Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, No.1

УДК 517.98

Дубей М.В., Загороднюк А.В.

ГЛОБАЛЬНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА АНАЛОГ ТЕНЗОРНОГО ДОБУТКУ N МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Глобальна лінеаризація дробово-лінійних відображень та аналог тензорного добутку n метричних просторів // Карпатські математичні публікації.* — 2011. — Т.3, №1. — С. 1–8.

У статті вводиться поняття тензорного добутку та симетричного тензорного добутку n метричних просторів, а також процес лінеаризації дробово-лінійних відображень

Вступ

Нехай $X-$ метричний простір, зафіксуємо у ньому деяку точку θ_x. Розглянемо на цьому просторі функцію $\alpha(x)$, таку, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ виконується нерівність:

$$|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1) + \alpha(x_2).$$

Функція $\alpha(x)$ називається нормою і метричний простір X буде нормованим, якщо норму ввести наступним чином: $\alpha(x) = \rho(x, \theta_x)$. Такий метричний простір називається простором з відміченою точкою. Розглянемо ліпшицеві відображення, які діють з X. Відображення $f : X \to Y$ називається ліпшицевим, якщо існує стала L_f така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_f \rho_X(x_1, x_2)$, де найменша з можливих сталих L_f називається сталою Ліпшица. Простір усіх ліпшицевих функцій з метричного простору X з відміченою точкою θ_x позначається $\operatorname{Lip}_0(X, Y)$. Ліпшицеві вдображення досліджувались Н. Вівером [10], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [7]. У роботі В. Пестова [6] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_x існує єдиний (з точністю до ізометричного ізоморфізму) банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x) \in \operatorname{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного оператора $\widetilde{f}(x) : B(X) \to E$ для довільного нормованого простору E, причому $\|f\| = L_f$. Позначимо через $\operatorname{span} X$ лінійну оболонку простору X, а елементи з лінійної оболонки через $\underline{x}$. У статті [6] доведено, що елементи вигляду $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{x_k}$ є щільними у просторі $B(X)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26A16, 45G25.

Ключові слова і фрази: тензорний добуток, ліпшицеві відображення, дробово-лнійні відображення, метричний простір.

Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором. Відображення $\nu : X \to B(X)$ та простір $B(X)$ задають лінеаризацію нелінійних функцій з класу $\mathrm{Lip}_0(X, E)$. Лінеаризацію ліпшицевих функцій досліджували Д. Райков [2], Р. Аренс та Ж. Ілс [3], Ж. Флуд [9], Ж. Годефруа, Н. Калтон [4].

Більш загальним класом нелінійних функції є аналітичні відображення. Простір всіх аналітичних відображень на відкритій множині Ω зі значеннями у банаховому просторі Y будемо позначимо через $H(\Omega, Y)$. Аналітичні функції також допускають лінеаризацію і тим додатковим простором буде тензорний добуток.

1 Тензорні добутки метричних просторів

Нехай X, Y – метричні простори. Побудуємо множину

$$\Omega_X = \{\underline{x} - \underline{x'} \mid x, x' \in X, x \neq x'\} \cup \theta_x \subset B(X),$$

аналогічно можна побудувати множину Ω_Y. Розглянемо лінійний простір Σ формальних сум $\sum\limits_i \lambda_i(x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$. Очевидно, що множина елементів

$$\Sigma_0 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x_k, \theta_y) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\theta_x, y_j)$$

є лінійним підпростором Σ.

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$. Позначимо клас еквівалентності елемента (x, y) через $x \diamond y$. Тензорним добутком метричних просторів X, Y називатимемо множину $X \diamond Y = \{x \diamond y \mid x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}$. Для кожного елемента $\omega \in \widetilde{\Sigma}$ визначимо норму

$$\|\omega\| := \inf \sum_k |\lambda_k| \|\underline{u_k} - \underline{u'_k}\| \|\underline{v_k} - \underline{v'_k}\|, \tag{1}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях елемента ω у такому вигляді:

$$\omega = \sum_k \lambda_k (\underline{u_k} - \underline{u'_k}) \diamond (\underline{v_k} - \underline{v'_k}) \tag{2}$$

де $u_k, u'_k \in X, v_k, v'_k \in Y$. У статті [1] доведено наступну теорему:

Твердження 1.1. *Поповнення простору $\widetilde{\Sigma}$ відносно норми (1) ізометрично ізоморфне проективному тензорному добутку $B(X)\widehat{\bigotimes}_\pi B(Y)$ банахових просторів $B(X)$ та $B(Y)$.*

З цієї теореми, зокрема, випливає, що $X \diamond Y$ вкладається в $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$. Проективна тензорна норма простору $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ індукує метрику на $X \diamond Y$, яка має вигляд

$$\begin{aligned} &\rho((x_1 - x'_1) \diamond (y_1 - y'_1), (x_2 - x'_2) \diamond (y_2 - y'_2)) = \\ &\|(\underline{x_1} - \underline{x'_1}) \diamond (\underline{y_1} - \underline{y'_1}) - (\underline{x_2} - \underline{x'_2}) \diamond (\underline{y_2} - \underline{y'_2})\| = \\ &\|(x_1 - x'_1) \otimes (y_1 - y'_1) - (x_2 - x'_2) \otimes (y_2 - y'_2)\|_\pi \end{aligned} \tag{3}$$

Таким чином $X \diamond Y$ є метричним простором з відміченою точкою $\theta_X \diamond \theta_Y$.

Нехай $Z-$ метричний простір з відміченою точкою θ_z. Побудуємо тензорний добуток $(X \diamond Y) \diamond Z$, де Z є метричними простором з відміченою точкою θ_z. Простір

$$\Sigma = \sum_i \lambda_i (x_i \diamond y_i, z_i),$$

де $(x_i \diamond y_i, z_i) \in \Omega_{X \diamond Y} \times \Omega_Z$, де

$$\Omega_Z = \{\underline{z} - \underline{z'} | z, z' \in Z, z \neq z'\} \cup \theta_z,$$

а множина $\Omega_{X \diamond Y}$ матиме такий вигляд:

$$\Omega_{X \diamond Y} = \{\underline{x \diamond y} - \underline{x' \diamond y'} \,|\, x \diamond y, x' \diamond y' \in X \diamond Y\} \cup \theta_x \diamond \theta_y \subset B(X \diamond Y),$$

де $x \diamond y$ та $x' \diamond y'$ не належать до одного класу еквівалентності.

Покладемо у відповідність елементу з простору $(X \diamond Y) \times Z$ елемент з простору $X \times Y \times Z$ за таким правилом:

$$(x_i \diamond y_i, z_i) = ((x_i, y_i) + (\theta_x, y_i) + (x_i, \theta_y), z_i) = (x_i, y_i, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i). \tag{4}$$

Тоді $\Sigma = \sum\limits_i \lambda_i((x_i, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i))$. Підпростір Σ_0 у цьому випадку матиме такий вигляд:

$$\Sigma_0 = \sum_k \alpha_k (x_k \diamond y_k, \theta_z) + \sum_j \beta_j (\theta_x \diamond \theta_y, z_j).$$

Враховуючи (4), отримаємо, що

$$\Sigma_0 = \sum_k \alpha_k ((x_k, y_k) + (x_k, \theta_y) + (\theta_x, y_k), \theta_z)) + \sum_j \beta_j (\theta_x, \theta_y, z_j) =$$

$$\sum_k \alpha_k ((x_k, y_k, \theta_z) + (x_k, \theta_y, \theta_z) + (\theta_x, y_k, \theta_z)) + \sum_j \beta_j (\theta_x, \theta_y, z_j)$$

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma / \Sigma_0$, тензорним добутком $(X \diamond Y) \diamond Z$ метричного простору $X \diamond Y$ та метричного простору Z назвемо множину класів еквівалентності $(x \diamond y) \diamond z$, тобто

$$(X \diamond Y) \diamond Z = \{(x \diamond y) \diamond z | x \diamond y \in \Omega_{X \diamond Y}, z \in Z\}.$$

Аналогічно можна побудувати тензорний добуток

$$X \diamond (Y \diamond Z) = \{x \diamond (y \diamond z) | x \in X, y \diamond z \in \Omega_{Y \diamond Z}\}.$$

Твердження 1.2. *Простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними.*

Доведення. Побудуємо відображення $I : (x \diamond y) \diamond z \mapsto x \diamond (y \diamond z)$, яке кожному класу $(x \diamond y) \diamond z$ ставить відповідність клас $x \diamond (y \diamond z)$. Очевидно, що I є взаємнооднозначним відображенням з простору $(X \diamond Y) \diamond Z$ у простір $X \diamond (Y \diamond Z)$. Запишемо метрику простору $(X \diamond Y) \diamond Z$:

$$\rho((x_1 \diamond y_1) \diamond z_1, (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2) = \|(x_1 \diamond y_1) \diamond z_1 - (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2\| =$$

$$\|(x_1 \otimes y_1) \otimes z_1 - (x_2 \otimes y_2) \otimes z_2\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi.$$

Метрика простору $X \diamond (Y \diamond Z)$ матиме такий вигляд:

$$\rho(x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1), x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)) = \|x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1) - x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)\| =$$

$$\|x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) - x_2 \otimes (y_2 \otimes z_2)\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi.$$

Отже, I є бієктивним відображенням, тому простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними. $\square$

Таким чином, ми можемо побудувати тензорний добуток трьох метричних просторів двома способами і ці множини співпадуть, з точністю до ізометричного ізоморфізму. Позначимо його $X \diamond Y \diamond Z$. Зауважимо, що тензорний добуток $X \diamond Y \diamond Z$ вкладається у простір $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)\widehat{\otimes}_\pi B(Z)$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X \diamond Y \diamond Z$.

Тензорний добуток трьох метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_x \diamond \theta_y \diamond \theta_z$.

Аналогічно, з точністю до ізометричного ізоморфізму, можна будувати тензорний добуток чотирьох, п'яти, шести,..., $n-1$ метричного простору і зокрема n-тий тензорний добуток метричних просторів можна ввести як тензорний добуток простору X_n та $n-1$ тензорного степеня метричних просторів X_i, де $i = 1, 2, ..., n-1$, тобто

$$X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = (X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1}) \diamond X_n$$

або

$$X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = X_1 \diamond (X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n).$$

Тензорний добуток n метричних просторів вкладається у $\otimes_\pi^n B(X_i)$, де $i = 1, 2, ..., n$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n$, тому тензорний добуток n метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_{x_1} \diamond \theta_{x_1} \diamond \cdots \diamond \theta_{x_n}$.

Для метричного простору X можна ввести поняття симетричного тензорного добутку. Симетричним тензорним добутком назвемо таку множину

$$X \diamond_s X = \{x_1 \diamond_s x_2 | x_1, x_2 \in \Omega_X\}$$

де

$$x_1 \diamond_s x_2 = \frac{x_1 \diamond x_2 + x_2 \diamond x_1}{2}.$$

Зауважимо, що $X \diamond_s X \subset X \diamond X$. Аналогічно можна будувати n-тий симетричний тензорний степінь $\diamond_s^n X$ метричного простору X.

Нехай $X, Y-$ метричні простори, позначимо через $\mathbb{P}(^n X, Y)$ множину відображень з X в Y таких, що для довільного відображення $F \in \mathbb{P}(^n X, Y)$ існує n-однорідний поліном $P_F \in \mathcal{P}(^n B(X), B(Y))$, для якого $P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$ для довільного $x \in X$.

Твердження 1.3. *Для кожного $F \in \mathbb{P}$ існує ліпшицеве відображення $\Phi_F(\diamond_s^n X, Y)$ таке, що*

$$\Phi_F(x \diamond x \diamond \cdots \diamond x) = F(x)$$

і $L_{\Phi_F} = \|P\|$.

Доведення. Нехай P_F- n-однорідний поліном з $B(X)$ в $B(Y)$, яки відповідає відображенню F. Цьому поліному відповідає лінійний оператор

$$\widetilde{P}_F : \widehat{\bigotimes}^n_{s,\pi} B(X) \to B(Y),$$

таки, що $\widetilde{P}_F(\underline{x}^{\otimes n}) = P_F(\underline{x})$.

Оскільки $\widehat{\bigotimes}^n_{s,\pi} B(X) = B(\diamond^n_{s,\pi} X)$, то лінійному оператору $\widetilde{P}_F$ відповідає ліпшицеве відображення $\widetilde{\Phi}_F : \diamond^n_{s,\pi} X \to B(Y)$ таке, що $\widetilde{\Phi}_F(x^{\diamond n}) = P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$. Оскільки образ $F(x)$ міститься в Y, то $\underline{F(X)} \subset \nu_Y(Y)$, де $\nu_Y : y \mapsto \underline{y}-$ ізометричне вкладення. Покладемо $\Phi_F = \nu_Y^{-1} \circ \widetilde{\Phi}_F$. Це і буде шуканим відображенням. Крім того, $L_{\Phi_F} = L_{\widetilde{\Phi}_F} = \|P_F\| = \|P\|$.

□

Очевидно, що при цьому $B(\diamond^n_s X) = \widehat{\otimes}^n_{s,\pi} B(X)-$ поповнення симетричного тензорного степеня простору $B(X)$ у проективній топології. Тому $B'(\diamond^n_s X) = ({}^n B(X))-$ простір всіх n-однорідних симетричних поліномів на $B(X)$. Будемо позначати $\underbrace{x \diamond x \diamond \cdots \diamond x}_{n}$ через $x^{\diamond n}$. Відомо [8], що на $\widehat{\otimes}^n_{s,\pi} B(X)$ існує норма, яка еквівалентна до норми індукованої з $\widehat{\otimes}^n_{\pi} B(X)$ і така, що для кожного $u \in B(X)$

$$\|u^{\otimes n}\| = \sup\{|P(u)| P \in \mathcal{P}({}^n B(X)), \|P\| \leq 1\}.$$

Звуження цієї норми на $\diamond^n_s X$ породжує метрику, яка буде ліпшицево еквівалентною до метрики, індукованої з $\diamond^n_s X$. + Озн. Ліпшицево еквівалентних норм

2 Лінеаризація аналітичних функцій

Нехай $\xi(z)$ деяка аналітична функція однієї комплексної змінної в околі нуля радіуса ρ_0, причому $\xi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \rho_0(\xi) = 1/\limsup |c_n|^{1/n}$. Нехай $X-$ комплексний банахів простір, $\otimes^n_{\gamma,s} X-$ n-тий симетричний тензорний степінь простору X, поповнений відносно деякої тензорної норми γ. Позначимо через $F_\xi(x)$ формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{\otimes n}$. Нехай $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}-$ простір $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} (\bigotimes^n_{\gamma,s} X)_\alpha$ скінченних прямих сум $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \bigotimes^n_{\gamma,s} X$ поповнений відносно деякої норми α. Нагадаємо означення радіуса рівномірної збіжності та радіуса обмеженості аналітичної функції [8]. Нехай $f \in H(\Omega, Y)$, де Ω відкрита підмножина в X і $x \in \Omega$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathcal{P}$, що $x + \lambda B \subset \Omega$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathcal{P}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$.

Твердження 2.1. *F_ξ є аналітичним відображенням з відкритої кулі $B_{\rho_0(\xi)}$ в X з центром в нулі радіуса $\rho_0(\xi)$ в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ і F_ξ є обмеженим на кулі будь-якого меншого радіусу з центром в нулі.*

Доведення. Розглянемо n-ту однорідну компоненту відображення F_ξ:

$$F_{\xi,n} = c_n x^{\otimes n}.$$

Тому радіус рівномірної збіжності (який дорівнює радіусу обмеженості) функції F_ξ можна знайти як

$$\rho_0(\xi) = 1/\limsup \|F_{\xi n}\|^{1/n} = 1/\limsup |c_n|^{1/n}.$$

□

Зауважимо, що для кожного лінійного неперервного функціоналу $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$ композиція $\varphi \circ F_\xi$ буде аналітичною функцією обмеженого типу в кулі $B_{\rho_0(\xi)}$. Позначимо $\Phi_\xi = \{\varphi \circ F_\xi : \varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}\}$. Тоді, при фіксованих ξ, α, γ пара $F_\xi, \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ задає лінеаризацію функцій з класу Φ_ξ на $B_{\rho_0(\xi)}$. Аналогічно, якщо $A-$ лінійний оператор з $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ в деякий нормований простір Y, то $A \circ F_\xi$ буде аналітичним відображенням з $B_{\rho_0(\xi)}$ в Y.

Нехай $\xi(z) = \frac{az+b}{-cz+d} = \frac{az+b}{d(1-\frac{c}{d}z)} = \frac{az+b}{d}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}z^n-$ дробово-лінійне відображення з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, визначене в кулі з центром в нулі радіуса d/c. Тоді $F_\xi(x) = \frac{ax+b}{d}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}x^{\otimes n}$.

Нехай $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$, тоді $\varphi \circ F_\xi(x) = p + \frac{a\varphi(x)+b}{d}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\varphi_n(x)$, де φ_n- n-однорідний поліном – звуження φ на $\bigotimes^n_{\gamma,s} X$.

У випадку, коли $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} g_k^n(x), \varphi_0(1) = p$, де $g \in X'$, отримаємо, що

$$\varphi \circ F_\xi(x) = \frac{ag(x)+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\sum_{k=1}^{p} g_k^n(x) =$$

$$= (1 + \frac{ag_1(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_1^n(x)) + (1 + \frac{ag_2(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_2^n(x)) + \cdots +$$

$$+(1 + \frac{ag_p(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_p^n(x)) =$$

$$= \frac{ag_1(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_1(x))} + \frac{ag_2(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_2(x))} + \cdots + \frac{ag_p(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_p(x))} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\frac{ag_k(x)+b}{-cg_k(x)+d}$$

причому $\|g\| \le d/c$.

Приклад 2.1. *Розглянемо випадок* $\xi = 1/(1-z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. *Нехай* $\varphi_n = f^n + g^n$, *де* $f, g \in X'$, $X = \mathbb{C}^2$, *тобто* $x = (x_1, x_2) = x_2e_2 + x_2e_2$. *Тоді* $x^{\otimes n} = (x_2e_2 + x_2e_2)^{\otimes n} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k x_1^k x_2^{n-k} e_1^{\otimes n} e_2^{\otimes n-k}$, $\|f\| \le 1, \|g\| \le 1$ *і* $\varphi_0(1) = 2$. *Тоді*

$$\varphi \circ F_\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} f^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g^n(x) = 1/(1-f(x)) + 1/(1-g(x)).$$

В загальному випадку клас функцій $\varphi \circ F_\xi$ може бути дуже широким. Наприклад $X = \mathbb{C}, \xi = 1/(1-z), \alpha - \ell_2$-норма, $\gamma-$ стандартна метрика в $\mathbb{C}$ тоді кожна аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, яка належить класу Харді $H^2(\mathbb{D})$ має вигляд $\varphi \circ F_\xi$. Справді, в цьому випадку простір $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ ізометрично ізоморфний до $H^2(\mathbb{D})$. Кожен лінійний функціонал φ на $H^2(\mathbb{D})$ визначається деякою функцією $f \in H^2(\mathbb{D})$ такою, що

$$\varphi(g) = \int_S g(z)\overline{f(z)}dz.$$

Зокрема, $\varphi \circ F_\xi(z) = \int_S \overline{f(z)}/(1-z)dz = f(z)-$ за формулою Коші.

Виберемо простір X, тензорну норму γ та норму α так, щоб

$$\mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \otimes_{\gamma,s} \mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \subset \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}. \tag{5}$$

Для цього достатньо щоб простір X був ізоморфний до $\otimes^n_{\gamma,s}X$ для довільного n і до $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У [5] доведено, що якщо $X-$ банахів простір з безумовним базисом, то вказані умови виконуються для деяких α і γ. Зокрема, якщо $X = \ell_1$, то включення (5) виконується, якщо $\gamma-$ проективна тензорна норма і $\alpha{-}\ell_1$-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$, тобто $\|\sum \omega_n\|_\alpha = \|\sum \omega_n\|_\gamma$, де $\omega_n \in \otimes^n_{\gamma,s}X$. Якщо $X = c_0$, то γ буде ін'єктивною тензорною нормою, а $\alpha{-}c_0$-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У випадку, коли $X = \ell_2$ замість γ можна вибрати гільбертову тензорну норму, а $\alpha{-}\ell_2$-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Припустимо, що ξ_1, ξ_2- функції комплексного аргументу, аналітичні в кулях B_{r_1} і B_{r_2} відповідно. Нехай $r > 0$ таке число, що $\forall z \in B_{R_2}$ і $|z| < r, \xi_2(z) \in B_{r_2}$, тоді $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2}$ є аналітичним відображенням з $B_r \subset X$ в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Оскільки, $\xi \mapsto F_\xi$ є гомоморфізмом алгебр, то $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2} = F_{\xi_1 \circ \xi_2}$.

Література

1. Дубей М.В. *Аналог тензорного добутку метричних просторів* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2010. – Вип.501. – С.33-38.
2. Райков Д.А. *Свободные локально выпуклые подпространства равномерных пространств* // Мат. сб. – 1964. – 63, № 4. – С. 582-590.
3. 2. Arens R, Eells J. *On embedding uniform and topological spaces*, Pacic J. Math., **6**(1959), 397-403.
4. Godefroy G., Kalton N. *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math., **159, №1** (2003), 121-141.
5. Lopuhanky O.V., Zagorodnyuk A.V. *Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables*, Annales pol. mathem., **81.2** (2003), 111-122
6. Pestov V. *Free Banach spaces and representation of topological groups*, Func. Anal. Appl., **20**.(1986), 70-72.
7. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis, Providence, Amer. Math. Society, 2000. - 488p.
8. Dineen S. Complex Analysis on infinite dimensional space, Monographs in mathematics, Springer,New York, 1999. - 543 p.
9. Flood J. Free topological vector spaces, Canberra, Australian National university, Ph. D. thesis, 1975. - 109 p.
10. Weaver N. Lipschitz algebras, Singapore, New Jersey, London, New York, World Scientific, 1999. - 223 p.

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника, Івано-Франківськь, Україна.

Dubei M., Zagorodnyuk A. *Nazva statti anglijskou*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 1–8.

abstrakt anglijskou

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Назва статті російськoю мовою* // *Карпатские математические публикации.* — 2011. — Т.3, №1. — С. 1–8.

Абстракт російською мовою.