УДК 517.927

О.О. Власий, В.В. Мазуренко, Р.М. Таций

Об одном классе дискретно-непрерывных краевых задач для векторных квазидифференциальных уравнений

Исследованы спектральные свойства задачи на собственные значения для системы квазидифференциальных уравнений с распределениями в коэффициентах. Установлены необходимые и достаточные условия существования решений неоднородной краевой задачи. Получены изображения решений в интегральной (фредгольмовой) форме с помощью конструктивно построенной матричной функции Грина и в форме (Шмидта) абсолютно и равномерно сходящегося ряда по собственным вектор-функциям.

Введение

Исследования реальных физических процессов, учитывающих естественное единство дискретного и непрерывного, приводят к необходимости создания адекватных математических моделей [1]. Многие из таких моделей описываются дифференциальными и квазидифференциальными уравнениями (КДУ) с обобщенными функциями в коэффициентах и в правой части [2, 3]. Существенный толчок для развития эта тематика получила благодаря фундаментальным работам М.Г. Крейна и И.С. Каца (см. [4, с. 648] и библиографию там же) относительно дифференциальных уравнений второго порядка, моделирующих свободные колебания струны, масса которой допускает кроме непрерывного, еще и точечное распределение.

В работах [5, 6] установлены существование и единственность решения, а также изучены спектральные свойства широкого класса корректных (при исследовании которых не возникает проблема умножения функционалов) краевых задач для КДУ произвольного конечного порядка. В статье [7] получен аналог альтернативы Фредгольма для системы дифференциальных уравнений с мерами, а в работах [8, 9] исследована задача на собственные значения и построена матричная функция Грина для системы КДУ четвертого порядка. Задачи на собственные значения, исследованные в анонсированных (за исключением [6]) работах, являются задачами одночленного класса [10, с. 69]. Настоящая работа является развитием статьи [6] на случай систем КДУ высших порядков, потому рассматриваемые здесь задачи на собственные значения принадлежат к многочленному классу.

В настоящей работе приняты следующие обозначения: I — открытый интервал вещественной оси $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}^{p\times q}$ — линейное пространство комплексных матриц размера $p \times q$; $\overline{\mathcal{D}}_p(I)$ — пространство непрерывных вектор-функций $I \to \mathrm{C}^p$ с компактным носителем, сопряженное к нему пространство $\overline{\mathcal{D}}_p'(I)$ является пространством векторных распределений; $AC_p[a,b]$, $L_p[a,b]$ и $L_p^2[a,b]$ — пространства матричных функций $A\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times p}$ соответственно с абсолютно непрерывными, суммируемыми и квадратично суммируемыми по Лебегу на отрезке $[a,b]$ элементами $a_{ij}(x)$; $BV_p^+[a,b]$ — пространство матриц, элементы $a_{ij}(x)$ которых являются непрерывными справа на отрезке $[a,b]$ функциями ограниченной вариации (соответствующие пространства вектор-функций обозначаем с чертой вверху); 0 — нулевой элемент (вектор или число); O_p и E_p — соответственно нулевая и единичная матрицы порядка p; (f,φ) — значение функционала f на функции $\varphi(x)$; $\|A\|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$, определяемая как сумма модулей всех ее элементов a_{ij};

$$\Delta A(x) = A(x) - A(x{-}0)$$

— скачок функции $A \in BV_p^+[a,b]$ в точке $x \in [a,b]$;

$$\bigvee_a^b A(x)$$

— полная вариация матрицы-функции $A(x)$ на $[a,b]$, равная сумме полных вариаций всех ее элементов $a_{ij}(x)$; τ — символ транспонирования; $*$ — операция сопряжения; δ_{ij} — символ Кронекера; $E(\cdot)$ — целая часть действительного числа (антье); $\ell = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

1. Постановка задачи и метод исследования

Рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\mathcal{M}[y] = \lambda\mathcal{N}[y], \tag{1}$$

где $y\colon [a,b] \to \mathbb{C}^p$ — неизвестная вектор-функция вещественной переменной x, λ — скалярный комплексный параметр, $\mathcal{M}[y]$ i $\mathcal{N}[y]$ —

линейные однородные КДВ порядков m и n $(m > n)$ соответственно с матричными коэффициентами:

$$\mathcal{M}[y] = (-1)^l \left\{ \ell B(x) \Big[B(x) y^{(l)} \Big]^{(m-2l)} \right\}^{(l)} + \\ + \sum_{i,j=0}^{l} (-1)^{l-j} \left(B_{ij}(x) y^{(l-i)} \right)^{(l-j)},$$

$$\mathcal{N}[y] = \sum_{i,j=r}^{l} (-1)^{l-j} \left(A_{ij}(x) y^{(l-i)} \right)^{(l-j)}, \tag{2}$$

$m, l, r \in \mathbb{N}$, $r \le l \le E\left(\frac{m}{2}\right)$. К тому же, при $m = 2l$ предполагаем $B \equiv 0$, так что, когда m — четное число, то

$$\mathcal{M}[y] = \sum_{i,j=0}^{l} (-1)^{l-j} \Big(B_{ij}(x) y^{(l-i)} \Big)^{(l-j)}. \tag{3}$$

КДУ вида (1) с достаточно гладкими, а также суммируемыми по Лебегу $(p \times p)$-матричными коэффициентами в разных аспектах исследовались многими авторами. Так, в [11] построена общая теория и проведен спектральный анализ такого уравнения в случае, когда

$$m = 2l, \quad p = 1, \quad B_{ij} \equiv 0 \ (i \ne j), \quad \mathcal{N}[y] = y.$$

Случай, когда m — произвольное число,

$$l = E\left(\frac{m}{2}\right), \quad B_{ij} \equiv 0 \quad \left(i, j = \overline{0, l},\ i \ne j + \{0, \pm 1\}\right)$$

для $p = 1$, $\mathcal{N}[y] = w(x) y$ рассмотрен в [12], а для $p > 1$, $\mathcal{N}[y] = y$ — в [13]. Скалярное КДУ (1) с КДВ $\mathcal{M}[y] = y^{[m]}$, $\mathcal{N}[y] = y$, где

$$y^{[0]} = B_{00}(x) y, \quad y^{[i]} = \ell B_{ii}(x) \left(y^{[i-1]} \right)' + \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}(x) y^{[j]},\ i = \overline{1, m},$$

изучалось в [14]. В [10,15] исследовались задачи на собственные значения многочленного класса для КДУ (1), в котором $\mathcal{M}[y]$ и $\mathcal{N}[y]$ определяются выражениями (3) и (2) при $i = j$. Здесь мы ослабляем требования к коэффициентам КДВ $\mathcal{M}[y]$ и $\mathcal{N}[y]$ и считаем, что выполняются следующие предположения:

(A) если $m=2l$, то $B_{00}^{-1}(x)$ — ограниченная и измеримая на сегменте $[a,b]$ матрица, $B_{i0}, B_{0j} \in L_p^2[a,b]$ для любых $i,j=\overline{1,l}$, B_{ij} — меры Стилтьеса на $[a,b]$, т.е.

$$B_{ij} = b'_{ij} \quad (b_{ij} \in BV_p^+[a,b])$$

для $i,j=\overline{1,l}$; иначе $B^{-1}(x)$ — ограниченная и измеримая при $x \in [a,b]$, к тому же, если $l=E(\frac{m}{2})$, то

$$B_{i0}, B_{0j} \in L_p[a,b]$$

для $i,j=\overline{0,l}$, а $B_{ij} = b'_{ij}$ для $i,j=\overline{1,l}$, если же $l < E(\frac{m}{2})$, то $B_{ij} = b'_{ij}$ для всех $i,j=\overline{0,l}$;

(B) $B_{i0}^* = B_{0i}$ $(i=\overline{0,l})$, $b_{ij}^* = b_{ji}$ $(i,j=\overline{1,l})$ при $l=E(\frac{m}{2})$ или $b_{ij}^* = b_{ji}$ $(i,j=\overline{0,l})$, если $l < E(\frac{m}{2})$. Кроме того, также $B^* = B$;

(C) $A_{ij}=a'_{ij}$ $(a_{ij} \in BV_p^+[a,b])$ для произвольных $i,j=\overline{r,l}$, причем $a_{ij}(x)$ — неубывающие на $[a,b]$ матричные функции и $a_{ij}^* = a_{ji}$;

Под *решением* КДУ (1) понимаем вектор-функцию $y(x,\lambda)$ из пространства $\overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$, удовлетворяющую тождеству

$$\Big(y^{[m]},\ \varphi\Big) = 0 \quad \forall\varphi \in \overline{\mathcal{D}}_p(I),\ I \supseteq [a,b].$$

Существование и единственность решений начальных задач для КДУ с обобщенными матричными коэффициентами, а также элементы линейной теории таких уравнений, приведены в работе [16].

Вместе с уравнением (1) рассмотрим также неоднородное КДУ

$$\mathcal{M}[y] - \lambda\mathcal{N}[y] = \sum_{j=0}^{m-l-1} (-1)^{j+1} f_j^{(j+1)}(x), \tag{4}$$

где

$$f_j \in \overline{BV}_p^{\,+}[a,b] \quad (j=\overline{0,m-l-1}).$$

Для уравнения (4) определим квазипроизводные

$$y^{[k]} \quad (k=\overline{0,m};\ y^{[0]} \overset{df}{=} y)$$

выражениями (при $m=2l$ по обусловленному $B\equiv 0,\ f_l\equiv 0$):

$$
\begin{aligned}
&y^{[k]}=y^{(k)},\quad k=\overline{1,l-1};\\
&y^{[l+k]}=-\frac{1+\ell}{\sqrt{2}}B(x)y^{(l+k)},\quad k=\overline{0,m-(2E(m/2)+1)};\\
&y^{[l+k]}=-\left(y^{[l+k-1]}\right)'+f'_{m-l-k},\quad k=\overline{1,2(E(m/2)-l)};\\
&y^{[m-l]}=-\frac{1+\ell}{\sqrt{2}}B(x)\left(y^{[m-l-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{l}B_{i0}(x)y^{(l-i)}+f'_l;\\
&y^{[m-l+k]}=-\left(y^{[m-l+k-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{l}B_{ik}(x)y^{(l-i)}+f'_{l-k},\quad k=\overline{1,r-1};\\
&y^{[m-l+k]}=-\left(y^{[m-l+k-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{l}B_{ik}(x)y^{(l-i)}-\\
&\qquad\qquad-\lambda\sum_{i=r}^{l}A_{ik}(x)y^{(l-i)}+f'_{l-k},\quad k=\overline{r,l}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

К КДУ (4) присоединим m краевых условий вида

$$
U_k(y)\equiv\sum_{\nu=1}^{m}\left[P_{k\nu}y^{[\nu-1]}(a)+Q_{k\nu}y^{[\nu-1]}(b)\right]=0, k=\overline{1,m},
\tag{6}
$$

где $U_k(y)$ — линейно независимые краевые формы с заданными числовыми матрицами $P_{k\nu},Q_{k\nu}$ $(k,\nu=\overline{1,m})$.

Главная техническая идея работы состоит в замене краевой задачи (4), (6) некоторой эквивалентной задачей для системы уравнений первого порядка

$$
JY'-[G'(x)+\lambda H'(x)]\,Y=F'(x),
\tag{7}
$$

$$
PY(a)+QY(b)=0.
\tag{8}
$$

В уравнении (7) J является косоэрмитовой унитарной матрицей размера $q\times q$, $Y(x)$ — неизвестная вектор-функция, λ — комплексный параметр, $G(x)$ и $H(x)$ — некоторые *эрмитианы*, т.е. определенные на $[a,b]$ матричные функции, значениями которых являются эрмитовые $q\times q$-матрицы (также считаем, что их элементы являются непрерывными справа на $[a,b]$ функциями ограниченной вариации, поэтому дифференцирование и равенство в (7) понимаем в обобщенном смысле), $F \in \overline{BV}_q^{\,+}[a,b]$ — известная вектор-функция, $F'(x)$ — ее обобщенная производная. В условии (8) $P, Q \in \mathbb{C}^{q\times q}$ — заданные матрицы.

Под *решением* краевой задачи (7), (8) понимаем вектор-функцию $Y(x,\lambda)$ из

$$\overline{BV}_q^{\,+}\big([a,b]\times\mathbb{C}\big),$$

удовлетворяющую условию (8) и

$$\big([J\tfrac{d}{dx} - G' - \lambda H']Y, \varphi\big) = \big(F', \varphi\big) \quad \forall\, \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_q(I),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для корректности определения решения [17] будем требовать для произвольных $x \in [a,b]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнения системы условий

$$\Big(J\big[\triangle G(x) + \lambda\triangle H(x)\big]\Big)^2 = O_p,\ \big[\triangle G(x) + \lambda\triangle H(x)\big] J\triangle F(x) = O_p. \quad (9)$$

Однородную краевую задачу с краевым условием (8) для системы дифференциальных уравнений с параметром

$$JY' = [G'(x) + \lambda H'(x)]\, Y, \quad (10)$$

называем *самосопряженной*, если выполняются следующие условия:

(D) эрмитова матрица-функция $H(x)$ неубывающая на $[a,b]$, т.е. для произвольных $x_1, x_2 \in [a,b]$ из условия $x_2 > x_1$ следует, что $H(x_2) \geq H(x_1)$; иначе говоря, матрица $H(x_2) - H(x_1)$ неотрицательно определена в том смысле, что эрмитова форма

$$\big([H(x_2) - H(x_1)]\xi, \xi\big)_{\mathbb{C}^q} = \xi^*\big[H(x_2) - H(x_1)\big]\xi \geq 0;$$

(E) пара краевых матриц $\big\{P, Q\big\}$ неособенная, т.е. $\operatorname{rank}(P\,|\,Q) = q$, и J-унитарна, т.е.

$$PJP^* = QJQ^*; \quad (11)$$

(F) уравнения

$$JY' - G'(x)Y = 0 \quad \text{и} \quad H'(x)Y = 0 \quad (12)$$

при условии (8) имеют только тривиальное решение $Y \equiv 0$.

Нетрудно убедиться в том, что для любого нетривиального решения $Y(x, \lambda)$ самосопряженной краевой задачи (10), (8)

$$\int_a^b Y^*(x, \lambda) dH(x) Y(x, \lambda) > 0. \tag{13}$$

Очевидно, что задача (10), (8) всегда имеет тривиальное решение. Поэтому естественно рассматривать задачу об отыскании тех значений параметра λ, для которых (10), (8) имеет нетривиальные решения (*задача на собственные значения*). Такие значения параметра λ называем *собственными*, их совокупность — *спектром* задачи на собственные значения, а соответствующие им нетривиальные решения задачи (10), (8) — *собственными вектор-функциями* этой задачи.

Условие (F) означает, что задача (10), (8) не имеет вырожденного по параметру λ нетривиального решения. Если такое решение существует, т.е. условие (F) не выполняется, то спектр задачи (10), (8) совпадает со всей λ-плоскостью. С другой стороны, в силу вырожденности матрицы $H(x)$ задача (10), (8) может вообще не иметь собственных значений, например, если $H(x)$ — постоянная матрица, а

$$\det\big[P + Q\Phi(b)\big] \neq 0,$$

где $\Phi(x)$ — матрица первого из уравнений (12).

Условие (11) необходимо для того, чтобы для любых двух вектор-функций

$$Y, Z \in \overline{BV}_q^{\,+}[a, b],$$

удовлетворяющих условию (8) с J-унитарной парой матриц $\big\{P, Q\big\}$, выполнялось равенство [18, с. 302]

$$Z^*(a) J Y(a) = Z^*(b) J Y(b). \tag{14}$$

Это позволяет также получить своеобразный параметрический вид

$$Y(a) = Mv, \ Y(b) = Nv, \quad M^* J M = N^* J N \tag{15}$$

краевого условия (8) с неособенной и J-унитарной парой матриц $\big\{M^*, Q^*\big\}$, где

$$M = JP^*, \quad N = -JQ^*.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (A)–(C) и матрицы* $P_{k\nu}, Q_{k\nu}$ $(k,\nu=\overline{1,m})$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{s=1}^{l}\big[P_{ks}P^*_{\nu,m-s+1}-P_{k,m-s+1}P^*_{\nu s}\big]+\sum_{s=l+1}^{E(\frac{m}{2})}(-1)^{s-l}\ell\big[P_{ks}P^*_{\nu,m-s+1}+$$
$$+P_{k,m-s+1}P^*_{\nu s}\big]+(-1)^{E(\frac{m}{2})-l+1}\ell P_{k,E(\frac{m}{2})+1}P^*_{\nu,E(\frac{m}{2})+1}=$$
$$=\sum_{s=1}^{l}\big[Q_{ks}Q^*_{\nu,m-s+1}-Q_{k,m-s+1}Q^*_{\nu s}\big]+\sum_{s=l+1}^{E(\frac{m}{2})}(-1)^{s-l}\ell\big[Q_{ks}Q^*_{\nu,m-s+1}+$$
$$+Q_{k,m-s+1}Q^*_{\nu s}\big]+(-1)^{E(\frac{m}{2})-l+1}\ell Q_{k,E(\frac{m}{2})+1}Q^*_{\nu,E(\frac{m}{2})+1} \quad (16)$$

(*при* $m=2l$ *здесь* $P_{k,E(\frac{m}{2})+1}=Q_{k,E(\frac{m}{2})+1}=0$, $k=\overline{1,m}$). *Если оба уравнения* $\mathcal{M}[y]=0$ *и* $\mathcal{N}[y]=0$ *имеют только тривиальное решение при условии* (6), *тогда краевая задача* (4), (6) *эквивалентна задаче* (7), (8) (*также* (7), (15)), *причем* $q=mp$ *и соответствующая однородная задача является самосопряженной.*

КДУ (4) приводится к виду (7) с помощью столбцевой матрицы

$$Y=\big(y,y^{[1]},\ldots,y^{[m-1]}\big)^{\tau} \quad (17)$$

размера $mp\times 1$, составленной из квазипроизводных (5). При этом вектор-функция $F'(x)$ имеет вид

$$F'=\Big(-f'_0,\ldots,-f'_{l-1},\tfrac{1+\ell}{\sqrt{2}}B^{-1}f'_l,-\ell f'_{l+1},\ell f'_{l+2},\ldots,\ell f'_{m-l-1},\underbrace{0,\ldots,0}_{l}\Big)^{\tau}. \quad (18)$$

Матрицы J, $H'(x)$, $G'(x)$ размера $mp\times mp$ имеют такую блочную структуру (указываем только ненулевые $p\times p$ блоки $J_{k\nu}$, $H_{k\nu}$, $G_{k\nu}$ $k,\nu=\overline{1,m}$ каждой из них):

$$J_{k,m-k+1}=\begin{cases}-E_p, & k=\overline{1,l};\\ (-1)^{m-l-k}\ell E_p, & k=\overline{l+1,m-l};\\ E_p, & k=\overline{m-l+1,m};\end{cases}$$

$$H_{k\nu}=A_{l-\nu+1,l-k+1},\ k,\nu=\overline{r,l};$$

если m четное

$$G_{k\nu}=\begin{cases} B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}-B_{l-\nu+1,l-k+1}, & k,\nu=\overline{1,l};\\ -B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l{+}1;\\ -B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l{+}1,\ \nu=\overline{1,l};\\ B_{00}^{-1}, & k=\nu=l{+}1;\\ E_p, & k=\overline{2,m},\ k\neq l{+}1,\ \nu=m{-}k{+}2;\end{cases}$$

при нечетном m

$$G_{k\nu}=\begin{cases} -B_{l-\nu+1,l-k+1}, & k,\nu=\overline{1,l};\\ \frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}B_{0,l-k+1}B^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l{+}1;\\ \frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l{+}1,\ \nu=\overline{1,l};\\ -B^{-1}B_{00}B^{-1}, & k=\nu=l{+}1;\\ -\frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=l{+}1,\ \nu=m{-}l{+}1;\\ -\frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=m{-}l{+}1,\ \nu=l{+}1;\\ E_p, & k=\overline{2,m},\ k\neq l{+}1,m{-}l{+}1,\nu=m{-}k{+}2.\end{cases}$$

2. Формулировка результатов

Везде дальше будем считать, что выполняются условия (A)–(C) и (16).

Теорема 1. *Задача на собственные значения* (1), (6) *имеет спектр, который содержит не более, чем конечное число собственных значений, единственной предельной точкой которых может быть только* $\lambda=\infty$. *Собственные значения* λ_k *все вещественны и имеют кратность, не превышающую числа* m; *при этом*

$$\sum_{\lambda_k\neq 0}|\lambda_k|^{-\frac{1}{m-n}-\varepsilon}<\infty$$

для любого $\varepsilon>0$. *Всякие две собственные вектор-функции* $y(x,\lambda_k)$ *и* $y(x,\lambda_\nu)$ *этой задачи, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными в том смысле, что при* $\lambda_k\neq\lambda_\nu$

$$\sum_{i,j=0}^{l-r}\int_a^b y^{[j]*}(x,\lambda_k)da_{l-i,l-j}\,y^{[i]}(x,\lambda_\nu)=0. \tag{19}$$

Далее собственные значения задачи (1), (6) можно записать в виде последовательности $\ldots \le \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ (которая может обрываться), где $\lambda_{-1} < 0, \lambda_1 \ge 0$. Понятно, что их можно перенумеровать, например, в порядке неубывания их модулей

$$0 \le |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \ldots . \tag{20}$$

При этом считаем, что каждое λ_k записано в последовательности (20) d_k раз, где d_k — его кратность ($1 \le d_k \le m$) как корня *характеристического уравнения*

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left[U_i(Z_j)\right]_{i,j=1}^m = 0,$$

здесь $Z_1(x,\lambda), Z_2(x,\lambda), \ldots, Z_m(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений операторного уравнения

$$M(Z) = \lambda N(Z), \quad Z : [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times p}, \tag{21}$$

ассоциированного с уравнением (1) [11, с. 110]. Таким образом, каждому λ_k соответствует множество d_k последовательных индексов.

Если все собственные значения задачи (1), (6) простые ($d_k = 1$), то собственные вектор-функции этой задачи можно нормировать так, что соотношения ортогональности примут вид

$$\sum_{i,j=0}^{l-r} \int_a^b y_k^{[j]*}(x) da_{l-i,l-j}\, y_\nu^{[i]}(x) = \delta_{k\nu} \tag{22}$$

при условии, что $\lambda_k \ne \lambda_\nu$, когда $k \ne \nu$. В случае кратных собственных значений ($d_k > 1$) с помощью *процесса ортогонализации* тоже можно построить ортонормированную систему собственных вектор-функций. Поэтому соотношения (22) будем считать верными и в случае, когда $\lambda_k = \lambda_\nu$ независимо от того $k = \nu$ или $k \ne \nu$.

Далее исследуем вопрос о разрешимости неоднородной краевой задачи (4), (6) сначала для случая, когда однородная задача (1), (6) имеет только тривиальное решение, т.е. при условии, что λ не является ее собственным значением. В этом случае решение задачи можно получить в интегральной (*фредгольмовой*) форме с помощью конструктивно построенной матричной *функции Грина* $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$.

Теорема 2. *Если λ не является собственным значением задачи* (1), (6), *то для любых функций $f_j \in \overline{BV}_p^{\,+}[a,b]$ $(j = \overline{0, m-l-1})$*

существует единственное решение $y \in \overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$ *неоднородной краевой задачи* (4), (6), *представимое в виде*

$$y(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-l-1} \int_a^b \frac{\partial^j \mathcal{G}(x,t,\lambda)}{\partial t^j} df_j(t), \tag{23}$$

где $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ *— матричная функция Грина.*

Решение неоднородной краевой задачи (4), (6) можно представить также в *форме Шмидта*, которая обладает тем преимуществом перед фредгольмовой формой (23), что в ней явно отображен мероморфный характер решения относительно каждого полюса $\lambda = \lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 3. *Если* λ *не является собственным значением задачи* (1), (6), *то неоднородная краевая задача* (4), (6) *имеет единственное решение* $y \in \overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$ *вида*

$$y(x,\lambda) = \lambda\sum_k \frac{y_k(x)}{\lambda_k(\lambda-\lambda_k)}\Bigg(\sum_{j=0}^{l}\int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t) + \\ + \sum_{j=l+1}^{m-l-1}\ell(-1)^{j-l+1}\int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t)\Bigg) + f(x), \tag{24}$$

где

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-l-1} \int_a^b \frac{\partial^j \mathcal{G}(x,t,0)}{\partial t^j} df_j(t), \tag{25}$$

и ряд в (24) *является абсолютно и равномерно сходящимся на* $[a,b]$.

Случай, когда параметр λ совпадает с d-кратным собственным значением λ_k из последовательности (19), т.е., когда $\lambda = \lambda_k$,

$$k \in \mathcal{I} = \{k_0+1, k_0+2, \ldots, k_0+d\}$$

для некоторого k_0, сводится к исследованию поведения функции Грина $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ в точках собственных значений [10, с. 90]. В этой ситуации имеет место теорема.

Теорема 4. *Если λ является d-кратным $(1 \le d \le m)$ собственным значением задачи (1), (6), то неоднородная задача (4), (6) имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются d условий:*

$$\sum_{j=0}^{l} \int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t) + \sum_{j=l+1}^{m-l-1} \ell(-1)^{j-l+1} \int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t) = 0, \ k \in \mathcal{I}; \quad (26)$$

при этом решения представляются в виде

$$y(x,\lambda) = f(x) + \lambda \sum_{k \notin \mathcal{I}}^{\infty} \frac{y_\nu(x)}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} \Bigg(\sum_{j=0}^{l} \int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t) + \\ + \sum_{j=l+1}^{m-l-1} \ell(-1)^{j-l+1} \int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t) \Bigg) + \sum_{k \in \mathcal{I}} c_k y_k(x), \quad (27)$$

где $f(x)$ определяется по формуле (25), c_k — произвольные постоянные и ряд справа в (27) является абсолютно и равномерно сходящимся на $[a,b]$.

3. Доказательства результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть $y(x,\lambda_k)$ — собственная вектор-функция краевой задачи (1), (6), соответствующая собственному значению λ_k. Тогда в силу леммы 1 задача

$$JY_k' = [G'(x) + \lambda_k H'(x)]Y_k, \quad (28)$$

$$PY_k(a) + QY_k(b) = 0,$$

где

$$Y_k(x) = \Big(y(x,\lambda_k), y^{[1]}(x,\lambda_k), \ldots, y^{[m-1]}(x,\lambda_k) \Big)^{\tau}, \quad (29)$$

является самосопряженной. Вследствие условий корректности (9) произведения $Y_k^* JY_\nu'$ і $Y_k^{*\prime} JY_\nu$ существуют в смысле теории обобщенных функций, к тому же имеет место равенство

$$\big(Y_k^* JY_\nu\big)' = Y_k^* JY_\nu' + Y_k^{*\prime} JY_\nu = Y_k^* \big(JY_\nu'\big) - \big(JY_k'\big)^* Y_\nu = \\ = Y_k^*[G' + \lambda_\nu H']Y_\nu - Y_k^*[G^{*\prime} + \overline{\lambda}_k H^{*\prime}]Y_\nu = (\lambda_\nu - \overline{\lambda}_k) Y_k^* H^{*\prime} Y_\nu,$$

т.е. $Y_k^*(b)JY_\nu(b)-Y_k^*(a)JY_\nu(a) = (\lambda_\nu-\overline{\lambda}_k)\displaystyle\int_a^b Y_k^*(x)dH(x)Y_\nu(x)$. Здесь использовано уравнение (28) и свойства матриц J, $H(x)$, $G(x)$. Если, кроме этого, учесть условие (14) для $Z\equiv Y_k$, $Y\equiv Y_\nu$, то получим

$$(\lambda_\nu-\overline{\lambda}_k)\int_a^b Y_k^*(x)dH(x)Y_\nu(x)=0. \tag{30}$$

Пусть $\lambda_\nu=\lambda_k$. Поскольку $\displaystyle\int_a^b Y_k^*(x)dH(x)Y_k(x)>0$ в силу условия (13), то из равенства (30) следует, что $\lambda_k=\overline{\lambda}_k$, т.е. все собственные значения задачи (1), (6) вещественны. При $\lambda_\nu\neq\lambda_k=\overline{\lambda}_k$ из соотношения (30), учитывая структуру матрицы $H(x)$ и вектора $Y_k(x)$, следует соотношение ортогональности (19) собственных векторов $y(x,\lambda_k)$ и $y(x,\lambda_\nu)$. Собственные значения задачи являются нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda)=\det\big[U_k(Z_\nu)\big]_{k,\nu=1}^m$, где $Z_1(x,\lambda),\ldots,Z_m(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений операторного уравнения (21). Эти решения являются целыми функциями параметра λ, поэтому $\Delta(\lambda)$ — тоже целая функция. Как было показано, она не имеет невещественных нулей, поэтому не аннулируется тождественно. Таким образом, множество нулей этой функции не имеет конечной предельной точки. $\square$

Доказательство теоремы 2. Построим решения краевых задач с краевыми условиями (6) для КДУ

$$\mathcal{M}(y)-\lambda\mathcal{N}(y)=(-1)^{j+1}f_j^{(j+1)}(x),\quad j=\overline{0,m-l-1} \tag{31}$$

и просуммируем их. Пусть $\mathcal{K}\colon [a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{p\times p}$ — матричная функция Коши КДУ (1). Тогда общее решение неоднородного КДУ (31) для произвольного $j=\overline{0,m-l-1}$ имеет вид

$$y_j(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^m \mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)c_i^j+\int_a^x \mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,t,\lambda)df_j(t),\ j\neq l;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^m \mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)c_i^j+\frac{1-\ell}{\sqrt{2}}\int_a^x \mathcal{K}^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)B^{-1}(t)df_l(t);\end{cases}$$

символ $\{\cdot\}$ обозначает квазипроизводную в смысле сопряженного к (21) уравнения [16, с. 50]. Учитывая выражения для первых $m{-}l{-}1$ квазипроизводных

$$\begin{aligned} &Z^{\{k\}} = Z^{(k)}, \quad k = \overline{0, l{-}1}; \\ &Z^{\{l+k\}} = \frac{1-\ell}{\sqrt{2}} B^*(x) Z^{(l+k)}, \quad k = \overline{0, m{-}(2E(m/2){+}1)}; \\ &Z^{\{l+k\}} = \left(Z^{[l+k-1]}\right)', \quad k = \overline{1, 2(E(m/2){-}l)}; \end{aligned} \tag{32}$$

перепишем решение в виде

$$y_j(x) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x, a, \lambda) c_i^j + \int_a^x \mathcal{K}^{*<j>*}(x, t, \lambda) df_j(t); \tag{33}$$

здесь символ $<\cdot>$ обозначает обыкновенную производную $(\cdot)$ для $j = \overline{0, l}$ и квазипроизводную $\{\cdot\}$ для $j = \overline{l{+}1, m{-}l{-}1}$.

Решение (33) содержит m неизвестных векторов c_i^j. Для их нахождения необходимо удовлетворить краевые условия (6). В результате приходим к системе m уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} U_k\Big(\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x, a, \lambda)\Big) c_i^j + \sum_{\nu=1}^{m} Q_{k\nu} \int_a^b \mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b, t, \lambda) df_j(t) = 0.$$

Поскольку согласно условию теоремы λ не является собственным значением, то определитель этой системы не равен нулю. Поэтому векторы c_i^j, $i = \overline{1, m}$ определяются из системы однозначно. Обозначим $V_{ki}(\lambda)$ — матрицу порядка p, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы $U_k\Big(\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x, a, \lambda)\Big)$, $k, i = \overline{1, m}$ в определителе $\Delta(\lambda)$. Пусть $W_{ki}(\lambda) = -V_{ki}(\lambda)^{\tau}$. Тогда для $i = \overline{1, m}$

$$c_i^j = \sum_{k,\nu=1}^{m} \frac{W_{ki}(\lambda) Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)} \int_a^b \mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b, t, \lambda) df_j(t).$$

Подставим эти значения в формулу (33). Выражение

$$\mathcal{G}_j(x, t, \lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,k,\nu=1}^{m} \mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x, a, \lambda) \frac{W_{ki}(\lambda) Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)} \mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b, t, \lambda), \\ \hfill x < t; \\ \displaystyle\sum_{i,k,\nu=1}^{m} \mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x, a, \lambda) \frac{W_{ki}(\lambda) Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)} \mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b, t, \lambda) + \\ \hfill + \mathcal{K}^{*<j>*}(x, t, \lambda), \ x \geq t \end{cases}$$

называем матричной функцией Грина краевой задачи (31), (6). Если учесть структуру этой матрицы, очевидно следующее ее свойство:

$$\mathcal{G}_j(x,t,\lambda)=\frac{\partial^j\mathcal{G}_0(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\equiv\frac{\partial^j\mathcal{G}(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\quad\forall\, j=\overline{0,l}. \tag{34}$$

В силу (32) имеем $\mathcal{K}^{*\{l+k\}*}(x,t,\lambda)=\dfrac{\partial^k\mathcal{K}^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)}{\partial t^k}$, $k=\overline{1,m{-}2l{-}1}$, поэтому свойство (34) справедливо также для $j=\overline{l{+}1,m{-}l{-}1}$, что и доказывает (23). □

Доказательство теоремы 2 можно было бы получить как следствие теоремы A статьи [7], в силу которой решение краевой задачи (7), (15) при условии, что λ не является собственным значением, имеет вид

$$Y(x)=\int_a^b K(x,t,\lambda)dF(t), \tag{35}$$

где разрешающее ядро

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\mathcal{Y}(x,a,\lambda)M[\mathcal{Y}(b,a,\lambda)M-N]^{-1}\mathcal{Y}(b,t,\lambda)J, & x<t,\\ \mathcal{Y}(x,a,\lambda)M[\mathcal{Y}(b,a,\lambda)M-N]^{-1}\mathcal{Y}(b,t,\lambda)J-\mathcal{Y}(x,t,\lambda)J, & \\ & x\geq t\end{cases}$$

является эрмитовым в том смысле, что $K(x,t,\lambda)=K^*(t,x,\overline{\lambda})$ при $x\neq t$. Однако, для получения конкретного вида решения выбранный нами путь представляется более конструктивним. Тем не менее, сравнивая изображения (23) и (35), нетрудно понять, что первая $(p\times mp)$-блочная строка ядра $K(x,t,\lambda)$ имеет вид

$$\left(-\mathcal{G},\ldots,-\frac{\partial^{l-1}\mathcal{G}}{\partial t^{l-1}},\frac{1-\ell}{\sqrt{2}}\frac{\partial^l\mathcal{G}}{\partial t^l}B(t),\ell\frac{\partial^{l+1}\mathcal{G}}{\partial t^{l+1}},\ldots,-\ell\frac{\partial^{m-l-1}\mathcal{G}}{\partial t^{m-l-1}},\underbrace{O_p,\ldots,O_p}_{l}\right). \tag{36}$$

Доказательство теорем 3 и 4. На основании леммы 1 неоднородная краевая задача (4), (6) эквивалентна краевой задаче (7), (15). Если λ не совпадает ни с одним из собственных значений самосопряженной краевой задачи (10), (15), то по результатам статьи [7] существует единственное решение неоднородной задачи (7), (15), представимое в виде

$$Y(x,\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Y_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \int_a^b Y_k^*(s) dF(s) \right) + \widehat{F}(x), \tag{37}$$

где

$$\widehat{F}(x) = \int_a^b K(x,s,0) dF(s),$$

причем ряд в правой части (37) является абсолютно и равномерно сходящимся на сегменте $[a,b]$. В случае, когда λ совпадает с d-кратным собственным значением λ_k задачи (10), (15), решение неоднородной задачи (7), (15) существует тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b Y_k^*(s) dF(s) = 0, \ k \in \mathcal{I},$$

и имеет вид

$$Y(x,\lambda) = \lambda \sum_{k \notin \mathcal{I}} \left(\frac{Y_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \int_a^b Y_k^*(s) dF(s) \right) + \sum_{k \in \mathcal{I}} c_k Y_k(x) + \widehat{F}(x),$$

где c_k — произвольные постоянные. Отсюда с учетом (17), (18), (29) и (36) непосредственно следуют утверждения теорем. $\square$

Список литературы

[1] *Образцов, И.Ф.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем / И.Ф. Образцов, Г.Г. Онанов. – М.: Машиностроение, 1973.

[2] *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985.

[3] *Schwabik, Š.* Generalized Ordinary Differential Equations / Š. Schwabik. – World Scientific, Singapore, 1992.

[4] *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1968.

[5] *Тацій, Р.М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку / Р.М. Тацій, В.В. Мазуренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44. – № 1. – С. 43–53.

[6] *Тацій, Р.М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку / Р.М. Тацій, В.В. Мазуренко // Математичні студії. – 2001. – Т. 16. – № 1. – С. 61–75.

[7] *Мазуренко, В.В.* О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами / В.В. Мазуренко, Р.М. Таций // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 3. – С. 328–336.

[8] *Тацій, Р.М.* Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В.В. Кісілевич // Вісник ДУ «Львівська політехніка»: Прикладна матем. – 1996. – № 229. – С. 165–170.

[9] *Тацій, Р.М.* Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В.В. Кісілевич // Вісник ДУ «Львівська політехніка»: Прикладна матем. – 1998. – № 346. – С. 120–124.

[10] *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц; пер. с. нем. – М.: Наука, 1968.

[11] *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.

[12] *Walker, Ph.W.* A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square / Ph.W. Walker // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. s2-9. – N. 1. – P. 151–159.

[13] *Рофе-Бекетов, Ф.С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Ф.С. Рофе-Бекетов // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 184. – № 5. – С. 1034–1037.

[14] *Шин, Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка / Д. Шин // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49). – № 3. – С. 479–532.

[15] *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; пер. с нем. – М.: Наука, 1971.

[16] *Тацій, Р.М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння (Препр. №2-94) / Р.М. Тацій. – Львів: ІППММ АН України, 1994. – 56 с.

[17] *Стасюк, М.Ф.* Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами / М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 566. – С. 33–40.

[18] *Гохберг, И.Ц.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.

Власий Олеся Орестовна, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, Ивано-Франковск, Республика Украина, olesyav@ukr.net.

Мазуренко Виктор Владимирович, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, Ивано-Франковск, Республика Украина, mazvic@ukr.net.

Таций Роман Марьянович, doktor habilitovany, profesor, Politechnika Lubelska, Lublin, Poland, marta_stasiuk@yahoo.com.

УДК 517.988

Ю.М. Вувуникян

Квазиобращение нелинейных эволюционных операторов с обобщенными спектральными характеристиками

Для эволюционных операторов с обобщенными характеристиками кратности ν вводится понятие квазиобратного оператора степени r. Найдены достаточные условия существования у эволюционного оператора с обобщенными характеристиками квазиобратных операторов любой степени. Доказывается общая реккурентная формула, позволяющая по спектральным характеристикам исходного эволюционного оператора последовательно находить спектральные характеристики квазиобратного к нему эволюционного оператора.

1. Введение

В настоящей работе мы вводим понятие квазиобратного оператора и исследуем задачу построения квазиобратного оператора в терминах спектральных характеристик эволюционного оператора.

Пусть X — пространство бесконечно дифференцируемых финитных слева функций на числовой оси, ν — натуральное число.

Эволюционным оператором кратности ν называется оператор A, определяемый равенством

$$Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|}\,(a_\alpha * x^{\otimes \alpha}),$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам

$$\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_\nu),$$