha} t) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}.$$

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha x^2 + 2\beta x} dx = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}$. ►

Розділ IV. Інтеграли, залежні від параметра

§ 4.1. Інтеграли, залежні від параметра. Властивості

Нехай функція двох змінних $f(x, y)$ визначена на множині $[a; b] \times Y$, де $x \in [a; b]$, $y \in Y \subset \mathbb{R}$, причому для довільного $y \in Y$ існує інтеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Тоді функцію $F(y)$ називають ***інтегралом, залежним від параметра*** y.

Розглянемо ряд властивостей цього інтеграла.

1. ***Граничний перехід під знаком інтеграла.*** Нехай $y_0 \in Y$ є граничною точкою множини Y. Якщо для будь-якого $y \in Y$ функція $f(x, y)$ є інтегровною на $[a; b]$ і

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x),$$

причому ця збіжність до функції $g(x)$ є рівномірною на $[a; b]$, то функція $g(x)$ є інтегровною на $[a; b]$ і виконується рівність

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Нагадаємо, що функція $f(x, y)$ називається ***рівномірно збіжною*** на $x \in E$ при $y \to y_0$ до функції $g(x)$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in E)(\forall y \in Y :$

$|y - y_0| < \delta) : \{|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon\}$. Позначається $f(x, y) \underset{E}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$. Надалі для спрощення записів рівномірну збіжність $f(x, y)$ до $g(x)$ на E при $y \to y_0$ будемо позначати так:

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x), \;\; x \in E.$$

Зауважимо, що для того, щоб виконувалась умова $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = g(x)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{y \to y_0} \sup_{x \in E} |f(x, y) - g(x)| = 0.$$

З рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність, але не навпаки.

Наслідок. Нехай y_0 – гранична точка множини Y. Якщо для будь якого $y \in Y$ функція $f(x, y)$ є неперервною по x на $[a; b]$, а для будь-якого $x \in [a; b]$ функція $f(x, y)$ є монотонною по y і $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = g(x)$, де $g(x)$ є неперервною на $[a; b]$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y) dx = \int\limits_a^b g(x) dx.$$

2. ***Неперервність інтеграла, залежного від параметра.*** Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна на множині

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; a \leqslant x \leqslant b, \;\; c \leqslant y \leqslant d\},$$

де $-\infty < c < d < +\infty$. Тоді функція $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y) dx$ є неперервною на $[c; d]$.

3. ***Інтегровність інтеграла, залежного від параметра.*** Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику Π, то функція $F(y)$ є інтегровною на $[c; d]$, причому

$$\int\limits_c^d F(y) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) dy.$$

4. ***Диференційовність інтеграла, залежного від параметра.*** Нехай функція $f(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ неперервні в прямокутнику П. Тоді функція $F(y)$ є диференційовною на $[c;d]$, причому

$$F'_y(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Цю рівність часто називають ***правилом Лейбніца диференціювання інтеграла, залежного від параметра.***

5. Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна на П, а криві $\alpha(y)$, $\beta(y)$ є неперервними на $[c;d]$ і не виходять за межі прямокутника П. Тоді інтеграл

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

є неперервною функцією від y на $[c;d]$.

6. ***Узагальнене правило Лейбніца.*** Нехай виконуються умови властивості 5 і, крім того, існують похідні $f'_y(x,y)$, $\alpha'(y), \beta'(y)$, які є неперервними відповідно в прямокутнику П та відрізку $[c;d]$. Тоді функція $F(y)$ є диференційовною на $[c;d]$, причому виконується рівність:

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

Вправи

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1-y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$, 2) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_1^2 x^3\cos xy\,dx$,

3) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^4+y^2}\,dx$, 4) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dx$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$, 6) $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+|y|)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx$,

7) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x+y)dx}{x^2y^2+xy+1}$, 8) $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_1^2 \dfrac{y}{y+x}e^{-x^2y}dx$,

9) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{y^2}^{y^2+1} \dfrac{\arcsin x\,dx}{xy+(1+y^2)\cdot\frac{1}{y}}$, 10) $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_{[y]}^{\operatorname{sgn} y} \dfrac{\sin(xy)}{(x+y)y+1}\,dx$.

2. Чи можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла у наступних виразах:

1) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1}^{3} \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{xy}{1+y}\Big)dx$, 2) $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_0^{\pi} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x^2}{y}\,dx$,

3) $\lim\limits_{y\to\infty}\int\limits_0^2 \dfrac{e^{-xy}}{\sqrt{x}+y^2}\,dx$, 4) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \dfrac{x}{y^2}\,e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx$,

5) $\lim\limits_{y\to -\frac{1}{2}}\int\limits_0^1 \dfrac{\arccos(x+y)}{x+y+2}\,dx$.

3. Дослідити на неперервність задані інтеграли, залежні від параметра:

1) $F(y)=\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,dx$, 2) $F(y)=\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dx$,

3) $F(y)=\int\limits_0^1 \dfrac{yf(x)\,dx}{x^2+y^2}$, $f(x)\in \mathrm{C}_{[0;1]}$, $f(x)>0$, $x\in[0;1]$,

4) $F(y)=\int\limits_0^1 \dfrac{\sin\frac{y}{x}}{x^y}\,dx$, $y\in(0;1)$.

4. Знайти $F'(y)$, якщо:

1) $F(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{-yx^2}dx$, 2) $F(y)=\int\limits_0^y \dfrac{\ln(1+xy)}{x}\,dx$, $y>0$,

3) $F(y)=\int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$, 4) $F(y)=\int\limits_0^1 x^{y-1}dx$, $y>0$,

5) $F(y) = \int\limits_0^y (x-y)\sin xy\,dx$, 6) $F(y) = \int\limits_{-2+y}^{2+y} \frac{\sin xy}{x}\,dx$,

7) $F(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$, 8) $F(y) = \int\limits_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

5. Обчислити інтеграл по заданому відрізку від інтеграла, залежного від параметра, та визначити, чи можна при цьому змінювати порядок інтегрування:

1) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{\cos xy}{x+y}\,dx, \;\; y \in [0;1]$,

2) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx, \;\; y \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$,

3) $F(y) = \int\limits_a^b x^y dx, \;\; y \in [0;1], \;\; 0 < a < b$,

4) $F(y) = \int\limits_{y^2}^1 (x-2y)\,dx, \;\; y \in [0;1]$,

5) $F(y) = \int\limits_y^1 (x+y)\,dx, \;\; y \in [0;1]$,

6) $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx, \;\; y \in [0;1]$.

6. Нехай $F_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ – функція Бесселя цілого індекса n. Довести, що:

1) $x^2F_n''(x) + xF_n'(x) + (x^2-n^2)F_n(x) = 0, \;\; n \in \mathbb{Z}$,

2) $\int\limits_0^y xF_0(x)dx = yF_1(y)$.

7. Використовуючи формулу $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \dfrac{dy}{1+x^2y^2}$, $x \neq 0$, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Обчислити інтеграли, залежні від параметра, при $a < b$:

$$1)\ \int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \qquad 2)\ \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

Приклади розв'язування вправ

1.5. Дослідимо на рівномірну збіжність послідовність $\{F_n(x)\} = \left\{\dfrac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}\right\}$. Знайдемо поточкову границю $\{F_n(x)\}$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{1}{1+e^x}, \text{ де } x \in [0;1].$$

Тоді

$$\left|\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} - \frac{1}{1+e^x}\right| = \frac{|e^x - (1+\frac{x}{n})^n|}{(1+e^x)(1+(1+\frac{x}{n})^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \left|e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqslant \sup_{x\in[0;1]} \left|e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0$$

при $n \to \infty$ для довільного $x \in [0;1]$.

Отже, виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} \left|\dfrac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} - \dfrac{1}{1+e^x}\right| = 0$. Тобто $\dfrac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} \underset{x\in[0;1]}{\overset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \dfrac{1}{1+e^x}$. Тоді за властивістю граничного переходу під знаком інтеграла, залежного від параметра, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} e^x = t, \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1, \\ x = \ln t, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = e \\ dx = \frac{dt}{t}, \end{array} \right| = \int\limits_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= (\ln|t| - \ln|t+1|)\Big|_1^e = \ln\frac{e}{e+1} + \ln 2 = \ln\frac{2e}{e+1}. \quad \blacktriangleright$$

2.4. Без перевірки умов виконаємо граничний перехід під знаком інтеграла. Тоді

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \int_0^1 \lim_{y\to 0}\frac{\frac{x}{y^2}}{e^{\frac{x^2}{y^2}}}\, dx = \int_0^1 0\cdot dx = 0.$$

З іншого боку:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\Big(\frac{x^2}{y^2}\Big) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\Big(-\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}(e^{-\frac{1}{y^2}} - 1) = \frac{1}{2}.$$

Результати, отримані в обидвох випадках, відрізняються. Отже, здійснити граничний перехід під знаком інтеграла, залежного від параметра, не можна. ▶

4.7. Функції $f(x,y) = e^{y\sqrt{1-x^2}}$ і $f'_y(x,y) = \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}$ є неперервними в нескінченному прямокутнику $\Pi = \{(x;y):\ -1 \leqslant x \leqslant 1;\ y \in \mathbb{R}\}$, функції $\alpha(y) = \sin y$, $\beta(y) = \cos y$, $\alpha'(y) = \cos y$, $\beta'(y) = -\sin y$ є неперервними на всій множині дійсних чисел.

Отже, можемо використати для знаходження інтеграла, залежного від параметра, узагальнене правило Лейбніца. Тоді

$$F'(y) = \Big(\int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx\Big)'_y = \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}} dx - \sin y\cdot e^{y|\sin y|} - \cos y\cdot e^{y|\cos y|} =$$

$$= -(\sin y\cdot e^{y|\sin y|} + \cos y\cdot e^{y|\cos y|}) + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}} dx. \quad \blacktriangleright$$

8.2. Підінтегральна функція в точці $x = 0$ невизначена, але має скінченну границю при $x \to +0$, рівну нулю, якщо параметри a і b вважати додатніми. Тоді запишемо початковий інтеграл у вигляді

$$\int_0^1 \cos\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)\cdot\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int_0^1 dx\int_a^b x^y\cos\Big(\ln\frac{1}{x}\Big) dy$$

і доозначимо підінтегральну функцію так:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^y\cos(\ln\frac{1}{x}), & 0<x\leqslant 1, \quad a\leqslant y\leqslant b,\\ 0, & x=0, \quad a\leqslant y\leqslant b.\end{cases}$$

Вона є неперервною в прямокутнику $\Pi=\{(x;y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$, тому можемо застосувати правило інтегрування інтеграла, залежного від параметра:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^y\cos\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^1 x^y\cos\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} x=e^{-t}, & x_1=0, & t_1=+\infty,\\ dx=-e^{-t}dt, & x_2=1, & t_2=0\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_a^b dy\int\limits_{+\infty}^0 e^{-ty}(-e^{-t})\cos t\,dt=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\cos t\,dt.$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\cos t\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-t(y+1)}\cos t\,dt=$$

$$=\begin{vmatrix} u=e^{-t(y+1)}, & dv=\cos t dt,\\ du=-(y+1)e^{-t(y+1)}dt, & v=\sin t\end{vmatrix}=\lim_{b\to+\infty}\Big(\sin t\,e^{-t(y+1)}\Big|_0^b+$$

$$+(y+1)\int\limits_0^b e^{-t(y+1)}\sin t\,dt\Big)=\lim_{b\to+\infty}(y+1)\int\limits_0^b e^{-t(y+1)}\sin t\,dt=$$

$$=\begin{vmatrix} u=e^{-t(y+1)}, & dv=\sin t\,dt,\\ du=-(y+1)e^{-t(y+1)}dt, & v=-\cos t\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big(-(y+1)\cos t\,e^{-t(y+1)}\Big|_0^b-(y+1)^2\int\limits_0^b e^{-t(y+1)}\cos t\,dt\Big).$$

Звідси $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-t(y+1)}\cos t\,dt=\frac{y+1}{1+(y+1)^2}.$

Тоді

$$\int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t\, dt = \int_a^b \frac{y+1}{1+(y+1)^2}\, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} y+1=t, & y_1=a, & y_2=b, \\ y=t-1,\ dy=dt, & t_1=a+1, & t_2=b+1 \end{array} \right| = \int_{a+1}^{b+1} \frac{t\,dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_{a+1}^{b+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}. \quad \blacktriangleright$$

§ 4.2. Невласні інтеграли, залежні від параметра. Властивості

Розглянемо випадок невласних інтегралів, залежних від параметра і введемо поняття рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Нехай $f(x,y)$ визначена на множині $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;+\infty),\ y \in Y\}$, $Y \subset \mathbb{R}$ і для будь-якого $y \in Y$ існує інтеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Інтеграл $I(y)$ називається ***невласним інтегралом з верхньою нескінченною межею, залежним від параметра.***

За означенням можна записати, що

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x,y)dx.$$

Отже, інтеграл $F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$ є функцією двох змінних $F(t,y)$.

Невласний інтеграл $I(y)$ називається ***рівномірно збіжним відносно*** y ***на множині*** Y, якщо $F(t,y) \underset{Y}{\overset{t\to+\infty}{\rightrightarrows}} I(y)$, тобто

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists t_0 \geqslant a)(\forall t>t_0)(\forall y \in Y):\ \Big\{\Big|\int_a^t f(x,y)dx\Big| < \varepsilon\Big\}.$$

Зрозуміло, що умова $F(t,y) \overset{t\to+\infty}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} I(y)$ рівносильна умові

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in Y} \Big| \int\limits_a^t f(x,y)dx \Big| = 0.$$

Розглянемо деякі ознаки рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

Критерій Коші. Інтеграл $I(y)$ є рівномірно збіжним відносно y на множині Y тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0 \geqslant a)(\forall t', t'' \in (t_0; +\infty))(\forall y \in Y) : \Big\{ \Big| \int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx \Big| < \varepsilon \Big\}.$$

Ознака Вейєрштраса. Нехай для будь-яких $x \in [a; +\infty)$ та $y \in Y$ справджується нерівність $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ – збіжний.

Тоді $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ є рівномірно збіжним відносно y на множині Y.

Ознака Діріхле. Нехай функції двох змінних $f(x,y)$ та $g(x,y)$ визначені на множині $\{(x;y) : a \leqslant x < +\infty,\ y \in Y\}$, причому:

1) інтеграл $\int\limits_a^t f(x,y)dx$ рівномірно обмежений, тобто

$$(\exists K > 0)(\forall t > a)(\forall y \in Y) : \Big\{ \Big| \int\limits_a^t f(x,y)dx \Big| \leqslant K \Big\},$$

2) для довільного $y \in Y$ функція $g(x,y)$ монотонна на $[a; +\infty)$ і $g(x,y) \overset{x\to+\infty}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} 0$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)dx$ є рівномірно збіжним відносно y на Y.

Ознака Абеля. Нехай функції двох змінних $f(x,y)$ та $g(x,y)$ визначені на множині $\{(x;y) : a \leqslant x < +\infty,\ y \in Y\}$, причому:

1) інтеграл $\int\limits_a^t f(x,y)dx$ рівномірно збіжний відносно y на множині Y,

2) для кожного $y \in Y$ функція $g(x,y)$ монотонна по змінній x на $[a;+\infty)$ і рівномірно обмежена на $[a;+\infty) \times Y$, тобто

$$(\exists M>0)(\forall x \geqslant a)(\forall y \in Y): \ \{|g(x,y)| \leqslant M\}.$$

Тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)dx$ є рівномірно збіжним відносно y на множині Y.

Властивості невласних інтегралів, залежних від параметра.

1. ***Граничний перехід під знаком інтеграла.*** Нехай:

1) для довільного $b > a$ $f(x,y) \underset{[a,b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$, де y_0 – гранична точка множини Y,

2) інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ рівномірно збіжний відносно y на множині Y. Тоді

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. ***Неперервність невласного інтеграла.*** Нехай:

1) функція $f(x,y)$ неперервна на $[a;+\infty) \times [c;d]$,

2) інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ рівномірно збіжний на відрізку $[c;d]$. Тоді інтеграл $I(y)$ є неперервною функцією на $[c;d]$.

3. ***Інтегровність невласного інтеграла.*** Нехай:

1) функція $f(x,y)$ неперервна на $[a;+\infty) \times [c;d]$,

2) інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ рівномірно збіжний на відрізку $[c;d]$. Тоді $I(y)$ є інтегровною функцією на $[c;d]$, причому

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

4. ***Диференційовність невласного інтеграла.*** Нехай:

1) функції $f(x,y)$ та $f'_y(x,y)$ неперервні на $[a;+\infty) \times [c;d]$,

2) інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ збіжний для всіх $y \in [c;d]$,

3) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ рівномірно збіжний відносно y на $[c;d]$. Тоді функція $I(y)$ диференційовна на $[c;d]$, причому

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

5. *Перестановка інтегралів.* Нехай:

1) функція $f(x,y)$ неперервна на множині $[a;+\infty) \times [c;+\infty)$,

2) для довільного $\eta > c$ інтеграл $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ рівномірно збіжний відносно y на $[c;\eta]$,

3) для довільного $b > a$ інтеграл $\Phi(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ рівномірно збіжний відносно x на $[a;b]$,

4) збіжний хоч один із повторних інтегралів

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dy.$$

Тоді збіжними і рівними є інтеграли $\int\limits_c^{+\infty} F(y)dy$ і $\int\limits_a^{+\infty} \Phi(x)dx$, тобто

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Функцію $I(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)dx$, де $f(x,y)$ визначена на множині $[a;b) \times Y$ і для кожного фіксованого $y \in Y$ функція $f(x,y) \to +\infty$ при $x \to a+0$, називається ***невласним інтегралом від необмеженої функції, залежним від параметра***.

За допомогою заміни $x = a + \dfrac{1}{t}$ цей інтеграл зводиться до невласного інтеграла із нескінченною межею, тобто:

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\Big(a + \frac{1}{t}, y\Big) \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Тоді на цей інтеграл можуть бути поширені основні теореми про граничний перехід під знаком невласного інтеграла, про умови його неперервності, про інтегровність та диференційовність за параметром.

Інтеграл виду

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx,$$

де перший доданок є невласним інтегралом від необмеженої функції, називається ***рівномірно збіжним***, якщо рівномірно збігаються обидва інтеграли.

Вправи

1. Дослідити на рівномірну збіжність у вказаних інтервалах невласні інтеграли, залежні від параметра:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}}\,dx,\ 0 < y \leqslant A,$

2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{y\sin x}{x(y+1)} \cdot \operatorname{arctg}(xy)\,dx,\ 0<y<+\infty,$

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos(x^2+y)}{x+y}\,dx,\ y > 0,$

4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{yx^y}\,dx,\ 1 < y < +\infty,$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^{y-1}\ln(1-x)dx,\ y > 0,$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^y}\,dx,\ -\infty < y < 2,$

7) $\displaystyle\int\limits_0^{1} y\cos\frac{1}{x^2}\,dx,\ -\infty < y < +\infty,$

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-y)^2+1},\ 0 \leqslant y < +\infty,$

9) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-yx}dx,\ 0 \leqslant y < +\infty,$

10) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x\sqrt{x}}\,dx,\ 0 \leqslant y \leqslant 10,$

11) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-yx^2}dx,\ 0 \leqslant y < +\infty,$

12) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2(1+x^2)}\sin y\,dx, -\infty < y < +\infty,$

13) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y}\,dx,\ y \geqslant 0,$ 14) $\int\limits_0^{1} \frac{x^y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ 0 \leqslant y < +\infty,$

15) $\int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^y},\ 0 < y < 2,$ 16) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx,\ -\infty < y < +\infty,$

17) $\int\limits_0^{2} \frac{x^y dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}},\ |y| < \frac{1}{2},$ 18) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin xy}{\sqrt{|x-y|}}\,dx,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

2. Дослідити на неперервність у вказаних проміжках наступні функції:

$$1)\ I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^y},\ y > 2,$$

$$2)\ I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y}\,dx,\ y > 0,$$

$$3)\ I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx,\ -\infty < y < +\infty,$$

$$4)\ I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(1-y^2)x}{x}\,dx,\ -\infty < y < +\infty,$$

$$5)\ I(y) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}\,dx,\ 0 < y < 2,$$

$$6)\ I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy^2}dx,\ -\infty < y < +\infty,$$

$$7)\ I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(x+y)^2}dx}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+1},\ 1 \leqslant y \leqslant 2,$$

$$8)\ I(y) = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}}\,dx,\ y \geqslant 1.$$

3. За допомогою формули диференціювання невласних інтегралів, залежних від параметра, обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\Big)^2 dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ |\alpha| \leqslant 1,$

6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ |\alpha| \leqslant 1,$

7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\, dx,\ -\infty < \alpha < +\infty,$

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\, dx,\ -\infty < \alpha,\ \beta < +\infty,$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\, dx,\ -\infty < \alpha,\ \beta < +\infty,$

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4}\, dx,\ -\infty < \alpha,\ \beta < +\infty.$

4. Використовуючи формулу $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dx,\ x > 0$, обчислити інтеграли Френе:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

5. Використовуючи попередній результат, обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\,dx,\ a \neq 0,$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax\,dx,$ 3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x^2 \cos 2ax\,dx.$

6. Довести формули:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\sin\alpha a,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2a}\cos\alpha a.$

7. Знайти перетворення Лапласа $F(p) = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt,\ p > 0$, для функції $f(t)$, якщо:

1) $f(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N},$ 2) $f(t) = e^{at},$

3) $f(t) = \sqrt{t},$ 4) $f(t) = \cos t,$

5) $f(t) = \sin 2t,$ 6) $f(t) = te^{-at},$

7) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t},$ 8) $f(t) = \sin\alpha\sqrt{t}.$

Приклади розв'язування вправ

1.17. Оцінимо підінтегральну функцію $\dfrac{x^y}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}$:

$$0 \leqslant \frac{x^y}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{x^y dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} + \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}.$$

Дослідимо кожен із чотирьох отриманих інтегралів на збіжність.

За ознакою Коші для кожної підінтегральної функції маємо:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}}{\frac{1}{x^\lambda}}=\left|\lambda=\frac{1}{2}\right|=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}}=\left|\lambda=\frac{1}{3}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-2)^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}}=\left|\lambda=\frac{1}{3}\right|=\lim_{x\to1+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}}{\frac{1}{(2-x)^\lambda}}=\left|\lambda=\frac{2}{3}\right|=\lim_{x\to2-0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}=\sqrt{2}.$$

Оскільки всі $\lambda<1$, то за ознакою Коші всі чотири невласних інтеграли є збіжними.

Тоді за ознакою Вейєрштраса заданий інтеграл є рівномірно збіжним при $|y|\leqslant\frac{1}{2}$. ▶

2.5. Нехай $0<\varepsilon\leqslant y\leqslant 2-\varepsilon<2$. Тоді, розбиваючи інтеграл на три інтеграли, і оцінюючи підінтегральну функцію, отримуємо:

$$I(y)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}\,dx<\int_0^1\frac{dx}{x^{y-1}(\pi-x)^y}+\int_1^{\pi-1}\frac{dx}{x^y(\pi-x)^y}+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{x^y(\pi-x)^{y-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}+\pi-2+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}.$$

За ознакою Коші обидва інтеграли справа збігаються. Тоді за ознакою Вейєрштраса початковий інтеграл рівномірно збігається при $\varepsilon\leqslant y\leqslant 2-\varepsilon$.

Функція $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}$ в області

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<\pi,\ \varepsilon\leqslant y\leqslant 2-\varepsilon\}$$

є неперервною. Тоді за властивістю невласного інтеграла, залежного від параметра, отримуємо, що функція $I(y)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}\,dx$ є неперервною при

$\varepsilon \leqslant y \leqslant 2-\varepsilon$. Звідси, в силу довільності вибору $\varepsilon > 0$, вона є неперервною на інтервалі $0 < y < 2$. ▶

3.7. Функції $f(x,\alpha) = \dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $f'_\alpha(x,\alpha) = \dfrac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$ неперервні в області $\{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2:\ 1 < x < +\infty,\ -\infty < \alpha < +\infty\}$. Дослідимо інтеграли $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$ та $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$ на рівномірну збіжність.

Оскільки

$$\frac{|\operatorname{arctg}\alpha x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

та інтеграли $\displaystyle\frac{\pi}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ збігаються, то за ознакою Вейєрштраса досліджувані інтеграли є рівномірно збіжними.

Тоді за властивістю диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра, маємо

$$I'(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \left|\begin{array}{lll} x=\operatorname{ch}t, & x_1 = 1, & x_2 = b, \\ dx = \operatorname{sh}t\,dt, & t_1 = 0, & t_2 = \operatorname{arch}b \end{array}\right| = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{\operatorname{arch}b}\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}t(1+\alpha^2\operatorname{ch}^2t)\operatorname{sh}t} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{\operatorname{arch}b}\frac{dt}{\operatorname{ch}t(1+\alpha^2\operatorname{ch}^2t)} = \frac{\pi}{2}\Big(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big).$$

Звідси $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}(\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}) + C$, при $\alpha \geqslant 0$.

Оскільки $I(0) = 0$, то $C = \dfrac{\pi}{2}$. Отже, $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}(\alpha + 1 - \sqrt{1+\alpha^2})$. Аналогічно при $\alpha \leqslant 0$ маємо $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}(-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + C$. Тоді $C = -\dfrac{\pi}{2}$ і $I(\alpha) = -\dfrac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})$. Отже, $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha$, $-\infty < \alpha < +\infty$. ▶

7.7. За означенням перетворення Лапласа запишемо

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}-e^{-(p+1)t}}{t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{t}\,dt + \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(p+1)t}}{t}\,dt.$$

Звідси, якщо $p > 0$ і $A > 0$, то

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{t}\,dt = \left| \begin{matrix} pt = x, & t_1 = A, & t_2 = +\infty, \\ dt = \frac{dx}{p}, & x_1 = Ap, & x_2 = +\infty \end{matrix} \right| = \int\limits_{Ap}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{t}\,dt = \left| \begin{matrix} (p+1)t = x, & t_1 = A, & t_2 = +\infty, \\ dt = \frac{dx}{p+1}, & x_1 = A(p+1), & x_2 = +\infty \end{matrix} \right| = \int\limits_{A(p+1)}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Отже, для довільного $A > 0$ і $p > 0$ отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{t}\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{t}\,dt = \int\limits_{Ap}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int\limits_{A(p+1)}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{Ap}^{A(p+1)} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = e^{-\xi} \ln \frac{p+1}{p}, \quad Ap \leqslant \xi \leqslant A(p+1).$$

Оскільки функція $f(x) = e^{-x}$ є неперервною, то $\lim\limits_{A\to+0} e^{-\xi} = 1$. Отже,

$$\lim_{A\to+0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} \cdot e^{-pt} dt = \ln \frac{p+1}{p}. \quad \blacktriangleright$$

§ 4.3. Інтеграли Ейлера

Інтегралом Ейлера I-го роду або ***бета-функцією*** називається інтеграл

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Зауважимо, що якщо в цьому інтегралі $\alpha < 1$ і $\beta < 1$, то $B(\alpha, \beta)$ буде невласним, причому підінтегральна функція має дві особливі точки $x = 0$ і $x = 1$.

Інтегралом Ейлера II-го роду або ***гама-функцією*** називається інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Зауважимо, що при $\alpha < 1$ інтеграл $\Gamma(\alpha)$ має дві особливі точки $x = 0$ і $x = +\infty$.

Розглянемо ряд властивостей інтегралів Ейлера I-го і II-го роду, які будемо застосовувати для розв'язування практичних завдань.

1. Функція $\Gamma(\alpha)$ є неперервною для всіх $\alpha \in (0; +\infty)$.

2. Функція $\Gamma(\alpha)$ має неперервні похідні будь-якого порядку при $\alpha \in (0; +\infty)$, причому

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x \, e^{-x} dx.$$

3. ***Формула зведення для гама-функції.*** Для довільного $\alpha > 0$ виконується формула

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

зокрема $\Gamma(n + 1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

4. Функція $B(\alpha, \beta)$ є неперервною при $\alpha \in (0; +\infty)$, $\beta \in (0; +\infty)$, причому справедливою є рівність

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1 + x)^{\alpha+\beta}} \, dx.$$

5. Функція $B(\alpha, \beta)$ має неперервні похідні будь-якого порядку при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

6. Функція $B(\alpha, \beta)$ є симетричною, тобто

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

для всіх $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

7. ***Формула зведення для бета-функції.*** Для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ має місце рівність

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \, B(\alpha, \beta),$$

зокрема

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

8. ***Співвідношення Ейлера.*** Для гама-функції та бета-функції справедлива формула

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

9. ***Формула доповнення.*** Для довільного $\alpha\in(0;1)$ виконується співвідношення

$$B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha,}$$

зокрема $B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}\Big)=\pi$.

10. ***Формула Ленжандра.*** Для довільного $\alpha>0$ виконується рівність

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma\Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\,\Gamma(2\alpha).$$

11. ***Формула Гаусса.*** Для довільного $\alpha>0$ справджується співвідношення

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma\Big(\alpha+\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(\alpha+\frac{n-1}{n}\Big)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{n\alpha-\frac{1}{2}}}\,\Gamma(n\alpha),\quad n\in\mathbb{N}.$$

12. ***Формула Стірлінга.*** Для довільного $\alpha>0$ має місце рівність

$$\ln\Gamma(\alpha)=\ln\sqrt{2\pi}+\Big(\alpha-\frac{1}{2}\Big)\ln\alpha-\alpha+\frac{\theta}{12\alpha},\quad 0<\theta<1.$$

Вправи

1. Записати через гама- або бета-функції задані інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$,

2) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\,dx$,

4) $\displaystyle\int_0^1\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)^{\alpha}dx,\ \ \alpha>-1$,

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}dx,\ \ \alpha>-1,\ \beta>0$,

6) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}},\ \ n>1$,

7) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx,\ \ p,q,m>0$,

8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{x-1}t\,dt,\ \ x>0$,

9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{x-1} t\,dt, \quad x>0,$

10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^x t\,dt, \quad |x|<1,$

11) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1} t \cos^{y-1} t\,dt, \quad x,y>0,$

12) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}},$

13) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} t}{(1-k\sin t)^n}\,dt, \quad 0<k<1, \ n\in\mathbb{N},$

14) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx,$

15) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} t}{(1+k\cos t)^n}\,dt, \quad 0<k<1, \ n\in\mathbb{N},$

16) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{1-x}\,dx, \quad 0<\alpha<1,$

17) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \quad n>m>0,$

18) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2}\,dx, \quad 0<\alpha<2,$

19) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^2}\,dx, \quad |\alpha|<1,$

20) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\,dx.$

2. Довести рівності:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4},$

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}},$

3) $\frac{1}{\alpha^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-\alpha t}dt, \quad \alpha>0, \ \beta>0,$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1,$

5) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1,$

6) $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \frac{\beta^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Gamma(\alpha).$

3. Показати, що з формули Стірлінга для гама-функції випливає формула Стірлінга для $n!$:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \;\; 0 < \theta < 1, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

4. Обчислити за допомогою формули Стірлінга:

1) $\lg 100!$, 2) $(2n-1)!!$, 3) $2015!!$, 4) $(204)!!$,

5) $\dfrac{101!!}{102!!}$, 6) $\displaystyle\int\limits_0^1 (1-x^2)^{50} dx$, 7) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin^{200} x\, dx$, 8) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n!}$,

9) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, 10) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

Приклади розв'язування вправ

1.15. В інтегралі $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} t\, dt}{(1+k\cos t)^n}$ проведемо заміну $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Тоді

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} t\, dt}{(1+k\cos t)^n} = \left| \begin{matrix} x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, & \cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, & t_1 = 0, & x_1 = 0, \\ \sin t = \frac{2x}{1+x^2}, & dt = \frac{2\,dx}{1+x^2}, & t_2 = \pi, & x_2 = +\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= 2^n \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n-1} dx}{\left(1 + k \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n (1+x^2)^n} = 2^n \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n-1} dx}{(1+k+x^2(1-k))^n} =$$

$$= \frac{2^n}{(1+k)^n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n-1} dx}{\left(1 + x^2 \cdot \frac{1-k}{1+k}\right)^n} = \left| \begin{matrix} x\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} = \sqrt{t}, \\ dx = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2^n}{(1+k)^n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}\, dt}{(1+t)^n} = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(1+t)^n}\, dt =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}$$

при $n \in \mathbb{N}, \;\; 0 < k < 1$. ►

1.19. В інтегралі $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^2}\,dx$ введемо заміну $t = x^2$. Тоді

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = t^{\frac{1}{2}}, & x_1 = 0, & x_2 = +\infty, \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, & t_1 = 0, & t_2 = +\infty \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}} \ln t}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln t}{1+t}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}-1} \ln t}{1+t}\,dt.$$

Оскільки для останнього інтеграла виконується співвідношення

$$\Bigl(\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}}{1+t}\,dt\Bigr)'_\alpha = \left(B\Bigl(\frac{\alpha+1}{2}, 1-\frac{\alpha+1}{2}\Bigr)\right)'_\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}-1} \ln t}{1+t}\,dt =$$

$$= \left(\Gamma\Bigl(\frac{\alpha+1}{2}\Bigr)\cdot\Gamma\Bigl(1-\frac{\alpha+1}{2}\Bigr)\right)'_\alpha = \Bigl(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi}\Bigr)'_\alpha = -\frac{\pi^2 \cos\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2\sin^2\frac{\alpha+1}{2}\pi},$$

тобто

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}-1} \ln t}{1+t}\,dt = -\frac{\pi^2 \cos\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2\sin^2\frac{\alpha+1}{2}\pi},$$

то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2 \cos\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2\sin^2\frac{\alpha+1}{2}\pi} = \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}}.$$ ▶

2.3. Використовуючи означення гама-функції, перетворимо ліву частину рівності. Нехай $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Тоді

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-\alpha t}dt = \begin{vmatrix} \alpha t = z, & dt = \frac{dz}{\alpha} \\ t = \frac{z}{\alpha}, & \end{vmatrix} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{+\infty} \Bigl(\frac{z}{\alpha}\Bigr)^{\beta-1} e^{-z}\cdot\frac{dz}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{1}{\alpha^\beta}\int\limits_0^{+\infty} z^{\beta-1}e^{-z}dz = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{1}{\alpha^\beta}\cdot\Gamma(\beta) = \frac{1}{\alpha^\beta}.$$

Що й треба було довести. ▶

4.6. Спочатку перетворимо інтеграл:

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^{50}dx = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t}, & t_1 = 0, \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, & t_2 = 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{50}dt = \frac{1}{2}\cdot B\Bigl(\frac{1}{2}, 51\Bigr).$$

За співвідношенням Ейлера отримаємо:

$$\frac{1}{2}\cdot B\Big(\frac{1}{2},51\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\cdot\Gamma(51)}{\Gamma\big(51+\frac{1}{2}\big)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{50!\cdot\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{101}{2}\cdot\frac{99}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}=\frac{50!\cdot 2^{50}}{101!!}=\frac{(50!\cdot 2^{50})^2}{101!}.$$

Тоді за формулою Стірлінга отримаємо

$$\int\limits_0^1(1-x^2)^{50}dx=\frac{(50!\cdot 2^{50})^2}{101!}=\frac{\Big(\sqrt{2\pi\cdot 50}\cdot\big(\frac{50}{e}\big)^{50}e^{\frac{\theta}{600}}\cdot 2^{50}\Big)^2}{\sqrt{2\pi\cdot 101}\cdot\big(\frac{101}{e}\big)^{101}e^{\frac{\theta}{101\cdot 12}}}=$$

$$=\frac{2^{101}\cdot 50^{101}\cdot\pi e}{\sqrt{202\pi}\cdot 101^{101}}\cdot e^{(\frac{1}{300}-\frac{1}{1212})\theta}\approx 0,1241\cdot e^{0,0025}. \quad \blacktriangleright$$

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.
2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
3. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.
4. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.1. – 462 с.
5. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
6. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч.1. – 495 с.
7. *Никольський С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольський. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 461 с.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.2. – 810 с.
9. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.2. – 510 с.
10. *Томусяк А.А.* Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди: Навч. посібник / А.А. Томусяк, Н.М. Шунда. – К.: Вища школа, 1995. – 541 с.