МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів природничих спеціальностей заочної форми навчання

Затверджено на засіданні
статистики і кафедри вищої математики
Протокол №1 від 29.08.2013

м. Івано-Франківськ
2013 р.

Методичні вказівки призначені для студентів заочної форми навчання природничих спеціальностей.

Упорядник: Осипчук М.М.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри статистики і вищої математики, доцент Осипчук М.М.

Загальні зауваження

Самостійна робота над навчальним матеріалом є основною формою навчання студента-заочника. Студенту перш за все необхідно засвоїти відповідний теоретичний матеріал за підручниками згідно з теоретичними питаннями, приведеними на початку кожної контрольної роботи. Потім отримати навички в розв'язуванні задач. З метою полегшення цього процесу в методичці наведено зразки розв'язування типових задач. А вже після цього можна братися за виконання котрольної роботи.

Студент виконує завдання контрольної роботи свого варіанту, номер якого збігається з двома останніми цифрами номера залікової книжки. При виконанні та оформленні контрольної роботи потрібно строго дотримуватись вказаних нижче правил.

1. Кожна робота виконується в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита повинні бути чітко написані: прізвище (в називному відмінку), його ініціали, академічна група, навчальний номер (номер залікової книжки), назва дисципліни, номер контрольної роботи.

3. В роботу повинні бути включені всі задачі відповідного варіанту.

4. Перед розв'язком кожної задачі потрібно повністю переписати умову. [1]

5. Розв'язки задач потрібно розміщувати в порядку їх номерів, зберігаючи нумерацію завдань, вказану в методичних вказівках.

6. Розв'язки задач повинні містити детальні пояснення і мотивації всіх дій в ході розв'язку.

Робота, виконана без дотримання цих правил, не допускається до захисту і повертається студентові для переробки.

Номер кожного завдання має вигляд №задачі**.**№пункту в цій задачі. В наведеній нижче таблиці виписані номери пунктів в задачах для кожного варіанту. В кожній контрольній роботі слід виконати всі задачі, вибравши відповідні варіанту пункти. В деяких темах задач може бути менше, ніж наведено в таблиці.

[1] В багатьох задачах основна частина умови є спільною для всіх варіантів

Розподіл пунктів в задачах за варіантами

№ варіанту	Номери задач					
	1	2	3	4	5	6
	Номери пунктів					
00	1	1	1	1	1	1
01	2	2	2	2	2	2
02	3	3	3	3	3	3
03	4	4	4	4	4	4
04	5	5	5	5	5	5
05	6	6	6	6	6	6
06	7	7	7	7	7	7
07	8	8	8	8	8	8
08	9	9	9	9	9	9
09	10	10	10	10	10	10
10	11	11	11	11	11	11
11	12	12	12	12	12	12
12	13	13	13	13	13	13
13	14	14	14	14	14	14
14	15	15	15	15	15	15
15	16	16	16	16	16	16
16	17	17	17	17	17	17
17	18	18	18	18	18	18
18	19	19	19	19	19	19
19	20	20	20	20	20	20
20	21	21	21	21	21	21
21	22	22	22	22	22	22
22	23	23	23	23	23	23
23	24	24	24	24	24	24
24	25	25	25	25	25	25
25	26	26	26	26	26	26
26	27	27	27	27	27	27

27	28	28	28	28	28	28
28	29	29	29	29	29	29
29	30	30	30	30	30	30
30	1	2	3	4	5	6
31	2	3	4	5	6	7
32	3	4	5	6	7	8
33	4	5	6	7	8	9
34	5	6	7	8	9	10
35	6	7	8	9	10	11
36	7	8	9	10	11	12
37	8	9	10	11	12	13
38	9	10	11	12	13	14
39	10	11	12	13	14	15
40	11	12	13	14	15	16
41	12	13	14	15	16	17
42	13	14	15	16	17	18
43	14	15	16	17	18	19
44	15	16	17	18	19	20
45	16	17	18	19	20	21
46	17	18	19	20	21	22
47	18	19	20	21	22	23
48	19	20	21	22	23	24
49	20	21	22	23	24	25
50	21	22	23	24	25	26
51	22	23	24	25	26	27
52	23	24	25	26	27	28
53	24	25	26	27	28	29
54	25	26	27	28	29	30
55	26	27	28	29	30	1
56	27	28	29	30	1	2
57	28	29	30	1	2	3

58	29	30	1	2	3	4
59	30	1	2	3	4	5
60	1	3	5	7	9	11
61	2	4	6	8	10	12
62	3	5	7	9	11	13
63	4	6	8	10	12	14
64	5	7	9	11	13	15
65	6	8	10	12	14	16
66	7	9	11	13	15	17
67	8	10	12	14	16	18
68	9	11	13	15	17	19
69	10	12	14	16	18	20
70	11	13	15	17	19	21
71	12	14	16	18	20	22
72	13	15	17	19	21	23
73	14	16	18	20	22	24
74	15	17	19	21	23	25
75	16	18	20	22	24	26
76	17	19	21	23	25	27
77	18	20	22	24	26	28
78	19	21	23	25	27	29
79	20	22	24	26	28	30
80	21	23	25	27	29	1
81	22	24	26	28	30	2
82	23	25	27	29	1	3
83	24	26	28	30	2	4
84	25	27	29	1	3	5
85	26	28	30	2	4	6
86	27	29	1	3	5	7
87	28	30	2	4	6	8
88	29	1	3	5	7	9

89	30	2	4	6	8	10
90	1	4	7	10	13	16
91	2	5	8	11	14	17
92	3	6	9	12	15	19
93	4	7	10	13	16	19
94	5	8	11	14	17	20
95	6	9	12	15	18	21
96	7	10	13	16	19	22
97	8	11	14	17	20	23
98	9	12	15	18	21	24
99	10	13	16	19	22	25

Частина I

Розділ 1

Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. Лінійна алгебра.

1.1 Теоретичні питання.

Вектори. Лінійні операції над векторами та їх властивості. Проекція вектора на вісь. Прямокутна декартова система координат в просторі. Напрямні косинуси та довжина вектора.

Скалярний добуток двох векторів, його властивості. Кут між векторами, умова ортогональності двох векторів. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Умова колінеарності двох векторів. Змішаний добуток трьох векторів, його властивості. Умова компланарності трьох векторів. Геометричні та фізичні застосування скалярного, векторного та змішаного добутків векторів.

Рівняння лінії на площині. Різні форми рівнянь прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Перетворення координат (перенесення початку та поворот осей).

Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Полярні координати. Спіраль Архімеда.

Рівняння площини та прямої в просторі, різні форми рівнянь. Кути між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою та площиною. Відстань від точки до прямої та до площини. Відстань між двома прямими.

Поверхні. Циліндричні і конічні поверхні. Сфера. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Поверхні обертання.

Сферичні та циліндричні координати. Різні способи задання ліній та поверхонь в просторі.

Матриці та визначники. методи обчислення визначників n-го порядку. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць. Обернена матриця. Ранг матриці та його обчислення. Власні числа та власні вектори матриць.

Системи лінійних рівнянь. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь (Крамера, матричний, Жордана-Гаусса). Теорема Кронекера-Капеллі.

Лінійний простір. Евклідовий простір. Лінійний оператор. Матриця оператора. Власні числа та власні вектори матриці.

1.2 Приклади

Приклад 1. Скласти рівняння перпендикулярів, опущених з фокусів еліпса $15x^2 + 7y^2 = 210$ на асимптоту гіперболи $x^2 - 4y^2 = 36$ з додатнім кутовим коефіцієнтом. Зробити рисунок.

Розв'язок.

Рис. 1.1:

Запишемо рівняння еліпса і гіперболи (рис. 1.1) у вигляді

$$\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{30}=1, \quad \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Фокуси еліпса розташовані на осі Oy і, оскільки $c^2 = 30- -14 = 16$, мають координати $F_1(0;-4)$, $F_2(0;4)$.

Для заданої гіперболи рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm\frac{1}{2}x$. Асимптотою з додатнім кутовим коефіцієнтом є пряма $y = \frac{1}{2}x$. Кутовий коефіцієнт прямих, перепендикулярних до асимптоти $y = \frac{1}{2}x$, дорівнює -2.

Рівняння перпендикуляра, опущеного з фокуса $F_1(0;-4)$ на асимптоту $y = \frac{1}{2}x$ має вигляд

$$y+4=-2x \quad \text{або} \quad 2x+y+4=0.$$

Для перпендикуляра, опущеного з фокуса $F_2(0;4)$ на асимптоту $y = \frac{1}{2}x$ матимемо

$$y-4=-2x \quad \text{або} \quad 2x+y-4=0.$$

Приклад 2. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(-2;0;-1)$; $B(0;0;4)$; $C(1;3;2)$; $D(3;2;7)$. Знайти: 1)довжину ребра AB; 2) кут між ребрами AB і AD; 3) рівняння площини ABC та кут між нею і ребром AD; 4) площу грані ABC; 5) об'єм піраміди; 6) рівняння і довжину висоти, опущеної з вершини D на грань ABC; 7) рівняння площини, яка проходить через висоту піраміди, опущеної з вершини D на грань ABC і вершину A піраміди.

Розв'язок. Знайдемо коодинати векторів $\overrightarrow{AB} = (2;0;5)$; $\overrightarrow{AC} = (3;3;3)$; $\overrightarrow{AD} = (5;2;8)$. Тоді

1)$AB = \sqrt{2^2+0^2+5^2} = \sqrt{29}$;

$$2)\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{2\cdot5+0\cdot2+5\cdot8}{\sqrt{2^2+0^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+8^2}} =$$
$$= \frac{46}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{93}} \approx 0,9628$$

і кут між ребрами AB і AD приблизно дорівнює $15°41'$;

3) Рівняння площини ABC запишемо у вигляді

$$\begin{vmatrix} cccx+2 & y & z+1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

або, розкривши визначник $5x-3y-2z+8=0$.

Звідси знаходимо координати вектора нормалі площини $\overrightarrow{n}=(5;-3;-2)$ та синус кута ϕ між ребром AD і гранню ABC

$$\sin\phi=\frac{|5\cdot 5+2\cdot(-3)+8\cdot(-2)|}{\sqrt{5^2+2^2+8^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{93}\cdot\sqrt{38}}\approx 0,0505,$$

$$\phi=2°54'$$

4)Площа грані дорівнює половині модуля векторного добутку

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&0&5\\3&3&3\end{vmatrix}=-15\overrightarrow{i}+9\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k};\text{тобто}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+9^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{342}\approx 9,2466(\text{кв.од.})$$

5) Об'єм піраміди дорівнює шостій частині модуля змішаного добутку трьох векторів, тобто

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2&0&5\\3&3&3\\5&2&8\end{vmatrix}=-9$$

$$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\cdot 9=1,5(\text{куб.од.})$$

6) Рівняння висоти, опущеної з вершини D

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-7}{-2}.$$

Довжина цієї висоти дорівнює відстані від точки D до площини ABC

$$\frac{|5\cdot 3+(-3)\cdot 2+(-2)\cdot 7+8|}{\sqrt{5^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{38}}\approx 0,4867.$$

7) Знайдемо вектор нормалі шуканої площини

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\5&-3&-2\\5&2&8\end{vmatrix}=-20\overrightarrow{i}-50\overrightarrow{j}+25\overrightarrow{k};$$

Тоді $-4(x+2)-10y+5(z+1)=0$ або $-4x-10y+5z-3=0$ — рівняння шуканої площині.

Приклад 3. Довести сумісність системи рівнянь і знайти розв'язок в пункті а) методом матричного числення, в пункті б) методом Жордана-Гаусса.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c}2x_1+3x_2-x_3=8;\\x_1-x_2+2x_3=-1;\\2x_1+3x_2+x_3=6.\end{array}\right.\quad\text{б)}\left\{\begin{array}{c}x_1-2x_2+x_4=-3;\\3x_1-x_2-2x_3=1;\\2x_1+x_2-2x_3-x_4=4;\\x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7;\end{array}\right.$$

Розв'язок.

а) Запишемо матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. В матричній формі задана система рівнянь запишеться $AX = B$. Матриця A невироджена, оскільки $detA = -10 \neq 0$, і, отже існує обернена. Система рівнянь має єдиний розв'зок $X = A^{-1}B$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Тоді обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

і розв'язок системи рівнянь

$$X = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

б) Проведемо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці, одержимо

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Перші два рядки останньої матриці є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2, \end{cases}$$

що еквівалентна заданій системі. Вважаючи x_1, x_2 базисними невідомими, а x_3, x_4 вільними, одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Лінійний оператор в деякому базисі заданий матрицею $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти власні числа і власні вектори цього лінійного оператора.

Розв'язок.

Характеристичне рівняння

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ — власні числа оператора. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$. При $\lambda = 1$ система $(A - \lambda E)X = 0$ приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна система розв'язків

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а загальний розв'язок

$$X^{\lambda_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де c_1 і c_2 не дорівнюють нулю одночасно.

Аналогічно розглядається випадок $\lambda_2 = 3$. При цьому одержимо

$$X^{\lambda_2} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \neq 0.$$

1.3 Завдання теми 1

Задача №1.

1.1. Задані рівняння двох сторін трикутника $2x + y - \ -1 = 0$ і $4x - y - 11 = 0$ і точка $P(1; 2)$ перетину третьої сторони з висотою, опущеною на неї. Скласти рівняння третьої сторони. Зробити рисунок.

1.2. Задані рівняння сторони трикутника $5x-3y+ +4=0$ і рівняння двох його висот $4x-3y+2=0$ і $7x+2y- -13=0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника. Зробити рисунок.
1.3. Точки $A(3;-1)$ і $B(4;0)$ є вершинами трикутника, а точка $D(2;1)$ — точкою перетину його медіан. Скласти рівняння висоти, опущеної з третьої вершини. Зробити рисунок.
1.4. Задані рівняння двох сторін паралелограма $x-y- -1=0$, $x-2y-1=0$ і точка $P(2;-2)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Зробити рисунок.
1.5. Скласти рівняння сторони трикутника, якщо відомо, що її серединою є точка $P(-1;-1)$, а дві інші сторони трикутника задаються рівняннями $5x-2y-5=0$ і $3x-2y-7=0$. Зробити рисунок.
1.6. Задані рівняння двох сторін ромба $5x-3y+14=0$, $5x-3y-20=0$ і його діагональ $x-4y-4=0$. Скласти рівняння двох інших сторін ромба. Зробити рисунок.
1.7. На прямій $3x+4y-5=0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(-3;-2), B(3;0)$. Зробити рисунок.
1.8. Знайти точку, симетричну точці $A(5;2)$ відносно прямої $x+3y-1=0$. Зробити рисунок.
1.9. Задані дві протилежні вершини ромба $A(4;5)$ та $C(2;-1)$ і одна з його сторін $x-y+1=0$. Скласти рівняння інших сторін ромба. Зробити рисунок.
1.10. Задані рівняння гіпотенузи $3x-y+7=0$ і координати вершини $C(3;-2)$ прямого кута. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника. Зробити рисунок.
1.11. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $C(0;-4)$ і від прямої $y+2=0$. Зробити рисунок.
1.12. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума квадратів відстаней її точок $A(-4;1)$ і $B(6;3)$ дорівнює 102. Зробити рисунок.
1.13. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $F(8;0)$ в два рази більша, ніж від прямої $x-2=0$. Зробити рисунок.
1.14. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума квадратів її відстаней від початку координат і від точки $A(0;-4)$ дорівнює 16. Зробити рисунок.
1.15. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої є центром кола, що дотикається до осі Ox і проходить через точку $P(3;4)$. Зробити рисунок.
1.16. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точок $A(-4;3)$ і $B(1;-2)$. Зробити рисунок.
1.17. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $A(0;2)$ в два рази менша, ніж від точки $B(0;6)$. Зробити рисунок.
1.18. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від прямої $x+6=0$ і від початку координат. Зробити рисунок.
1.19. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $F(0;4)$ в три рази менша, ніж від прямої $y-36=0$. Зробити рисунок.
1.20. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $F(0;-1)$ в три рази більша, ніж від прямої $y+9=0$. Зробити рисунок.
1.21. Скласти рівняння гіперболи і її асимптот, якщо гіпербола симетрична відносно осей координат, один з її фокусів співпадає з центром кола $x^2+y^2-20y+19=0$, а ексцентриситет дорівнює 1.25. Зробити рисунок.
1.22. Фокуси гіперболи розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат. Гіпербола проходить через точку $M_0(5;3)$, а її уявна піввісь дорівнює 6. Знайти ексценриситет гіперболи і скласти рівняння її асимптот. Зробити рисунок.
1.23. Скласти рівняння параболи і її директриси, якщо відомо, що парабола проходить через точки перетину прямої $y=2x$ з колом $x^2+y^2-10y=0$, і вісь Ox є віссю симетрії параболи. Зробити рисунок.

1.24. Знайти відстань від точки гіперболи $9x^2 - 16y^2 = = 144$, ордината якої дорівнює $1.5\sqrt{5}$, а абсциса від'ємна, до фокусів і асимптот гіперболи. Зробити рисунок.
1.25. Скласти рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$ і має центр в вершині еліпса, ордината якої від'ємна. Знайти точки перетину цього кола з віссю Oy. Зробити рисунок.
1.26. Фокуси еліпса, який проходить через точки
$A(\sqrt{3}; 3/2)$ і $B(0; \sqrt{3})$, розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат. Знайти відстань фокусів еліпса від фокуса параболи $x^2 = 16y$. Зробити рисунок.
1.27. Скласти рівняння еліпса, симетрично розташованого відносно осей координат, якщо один з його фокусів співпадає з фокусом параболи $x^2 = -12y$, а відстані однієї з його точок до його фокусів дорівнюють 4 і 6. Зробити рисунок.
1.28. Точка P ділить відрізок між фокусами гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$, який має початок в фокусі з від'ємною абсцисою, в відношенні 1:4. Скласти рівняння перпендикулярів, опущених з точки P на асимптоти гіперболи. Зробити рисунок.
1.29. Скласти рівняння кола, яке дотикається до директриси параболи $x^2 = 16y$ і має центр в фокусі цієї параболи. Зробити рисунок.
1.30. Через фокус параболи $y^2 = 8x$ і через ту її точку, абсциса якої дорівнює 0,5, а ордината додатня, проведена пряма. Обчислити відстань від центра кола $x^2 + y^2 + 6x + +4y - 3 = 0$ до цієї прямої. Зробити рисунок.

Задача №2.

Задані координати вершин піраміди $ABCD$. Знайти: 1) довжину ребра AB; 2) кут між ребрами AB і AD;
3) рівняння площини ABC та кут між нею і ребром AD; 4) площу грані ABC; 5) об'єм піраміди; 6) рівняння і довжину висоти, опущеної з вершини D на грань ABC; 7) рівняння площини, яка проходить через висоту піраміди, опущеної з вершини D на грань ABC і вершину A піраміди.

2.1.
$$A(3; 1; 4), \quad B(-1; 6; 1), \quad C(-1; 1; 6), \quad D(0; 4; -1).$$

2.2.
$$A(3; 3; 9), \quad B(6; 9; 1), \quad C(1; 7; 3), \quad D(8; 5; 8).$$

2.3.
$$A(3; 5; 4), \quad B(5; 8; 3), \quad C(1; 9; 9), \quad D(6; 4; 8).$$

2.4.
$$A(2; 4; 3), \quad B(7; 6; 3), \quad C(4; 9; 3), \quad D(3; 6; 7).$$

2.5.
$$A(9; 5; 5), \quad B(-3; 7; 1), \quad C(5; 7; 8), \quad D(6; 9; 2).$$

2.6.
$$A(0; 7; 1), \quad B(4; 1; 5), \quad C(4; 6; 3), \quad D(3; 9; 8).$$

2.7.
$$A(5; 5; 4), \quad B(3; 8; 4), \quad C(3; 5; 10), \quad D(5; 8; 2).$$

2.8.
$$A(6; 1; 1), \quad B(4; 6; 6), \quad C(4; 2; 0), \quad D(1; 2; 6).$$

2.9.
$$A(7; 5; 3), \quad B(9; 4; 4), \quad C(4; 5; 7), \quad D(7; 9; 6).$$

2.10.
$$A(6;6;2),\quad B(5;4;7),\quad C(2;4;7),\quad D(7;3;0).$$

2.11.
$$A(3;2;1),\quad B(2;-1;8),\quad C(2;-1;2),\quad D(6;-1;6).$$

2.12.
$$A(-1;3;2),\quad B(-8;5;0),\quad C(-3;7;-5),\quad D(-4;1;3).$$

2.13.
$$A(2;0;-1),\quad B(-2;-11;5),\quad C(1;-4;-1),\quad D(-2;1;-4).$$

2.14.
$$A(4;-2;3),\quad B(10;-3;-2),\quad C(8;-6;3),\quad D(5;-6;0).$$

2.15.
$$A(2;-5;2),\quad B(-7;2;4),\quad C(6;-1;3),\quad D(0;1;5).$$

2.16.
$$A(0;1;1),\quad B(3;4;4),\quad C(-3;9;3),\quad D(0;5;4).$$

2.17.
$$A(-2;0;4),\quad B(3;-3;7),\quad C(-3;-5;11),\quad D(-2;-7;15).$$

2.18.
$$A(5;-1;3),\quad B(8;8;-3),\quad C(2;0;2),\quad D(4;1;0).$$

2.19.
$$A(3;2;-2),\quad B(1;3;1),\quad C(6;2;0),\quad D(0;2;2).$$

2.20.
$$A(3;-2;3),\quad B(0;-6;-1),\quad C(5;-9;-8),\quad D(3;-8;-5).$$

2.21.
$$A(4;2;5),\quad B(0;7;1),\quad C(0;2;7),\quad D(1;5;0).$$

2.22.
$$A(4;4;10),\quad B(7;10;2),\quad C(2;8;4),\quad D(9;6;9).$$

2.23.
$$A(4;6;5),\quad B(6;9;4),\quad C(2;10;10),\quad D(7;5;9).$$

2.24.
$$A(3;5;4),\quad B(8;7;4),\quad C(5;10;4),\quad D(4;7;8).$$

2.25.
$$A(10;6;6),\quad B(-2;8;2),\quad C(6;8;9),\quad D(7;10;3).$$

2.26.
$$A(1;8;2),\quad B(5;2;6),\quad C(5;7;4),\quad D(4;10;9).$$

2.27.
$$A(6;6;5),\quad B(4;9;5),\quad C(4;6;11),\quad D(6;9;3).$$

2.28.
$$A(7;2;2),\quad B(5;7;7),\quad C(5;3;1),\quad D(2;3;7).$$

2.29.

$$A(8;6;4),\quad B(10;5;5),\quad C(5;6;8),\quad D(8;10;7).$$

2.30.

$$A(7;7;3),\quad B(6;5;8),\quad C(3;5;8),\quad D(8;4;1).$$

Задача №3.

Довести сумісність системи рівнянь і знайти розв'язок в пункті а) методом матричного числення, в пункті б) методом Жордана-Гаусса.

3.1.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 5x_1+9x_2-x_3=24;\\ x_1-x_2+4x_3=-12;\\ 2x_1+x_2-x_3=3. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} x_1+2x_3-x_4=0;\\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3;\\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3;\\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3. \end{array}\right.$$

3.2.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 2x_1-2x_2+x_3=1;\\ 3x_1+5x_2-x_3=10;\\ x_1+2x_2+2x_3=11. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} 3x_1-2x_2+x_3=-1;\\ 2x_1+x_2-x_3-4x_4=-4;\\ 3x_1-x_2+2x_3=1;\\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=1. \end{array}\right.$$

3.3.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} x_1-x_2+x_3=7;\\ 2x_1+2x_2-5x_3=-31;\\ x_1-3x_2+x_3=5. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2-3x_3=-1;\\ x_1-3x_2-3x_3+4x_4=-1;\\ 2x_1+3x_2-6x_3-x_4=-2;\\ 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-2. \end{array}\right.$$

3.4.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 4x_1-x_2+7x_3=13;\\ 2x_1+3x_2-3x_3=11;\\ 3x_1+2x_2-x_3=11. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} 3x_1-2x_2-5x_3+3x_4=-4;\\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=4;\\ x_1-x_2-2x_3+x_4=-2;\\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=2. \end{array}\right.$$

3.5.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 7x_1-8x_2+2x_3=15;\\ x_1+2x_2-x_3=9;\\ 2x_1-x_2+3x_3=13. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} 3x_1-x_2-5x_3+5x_4=1;\\ 2x_1+x_2-5x_3=-1;\\ x_1-2x_2+5x_4=2;\\ x_1+x_2-3x_3-x_4=-1. \end{array}\right.$$

3.6.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 2x_1-x_2+x_3=4;\\ 3x_1+5x_2-7x_3=-9;\\ x_1-x_2+4x_3=6. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3;\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=-3;\\ x_1+3x_2-x_4=0;\\ 3x_1+4x_2+2x_3=6. \end{array}\right.$$

3.7.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{c} 2x_1+x_2+7x_3=31;\\ x_1-x_2-x_3=-1;\\ 3x_1+5x_2-7x_3=1. \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{c} x_1+2x_2-3x_3-6x_4=4;\\ x_1-4x_2-3x_3=-8;\\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-4;\\ 2x_1-5x_2-6x_3-3x_4=-10. \end{array}\right.$$

3.8.

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -19; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

3.9.

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

3.10.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

3.11.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 = -13; \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -2; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

3.12.

а) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

3.13.

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

3.14.

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 18; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

3.15.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 19; \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 7. \end{cases}$

3.16.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 17; \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.17.

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -16; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 23; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

3.18.

а) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

3.19.

а) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 19; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

3.20.

а) $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 17; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

3.21.

а) $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = -4; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

3.22.

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -7; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1; \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3.23.

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 11x_1 - x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

3.24.

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1; \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

3.25.

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8; \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

3.26.

$$\text{а)}\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2; \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

3.27.

$$\text{а)}\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -9. \end{cases}$$

3.28.

$$\text{а)}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

3.29.

$$\text{а)}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4; \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3.30.

$$\text{а)}\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Задача №4.

Лінійний оператор в деякому базисі заданий матрицею. Знайти власні числа і власні вектори цього лінійного оператора.

4.1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **4.5.** $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. **4.6.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **4.8.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **4.9.** $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. **4.11.** $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **4.12.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **4.14.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.15.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **4.17.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. **4.18.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.19. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. **4.20.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **4.21.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4.22. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **4.23.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **4.24.** $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.25. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.26.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. **4.27.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4.28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **4.29.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **4.30.** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розділ 2

Вступ в математичний аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної

2.1 Теоретичні питання

Функція. Область її визначення. Способи задання функції. Основні елементарні функції та їх графіки. Побудова графіків функцій з допомогою перетворення графіків елементарних функцій.

Множина дійсних чисел. Числові послідовності. Границі. Правила обчислення границь. Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Існування границі монотонної обмеженої послідовності. Число e. Натуральні логарифми.

Границя функції в точці. Односторонні границі. Границя функції на нескінченності. Основні теореми про границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Порівняння нескінченно малих. Застосування нескінченно малих при обчисленні границь.

Неперервність функції. Неперервність основних елементарних функцій. Точки розриву та їх класифікація. Властивості неперервних в точці функцій. Неперервність суми, добутку та частки. Границя та неперервність складної функції. Властивості функцій неперервних на відрізку: обмеженість, існування найбільшого та найменшого значень, існування проміжних значень.

Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Основні правила обчислення похідних. Похідні складної, оберненої та параметрично заданої функції. Похідні елементарних функцій (таблиця похідних).

Диференційовність функції. Диференціал функції та його геометричний і фізичний зміст. Інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Лейбніца.

Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя. Формула Тейлора. Розклад за формулою Тейлора функцій: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Застосування формули Тейлора.

Дослідження монотонності функцій за допомогою похідних; необхідні та достатні умови. Екстремум функцій. Необхідна умова, достатні умови. Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Досліджeня опуклості графіка функції. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Побудова графіків функцій.

2.2 Приклади

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$y = \lg(4 - 3x - x^2).$$

Розв'язок.

Логарифмічна функція визначена, якщо $4-3x-x^2 > 0$. Корені квадратного тричлена: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Записана вище нерівність рівносильна нерівності $-(x+4)(x-1) > 0$, що можливо при $-4 < x < 1$. Область визначення заданої функції — інтервал $(-4; 1)$.

Приклад 2. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^3 - 7x}; \quad \text{б)} \lim_{x\to -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8};$$

$$\text{в)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}; \quad \text{г)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}; \quad \text{д)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{-x}.$$

Розв'язок.

$$\text{а)} \lim_{x\to\infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^3 - 7x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(7 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^4})}{x^4(6 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^3})} = \frac{7}{6}.$$

$$\text{б)} \lim_{x\to -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10}.$$

$$\text{в)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} == \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{г)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{д)} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{-x} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{2x-3} - 1\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x - 2x + 3}{2x-3}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{2x-3}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right]^{\frac{-3x}{2x-3}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

Приклад 3. Дослідити задану функцію на неперервність і побудувати її графік

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0; \\ (x-1)^2, & 0 < x \le 2; \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$$

Рис. 2.1:

Розв'язок.

Функція $f(x)$ визначена та неперервна на інтервалах $(-\infty, 0), (0, 2)$ і $(2, +\infty)$, де вона задана неперервними елементарними функціями. Отже, розрив можливий тільки в точках $x_1 = 0, x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ маємо:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x^2 = 0, \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x-1)^2 = 1,$$

$$f(0) = x^2|_{x=0} = 0,$$

тобто функція $f(x)$ в точці $x_1 = 0$ має розрив першого роду.

Для точки $x_2 = 2$ знаходимо

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x-1)^2 = 1, \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (5-x) = 3,$$

$$f(2) = (x-1)^2|_{x=2} = 1,$$

тобто в точці $x_2 = 2$ функція має розрив першого роду.

Графік даної функції зображено на рис 2.1.

Приклад 4. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ для функцій, заданих в пунктах а), б), в), і похідну $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функції, заданої в пункті г).

$$\text{а)} y = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}; \quad \text{б)} y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$

$$\text{в)} \quad x^2y - y^2 = 6x; \quad \text{г)} \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

Розв'язок.

$$\text{а)} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} - (1+x)\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$$

б) Прологарфмуємо задану функцію $\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ і продиференціюємо одержане рівняння

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x},$$

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right).$$

в) Диференціюючи по x тотожність $x^2y(x)-y^2(x)=6x$, одержимо $2xy(x)+x^2y(x)-2y(x)y'(x)=6$, тобто

$$y'=\frac{6-2xy}{x^2-2y}.$$

г) Функція $x=\cos t$ на вказаному проміжку строго монотонно спадає. Тому існує однозначна обернена функція $t=t(x)$.

Далі, $x'_t=-\sin t,\quad y'_t=\cos t$ і x'_t перетворюється в нуль тільки в точках вигляду $t=\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.Тому, якщо $t\neq\pi k$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t;$$

$$y''_{xx}=(-\operatorname{ctg} t)'_x=(-\operatorname{ctg} t)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{-\sin t}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Приклад 5. Знайти границі функцій за правилом Лопіталя:

$$\text{а) }\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x},\quad \text{б) }\lim_{x\to1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2},$$

$$\text{в) }\lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Розв'язок.

а)

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+15x^2}\cdot5}=\frac{2}{5}.$$

б)

$$\lim_{x\to1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.$$

в) Маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$. Введемо позначення $y=\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}$. Тоді $\ln y=\operatorname{ctg}^2 x\ln\cos x$ є невизначеністю типу $\{\infty\cdot0\}$. Представимо вираз $\ln y$ у вигляді $\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$, знайдемо за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2\operatorname{tg}x\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos^2 x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Приклад 6. Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік $y=\frac{x^2-5}{x-3}$

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x=1$, при якому перетворюється в нуль знаменник.

2. Оскільки рівняння $x^2-5=0$ має корені $x=-\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$, то графік функції перетинає з вісь Ox в точках $A(-\sqrt{5};0)$ та $B(\sqrt{5};0)$. Крім того графік перетинає вісь Oy в точці $C(0;\frac{5}{3})$.

3. Дослідимо існування асимптот. Оскільки $y\to-\infty$ при $x\to3-$, а $y\to+\infty$ при $x\to3+$, то пряма $x=3$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

Рис. 2.2:

Із існування границь

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-5/x^2}{1-3/x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y-kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-5}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{x-3} = 3$$

випливає, що графік функції має похилу асимптоту (і ліву, і праву) $y = x+3$.

4. Знайдемо похідні

$$y' = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}, \quad y'' = \frac{8}{(x-3)^3}$$

та критичні точки

$$\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Складемо таблицю зміни знаків першої та другої похідних в залежності від зміни аргументу, включивши в неї критичні точки:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;5)$	5	$(5;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не існує	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	не існує	$\searrow$	10	$\nearrow$
y''	$-$			не існує	$+$		
y	$\bigcap$			не існує	$\bigcup$		

Графік функції зображено на рис. 2.2

2.3 Завдання теми 2

Задача №5.

Знайти області визначення функцій

5.1.

$$\text{а)} y = \sqrt{2-x-x^2}; \quad \text{б)} y = \arcsin\sqrt{2x}.$$

5.2.

$$\text{а)} y = \sqrt{16-x^2}; \quad \text{б)} y = \sqrt{\sin x}.$$

5.3.

$$\text{а)}y=\sqrt{5x^2-3x-2};\quad \text{б)}y=\arcsin\frac{1-x}{2}.$$

5.4.

$$\text{а)}y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}};\quad \text{б)}y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}.$$

5.5.

$$\text{а)}y=\sqrt{3x^2+2x-1}-\sqrt[3]{3-x};\quad \text{б)}y=\ln\frac{5-x}{x-3}.$$

5.6.

$$\text{а)}y=\frac{x-5}{x^2+x-2};\quad \text{б)}y=\frac{x-1}{\lg(x-2)}.$$

5.7.

$$\text{а)}y=\sqrt{6-x-2x^2};\quad \text{б)}y=\arccos\frac{x-2}{3}.$$

5.8.

$$\text{а)}y=\lg(4-x^2);\quad \text{б)}y=\arccos\sqrt{3-2x-x^2}.$$

5.9.

$$\text{а)}y=\sqrt{x^2-9};\quad \text{б)}y=\sqrt{-\sin^2\pi x}.$$

5.10.

$$\text{а)}y=\sqrt{x^2-4x+3};\quad \text{б)}y=\arcsin(2x-5).$$

5.11.

$$\text{а)}y=\lg\sin x;\quad \text{б)}y=\arccos(x+2).$$

5.12.

$$\text{а)}y=\sqrt{x^2-4};\quad \text{б)}y=\sqrt{\cos x}.$$

5.13.

$$\text{а)}y=\sqrt{1-\lg x};\quad \text{б)}y=\arcsin(x-2).$$

5.14.

$$\text{а)}y=\sqrt{\frac{1}{8}-2^{x^2-4x}};\quad \text{б)}y=\lg\sin x.$$

5.15.

$$\text{а)}y=\sqrt{4-3x-x^2};\quad \text{б)}y=\lg\cos(x/2).$$

5.16.

$$\text{а)}y=\sqrt{-x}+\frac{1}{x+4}+\lg(x^2-x-6);\quad \text{б)}y=\arcsin\sqrt{2x}.$$

5.17.

$$\text{а)}y=\frac{\lg x}{\sqrt{x^2-2x-3}};\quad \text{б)}y=\arccos(2x-5).$$

5.18.

$$\text{а)}y=\sqrt{\lg(x+1)};\quad \text{б)}y=\arccos(3x+2).$$

5.19.

$$\text{а)}y=\sqrt{4x-x^2}-\lg(x-2);\quad \text{б)}y=\arcsin\frac{x+1}{x}.$$

5.20.

$$\text{а)}y=\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x};\quad \text{б)}y=\lg\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

5.21.

$$\text{а)}y=\sqrt{4x-x^2}+\log_3(x^2-1);\quad \text{б)}y=\arcsin(3x-1).$$

5.22.

$$\text{а)}y=\frac{\log_2(12+x-x^2)}{x(x-2)};\quad \text{б)}y=\sqrt{\sin^2\pi x}.$$

5.23.

$$\text{а)}y=\frac{x^2+x-6}{x^2-4};\quad \text{б)}y=\lg\cos\pi x.$$

5.24.

$$\text{а)}y=\sqrt{x^2-6x+5};\quad \text{б)}y=\arccos\frac{2x}{1+x}.$$

5.25.

$$\text{а)}y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}};\quad \text{б)}y=\lg\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

5.26.

$$\text{а)}y=\sqrt{1-|x|};\quad \text{б)}y=\lg(2^{3x}-4).$$

5.27.

$$\text{а)}y=\lg(-x^2-5x+6);\quad \text{б)}y=\arccos\frac{1-2x}{4}.$$

5.28.

$$\text{а)}y=\ln(2\cos x-1);\quad \text{б)}y=\sqrt{\sin x}.$$

5.29.

$$\text{а)}y=\sqrt{1-x}+\frac{1}{x+5};\quad \text{б)}y=\ln(3^x-27).$$

5.30.

$$\text{а)}y=\frac{1}{1-x^2};\quad \text{б)}y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}.$$

Задача №6.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

6.1.

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x};\quad \text{б)}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20};$$

$$\text{в)}\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}};\quad \text{г)}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2};$$

$$\text{д)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}.$$

6.2.

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5};\quad \text{б)}\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2};$$

$$\text{в)}\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};\quad \text{г)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}.$$

6.3.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}.$$

6.4.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^3-8};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{2\sin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}.$$

6.5.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1} \quad \text{б) } \lim_{x\to -1}\frac{x^4-x^2+x+1}{x^3+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}.$$

6.6.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^4-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}.$$

6.7.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 1/3}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+3x}.$$

6.8.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}; \quad \text{б) } \lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\pi-2x};$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}.$$

6.9.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x+5}\quad \text{б)}\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2};$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}.$$

6.10.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}\quad \text{б)}\ \lim_{x\to -4}\frac{2x^2+7x-4}{x^3+64};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x};$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}.$$

6.11.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}\right);$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}.$$

6.12.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2};$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}.$$

6.13.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}};\quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x};$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}.$$

6.14.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-9x+10};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}.$$

6.15.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}; \quad \text{б) } \lim_{x\to -4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}.$$

6.16.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}.$$

6.17.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-\sin 3x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}.$$

6.18.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}; \quad \text{г) } \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\pi-4x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}.$$

6.19.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-5x-12}{x^2-5x+6};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}.$$

6.20.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to-5}\frac{x^2-x-30}{x^3+125};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right);$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}.$$

6.21.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to4}\frac{x^2+3x-28}{x^3-64};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}; \quad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}.$$

6.22.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}; \quad \text{б) } \lim_{x\to1/2}\frac{8x^3-1}{x^2-1/4};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}; \quad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}.$$

6.23.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}; \quad \text{б) } \lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}; \quad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}.$$

6.24.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to-2}\frac{3x^2+11x+10}{x^2-5x-14};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}; \quad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}.$$

6.25.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}; \quad \text{б) } \lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{3x^2+x-10};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x};\quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}.$$

6.26.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5};\quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-4}{4x^2-5x+1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2};\quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}.$$

6.27.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8};\quad \text{б) } \lim_{x\to 6}\frac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64};\quad \text{г) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}.$$

6.28.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x+1}{2+2x-x^3};\quad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{\sqrt{8+x}-3};\quad \text{г) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi/2-x)\operatorname{tg}x;$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}.$$

6.29.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2};\quad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x};\quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin x+\sin 7x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}.$$

6.30.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5};\quad \text{б) } \lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{7x^2-27x-4};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8};\quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}.$$

Задача №7.

Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

7.1.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$$

7.2.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x < 2, \\ -x+4, & x \ge 2. \end{cases}$$

7.3.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1, \\ x^2+1, & -1 < x \le 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

7.4.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$$

7.5.

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \le -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$$

7.6.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

7.7.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1, \\ 2x, & 1 < x \le 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

7.8.

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 4, \\ 3-x, & x > 4. \end{cases}$$

7.9.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

7.10.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$$

7.11.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

7.12.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

7.13.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

7.14.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

7.15.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2; \\ x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

7.16.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

7.17.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

7.18.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

7.19.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

7.20.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq -2, \\ x^2, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

7.21.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

7.22.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x + 6, & x \geq 3. \end{cases}$$

7.23.
$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x>2.\end{cases}$$

7.24.
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x>3.\end{cases}$$

7.25.
$$f(x)=\begin{cases} x, & x<-2,\\ -x+1, & -2\le x\le 1,\\ x^2-1, & x>.1\end{cases}$$

7.26.
$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ -x^2+4, & 0<x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$$

7.27.
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$$

7.28.
$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$$

7.29.
$$f(x)=\begin{cases} 3, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$$

7.30.
$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 2,\\ x+4, & x>2.\end{cases}$$

Задача №8.

8.1.

а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=\cos 2x\sin^2 x$;

в) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)$; г) $y=x^{\sin x^3}$;

д) $\cos(xy)-3x=0$; е) $\begin{cases} x=2\cos^2 t,\\ y=3\sin^2 t.\end{cases}$

8.2.

а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; б) $y=\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x-2x$;

в) $y=5^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$; г)$y=\left(x^4+5\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

$$\text{д)}\quad e^{xy} - x^2 + y^3 = 0; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$$

8.3.

$$\text{а)}\quad y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}; \qquad \text{б)}\quad y = x\left(\sin\ln x - \cos\ln x\right);$$

$$\text{в)}\quad y = 2^{\cos^2 3x}; \qquad \text{г)}\quad y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x};$$

$$\text{д)}\quad y^2 = x\sin y; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = 1 + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$$

8.4.

$$\text{а)}\quad y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}; \qquad \text{б)}\quad y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x};$$

$$\text{в)}\quad y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}; \qquad \text{г)} y = \left(x + x^2\right)^x;$$

$$\text{д)}\quad x\operatorname{tg} y - x^2 + y^2 = 4; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$$

8.5.

$$\text{а)}\quad y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \qquad \text{б)}\quad y = \frac{e^{x^3}}{1+x^3};$$

$$\text{в)}\quad y = \sqrt{1+\ln^2 x}; \qquad \text{г)}\quad y = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin x};$$

$$\text{д)}\quad \ln y + \frac{y}{x} = 2; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$$

8.6.

$$\text{а)}\quad y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; \qquad \text{б)}\quad y = 3^{x\cos^3 x};$$

$$\text{в)}\quad y = \operatorname{tg}^2\left(x^3+1\right); \qquad \text{г)}\quad y = (\ln(x+7))^x;$$

$$\text{д)}\quad x\sin 2y - y\cos 2x = 10; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$$

8.7.

$$\text{а)}\quad y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}; \qquad \text{б)}\quad y = e^{\cos x}\sin^2 x;$$

$$\text{в)}\quad y = (1+\ln\sin 2x)^2; \qquad \text{г)}\quad y = \left(x^2+1\right)^{\cos x};$$

$$\text{д)}\quad x - y = e^{x+y}; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$$

8.8.

$$\text{а)}\quad y = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}; \qquad \text{б)}\quad y = (9x^2+1)\operatorname{arcctg} 3x + 3x;$$

$$\text{в)}\quad y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}); \qquad \text{г)}\quad y = (x+3)^{\sin\sqrt{x}};$$

$$\text{д)}\quad \ln\frac{x}{y} - x + 2y = 0; \qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$$

8.9.

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$; б) $y = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

в) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$; г) $y = (\sin x)^{\ln x}$;

д) $y = x + x\sin y$; е) $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t\ln t. \end{cases}$

8.10.

а) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; б) $y = x\ln^2 x$;

в) $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right)$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $y = x + \operatorname{arctg} y$; е) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

8.11.

а) $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sin^3 5x\cos^5 3x$;

в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

д) $y^2 - x = \cos y$; е) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

8.12.

а) $y = \sqrt[4]{x + \sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$; г) $y = (x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$;

д) $y = e^y + 4x$; е) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

8.13.

а) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = x^2\sin^3 x$;

в) $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 1\right)$; г) $y = x^{3^x}\cdot 2^x$;

д) $4\sin^2(x+y) = x$; е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

8.14.

а) $y = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$; б) $y = x\sin x^2$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x$; г) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

д) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$; е) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

8.15.

а) $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$; б) $y = \dfrac{2\sin x}{1 + \cos x}$;

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\,\mathrm{arctg}\,e^x$; г) $y=(\sin x)^{5e^x}$;

д) $xy-6=\cos y$; е) $\begin{cases} x=3(\sin t-t\cos t),\\ y=3(\cos t+t\sin t).\end{cases}$

8.16.

а) $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{x}{\cos^2 x}$;

в) $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$; г) $y=x^{e^{e^x}}x^9$;

д) $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x=\sin 2t,\\ y=\cos^2 t.\end{cases}$

8.17.

а) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$; б) $y=\cos 2x-2\sin^2 x$;

в) $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$; г) $y=(x^3+4)^{\mathrm{tg}\,x}$;

д) $x^2y^2+x=5y$; е) $\begin{cases} x=e^{3t},\\ y=e^{-3t}.\end{cases}$.

8.18.

а) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=(x^3+2)e^{4x+3}$;

в) $y=\sqrt{x}-(1+x)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; г) $y=(\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

д) $\sin y=xy^2+5$; е) $\begin{cases} x=\frac{\ln t}{t},\\ y=t^2\ln t.\end{cases}$

8.19.

а) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{12x^{12}}$; б) $y=e^{\mathrm{tg}\,x}\cos x$;

в) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}\,e^x)^3}$; г) $y=x^{e^{\sin x}}$;

д) $ye^y=e^{x+1}$; е) $\begin{cases} x=\arccos t,\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$

8.20.

а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{arctg}^2\,x$;

в) $y=\ln\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; г) $y=(\ln(x+7))^{\mathrm{ctg}\,2x}$;

д) $y\ln x-x\ln y=1$; е) $\begin{cases} x=t^2+1,\\ y=e^{t^2}.\end{cases}$

8.21.

а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y=e^{-\cos x}\arcsin x$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}}-x$; г) $y=(\sin 4x)^{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}}$;

д) $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$; е) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2\ln\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

8.22.

а) $y = \dfrac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$; б) $y = \ln(x-3)\arccos 3x^4$;

в) $y = \ln^2(x + \cos x)$; г) $y = x^{2x}5^x$;

д) $3x + \sin y = 5y$; е) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

8.23.

а) $y = 3\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$; б) $y = 3^{\cos x}\ln(x^2 - 3x + 7)$;

в) $y = \arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$; г) $y = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$;

д) $xy = \operatorname{ctg} y$, е) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}; \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

8.24.

а) $y = \dfrac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$;

в) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; г) $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$;

д) $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5x$; е) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

8.25.

а) $y = \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$; б) $y = e^{1-2x}\sin(2+3x)$;

в) $y = \ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$; г) $y = (\arcsin x)^{e^x}$;

д) $y^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$; е) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}. \end{cases}$

8.26.

а) $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x}}$; б) $y = (1 - x - x^2)e^{\frac{x-1}{2}}$;

в) $y = \ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$; г) $y = (\operatorname{arctg} x + 7)^{\cos 2x}$;

д) $x^4 + x^2y^2 + y = 4$; е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

8.27.

а) $y = 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y = (5x-8)2^{-x}$;

в) $y = \ln\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; г) $y = (\log_5(3x+2))^{\arccos x}$;

$$\text{д)}\quad xy^2-y^3=4x-5;\qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x=\cos t,\\ y=\ln\sin t.\end{cases}$$

8.28.

$$\text{а)}\quad y=\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3};\qquad \text{б)}\quad y=\frac{e^{-x^2}}{2x};$$

$$\text{в)}\quad y=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x};\qquad \text{г)}\quad y=x^{x^x};$$

$$\text{д)}\quad x^2y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0;\qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x=\ln t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$$

8.29.

$$\text{а)}\quad y=\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2};\qquad \text{б)}\quad y=\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{в)}\quad y=\arccos\frac{x^2-4}{4x^2};\qquad \text{г)}\quad y=(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{д)}\quad x^y=y^x;\qquad \text{е)}\quad \begin{cases} x=\arcsin t,\\ y=\ln(1-t^2).\end{cases}$$

Задача №9.

Знайти границі за правилом Лопіталя.

9.1.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x};\qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\Big(e^x+e^{-x}-2\Big)\operatorname{ctg} x;$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

9.2.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x};\qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$$

9.3.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x};\qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

9.4.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3};\qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

9.5.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x};\qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{3}{x};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

9.6.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{1+\ln x}}.$$

9.7.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

9.8.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1+}\ln x\ln(x-1);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x.$$

9.9.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}.$$

9.10.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}}-1};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}.$$

9.11.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}}\ln 2x\ln(2x-1);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}.$$

9.12.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to +\infty}x^3e^{-x};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}.$$

9.13.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg} x;$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 1}(x-1)^{x-1}.$$

9.14.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

9.15.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

9.16.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg} x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

9.17.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

9.18.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(e^{x^2}-1)-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

9.19.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln^3 x)$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

9.20.

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

9.21.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{2\sin x+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

9.22.

а) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

9.23.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-x^2\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

9.24.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

9.25.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^3};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x;$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

9.26.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1}-\frac{1}{x^7-1}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

9.27.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

9.28.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

9.29.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\operatorname{ctg}^3 x\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}.$$

9.30.

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Задача №10.

Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік.

10.1. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$. **10.2.** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. **10.3.** $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$. **10.4.** $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

10.5. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$. **10.6.** $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$. **10.7.** $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. **10.8.** $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$.

10.9. $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x}$. **10.10.** $y=\dfrac{x^2(1-x)}{(x+1)^2}$. **10.11.** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$. **10.12.** $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

10.13. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **10.14.** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$. **10.15.** $y=-\dfrac{4x^3+5}{x}$. **10.16.** $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$.

10.17. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **10.18.** $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$. **10.19.** $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$. **10.20.** $y=\dfrac{1}{x^4-1}$.

10.21. $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$. **10.22.** $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$. **10.23.** $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$. **10.24.** $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$.

10.25. $y=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$. **10.26.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **10.27.** $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$. **10.28.** $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

10.29. $y=\dfrac{4x^4+1}{x^3}$. **10.30.** $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

Розділ 3

Функції декількох змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної

3.1 Теоретичні питання

Поняття функції декількох змінних. Область визначення. Границя. Неперервність.

Частинні похідні. Похідна в напрямку і градієнт. Повний диференціал. Застосування повного диференціала до наближених обчислень. Диференціювання складної функції. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала.

Частинні похідні та повні диференціали вищих порядків. Формула Тейлора та її застосування.

Екстремум функції декількох змінних. Необхідна та достатні умови екстремума. Метод найменших квадратів. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа. Найбільше та найменше значення функції декількох змінних на обмеженій замкненій множині.

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування. Інтегрування частинами і підстановкою. Комплексні числа. Теорія многочлена n-го степеня. Найпростіші раціональні дроби та інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних виразів. Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції.

Визначений інтеграл як границя інтегральних сум. Основні властивості визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Наближене обчислення визначеного інтегралу.

Невласні інтеграли.

Застосування визначених інтегралів до обчисленя площ плоских фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл і площ поверхонь обертання. Фізичні застосування визначеного інтегралу.

3.2 Приклади

Приклад 1. Перевірити, чи функція u задовольняє вказане рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2 x}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = \ln(x^2+y^2).$$

Розв'язок.

Рис. 3.1:

Знаходимо частинні похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Підставимо одержані значення похідних в ліву і праву частини заданого рівняння

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{4y^2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{8y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Порівнюючи результати, бачимо, що задана функція задовольняє задане рівняння.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в області, обмеженій прямими: $x=0, y=0, x+y+5=0$ (рис.3.1).

Розв'язок.

1) Знайдемо стаціонарні точки даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+4y+2.$$

З системи рівнянь

$$\{\, 2\,x-y+3=0,\ -x+4y+2=0.$$

одержуємо стаціонарну точку $(-2;-1)$.

Обчислимо $z(-2;-1)=-3$.

2) Дослідимо функцію z на границях області

а) При $y=0$ маємо $z=x^2+3x+1$, $-5\le x\le 0$. Знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка $[-5;0]$. Маємо $z'=2x+3$; $z'=0$ при $x=-\frac{3}{2}$ і $z\left(-\frac{3}{2};0\right)=-\frac{5}{4}$, $z(-5;0)=11$; $z(0;0)=1$.

б) При $x=0$, $z=2y^2+2y+1$, $-5\le y\le 0$. Маємо $z'=4y+2$; $z'=0$ при $y=-\frac{1}{2}$ і $z\left(0;-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $z(0;-5)=41$, $z(0;0)=1$.

в) Нехай $x+y+5=0$, тобто $y=-x-5$ і $z=4x^2+26x+41$. Маємо $z'=8x+26$; $z'=0$ при $x=-\frac{13}{4}$ і $z\left(-\frac{13}{4};-\frac{7}{4}\right)=-\frac{5}{4}$, $z(-5;0)=11$, $z(0;-5)=41$.

Порівнюючи всі знайдені значення функції, робимо висновок, що

$$z_{\text{найб.}} = 41 \quad \text{в точці} \quad (0; -5),$$

$$z_{\text{найм.}} = -3 \quad \text{в точці} \quad (-2; -1),$$

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли

$$\text{а)} \int \frac{xdx}{1+x^4}; \quad \text{б)} \int x \ln x dx; \quad \text{в)} \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}; \quad \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

Розв'язок.

$$\text{а)} \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

$$\text{б)} \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$\text{в)} \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx =$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$$

г) Розкладемо підінтегральний дріб не найпростіші

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Отже,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Поклавши $x = 1$ одержимо $1 = 2C$, $C = \frac{1}{2}$. Поклавши $x = 0$, одержимо $0 = -B + C$, $B = \frac{1}{2}$. Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, одержимо $0 = A + C$, $A = -\frac{1}{2}$. Таким чином,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C.$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[6]{x}, x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} =$$

Рис. 3.2:

$$= 6\int \frac{t^3 dt}{1+t} = 6\left[\int (t^2 - t + 1)dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] + C =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

$$\text{е)} \int \frac{dx}{1+\sin x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Розв'зок.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3}\Big|_1^b = \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{3} - \operatorname{arctg} 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури обмеженої лініями, заданими рівняннями: $y = x$, $y = 2 - x^2$ (рис.3.2).

Розв'язок.

Знайдемо абсциси точок перетину прямої $y = x$ з параболою $y = 2 - x^2$. Розв'язуючи систему рівнянь $\{ y = x$,
$y = 2 - x^2$, одержимо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування. Тоді

$$S = \int\limits_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}(\text{кв.од.}).$$

3.3 Завдання теми 3

Задача №11.

Перевірити, чи функція u задовольняє вказане рівняння.

11.1.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=\frac{y}{x}.$$

11.2.
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3),\quad u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3.$$

11.3.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=\ln(x^2+(y+1)^2).$$

11.4.
$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x},\quad u=x^y.$$

11.5.
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\quad u=\frac{xy}{x+y}.$$

11.6.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=e^{xy}.$$

11.7.
$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad u=\sin^2(x-2y).$$

11.8.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad u=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

11.9.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=\ln(x^2-y^2).$$

11.10.
$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad u=e^{-\cos(x+3y)}.$$

11.11.
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+2y}{u},\quad u=\sqrt{2xy+y^2}.$$

11.12.
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\quad u=x\ln\frac{y}{x}.$$

11.13.
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad u=\arcsin\frac{x}{x+y}.$$

11.14.
$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad u=\ln(x^2+y^2).$$

11.15.
$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0, \quad u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$$

11.16.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

11.17.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$

11.18.
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

11.19.
$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}, \quad u = \frac{y}{(x^2-y^2)^5}.$$

11.20.
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

11.21.
$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{-(x+3y)}\sin(x+3y).$$

11.22.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = xe^{y/x}.$$

11.23.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

11.24.
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

11.25.
$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad u = \ln(x + e^{-y}).$$

11.26.
$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right).$$

11.27.
$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}, \quad u = y(x^2 - y^2).$$

11.28.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x}\partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = x\sin(x+y).$$

11.29.
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x = u, \quad u = x\ln\frac{y}{x}.$$

11.30.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = e^{x/y}.$$

Задача №12.

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = z(x; y)$ в області G, обмеженій заданими лініями.

12.1.

$$z = 3x + y - xy, \quad G : y = x, y = 4, x = 0.$$

12.2.

$$z = xy - x - 2y, \quad G : x = 3, y = x, y = 0.$$

12.3.

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad G : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$$

12.4.

$$z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad G : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$$

12.5.

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad G : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$$

12.6.

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad G : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$$

12.7.

$$z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad G : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$$

12.8.

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad G : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$$

12.9.

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad G : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$$

12.10.

$$z = x^2 + 2xy - 10, \quad G : y = 0, y = x^2 - 4.$$

12.11.

$$z = xy - 2x - y, \quad G : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$$

12.12.

$$z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad G : y = 8, y = 2x^2.$$

12.13.

$$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad G : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$$

12.14.

$$z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad G : y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0.$$

12.15.

$$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad G : x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$$

12.16.

$$z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad G : x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0.$$

12.17.
$$z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad G: y = 2x, y = 2, x = 0.$$

12.18.
$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad G: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$$

12.19.
$$z = xy - 3x - 2y, \quad G: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$$

12.20.
$$z = x^2 + xy - 2, \quad G: y = 4x^2 - 4, y = 0.$$

12.21.
$$z = 4y - xy - y^2, \quad G: x = 0, y = 0, y = 6 - x.$$

12.22.
$$z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad G: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$$

12.23.
$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad G: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$$

12.24.
$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad G: x = 3, y = 0, y = x + 1.$$

12.25.
$$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad G: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$$

12.26.
$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad G: y = x + 2, y = 0, x = 2.$$

12.27.
$$z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad G: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$$

12.28.
$$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad G: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$$

12.29.
$$z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad G: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0.$$

12.30.
$$z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad G: x = 0, y = 0, x + y = 6.$$

Задача №13.

Знайти невизначені інтеграли.

13.1.
$$\text{а)} \int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^2 3x}}dx; \text{б)} \int x\cos 5x dx; \text{в)} \int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{8 - x^2 - 2x}};$$
$$\text{г)} \int \frac{(x-1)dx}{2x^3 + 3x^2 + x}; \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1} - 1}; \text{е)} \int \frac{dx}{2 + \operatorname{tg} x}.$$

13.2.
$$\text{а)} \int \frac{\cos x dx}{2\sin x - 5}; \text{б)} \int \frac{\ln(2x+1)}{x^3}dx; \text{в)} \int \frac{x dx}{x^2 - 7x + 13};$$
$$\text{г)} \int \frac{(x+4)dx}{x^3 + 6x^2 + 5x}; \text{д)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}dx; \text{е)} \int \frac{dx}{4 + \sin x}.$$

13.3.

$$\text{а)} \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}};\ \text{б)} \int xe^{3x-5}dx;\ \text{в)} \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}};$$

$$\text{г)} \int \frac{(x^2+x-1)dx}{x^3+x^2-6x};\ \text{д)} \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3x+1}};\ \text{е)} \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}.$$

13.4.

$$\text{а)} \int \frac{\sin x dx}{2+5\cos x};\ \text{б)} \int (x+1)\cos 2x dx;\ \text{в)} \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}};$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x};\ \text{д)} \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx;\ \text{е)} \int \sin 3x \cos 5x dx.$$

13.5.

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x\ln^2 x};\ \text{б)} \int \frac{xdx}{\sin^2 x};\ \text{в)} \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+2x+3}};$$

$$\text{г)} \int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx;\ \text{д)} \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx;\ \text{е)} \int \sin^5 2x dx.$$

13.6.

$$\text{а)} \int \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx;\ \text{б)} \int (2-x)\cos 3x dx;\ \text{в)} \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{x^4+5x^2+4};\ \text{д)} \int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}};\ \text{е)} \int \frac{dx}{5-4\cos x}.$$

13.7.

$$\text{а)} \int \frac{e^{3x}dx}{16+e^{6x}};\ \text{б)} \int x\ln(x-1)dx;\ \text{в)} \int \frac{5dx}{\sqrt{3-x^2-2x}};$$

$$\text{г)} \int \frac{x^2dx}{x^4+x^2-2};\ \text{д)} \int x\sqrt{2-x}dx;\ \text{е)} \int \frac{2-\sin x}{2+\sin x}dx.$$

13.8.

$$\text{а)} \int x\cos(x^2+1)dx;\ \text{б)} \int (2x+1)\operatorname{arctg} x dx;\ \text{в)} \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4};\ \text{д)} \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx;\ \text{е)} \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

13.9.

$$\text{а)} \int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x}dx;\ \text{б)} \int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx;\ \text{в)} \int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)};\ \text{д)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx;\ \text{е)} \int \frac{dx}{3-2\cos x}.$$

13.10.

$$\text{а)} \int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x};\ \text{б)} \int \arcsin x;\ \text{в)} \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}};$$

$$\text{г)} \int \frac{3x^2+8}{x^4+5x^2+4}dx;\ \text{д)} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx;\ \text{е)} \int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx.$$

13.11.

$$\text{а)} \int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx;\ \text{б)} \int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx;\ \text{в)} \int \frac{dx}{x^2+4x+14};$$

$$г) \int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx; д) \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; е) \int \sin^3 x dx.$$

13.12.

$$а) \int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}; б) \int \ln(x^2+4)dx; в) \int \frac{dx}{x^2+3x+6};$$

$$г) \int \frac{(x+5)dx}{x^4+2x^3+x^2}; д) \int \frac{x^4dx}{\sqrt{x-1}}; е) \int \cos^5 xdx.$$

13.13.

$$а) \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}; б) \int (x+5)\sin 3xdx; в) \int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx;$$

$$г) \int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}; д) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(5x+2)^3}}; е) \int \cos 3x \cos 9xdx.$$

13.14.

$$а) \int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}; б) \int e^{-3x}(2-9x)dx; в) \int \frac{2x-3}{x^2+x+5}dx;$$

$$г) \int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx; д) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx; е) \int \sin 2x \sin 5xdx.$$

13.15.

$$а) \int x\cdot 7^{x^2}dx; б) \int (3x-2)\cos 5xdx; в) \int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx;$$

$$г) \int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}; д) \int \frac{\sqrt{2x-3}}{x}dx; е) \int \sin^7 xdx.$$

13.16.

$$а) \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx; б) \int e^{-2x}(4x-3)dx; в) \int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx;$$

$$г) \int \frac{2x^2-3x+12}{x^3+x^2-6x}dx; д) \int \frac{\sqrt{x-5}}{x}; е) \int \cos^9 xdx.$$

13.17.

$$а) \int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx; б) \int (2-4x)\sin 2xdx; в) \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}};$$

$$г) \int \frac{(x^2-3)dx}{x^3+2x^2-3x}; д) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-8}}; е) \int \sin^4 x\cos^3 xdx.$$

13.18.

$$а) \int \frac{sinx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}dx; б) \int xe^{-3x}dx; в) \int \frac{dx}{\sqrt{11+5x+6x^2}};$$

$$г) \int \frac{xdx}{x^3-3x+2}; д) \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}dx; е) \int \cos^2 x\sin^5 xdx.$$

13.19.

$$а) \int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx; б) \int (4x-2)\cos 2xdx; в) \int \frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}};$$

$$г) \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx; д) \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx; е) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx.$$

13.20.

$$\text{а) } \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx;\text{ б) } \int (5x-2)e^{3x}dx;\text{ в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5x+3}};$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx;\text{ д) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx;\text{ е) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx.$$

13.21.

$$\text{а) } \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2};\text{ б) } \int x^3 \ln x dx;\text{ в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x-2x^2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};\text{ д) } \int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}dx;\text{ е) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$$

13.22.

$$\text{а) } \int x^2\sqrt{x^3+5}dx;\text{ б) } \int (x^2+4x)\cos x dx;\text{ в) } \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx;\text{ д) } \int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}};\text{ е) } \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

13.23.

$$\text{а) } \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2+4};\text{ б) } \int (3x+5)\sin x dx;\text{ в) } \int \frac{dx}{3x^2-x+1};$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;\text{ д) } \int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx;\text{ е) } \int \sin^5 x dx.$$

13.24.

$$\text{а) } \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;\text{ б) } \int x^2 e^{8x}dx;\text{ в) } \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)};\text{ д) } \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};\text{ е) } \int \cos^3 x dx.$$

13.25.

$$\text{а) } \int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx;\text{ б) } \int \ln x dx;\text{ в) } \int \frac{dx}{2x^2-5x+7};$$

$$\text{г) } \int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx;\text{ д) } \int x\sqrt{x-1}dx;\text{ е) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx.$$

13.26.

$$\text{а) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}};\text{ б) } \int (x+1)e^x dx;\text{ в) } \int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)};\text{ д) } \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx;\text{ е) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

13.27.

$$\text{а) } \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx;\text{ б) } \int (x^2+2x+3)\cos x dx;\text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{(9x-9)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)};\text{ д) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}};\text{ е) } \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

13.28.

$$\text{а) } \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}};\text{ б) } \int e^{2x}\cos x dx;\text{ в) } \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{7x-10}{x^3+8}dx;\text{ д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}};\text{ е)} \int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

13.29.

$$\text{а)} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}};\text{ б)} \int (x+5)\operatorname{arctg} xdx;\text{ в)} \int \frac{dx}{x^2+2x+5};$$

$$\text{г)} \int \frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};\text{ д)} \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx;\text{ е)} \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

13.30.

$$\text{а)} \int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}};\text{ б)} \int x^2 \operatorname{arctg} xdx;\text{ в)} \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}};$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2};\text{ д)} \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}};\text{ е)} \int \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

Задача №14.

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

14.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$ **14.2.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$ **14.3.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

14.4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **14.5.** $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$ **14.6.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$

14.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$ **14.8.** $\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}$ **14.9.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}dx.$

14.10. $\int\limits_0^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ **14.11.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$ **14.12.** $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}.$

14.13. $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$ **14.14.** $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$ **14.15.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$

14.16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$ **14.17.** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$ **14.18.** $\int\limits_0^{+\infty} x \sin xdx$

14.19. $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ **14.20.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx$ **14.21.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

14.22. $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ **14.23.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}xdx$ **14.24.** $\int\limits_0^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

14.25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$ **14.26.** $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$ **14.27.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$

14.28. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$ **14.29.** $\int\limits_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ **14.30.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

Задача №15.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

15.1. $y = x^3, y = 4x$.
15.2. $y = 2/(1+x^2)$, $y = x^2$.
15.3. $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.
15.4. $y^2 = 16 - 8x$, $y^2 = 24x + 48$.
15.5. $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$.
15.6. $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$.
15.7. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
15.8. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
15.9. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.
15.10. $y^2 = x$, $y = -x + 2$.

Знайти довжину дуги лінії

15.11. $y = x\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 4)$.
15.12. $y = \frac{1}{2}x^2$ $(0 \le x \le 1)$.
15.13. $2y = e^x + e^{-x}$ $(0 \le x \le 1)$.
15.14. $y = \ln \sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.
15.15. $y = (x+1)\sqrt{x+1}$ $(-1 \le x \le 3)$.
15.16. $y = 1 - \ln \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.
15.17. $y = \ln(1 - x^2)$ $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$.
15.18. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ $(1 \le x \le 2)$.
15.19. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ $\left(0 \le x \le \frac{7}{9}\right)$.
15.20. $y = 2 - e^x$ $(\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8})$.

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями

15.21. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.
15.22. $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.
15.23. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.
15.24. $x = \sqrt[3]{y - 2}$, $x = 1$, $y = 1$.
15.25. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $y = 0$.
15.26. $y = x^2$, $y^2 = x$.
15.27. $y = x^2$, $y = 1, x = 2$.
15.28. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$.
15.29. $y^2 = x$, $y = \frac{1}{2}x$.
15.30. $y = \sqrt{6x}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 0$.

Частина II

Розділ 4

Диференціальні рівняння

Література:

[1]Кн.2; [2]Ч.2; [3]Ч.2; [4]; [5]Кн.3; [9].

4.1 Теоретичні питання

Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Основні типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння та звідні до них, лінійні рівняння, рівняння Бернуллі, рівняння в повних диференціалах.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Рівняння, які дозволяють знизити їх порядок.

Лінійні диференціальні рівняння: однорідні і неоднорідні. Структура загального розв'язку. Метод Лагранжа варіації довільних сталих. Лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами. Рівняння з правою частиною спеціального виду.

Нормальні системи диференціальних рівнянь. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Метод виключення. Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'язування з допомогою характеристичного рівняння.

4.2 Приклади

Приклад 1. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті б) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

$$\text{а)} y' = \frac{y}{x} + 1; \quad \text{б)} y' + \frac{2xy}{x^2+1} = e^x; \quad y(0) = 2;$$

$$\text{в)} (2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Розв'язок.

а) Це рівняння — однорідне. Застосовуючи підстановку $y = ux$, матимемо $u'x + u = u + 1$, або $u' = \frac{1}{x}$. Звідси $u = \ln|x| + C$, або остаточно

$$y = x \ln|x| + Cx.$$

б) Задане рівняння — лінійне. Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді $y = u(x)v(x)$. Маємо

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}uv = e^x \text{ або } v\frac{du}{dx} + u(\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}v) = e^x.$$

Виберемо функцію v так, щоб $\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}v = 0$. Для знаходження v маємо рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язавши яке, знаходимо одну з таких функцій $v = \frac{1}{x^2+1}$. Тоді функцію u знаходимо із рівняння $\frac{1}{x^2+1}\frac{du}{dx} = e^x$ або

$$u = \int(x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+3)e^x + C.$$

Таким чином

$$y = \frac{(x^2-2x+3)e^x + C}{x^2+1}$$

-загальний розв'язок рівняння. Виходячи з початкової умови, одержуємо $2 = \frac{3+C}{1}$, звідки $C = -1$. Шуканий частинний розв'язок

$$y = \frac{(x^2-2x+3)e^x - 1}{x^2+1}.$$

в) Оскільки $\frac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y) = 3x^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2) = 3x^2$, то задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Знайдемо функцію $U(x,y)$, повний диференціал якої $dU = = U'_x dx + U'_y dy$ дорівнює лівій частині заданого рівняння, тобто таку, що

$$U'_x = 2x + 3x^2y, \quad U'_y = x^3 - 3y^2.$$

Інтегруємо по x перше з двох останніх рівнянь, вважаючи y сталим

$$U = \int(2x+3x^2y)dx = x^2 + x^3y + \phi(y).$$

Тоді

$$U'_y = (x^2 + x^3y + \phi(y))'_y = x^3 - 3y^2;$$

$$\phi'(y) = -3y^2, \quad \phi(y) = -y^3 + const.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння буде мати вигляд

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті в) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

$$\text{а)} yy'' = y'^2; \quad \text{б)} y'' + 2y' + 10y = 30x - 14;$$

$$\text{в)} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}; \quad y(1) = 0, y'(1) = 0.$$

Розв'язок.

а) В рівняння не входить x. Нехай $y' = p(y)$. Тоді

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'p, \quad yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

Одержане рівняння має розв'язок $p = 0$ і, отже, $y = C$ є розв'язком даного рівняння. Вввважаючи тепер $p \neq 0$, скорочуючи на p і відокремлюючи змінні, маємо $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$. Інтегруючи, одержуємо $p = C_1 y$; звідси $y' = C_1 y$. З останнього рівняння одержимо

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Розв'язок $y = C$ також задається цим виразом при $C_1 = 0$.

б) Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$ має корені $k_1 = -1 + 3i; k_2 = -1 - 3i$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_0 = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Частинний розв'язок y_1 шукаємо у вигляді $y_1 = Ax + B$. Продиференціюємо y_1 два рази і підставимо в задане рівняння

$$y_1' = A; \quad y_1'' = 0;$$

$$2A + 10Ax + 10B = 30x - 14;$$

Звідси $A = 3, B = -2$ і $y_1(x) = 3x - 2$.

Загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3x - 2.$$

в) Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $k^2 + 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -1$. Тому два лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння є $y_1 = = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, а його загальний розв'язок

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$. Для знаходження $C_1(x)$ і $C_2(x)$ одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0; \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Звідси $C_1'(x) = -1, C_2'(x) = \frac{1}{x}$. Тоді $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|x| + C_2$, де C_1 і C_2 - довільні сталі і, отже, загальний розв'язок

$$y = (-x + C_1)e^{-x} + (\ln|x| + C_2)xe^{-x}.$$

Виходячи з початкових умов, одержуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 1, \end{cases}$$

тобто $C_1 = 1, C_2 = 0$.

Шуканий частинний розв'язок

$$y = (1 - x)e^{-x} + x \ln|x| e^{-x}.$$

Приклад 3.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь. Систему пункту а) розв'язати методом виключення. Систему пункту б) розв'язати за допомогою характеристичного рівняння, а також знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

$$\text{а)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + t; \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 3y + 2t; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \quad x(0) = -1; \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y, \quad y(0) = 5. \end{cases}$$

′.

а) Продиференціюємо перше рівняння по t:

$$x'' = x' + y' + 1.$$

Із системи одержуємо $x'' = x+y+t-4x-3y+2t+1$ або $x'' = -3x-2y+3t+1$. З першого рівняння системи $y = x' - x - t$. Підставивши в одержане рівняння, маємо $x'' = -3x - 2(x' - x - t) + 3t + 1$ або $x'' + 2x' + x = 5t + 1$. Загальним розв'язком останнього рівняння є функція

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9.$$

Тоді

$$y = x' - x - t = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14.$$

Отже загальний розв'язок

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9, \\ y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14 \end{cases}.$$

б) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0, (5-k)^2 - 16 = 0, k_1 = 1, k_2 = 9.$$

Для кореня $k_1 = 1$ знаходимо власний вектор (α_1, β_1), розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0, \\ 4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0. \end{cases}$$

, знаходимо $\alpha_1 = -\beta_1$ і, отже, вектор $(1; -1)$ — власний, а $x_1 = e^t, y_1 = -e^t$ - частинний розв'язок системи.

Для кореня $k_2 = 9$ знаходимо власний вектор (α_2, β_2), розв'язуючи систему

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0, \\ 4\alpha_1 - 4\beta_1 = 0, \end{cases},$$

Знаходимо $\alpha_2 = \beta_2$ і, отже, вектор (1;1) — власний, а $x_2 = = e^{9t}$, $y_2 = e^{9t}$ — частинний розв'язок системи.

Загальний розв'язок записується через два знайдених лінійно незалежних розв'язки.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{9t}; \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \end{cases}$$

Використавши початкові умови, одержимо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 + C_2 = 5 \end{cases}.$$

Звідси маємо $C_1 = -3; C_2 = 2$. Частинний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = -3e^t + 2e^{9t}; \\ y = 3e^t + 2e^{9t} \end{cases}.$$

4.3 Завдання теми 4

Задача №16.

Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті б) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

16.1.

$$\text{а)} y - xy' = \frac{x}{\cos\frac{y}{x}}; \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{в)} 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

16.2.

$$\text{а)} (y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0; \quad \text{б)} y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{в)} \left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$$

16.3.

$$\text{а)} (x + 2y)dx - xdy = 0; \quad \text{б)} y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0;$$

$$\text{в)} (3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0.$$

16.4.

$$\text{а)} (x - y)dx + (x + y)dy = 0; \quad \text{б)} y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в)} \left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

16.5.

$$\text{а)} (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0; \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2};$$

$$\text{в)} \left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (2xy + \mathrm{tg}\,x)dy = 0.$$

16.6.

$$\text{а)} y^2 + x^2y' = xyy'; \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x + 1), \quad y(0) = 1;$$

$$\text{в)} (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$$

16.7.

$$\text{а)} xy' - y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right); \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$\text{в)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$$

16.8.

$$\text{а)} xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}; \quad \text{б)} y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$$

$$\text{в)} [(\sin 2x - 2cos(x + y)]dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$$

16.9.

$$\text{а)} xy' - y = (x + y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right); \quad \text{б)} y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{в)} \left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$$

16.10.

$$\text{а)} xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}; \quad \text{б)} y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3};$$

$$\text{в)} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0.$$

16.11.

$$\text{а)} (y + \sqrt{xy})dx = xdy; \quad \text{б)} y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1, \quad y(1) = 3;$$

$$\text{в)} \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$$

16.12.

$$\text{а)} xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y; \quad \text{б)} y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e;$$

$$\text{в)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$$

16.13.

$$\text{а)} y = x\left(y' - e^{\frac{y}{x}}\right); \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{в)} \frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$$

16.14.

$$\text{а)} y' = \frac{y}{x} - 1; \quad \text{б)} y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4;$$

$$\text{в)} \frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0.$$

16.15.

$$\text{а)} y'x + x + y = 0; \quad \text{б)} y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6};$$

$$\text{в)} \frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0.$$

16.16.

$$\text{а)} ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0; \quad \text{б)} y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{в)} \left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

16.17.

$$\text{а)} xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx; \quad \text{б)} y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3;$$

$$\text{в)} \left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0.$$

16.18.

$$\text{а)} xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y; \quad \text{б)} y' + y\operatorname{tg} x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = -3;$$

$$\text{в)}\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0.$$

16.19.

$$\text{а)}(x-y)ydx-x^2dy=0;\quad \text{б)}y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3},\quad y(1)=1;$$
$$\text{в)}e^ydx+(\cos y+xe^y)dy=0.$$

16.20.

$$\text{а)}xy+y^2=(2x^2+xy)y';\quad \text{б)}y'+2xy=-2x^3,\quad y(1)=e^{-1};$$
$$\text{в)}(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0.$$

16.21.

$$\text{а)}(x^2-2xy)y'=xy-y^2;\quad \text{б)}y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2},\quad y(0)=\frac{2}{3};$$
$$\text{в)}xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y)dy=0.$$

16.22.

$$\text{а)}(2\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0;\quad \text{б)}y'+xy=-x^3,\quad y(0)=3;$$
$$\text{в)}(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0.$$

16.23.

$$\text{а)}y'+\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)=0;\quad \text{б)}y'-\frac{2y}{x+2}=e^x(x+1)^2,\quad y(0)=1;$$
$$\text{в)}[\cos(x+y^2)+\sin x]dx+2y\cos(x+y^2)dy=0.$$

16.24.

$$\text{а)}x^2+y^2+2xyy'=0;\quad \text{б)}y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\quad y(0)=1;$$
$$\text{в)}(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$$

16.25.

$$\text{а)}y^2-2xy-x^2y'=0;\quad \text{б)}y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\quad y(0)=\frac{1}{2};$$
$$\text{в)}\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

16.26.

$$\text{а)}(x+2y)dx+xdy=0;\quad \text{б)}y'-y\cos x=-\sin 2x,\quad y(0)=3;$$
$$\text{в)}\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$$

16.27.

$$\text{а)}2x-y+(x+y)y'=0;\quad \text{б)}y'-4xy=-4x^3,\quad y(0)=-\frac{1}{2};$$
$$\text{в)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0.$$

16.28.

$$\text{а)}2x^3y'=y(2x^2-y^2);\quad \text{б)}y'-\frac{y}{x}=-\frac{\ln x}{x},\quad y(1)=1;$$
$$\text{в)}2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0.$$

16.29.

$$\text{а)} x^2y' = y(x+y); \quad \text{б)} y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0;$$

$$\text{в)} (3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

16.30.

$$\text{а)} y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad \text{б)} y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1;$$

$$\text{в)} xy^2dx + y(x^2+y^2)dy = 0.$$

Задача №17.

Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті в) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

17.1.

$$\text{а)} xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad \text{б)} y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x};$$

$$\text{в)} y'' + \pi^2 y = \frac{\pi}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

17.2.

$$\text{а)} y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2; \quad \text{б)} y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x};$$

$$\text{в)} y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

17.3.

$$\text{а)} y''x\ln x = y'; \quad \text{б)} y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x};$$

$$\text{в)} y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

17.4.

$$\text{а)} yy'' + y'^3 = y'^2; \quad \text{б)} y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2;$$

$$\text{в)} y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2.$$

17.5.

$$\text{а)} y'' + 2y(y')^3 = 0; \quad \text{б)} y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x;$$

$$\text{в)} y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -2\ln 2.$$

17.6.

$$\text{а)} y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x; \quad \text{б)} y'' - 2y' = (4x+4)e^{2x};$$

$$\text{в)} y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

17.7.

$$\text{а)} (1+e^x)y'' + y' = 0; \quad \text{б)} y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4;$$

$$\text{в)} y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

17.8.

$$\text{а)} yy'' + (y')^2 = 0; \quad \text{б)} y'' - 4y' = 8 - 16x;$$

$$\text{в)}y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$$

17.9.

$$\text{а)}x^3y'' + x^2y' = 1; \quad \text{б)}y'' - 2y' + y = 4e^x;$$

$$\text{в)}y'' + y = 4\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

17.10.

$$\text{а)}yy'' - 2yy'\ln y - y'^2 = 0; \quad \text{б)}y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x);$$

$$\text{в)}y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3.$$

17.11.

$$\text{а)}xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0; \quad \text{б)}y'' - 6y' + 13y = 39e^{-3x}\sin 2x;$$

$$\text{в)}y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

17.12.

$$\text{а)}yy'' + 1 = y'^2; \quad \text{б)}y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x;$$

$$\text{в)}y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

17.13.

$$\text{а)}xy'' + y' = \ln x; \quad \text{б)}y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x};$$

$$\text{в)}y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

17.14.

$$\text{а)}y'^2 + 2yy'' = 0; \quad \text{б)}y'' + 3y' = 10 - 6x;$$

$$\text{в)}y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$$

17.15.

$$\text{а)}y'' = 2yy'; \quad \text{б)}y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3;$$

$$\text{в)}y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

17.16.

$$\text{а)}2xy'y'' = y'^2; \quad \text{б)}y'' + 4y' + 20y = -4\cos 4x - 52\sin 4x;$$

$$\text{в)}y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y'(0) = 14\ln 2.$$

17.17.

$$\text{а)}yy'' + y' - y'^2 = 0; \quad \text{б)}y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5;$$

$$\text{в)}y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

17.18.

$$\text{а)}y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0; \quad \text{б)}y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x};$$

$$\text{в)} y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$$

17.19.

$$\text{а)} xy'' - y' = x^2 e^x; \quad \text{б)} y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x};$$

$$\text{в)} y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

17.20.

$$\text{а)} x^2 y'' + y'^2 = 0; \quad \text{б)} y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x};$$

$$\text{в)} y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$$

17.21.

$$\text{а)} x(y'' + 1) + y' = 0; \quad \text{б)} y'' + 16y = 80e^{2x};$$

$$\text{в)} y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \frac{1}{2}.$$

17.22.

$$\text{а)} xy'' = y' + x^2; \quad \text{б)} y'' + 4y' = 15e^x;$$

$$\text{в)} y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$$

17.23.

$$\text{а)} y'' + \frac{1}{x}y' = 0; \quad \text{б)} y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x;$$

$$\text{в)} y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

17.24.

$$\text{а)} y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1); \quad \text{б)} y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x};$$

$$\text{в)} y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

17.25.

$$\text{а)} y'' = \sqrt{1 - y'^2}; \quad \text{б)} y'' - 14y' + 49y = 147\sin 7x;$$

$$\text{в)} y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

17.26.

$$\text{а)} y''(1 + y) = 5y'^2; \quad \text{б)} y'' + 9y = 10e^{3x};$$

$$\text{в)} y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$$

17.27.

$$\text{а)} xy'' + 2y' = 0; \quad \text{б)} 4y'' - 4y' + y = -25\cos x;$$

$$\text{в)} y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

17.28.

$$\text{а)} y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}; \quad \text{б)} 3y'' - 5y' - 2y = 14\cos 2x - 10\sin 2x;$$

$$\text{в)}y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$$

17.29.

$$\text{а)}2yy'' = y'^2 + 1; \quad \text{б)}y'' + 4y' + 29y = 34e^{-x};$$

$$\text{в)}y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

17.30.

$$\text{а)}y''(2y+3) - 2y'^2 = 0; \quad \text{б)}4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x;$$

$$\text{в)}y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача №18.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь. Систему пункту а) розв'язати методом виключення. Систему пункту б) розв'язати за допомогою характеристичного рівняння, а також знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

18.1.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + 2e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + e^{2t}; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y, \quad x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y, \quad y(0) = 2. \end{array}\right.$$

18.2.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t - 1; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x - 2y, \quad x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \quad y(0) = 1. \end{array}\right.$$

18.3.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y, \quad y(0) = 7. \end{array}\right.$$

18.4.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -3x - 4y + 2t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y, \quad y(0) = 5. \end{array}\right.$$

18.5.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y + 4e^{t}, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 5y + 9e^{t}; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad x(0) = -1, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \quad y(0) = 5. \end{array}\right.$$

18.6.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^{t}; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y, \quad x(0) = -1, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \quad y(0) = -3. \end{array}\right.$$

18.7.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 4\sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y + \frac{1}{3}\cos t; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = 6y, \quad y(0) = 5. \end{array}\right.$$

18.8.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y - 15e^{t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y - 11e^{t}; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad x(0) = -2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y, \quad y(0) = 2. \end{array}\right.$$

18.9.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y - 2t; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \quad x(0) = 2, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y, \quad y(0) = -4. \end{array}\right.$$

18.10.

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y - t + 7, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3t - 5; \end{array}\right. \quad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y, \quad x(0) = -2, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y, \quad y(0) = 1. \end{array}\right.$$

18.11.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-\cos t,\\ \frac{dy}{dt}=-x+\sin t;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y, \quad x(0)=2,\\ \frac{dy}{dt}=2x+4y, \quad y(0)=6.\end{cases}$$

18.12.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x+y-e^{2t},\\ \frac{dy}{dt}=-3x+2y+6e^{2t};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+8y, \quad x(0)=6,\\ \frac{dy}{dt}=x+y, \quad y(0)=0.\end{cases}$$

18.13.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=5x+4y+e^{t},\\ \frac{dy}{dt}=4x+5y+2e^{t};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-3y, \quad x(0)=3,\\ \frac{dy}{dt}=-x, \quad y(0)=1.\end{cases}$$

18.14.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-y+2e^{t},\\ \frac{dy}{dt}=3x-2y+4e^{t};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y, \quad x(0)=1,\\ \frac{dy}{dt}=-4x-4y, \quad y(0)=-4.\end{cases}$$

18.15.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y-\cos t,\\ \frac{dy}{dt}=-2x-y+\sin t;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x+y, \quad x(0)=-1,\\ \frac{dy}{dt}=-3x+2y, \quad y(0)=5.\end{cases}$$

18.16.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-y+\sin t,\\ \frac{dy}{dt}=4x+2y+\cos t;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y, \quad x(0)=-2,\\ \frac{dy}{dt}=-6x-3y, \quad y(0)=3.\end{cases}$$

18.17.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+3e^{t},\\ \frac{dy}{dt}=x-e^{t};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-8y, \quad x(0)=4,\\ \frac{dy}{dt}=-8x+4y, \quad y(0)=-2.\end{cases}$$

18.18.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y+t,\\ \frac{dy}{dt}=-2x+4y+6t^{2};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-5y, \quad x(0)=-4,\\ \frac{dy}{dt}=-x-3y, \quad y(0)=2.\end{cases}$$

18.19.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-4y,\\ \frac{dy}{dt}=x+y-t\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x+y, \quad x(0)=1,\\ \frac{dy}{dt}=8x+y, \quad y(0)=-4.\end{cases}$$

18.20.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-4y+1,\\ \frac{dy}{dt}=x+3y+6t^{2};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=5x+8y, \quad x(0)=10,\\ \frac{dy}{dt}=3x+3y, \quad y(0)=0.\end{cases}$$

18.21.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-2y+t,\\ \frac{dy}{dt}=3x-4y;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+8y, \quad x(0)=3,\\ \frac{dy}{dt}=x+4y, \quad y(0)=-2.\end{cases}$$

18.22.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=5x-3y+te^{2t},\\ \frac{dy}{dt}=3x-y+e^{2t};\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-y, \quad x(0)=3,\\ \frac{dy}{dt}=-x+4y, \quad y(0)=5.\end{cases}$$

18.23.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y+4\cos 2t,\\ \frac{dy}{dt}=2x-2y+5\sin 2t\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=7x+3y, \quad x(0)=1,\\ \frac{dy}{dt}=x+5y, \quad y(0)=-1.\end{cases}$$

18.24.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y+\cos t,\\ \frac{dy}{dt}=-2x-y;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+4y, \quad x(0)=5,\\ \frac{dy}{dt}=2x+3y, \quad y(0)=-1.\end{cases}$$

18.25.

$$\text{а)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y-4,\\ \frac{dy}{dt}=x+2y+3t-6;\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-2y, \quad x(0)=3,\\ \frac{dy}{dt}=2x+8y, \quad y(0)=-1.\end{cases}$$

18.26.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + t^2, \\ \frac{dy}{dt} = x; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \quad x(0) = 2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

18.27.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - \cos t; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad x(0) = -1, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y, \quad y(0) = 4. \end{cases}$$

18.28.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t}; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

18.29.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y + t^2; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \quad x(0) = -5, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

18.30.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \quad x(0) = -2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \quad y(0) = 4. \end{cases}$$

Розділ 5

Кратні інтеграли та елементи векторного аналізу

Література:

[1]Кн.2; [2]Ч.2; [3]Ч.1; [4]; [5]Кн.3.

5.1 Теоретичні питання

Подвійні та потрійні інтеграли, їх основні властивості. Поняття про n-вимірні інтеграли. Обчислення подівійних і потрійних інтегралів в декартових координатах. Заміна змінних в кратних інтегралах. Перехід від декартових до полярних, циліндричних та сферичних координат. Застосування кратних інтегралів до задач геометрії, механіки і фізики.

Задачі, що приводять до криволійних інтегралів. Означення криволінійних інтегралів першого і другого роду, їх основні властивості та обчислення. Застосування криволінійних інтегралів до задач геометрії та механіки. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду. Формула Гріна.

Площа поверхні. Означення поверхневих інтегралів, їх властивості та обчислення.

Скалярне поле. Поверхні та лінії рівня скалярного поля. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля, його координатне та інваріантне означення. Векторне поле. Векторні лінії та їх диференціальні рівняння.

Односторонні та двосторонні поверхні. Потік векторного поля через поверхню. Фізичний зміст потоку в полі швидкостей рідини. Обчислення потоку. Теорема Остроградського. Дивергенція векторного поля, її інваріантне означення і фізичний зміст. Обчислення дивергенції. Соленоїдальні (трубчасті) поля.

Лінійний інтеграл у векторному полі. Робота силового поля. Циркуляція веторного поля. Теорема Стокса. Ротор (вихор) поля, його координатне та інваріантне означення. Фізичний зміст ротора в полі швидкостей. Незалежність лінійного інтеграла від форми шляху інтегрування. Потенціальне поле, умова потенціальності поля. Обчислення лінійного інтеграла в потенціальному полі.

Оператор Гамільтона. Операції другого порядку у векторному аналізі. Оператор Лапласа, його вираз у циліндричних і сферичних координатах.

Рис. 5.1:

5.2 Приклади

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Розв'язок.

Будуємо область інтегрування G за межами інтегрування $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y) = 1-y$, $y=0$, $y=1$ (рис. 5.1)

Зверху область G обмежена кривою

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, \text{при } -1 \le x \le 0, \\ 1-x, \text{при } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

а знизу — прямою $y=0$. Тому маємо

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

Приклад 2. За допомогою подвійних інтегралів обчислити в полярних координатах площу плоскої фігури, яка обмежена лінією $(x^2+y^2)^2 = 2xy$.

Розв'язок.

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, в якій рівняння заданої лінії матиме вигляд

$$\rho = \sqrt{\sin 2\phi}.$$

Побудуємо криву (рис. 5.2)

Вона симетрична відносно полюса і при зміні ϕ від 0 до $\frac{\pi}{2}$ поточна точка опише половину кривої. Тоді

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\sqrt{\sin 2\phi}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\phi d\phi = -\frac{1}{2}\cos 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Рис. 5.2:

Рис. 5.3:

Приклад 3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad x+z=4,\quad z=0.$$

$'$. Задане тіло є циліндроїдом, обмеженим зверху площиною $x+z=4$, знизу площиною $z=0$ і боків прямими циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ (рис. 5.3а). Область інтегрування показана на рис. 5.3б.

Маємо $z=4-x$

$$\iint\limits_G (4-x)dx\,dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=\int\limits_0^4(4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=$$

$$=\int\limits_0^4(4-x)\sqrt{x}dx=\left(\frac{8}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Big|_0^4=\frac{128}{15}.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійні інтеграли

а)$\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5}$, де L - відрізок прямої $y=2x-2$, який розташований між точками $A(0;-2)$, $B(1;0)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(x^2+y)dy$, якщо L_{AB}- дуга параболи $y=x^2$, яка розташована між точками $A(0,0)$ і $B(2,4)$.

Розв'язок.

а) Знайдемо $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}dx$. Отже

$$\int\limits_L\frac{dl}{x+2y+5}=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5}=$$

Рис. 5.4:

Рис. 5.5:

$$= \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6.$$

$$\text{б) } \int\limits_{L_{AB}} xydx + (x^2+y)dy = \int\limits_0^2 (x\cdot x^2 + (x^2+x^2)\cdot 2x)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 5x^3dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20.$$

Приклад 5. В пункті а) обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (3x-y+z)\,dS$ по поверхні S, де S - частина площини (p) : $x+z-2y=2$, яка відтинається координатними площинами; в пункті б) обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy$, де S - верхня сторона поверхні $z=\sqrt{1-x^2}$, яка відтинається площинами $y=0$, $y=1$ (рис. 5.4)

Розв'язок.

а) З рівняння площини знайдемо: $z=2-x+2y$, $z'_x=-1$, $z'_y=2$, $dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy = \sqrt{6}dxdy$.

Зведемо обчислення поверхневого інтеграла до обчислення подвійного інтеграла по області G, де G - трикутник AOB, який є проекцією поверхні S на площину Oxy (рис. 5.5)

Тоді

$$\iint\limits_S (3x-y+z)\,dS = \iint\limits_G (3x-y+2-x+2y)\sqrt{6}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{2+2y} (2x+y+2)dx = \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} \left.(x^2+(y+2)x)\right|_{0}^{2+2y} dy =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0}(6y^2+14y+8)dy = \sqrt{6}\left.(2y^3+7y^2+8y)\right|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}.$$

б) Проекцією G заданої поверхні на площину Oxy є прямокутник, який визначається нерівностями $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Тоді

$$\iint\limits_{S}(y^2+z^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{S}(y^2+(\sqrt{1-x^2})^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1}(y^2+1-x^2)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left.\left(\frac{y^3}{3}+y-x^2y\right)\right|_{0}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx = \left.\left(\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = 2.$$

Приклад 6. Задано векторне поле $\overrightarrow{a} = (x-2z)\overrightarrow{i} + (x+ +3y+z)\overrightarrow{j} + (5x+y)\overrightarrow{k}$ і площину $x+y+z=1$ (p), яка разом з координатними площинами утворює піраміду V. Нехай S — основа піраміди, яка належить площині (p); L — контур, який обмежує S; $\overrightarrow{n}$ — зовнішня нормаль до S. Обчислити: а) циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{a}$ вздовж замкненого контура L, застосувавши формулу Стокса до контура L і обмеженої ним поверхні S з нормаллю $\overrightarrow{n}$; б) потік векторного поля $\overrightarrow{a}$ через повну поверхню піраміди V в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні, застосувавши формулу Остроградського.

Розв'язок.

а) Обчислимо циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{a}$ використовуючи формулу Стокса

$$Ц = \oint\limits_{L} \overrightarrow{a}(M)\cdot d\overrightarrow{l} = \iint\limits_{S} rot\overrightarrow{a}(M)\cdot\overrightarrow{n}dS.$$

Для цього визначимо

$$rot\overrightarrow{a}(M) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Застосуємо формулу Стокса (рис. 5.6)

$$Ц = \iint\limits_{S}(rot\overrightarrow{a})_x dy\,dz + (rot\overrightarrow{a})_y dx\,dz + (rot\overrightarrow{a})_z dx\,dy =$$

$$= -7\iint\limits_{S_{OAC}} dx\,dz + \iint\limits_{S_{OAB}} dx\,dy = -3.$$

б) Обчислимо потік векторного поля $\overrightarrow{a}$ через повну поверхню піраміди, використовуючи формулу Остроградського

$$П = \iint\limits_{G} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}\,dG == \iiint\limits_{V} div\overrightarrow{a}dV.$$

Рис. 5.6:

Знайдемо

$$div\overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x-2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+3y+z) + \frac{\partial}{\partial x}(5x+y) = 1+3=4.$$

Тоді

$$\Pi = 4\iiint\limits_V dV = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

5.3 Завдання теми 5

Задача №19.

Змінити порядок інтегрування.

19.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy.$ **19.2.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy.$

19.3. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{3\sqrt{y}/2}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx.$ **19.4.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)\,dx.$

19.5. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/4+1}^{7-y} f(x,y)\,dx.$ **19.6.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy.$

19.7. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$ **19.8.** $\int\limits_{-2}^4 dy \int\limits_{y^2/2}^{y+4} f(x,y)\,dx.$

19.9. $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)\,dx.$ **19.10.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)\,dx.$

19.11. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2x}^{x^2/2+2} f(x,y)\,dx.$ **19.12.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)\,dx.$

19.13. $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_y^{\pi/2-y} f(x,y)\,dx.$ **19.14.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy.$

19.15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dy.$ **19.16.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)\,dx.$

19.17. $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy.$ **19.18.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dy.$

19.19. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)\,dx.$ **19.20.** $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-1-y}^{1+y} f(x,y)\,dx.$

19.21. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)\,dy.$ **19.22.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy.$

19.23. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} f(x,y)\,dx.$ **19.24.** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/2+1}^{3y/2+4} f(x,y)\,dx.$

19.25. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{1+x} f(x,y)\,dy.$ **19.26.** $\int\limits_0^{4/5} dy \int\limits_{1+y}^{3-3y/2} f(x,y)\,dx.$

19.27. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dx.$ **19.28.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)\,dy.$

19.29. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2-y}^{2y+1} f(x,y)\,dx.$ **19.30.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,dy.$

Задача №20.

За допомогою подвійних інтегралів обчислити в полярних координатах площу плоскої фігури, обмеженої вказаною лінією.

20.1. $(x^2+y^2)^2 = 4(4x^2+y^2).$ **20.2.** $(x^2+y^2)^3 = 16x^2y^2.$
20.3. $(x^2+y^2)^3 = x^2(4x^2+3y^2).$
20.4. $(x^2+y^2)^2 = 3x^2+2y^2.$ **20.5.** $x^4-y^4 = (x^2+y^2)^3.$
20.6. $r = 2\sin^2 2\phi.$ **20.7.** $r = 3\sin^2\phi.$
20.8. $r = 2(1-\cos\phi).$ **20.9.** $(x^2+y^2)^2 = 2x^2+3y^2.$
20.10. $(x^2+y^2)^2 = 5x^2+3y^2.$
20.11. $(x^2+y^2)^2 = 7x^2+5y^2.$ **20.12.** $(x^2+y^2)^2 = 2xy.$
20.13. $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2.$ **20.14.** $(x^2+y^2)^3 = y^2.$
20.15. $(x^2+y^2)^3 = x^2.$ **20.16.** $r = 3\cos^2\phi.$
20.17. $r^2 = 4(1+\sin^2\phi).$ **20.18.** $(x^2+y^2)^3 = 2x^4.$
20.19. $(x^2+y^2)^2 = 4(3x^2+4y^2).$
20.20. $(x^2+y^2)^3 = 3x^2y^2.$
20.21. $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4.$ **20.22.** $(x^2+y^2)^3 = 2y^4.$
20.23. $(x^2+y^2)^3 = 4xy(x^2-y^2).$ **20.24.** $r = 2\sin 2\phi.$
20.25. $r = 2\cos 5\phi.$ **20.26.** $r = 4(1+\cos\phi).$
20.27. $r = 2(2+\cos\phi).$ **20.28.** $r^2 = \cos 3\phi.$
20.29. $r^2 = 9\cos 2\phi.$ **20.30.** $r = 2\sin 3\phi.$

Задача №21.

Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями.

21.1.

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.2.

$$z = 2 - (x^2 + y^2), \quad x + 2y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$(x + 2y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0).$$

21.3.

$$z = x^2, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad z = 0.$$

21.4.

$$z = 2x^2 + 3y^2, \quad y = x^2, \quad y = x, \quad z = 0.$$

21.5.

$$z = 2x^2 + y^2, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad x = 2, \quad z = 0.$$

21.6.

$$z = x, \quad y = 4, \quad x = \sqrt{25 - y^2}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$(z \geq 0).$$

21.7.

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x, \quad x + y + z = 2, \quad z = 0.$$

21.8.

$$y = 1 - x^2, \quad x + y + z = 3, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.9.

$$z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.10.

$$z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$(x \geq 0, \quad y \geq 0).$$

21.11.

$$2x + 3y - 12 = 0, \quad 2z = y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.12.

$$z = 10 + x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.13.

$$z = x^2, \quad x + y = 6, \quad y = 2x, \quad z = 0.$$

21.14.

$$z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \quad y = x^2 - 1, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

21.15.

$$3y = \sqrt{x}, \quad y = x, \quad x + y + z = 10, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

21.16.

$$y^2 = 1 - x, \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

21.17.

$$y = x^2, \quad x = y^2, \quad z = 3x + 2y + 6, \quad z = 0.$$

21.18.

$$x^2 = 1 - y, \quad x + y + z = 3, \quad y = 2x, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$(y \geq 0, \quad y \geq 2x).$$

21.19.
$$x = y^2, \quad x = 1, \quad x + y + z = 4, \quad z = 0.$$

21.20.
$$z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

21.21.
$$y = x^2, \quad y = 4, \quad z = 2x + 5y + 10, \quad z = 0.$$

21.22.
$$y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

21.23.
$$y = 1 - z^2, \quad y = x, \quad y = -x, \quad z = 0, \quad (z \geq 0).$$

21.24.
$$x^2 + y^2 = 4y, \quad z^2 = 4 - y, \quad z = 0, \quad (z \geq 0).$$

21.25.
$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

21.26.
$$y = x^2, \quad z = 0, \quad y + z = 2.$$

21.27.
$$z^2 = 4 - x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 0, \quad (z \geq 0).$$

21.28.
$$z = x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

21.29.
$$z = y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

21.30.
$$y^2 = x, \quad x = 3, \quad z = x, \quad z = 0.$$

Задача №22.

Обчислити криволінійні інтеграли

22.1. а) $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl$, де L - дуга кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

22.2. а) $\oint\limits_L (x^2 + y^2)\, dl$, де L - коло $x^2 + y^2 = 4$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2\, dy - y^2\, dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} - дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$.

22.3. а) $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{OB} - відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0, 0)$ і $B(2, 2)$;

б) $\int\limits_{L_{OA}} (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$, де L_{OA} - дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

22.4. а) $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\, dl$, де L_{AB} - відрізок прямої AB, що з'єднує точки $A(-1, 0)$; $B(0, 1)$;

б) $\oint\limits_L (x + 2y)\, dx + (x - y)\, dy$, де L - коло $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатньому напрямку обходу.

22.5. а) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB, що з'єднує точки $A(0,4)$; $B(4,0)$;

б) $\oint\limits_{L}(x^2y-x)\,dx+(y^2x-2y)\,dy$, де L - дуга еліпса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ при додатньому напрямку обходу.

22.6. а) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x+2y+5}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB, що з'єднує точки $A(0;-2)$, $B(1;0)$.

б) $\oint\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx+x^2y\,dy$, де L_{AB} - дуга еліпса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

22.7. а) $\int\limits_{L_{AB}} y\,dl$, де L - дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, що знаходиться між точками $A(1,0)$ і $B(0,1)$;

б) $\int\limits_{L_{OBA}} 2xy\,dx-x^2\,dy$, де L_{OBA} - ламана OBA ($O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,1)$).

22.8. а) $\int\limits_{L_{OB}} y\,dl$, де L_{OB} - дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$ між точками $O(0,0)$ і $B(35/6,\sqrt{35}/3)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(1,1)$, $B(3,4)$).

22.9. а) $\int\limits_{L}(x^2+y^2+z^2)\,dl$, де L - дуга кривої $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\sqrt{3}t$, $0\le t\le 2\pi$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} \cos y\,dx-\sin x\,dy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(2\pi,-2\pi)$, $B(-2\pi,\pi)$).

22.10. а) $\int\limits_{L_{OB}} x\,dl$, де L_{OB} - відрізок прямої OB ($O(0,0)$, $B(1,2)$).

б) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(1,2)$, $B(3,6)$).

22.11. а) $\int\limits_{L}\sqrt{2y}\,dl$, де L — перша арка циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} xy\,dx+(y-x)\,dy$, де L_{AB} - дуга кубічної параболи $y=x^3$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

22.12. а) $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L_{OA} - відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ і $A(1,2)$;

б) $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2+y^2)\,dx+(x+y^2)\,dy$, де L_{ABC} - ламана ABC ($A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$).

22.13. а) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(0,-2)$, $B(4,0)$).

б) $\int\limits_{L_{OB}} xy^2\,dx+yz^2\,dy-x^2z\,dz$, де L_{OB} - відрізок прямої OB ($O(0,0,0)$, $B(-2,4,5)$).

22.14. а) $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами $O(0,0)$; $A(4,0)$; $B(4,2)$; $C(0,2)$.

б) $\int\limits_{L_{OA}} y\,dx+x\,dy$, де L_{OA} - дуга кола $x=R\cos t$, $y=R\sin t$; $O(R,0)$; $A(0,R)$.

22.15. а) $\int\limits_{L_{ABO}} (x+y)\,dl$, де L_{ABO} - контур трикутника з вершинами $A(1,0)$; $B(0,1)$; $O(0,0)$.

б) $\int\limits_{L_{OA}} xy\,dx+(y-x)\,dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y^2=x$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

22.16. а) $\int\limits_{L} \frac{z^2\,dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} x\,dx+y\,dy+(x-y+1)\,dz$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$).

22.17. а) $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)\,dl$, де L_{OAB} - контур трикутника з вершинами $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx+x^2y\,dy$, де L_{AB} — дуга параболи $y^2==4-4x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

22.18. а) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L — дуга кривої $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

б) $\int\limits_{L_{OB}} xy\,dx + (y - x)\,dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

22.19. а) $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, де L - коло $x = 2\cos y$; $y = 2\sin t$.

б) $\int\limits_{L_{OB}} (xy - y^2)\,dx + x\,dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

22.20. а) $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами $O(0,0)$; $A(5,0)$; $B(5,3)$; $C(0,3)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} x\,dy - y\,dx$, де L_{AB} - дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$; від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

22.21. а) $\oint\limits_L (x^2 + y^2)\,dl$, де L - коло $x = \cos t$, $y = \sin t$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} (xy - x)\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

22.22. а) $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})\,dl$, де L_{AB} - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1,0)$ і $B(0,1)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)\,dx + x^2 y\,dy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(1,0)$, $B(0,2)$).

22.23. а) $\int\limits_L xy\,dl$, де L_{OAB} - контур квадрата зі сторонами $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} 2xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, де L_{AB} - дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ ($A(1,0,0)$, $B(1,0,2\pi)$).

22.24. а) $\int\limits_L y^2\,dl$, де L - перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}\,dx + x\,dy$, де L_{AB} - дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

22.25. а) $\int\limits_{L_{ABCD}} xy\,dl$, де L_{ABCD} - контур прямокутника з вершинами $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$.

б) $\oint\limits_L ydx - xdy$, де L - дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, яка пробігається в додатньому напрямку обходу.

22.26. а) $\int\limits_L y\,dl$, де L - дуга параболи $y^2 = 2x$, яка відтинається параболою $x^2 = 2y$.

б) $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(2,2)$.

22.27. а) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(4,0)$, $B(6,1)$).

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де L_{AB} - ламана лінія $y = |x|$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$.

22.28. а) $\int\limits_L y(x^2 + y^2)^2\,dl$, де L — перша чверть кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

б) $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} - відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0,0)$ і $A(2,1,-1)$.

22.29. а) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ і $B(2,2,2)$.

б) $\oint\limits_L xdy - ydx$, де L - контур трикутника з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при додатньому напрямку обходу.

22.30. а) $\int\limits_{L_{AB}} (xy + x^2)\,dl$, де L_{AB} - відрізок прямої AB ($A(1,1)$, $B(3,3)$).

б) $\int\limits_{L_{ACB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$, де L_{ACB} - ламана ACB ($A(2,0)$, $C(5,0)$, $B(5,3)$).

Задача №23.

В пункті а) обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S — частина площини (p), яка відтинається координатними площинами; в пункті б) обчислити поверхневий інтеграл другого роду.

23.1. а) $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)\, dS, \quad (p): x + 3y + z = 3;$

б) $\iint\limits_S (y^2 + z^2)\, dy\, dz$, де S - частина поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{i}$), яка відтинається площиною $x = 0$.

23.2. а) $\iint\limits_S (2 + y - 7x + 9z)\, dS, \quad (p): 2x - y - 2z = -2;$

б) $\iint\limits_S z^2\, dx\, dy$, де S - зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

23.3. а) $\iint\limits_S (6x + y + 4z)\, dS, \quad (p): 3x + 3y + z = 3;$

б) $\iint\limits_S z\, dx\, dy + y\, dx\, dz + x\, dy\, dz$, де S - зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

23.4. а) $\iint\limits_S (x + 2y + 3z)\, dS, \quad (p): x + y + z = 2;$

б) $\iint\limits_S (z + 1)\, dx\, dy$, де S -зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

23.5. а) $\iint\limits_S (3x - 2y + 6z)\, dS, \quad (p): 2x + y + 2z = 2;$

б) $\iint\limits_S y\, z\, dy\, dz + x\, z\, dx\, dy + x\, y\, dx\, dy$, де S - верхня сторона площини $x + y + z = 4$, яка відтинається координатними площинами.

23.6. а) $\iint\limits_S (2x + 5y - z)\, dS, \quad (p): x + 2y + z = 2;$

б) $\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, яка лежить в першому октанті.

23.7. а) $\iint\limits_S (5x - 8y - z)\, dS, \quad (p): 2x - 3y + z = 6;$

б) $\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dz + z\, dx\, dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

23.8. а) $\iint\limits_S (3y - x - z)\, dS, \quad (p): x - y + z = 2;$

б) $\iint\limits_S xz\, dx\, dy + xy\, dy\, dz + yz\, dx\, dz$, де S - верхня частина площини $x + y + z = 1$, що відтинається координатними площинами.

23.9. а) $\iint\limits_S (3y - 2x - 2z)\, dS, \quad (p): 2x - y - 2z = -2;$

б) $\iint\limits_S yz\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + xy\, dx\, dz$, де S - зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка відтинається координатними площинами $z = 0$, $z = 5$.

23.10. а) $\iint\limits_S (2x - 3y + z)\, dS, \quad (p): x + 2y + z = 2;$

б) $\iint\limits_S y^2 z\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + x^2 y\, dx\, dz$, де S - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

23.11. а) $\iint\limits_S (5x + y - z)\, dS, \quad (p): x + 2y + 2z = 2;$

б) $\iint\limits_S (x^2 + y^2) z\, dx\, dy$, де S - зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

23.12. а) $\iint\limits_S (3x + 2y + 2z)\, dS, \quad (p): 3x + 2y + 2z = 6;$

б) $\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + z^2\, dx\, dy$, де S - частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$, яка лежить між площинами $z = 0$, $z = 1$.

23.13. а) $\iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS$, $\quad (p): 2x+y+z=2$;

б) $\iint\limits_S (2y^2-z)\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=2$.

23.14. а) $\iint\limits_S (9x+2y+z)\,dS$, $\quad (p): 2x+y+z=4$;

б) $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, де S — частина поверхні гіперболоїда $x^2+y^2=z^2+1$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площинами $z=0$, $z=\sqrt{3}$.

23.15. а) $\iint\limits_S (3x+8y+8z)\,dS$, $\quad (p): x+4y+2z=8$;

б) $\iint\limits_S xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz+xz\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка лежить в першому октанті.

23.16. а) $\iint\limits_S (4y-x+4z)\,dS$, $\quad (p): x-2y+2z=2$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$(нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=4$.

23.17. а) $\iint\limits_S (7x+y+2z)\,dS$, $\quad (p): 3x-2y+2z=6$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz-z\,dx\,dy$, де S — частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площинами $z=0$, $z=3$.

23.18. а) $\iint\limits_S (2x+3y+z)\,dS$, $\quad (p): 2x+3y+z=6$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz-z^2\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z=3-x^2-y^2$(нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=0$.

23.19. а) $\iint\limits_S (4x-y+z)\,dS$, $\quad (p): x-y+z=2$;

б) $\iint\limits_S yz\,dy\,dz-x^2\,dx\,dz-y^2\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{j}$), яка відтинається площинами $y=0$, $y=1$.

23.20. а) $\iint\limits_S (6x-y+8z)\,dS$, $\quad (p): x+y+2z=2$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+2y^2\,dx\,dz-z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$(нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=1$.

23.21. а) $\iint\limits_S (4x-4y-z)\,dS$, $\quad (p): x+2y+2z=4$;

б) $\iint\limits_S 2x\,dy\,dz+(1-z)\,dx\,dy$, де S - внутрішня сторона циліндра $x^2+y^2=4$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=1$.

23.22. а) $\iint\limits_S (2x+5y+z)\,dS$, $\quad (p): x+y+2z=2$;

б) $\iint\limits_S 2x\,dy\,dz-y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона замкнутої поверхні, утвореної параболоїдом $3z=x^2+y^2$ і півсферою $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

23.23. а) $\iint\limits_S (4x-y+4z)\,dS$, $\quad (p): 2x+2y+z=4$;

б) $\iint\limits_S 4x\,dy\,dz+2y\,dx\,dz-z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=4$.

23.24. а) $\iint\limits_S (5x+2y+2z)\,dS$, $\quad (p): x+2y+z=2$;

б) $\iint\limits_S (x+z)\,dy\,dz+(z+y)\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона циліндра $x^2+y^2=1$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=2$.

23.25. а) $\iint\limits_S (2x+5y+10z)\,dS$, $\quad (p): 2x+y+3z=6$;

б) $\iint\limits_S 3x\,dy\,dz - y\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $9-z=x^2+y^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=0$.

23.26. а) $\iint\limits_S (2x+15y+z)\,dS$, $\quad (p): x+2y+2z=2$;

б) $\iint\limits_S (y-x)\,dy\,dz + (z-y)\,dx\,dz + (x-z)\,dx\,dy$, де S - внутрішня сторона замкнутої поверхні, утвореної конусом $x^2=y^2+z^2$ і площиною $x=1$.

23.27. а) $\iint\limits_S (3x+10y-z)\,dS$, $\quad (p): x+3y+2z=6$;

б) $\iint\limits_S 3x^2\,dy\,dz - y^2\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $1-z=x^2+y^2$, (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=0$.

23.28. а) $\iint\limits_S (2x+3y+z)\,dS$, $\quad (p): 2x+2y+z=2$;

б) $\iint\limits_S (1+2x^2)\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площинами $z=0$, $z=4$.

23.29. а) $\iint\limits_S (5x-y+5z)\,dS$, $\quad (p): 3x+2y+z=6$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dz + y\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=4-z$, (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\overrightarrow{k}$), яка відтинається площиною $z=0$.

23.30. а) $\iint\limits_S (x+3y+2z)\,dS$, $\quad (p): 2x+y+2z=2$;

б) $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dy\,dz - y^2\,dx\,dz + 2yz^2\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$ (нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ якої утворює тупий кут з ортом $\overrightarrow{j}$), яка відтинається площинами $y=0$, $y=1$.

Задача №24.

Задано векторне поле $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ і площину $Ax+By+Cz+D=0$ (p), яка разом з координатними площинами утворює піраміду V. Нехай S — основа піраміди, яка належить площині (p); L — контур, який обмежує S; $\overrightarrow{n}$ — зовнішня нормаль до S. Обчислити: а) циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{a}$ вздовж замкненого контура L, застосувавши формулу Стокса до контура L і обмеженої ним поверхні S з нормаллю $\overrightarrow{n}$; б) потік векторного поля $\overrightarrow{a}$ через повну поверхню піраміди V в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні, застосувавши формулу Остроградського.

24.1.

$$\overrightarrow{a} = 3x\overrightarrow{i} + (y+z)\overrightarrow{j} + (x-z)\overrightarrow{k}, (p): x+3y+z=3.$$

24.2.

$$\overrightarrow{a} = (3x-1)\overrightarrow{i} + (y-x+z)\overrightarrow{j} + 4z\overrightarrow{k}, (p): 2x-y-2z=2.$$

24.3.

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (y+z)\overrightarrow{k}, (p): 3x+3y+z=3.$$

24.4.

$$\overrightarrow{a} = (x+z)\overrightarrow{i} + (z-x)\overrightarrow{j} + (x+2y+z)\overrightarrow{k}, (p): x+y+z=2.$$

24.5.

$$\overrightarrow{a} = (y+2z)\overrightarrow{i} + (x+2z)\overrightarrow{j} + (x-2z)\overrightarrow{k}, (p): 2x+y+2z=2.$$

24.6.

$$\overrightarrow{a} = (x+z)\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + (x+y-z)\overrightarrow{k}, (p): x+2y+z=2.$$

24.7.
$$\overrightarrow{a} = (3x - y)\overrightarrow{i} + (2y + z)\overrightarrow{j} + (2z - x)\overrightarrow{k}, (p) : 2x - 3y + z = 6.$$
24.8.
$$\overrightarrow{a} = (2y + z)\overrightarrow{i} + (x - y)\overrightarrow{j} - 2z\overrightarrow{k}, (p) : x + 3y + z = 3.$$
24.9.
$$\overrightarrow{a} = (x + y)\overrightarrow{i} + 3y\overrightarrow{j} + (y - z)\overrightarrow{k}, (p) : 2x - y - 2z = -2.$$
24.10.
$$\overrightarrow{a} = (x + y - z)\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j} + (x + 2z)\overrightarrow{k}, (p) : x + 2y + z = 2.$$
24.11.
$$\overrightarrow{a} = (y - z)\overrightarrow{i} + (2x + y)\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, (p) : 2x + y + z = 2.$$
24.12.
$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + (y - 2z)\overrightarrow{j} + (2x - y + 2z)\overrightarrow{k}, (p) : x + 2y + 2z = 2.$$
24.13.
$$\overrightarrow{a} = (x + 2z)\overrightarrow{i} + (y - 3z)\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, (p) : 3x + 2y + 2z = 6.$$
24.14.
$$\overrightarrow{a} = 4x\overrightarrow{i} + (x - y - z)\overrightarrow{j} + (3y + 2z)\overrightarrow{k}, (p) : 2x + y + z = 4.$$
24.15.
$$\overrightarrow{a} = (2z - x)\overrightarrow{i} + (x + 2y)\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}, (p) : x + 4y + 2z = 8.$$
24.16.
$$\overrightarrow{a} = 4z\overrightarrow{i} + (x - y - z)\overrightarrow{j} + (3y + z)\overrightarrow{k}, (p) : x - 2y + 2z = 2.$$
24.17.
$$\overrightarrow{a} = (x + y)\overrightarrow{i} + (y + z)\overrightarrow{j} + 2(z + x)\overrightarrow{k}, (p) : 3x - 2y + 2z = 6.$$
24.18.
$$\overrightarrow{a} = (x + y + z)\overrightarrow{i} + 2z\overrightarrow{j} + (y - 7z)\overrightarrow{k}, (p) : 2x + 3y + z = 6.$$
24.19.
$$\overrightarrow{a} = (2x - z)\overrightarrow{i} + (x + 2z)\overrightarrow{j} + (x + 2z)\overrightarrow{k}, (p) : x - y + z = 2.$$
24.20.
$$\overrightarrow{a} = (2y - z)\overrightarrow{i} + (x + y)\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}, (p) : x + 2y + 2z = 4.$$
24.21.
$$\overrightarrow{a} = (2z - x)\overrightarrow{i} + (x - y)\overrightarrow{j} + (3x + z)\overrightarrow{k}, (p) : x + y + 2z = 2.$$
24.22.
$$\overrightarrow{a} = (x + z)\overrightarrow{i} + (x + 3y)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}, (p) : x + y + 2z = 2.$$
24.23.
$$\overrightarrow{a} = (x + z)\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + (2x - y)\overrightarrow{k}, (p) : 2x + 2y + z = 4.$$
24.24.
$$\overrightarrow{a} = (3x + y)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}, (p) : x + 2y + z = 2.$$
24.25.
$$\overrightarrow{a} = (y + z)\overrightarrow{i} + (2x - z)\overrightarrow{j} + (y + 3z)\overrightarrow{k}, (p) : 2x + y + 3z = 6.$$

24.26.

$$\overrightarrow{a} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+6y)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}, (p): x+2y+2z=2.$$

24.27.

$$\overrightarrow{a} = (2y-z)\overrightarrow{i} + (x+2y)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}, (p): x+3y+2z=6.$$

24.28.

$$\overrightarrow{a} = (y+z)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + (y-2z)\overrightarrow{k}, (p): 2x+2y+z=2.$$

24.29.

$$\overrightarrow{a} = (x+z)\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + (2x-y)\overrightarrow{k}, (p): 3x+2y+z=6.$$

24.30.

$$\overrightarrow{a} = (2z-x)\overrightarrow{i} + (x+2y)\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}, (p): x+4y+2z=8.$$

Розділ 6

Ряди

Література:

[1]Кн.2; [2]Ч.2; [3]Ч.2; [4]; [5]Кн.2; [10].

6.1 Теоретичні питання

Числові ряди. Збіжність і сума ряду. Залишок ряду. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами. Теорема Лейбніца. Абсолютно і умовно збіжні ряди. Властивості абсолютно збіжних рядів.

Функціональні ряди. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних рядів. Теореми про неперервність суми функціональних рядів, про їх почленне інтегрування та диференціювання.

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал і радіус збіжності степенового ряду. Рівномірна збіжність степеневого ряду, неперервність його суми, почленне інтегрування та диференціювання степених рядів. Ряд Тейлора (Маклорена). Розклад в ряд Тейлора функцій e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$. Застосування степеневих рядів.

Ряди Фур'є, коефіцієнти Фур'є.

6.2 Приклади

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Розв'язок.

а) Оскільки $\ln n < n (n \geq 2)$, то $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} (n \geq 2)$, а $\frac{1}{n}$ —загальний член гармонічного ряду, що розбігається. Тому за ознакою порівняння заданий ряд також розбігається.

б) Маємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} : \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{3} < 1$. Ряд збіжний за ознакою Даламбера.

в) Маємо $u_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$, тому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 < 1$$

Отже, за ознакою Коші даний ряд збіжний.

г) Замінимо в заданому виразі загального члена ряду $u_n = f(n)$ номер n неперервною змінною і впевнюємося, що одержана функція $f(x)$ є неперервною і спадною на всьому нескінченному інтервалі зміни x. Оскільки невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x} dx = \lim_{b\to b} \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-3} d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)|_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{2\ln^2 b}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2},$$

збігається, то за інтегральною ознакою заданий ряд також збігається.

д) Оскільки $u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = = 0$, то виконані умови ознаки Лейбніца, і заданий ряд збігається. Ряд з абсолютних величин членів даного ряду, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, розбігається. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ збігається умовно.

Приклад 2. Знайти область збіжності функціональних рядів

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}.$$

Розв'язок.

а) Оскільки $|f_n(x)| = \frac{1}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}$ і $x > -2$,то застосовуючи ознаку Коші, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}} == \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}3(x+2)^{1/2}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Отже, ряд збіжний, якщо $\frac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, тобто при $x > -\frac{17}{9}$.

При $x = -\frac{17}{9}$ одержимо знакопереміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

який збігається за ознакою Лейбніца.

Таким чином, область збіжності даного ряду — півінтервал $[-17/9, +\infty)$.

б) Тут $C_n = \frac{n^2}{2^n}$, $C_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$. Отже

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n(n+1)^2} = 2.$$

Інтервал збіжкості ряду — $(-2; 2)$. Дослідимо збіжність ряду на краях цього інтервалу. При $x = 2$ і $x = -2$ степеневий ряд набуде вигляду відповідно $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$. Обидва ряди розбігаються (не виконується необхідна умова збіжності). Отже, область збіжності даного ряду: $-2 < x < 2$.

Приклад 3. В пункті а) обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім проінтегрувавши його почленно; в пункті б) знайти три перших відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

$$\text{а)} \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad \text{б)} y' = 2x + y^3, y(1) = 1.$$

′.

а) Степеневий ряд

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + ...,$$

що одержується із відомого розкладу e^x заміною x на $(-x^2)$, збігається при будь-яких значенях x. Замінивши підінтегральну функцію її розкладом в ряд і інтегруючи, одержимо

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + ...\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + ...\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} + ...$$

Ми одержали шуканий інтеграл у вигляді знакопереміжного ряду. Оскільки $\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0,001$, а похибка за абсолютною величиною менша ніж модуль першого з відкинутих членів, то залишивши п'ять членів, матимемо з заданою точністю

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx == 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747.$$

б) Точка $x = 1$ не є особливою для даного рівняння, тому його розв'язок будемо шукати у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + ...$$

Знайдемо $f''(x) = 2 + 3y^2y'$ та $f(1) = 1$, $f'(1) = 2 + 1^3 = 3$, $f''(1) = 2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 11$. Підставивши знайдені значення похідних в шуканий ряд, одержимо розв'язок заданого рівняння

$$y = 1 + \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{11}{2!}(x-1)^2 + ...$$

Приклад 4. Розкласти періодичну з періодом 2 функцію

$$f(x) = \{ 1 \,, \quad -1 \le x < 0, x, \quad 0 \le x \le 1. \text{ в ряд Фур'є.}$$

′. Обчислимо коефіцієнти Фур'є.

$$a_0 = \int_{-1}^{0} 1 \cdot dx + \int_0^1 x dx = x|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \int\limits_{-1}^{0} \cos n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1} x \cos n\pi x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \cos n\pi x dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{array} \right| = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} +$$

$$+x \cdot \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} \sin n\pi x dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2},$$

тобто

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{-2}{(\pi(2k-1))^2}.$$

$$b_n = \int\limits_{-1}^{0} \sin n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1} x \sin n\pi x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin n\pi x dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{array} \right| = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} -$$

$$-x \cdot \Big|\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} \cos n\pi x dx =$$

$$= -\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_{0}^{1} = \frac{-1}{n\pi}.$$

Отже, шуканий ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos(2n-1)\pi x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{1}{n}\sin n\pi x\right).$$

6.3 Завдання теми 6

Задача №25.

Дослідити на збіжність ряди:

25.1.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

25.2.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

25.3.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

25.4.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}; \quad \text{д) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}.$$

25.5.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}.$$

25.6.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}n}{n^3+2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}; \quad \text{д) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}.$$

25.7.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}.$$

25.8.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}.$$

25.9.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin^n\frac{\pi}{4n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$$

25.10.

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}.$$

25.11.

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{5^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

25.12.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{3^n (n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}.$$

25.13.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln n}{n^2-3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n (n-1)^2;$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

25.14.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+\sin(n\pi/2))}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

25.15.

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{6}\pi; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

25.16.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n+\ln n}}.$$

25.17.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$$

25.18.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin\frac{\pi}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

25.19.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}.$$

25.20.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin\frac{\pi n}{4}}{n^2}\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2};$$

$$\text{г)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

25.21.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{n\left(3+\sin\frac{n\pi}{4}\right)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} n^3\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$$

25.22.

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}; \quad \text{д)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

25.23.

$$\text{а)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}e^{-n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

25.24.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}.$$

25.25.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\ldots(2n+5)}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2};$$

$$\text{г)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}.$$

25.26.

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cos\frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}.$$

25.27.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n};$$

$$г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

25.28.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4-5n}; \quad б) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n};$$

$$г) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

25.29.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n};$$

$$г) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}.$$

25.30.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}; б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}; в) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n};$$

$$г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Задача №26.

Знайти область збіжності функціональних рядів

26.1.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

26.2.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

26.3.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

26.4.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}.$$

26.5.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

26.6.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

26.7.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n;\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}.$$

26.8.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+8x+6)^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!x^n}{n^n}.$$

26.9.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n;\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}.$$

26.10.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

26.11.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n;\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

26.12.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n;\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

26.13.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}.$$

26.14.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$$

26.15.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}x^n.$$

26.16.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!x^n;\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}.$$

26.17.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

26.18.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5x^{2n}};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$$

26.19.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

26.20.

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

26.21.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2+1)}(25x^2+1)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+!}\frac{(x+1)^{2n-1}}{2n-1}.$$

26.22.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}.$$

26.23.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^3+2} \cdot \frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

26.24.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}x^n.$$

26.25.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+3)^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}.$$

26.26.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}.$$

26.27.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

26.28.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+4}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{n+1}.$$

26.29.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty}(5-x^2)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

26.30.

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(x+2)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

Задача №27.

В пункті а) обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім проінтегрувавши його почленно; в пункті б) знайти три перших відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

27.1.

$$\text{а)} \int\limits_0^{0{,}25} \ln(1+\sqrt{x})dx; \quad \text{б)}\ y' = xy + e^y, y(0) = 0.$$

27.2.

$$\text{а)} \int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx; \quad \text{б)}\ y' = x^2y^2 + 1, y(0) = 1.$$

27.3.

$$\text{а)} \int\limits_0^{0{,}2} \sqrt{x}e^{-x}dx; \quad \text{б)}\ y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

27.4.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx; \quad \text{б)}\ y' = x^3 + y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

27.5.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}2} \sqrt{x} \cos x dx; \quad \text{б)}\ y' = x + y^2, y(0) = -1.$$

27.6.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \ln(1 + x^3) dx; \quad \text{б)}\ y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1.$$

27.7.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{1} x^2 \sin x dx; \quad \text{б)}\ y' = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1.$$

27.8.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{1} e^{-x^2/2} dx; \quad \text{б)}\ y' = e^x - y^2, y(0) = 0.$$

27.9.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \sqrt{1 + x^2} dx; \quad \text{б)}\ y' = x + y + y^2, y(0) = 1.$$

27.10.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{1 + x^5}; \quad \text{б)}\ y' = x^2 + y^2, y(0) = 1.$$

27.11.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{1} \sqrt[3]{1 + x^2/4} dx; \quad \text{б)}\ y' = x^2 y^2 + y \sin x, y(0) = \frac{1}{2}.$$

27.12.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \frac{\sin x^2}{x} dx; \quad \text{б)}\ y' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3}.$$

27.13.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}1} \frac{e^x - 1}{x} dx; \quad \text{б)}\ y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1.$$

27.14.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} x^2 \cos 3x dx; \quad \text{б)}\ y' = x + e^y, y(0) = 0.$$

27.15.

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{0{,}5} \ln(1 + x^2) dx; \quad \text{б)}\ y' = y\cos x + 2\cos y, y(0) = 0.$$

27.16.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/4} dx; \quad \text{б) } y' = x^2 + 2y^2, y(0) = 0,2.$$

27.17.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx; \quad \text{б) } y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = 0,5.$$

27.18.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx; \quad \text{б) } y' = e^{\sin x} + x, y(0) = 0.$$

27.19.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx; \quad \text{б) } y' = xy - y^2, y(0) = 0,2.$$

27.20.

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \sin x^2 dx; \quad \text{б) } y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1.$$

27.21.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1 + x)}{x} dx; \quad \text{б) } y' = x \sin x - y^2, y(0) = 1.$$

27.22.

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \cos \sqrt[3]{x} dx; \quad \text{б) } y' = 2x^2 - xy, y(0) = 0.$$

27.23.

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \sqrt{x} \sin x dx; \quad \text{б) } y' = x - 2y^2, y(0) = 0,5.$$

27.24.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } y' = xe^x + 2y^2, y(0) = 0.$$

27.25.

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \cos \frac{x^2}{4} dx; \quad \text{б) } y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1.$$

27.26.

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx; \quad \text{б) } y' = xy + e^x, y(0) = 0.$$

27.27.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx; \quad \text{б)} y' = ye^x, y(0) = 1.$$

27.28.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,4} \sqrt{1-x^3}dx; \quad \text{б) } y' = 2\sin x + xy, y(0) = 0.$$

27.29.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx; \quad \text{б) } y' = x^2 + e^y, y(0) = 0.$$

27.30.

$$\text{а) } \int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx; \quad \text{б) } y' = x^2 + y, y(0) = 1.$$

Задача №28.

Розкласти періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x)$ в ряд Фур'є.

28.1.

$$f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1.$$

28.2.

$$f(x) = 2x, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1.$$

28.3.

$$f(x) = e^x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.4.

$$f(x) = |x| - 5, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.5.

$$f(x) = \{\, 1\ , \quad -1 \le x < 0, x, \quad 0 < x \le 1, \quad l = 1.$$

28.6.

$$f(x) = x, \quad 1 < x < 3, \quad l = 1.$$

28.7.

$$f(x) = \{\, 0\ , \quad -2 \le x < 0, x, \quad 0 \le x < 1, 2 - x, \quad 1 \le x \le 2, \quad l = 2.$$

28.8.

$$f(x) = 10 - x, \quad 5 < x < 15, \quad l = 5.$$

28.9.

$$f(x) = \{\, 1\ , \quad -1 \le x < 0, 1/2, \quad x = 0, x, \quad 0 < x \le 1, \quad l = 1.$$

28.10.

$$f(x) = 5x - 1, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5.$$

28.11.

$$f(x) = \{\, 0\ , \quad -3 < x \le 0, x, \quad 0 < x < 3, \quad l = 3.$$

28.12.

$$f(x) = 3 - x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.13.

$$f(x) = \{\, 1\ , \quad 0 < x < 1, -1, \quad 1 < x < 2, \quad l = 1.$$

28.14.

$$f(x) = \{\, 0\ , \quad -2 < x < 0, 2, \quad 0 < x < 2, \quad l = 2$$

28.15.

$$f(x) = \{ x\ , \quad 0 \le x \le 1, 1, \quad 1 < x < 2, 3 - x, \quad 2 \le x \le 3, \quad l = 3.$$

28.16.

$$f(x) = 2x - 3, \quad -3 < x < 3, \quad l = 3.$$

28.17.

$$f(x) = \{ 1\ , \quad 0 < x < 3/2, -1, \quad 3/2 < x < 3, \quad l = 3.$$

28.18.

$$f(x) = 3 - |x|, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5.$$

28.19.

$$f(x) = \{ -x, \quad -4 < x < 0, 1, \quad x = 0, 2, \quad 0 < x < 4, \quad l = 4.$$

28.20.

$$f(x) = 1 + x, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1.$$

28.21.

$$f(x) = \{ -1, \quad -2 < x < 0, -1/2, \quad x = 0, x/2, \quad 0 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.22.

$$f(x) = 2x + 2, \quad -1 < x < 3, \quad l = 2.$$

28.23.

$$f(x) = \{ 3\ , \quad -3 < x < 0, 3/2, \quad x = 0, -x, \quad 0 < x < 3, \quad l = 3.$$

28.24.

$$f(x) = 1 - |x|, \quad -3 < x < 3, \quad l = 3.$$

28.25.

$$f(x) = \{ -2, \quad -4 < x < 0, -1/2, \quad x = 0, 1 + x, \quad 0 < x < 4, \quad l = 4.$$

28.26.

$$f(x) = 4x - 3, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5.$$

28.27.

$$f(x) = \{ x + 2, \quad -2 < x < -1, 1, \quad -1 \le x \le 1, 2 - x, \quad 1 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.28.

$$f(x) = \{ -1/2, \quad -6 < x < 0, 1, \quad 0 < x < 6, \quad l = 6$$

28.29.

$$f(x) = \{ -2x, \quad -2 < x < 0, 2, \quad x = 0, 4, \quad 0 < x < 2, \quad l = 2.$$

28.30.

$$f(x) = |x| - 3, \quad -4 < x < 4, \quad l = 4.$$

Частина III

Розділ 7

Теорія ймовірностей та математична статистика

Література:

[1]Кн.2; [2]Ч.1; [3]Ч.2; [4]; [12]Ч.1.

7.1 Теоретичні питання

Простір елементарних подій. Випадкові події, операції над подіями та відношення між ними. Ймовірнісний простір. Аксіоми теорії ймовірностей. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

Умовна ймовірність відносно події. Незалежність подій. Ймовірність добутку подій. Теорема повної ймовірності, формули Байєса.

Випадкова величина. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Нормальний, пуассонівський, біноміальний, рівномірний, показниковий розподіли. Випадковий вектор та його розподіл, умовні розподіли та розподіли окремих елементів вектора. Функції від випадкових величин. Розподіл суми незалежних випадкових величин.

Математичне сподівання, дисперсія та інші моментні характеристики випадкових величин; їх властивості. Коваріація, коефіцієнт кореляції.

Нерівність Чебишева. Закони великих чисел (теореми Чебишева, Маркова, Бернуллі, Бореля). Центральна гранична теорема та наслідки з неї (теореми Муавра-Лапласа).

Елементи математичної статистики. Вибірки. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу та їх властивості. Інтервальні оцінки параметрів; довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу. Перевірка гіпотез про розподіл. Елементи регресивного аналізу.

7.2 Приклади

Приклад 1. Із скриньки, що містить 7 білих і 5 чорних кульок, навмання вибрано 3 кульки. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$вибрано хоча б одну білу кульку$\}$,
$B = = \{$вибрано не менш ніж дві білі кульки$\}$.

Розв'язок.

Оскільки всіх кульок є 12 то можливих варіантів вибору трьох кульок є $n = C_{12}^3 = 220$. З цих варіантів є $C_7^k C_5^{3-k}$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) варіантів вибору рівно k білих кульок. Тому подію A

задовольняють

$$m_1 = C_{12}^3 - C_5^3 = 220 - 10 = 210,$$

а подію B —

$$m_2 = C_7^2 C_5^1 + C_7^3 = 21 \cdot 5 + 35 = 140$$

варіантів.

Отже, за класичним означенням ймовірності

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{21}{22} = 0.95, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{7}{11} = 0.64.$$

Приклад 2. Серед виробів заводу 10% бракованих. При перевірці партії виробів виріб з дефектом з ймовірністю 0.95 визнається бракованим, але і якісний виріб з ймовірністю 0.03 визнається бракованим. Випадково вибраний з партії виріб був визнаний бракованим. Яка ймовірність того, що він насправді якісний?

Розв'язок.

Розглянемо повну групу подій (гіпотез)

$$H_1 = \{\text{вибраний виріб якісний}\},$$
$$H_2 = \{\text{вибраний виріб бракований}\}.$$

З умови задачі $\mathbf{P}(H_1) = 0.9$, $\mathbf{P}(H_2) = 0.1$.

Нехай подія $A = \{\text{вибраний виріб визнано бракованим}\}$, тому

$$\mathbf{P}(A/H_1) = 0.03, \quad \mathbf{P}(A/H_2) = 0.95.$$

За формулою Байєса ймовірність того, що вибраний виріб насправді є якісним (хоч був визнаний бракованим) дорівнює

$$\mathbf{P}(H_1/A) = \frac{\mathbf{P}(A/H_1)\,\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A/H_1)\,\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A/H_2)\,\mathbf{P}(H_2)} =$$
$$= \frac{0.03 \cdot 0.9}{0.03 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.1} = 0.221$$

Приклад 3. В пункті а) описані випадковий експеримент і пов'язана з ним випадкова величина ξ; в пункті б) задана щільність розподілу $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $\mathbf{M}\,\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\,\xi$ випадкової величини ξ.

а) Тричі підкидається правильна монета. ξ — кількість гербів, які випали;

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \in (0;1) \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

Розв'язок.

а) В кожному підкиданні поява герба відбувається з ймовірністю 0.5. Оскільки результати окремих підкидань між собою незалежні, то

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C_3^k (0.5)^k (0.5)^{3-k} = \frac{C_3^k}{8}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тобто розподіл випадкової величини ξ такий

$$\mathbf{P}(\xi = 0) = \frac{C_3^0}{8} = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(\xi = 1) = \frac{C_3^1}{8} = \frac{3}{8},$$
$$\mathbf{P}(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{8} = \frac{3}{8}, \quad \mathbf{P}(\xi = 3) = \frac{C_3^3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Згідно означення, функція розподілу

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{k<x} \mathbf{P}(\xi = k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}, & \text{якщо } 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}, & \text{якщо } 2 < x \le 3 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}, & \text{якщо } x > 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{якщо } 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{якщо } x > 3 \end{cases}$$

Для математичного сподівання та дисперсії матимемо

$$\mathbf{M}\,\xi = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,\xi^2 - (\mathbf{M}\,\xi)^2 =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

б) Оскільки

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\ \mathrm{d}y \quad \text{і} \quad \int\limits_{0}^{x} 2y\ \mathrm{d}y = x^2,$$

то

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}.$$

Математичне сподівання

$$\mathbf{M}\,\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2x^2\ \mathrm{d}x = 2\ \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсія

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,\xi^2 - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\ \mathrm{d}x - (\mathbf{M}\,\xi)^2 =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} 2x^3\ \mathrm{d}x - \frac{4}{9} = \frac{x^4}{2}\bigg|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Приклад 4. В пункті а) задано закон розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$; в пункті б) задана щільність розподілу $f_{\xi;\eta}(x;y)$ випадкового вектора $(\xi;\eta)$. Знайти коефіцієнти кореляції $r_{\xi\eta}$ в кожному з пунктів.

28.31.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	0	2
0	0.2	0.3	0.1
1	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & \text{при } 0 \le x \le 1, x \le y \le 1 \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розв'язок.

Знайдемо розподіли випадкових величин ξ та η за формулами:

$$p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = \mathbf{P}(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

тобто

$$\mathbf{P}(\xi = -2) = 0.2 + 0 = 0.2,$$
$$\mathbf{P}(\xi = 0) = 0.3 + 0.2 = 0.5,$$
$$\mathbf{P}(\xi = 2) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

$$\mathbf{P}(\eta = 0) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6,$$
$$\mathbf{P}(\eta = 1) = 0 + 0.2 + 0.2 = 0.4;$$

Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mathbf{M}\,\xi\eta - \mathbf{M}\,\xi\,\mathbf{M}\,\eta}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)},$$

де

$$\mathbf{M}\,\xi = \sum_i x_i p_i, \mathbf{M}\,\eta = \sum_j y_j q_j,$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,\xi^2 - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}\,\xi)^2,$$

$$\mathbf{D}\,\eta = \mathbf{M}\,\eta^2 - (\mathbf{M}\,\eta)^2 = \sum_j y_j^2 q_j - (\mathbf{M}\,\eta)^2,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}\,\xi}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\mathbf{D}\,\eta}, \quad \mathbf{M}\,\xi\eta = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij}.$$

Тому, провівши обчислення, знайдемо

$$\mathbf{M}\,\xi\eta = 0.4, \quad \mathbf{M}\,\xi = 0.2, \quad \mathbf{M}\,\eta = 0.4,$$

$$\sigma(\xi) \approx 1.4, \quad \sigma(\eta) = 0.49 \text{ і}$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{0,4 - 0,08}{1,4 \cdot 0,49} = 0.47.$$

б) Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mathbf{M}\,\xi\eta - \mathbf{M}\,\xi\,\mathbf{M}\,\eta}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)},$$

Рис. 7.1:

де

$$\mathbf{M}\,\xi = \iint\limits_G x f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy, \mathbf{M}\,\eta = \iint\limits_G y f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy,$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,\xi^2 - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \iint\limits_G x^2 f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy - (\mathbf{M}\,\xi)^2,$$

$$\mathbf{D}\,\eta = \mathbf{M}\,\eta^2 - (\mathbf{M}\,\eta)^2 = \iint\limits_G y^2 f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy - (\mathbf{M}\,\eta)^2,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}\,\xi}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\mathbf{D}\,\eta},$$

$$\mathbf{M}\,\xi\eta = \iint\limits_G xy f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy.$$

Область $G = \{0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$ зображено на рис. 7.1
Проведемо обчислення

$$\mathbf{M}\,\xi = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2x(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left.(2x^2y + xy^2)\right|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^2 + x - 3x^3)dx = \left.\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^4\right)\right|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

$$\mathbf{M}\,\xi^2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2x^2(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left.(2x^3y + x^2y^2)\right|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^3 + x^2 - 3x^4)dx = \left.\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{7}{30}.$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \frac{7}{30} - \frac{25}{144} = \frac{43}{720}, \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{43}{5}} \approx 0.244.$$

$$\mathbf{M}\,\eta = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2y(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left.\left(y^2x + \frac{2}{3}y^3\right)\right|_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x^3\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{12}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{M}\,\eta^2 = \int_0^1 dx \int_x^1 2y^2(x+y)dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^3 x + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x^4\right) dx = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{30}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\mathbf{D}\,\eta = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0.194.$$

$$\mathbf{M}\,\xi\eta = \int_0^1 dx \int_x^1 2xy(x+y)dy = \int_0^1 \left(x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}x^4\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^5}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$r_{\xi\eta} \approx \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}}{0.244 \cdot 0.194} \approx 0.44.$$

Приклад 5. Дана згрупована вибірка та знайдені деякі теоретичні частоти попадання в дані інтервали гіпотетичного розподілу. Використовуючи критерій χ^2, при рівні значущості 0.05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.22; -0.14)$	3	2.1
$[-0.14; -0.06)$	6	7.42
$[-0.06; 0.02)$	15	15.89
$[0.02; 0.1)$	25	20.16
$[0.1; 0.18)$	11	
$[0.18; 0.26)$	8	6.79
$[0.26; 0.34)$	2	1.82

Розв'язок.

Знайдемо середини даних інтервалів

$$x_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

де y_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$— послідовні кінці інтервалів.

$$x_1 = -0.18, \quad x_2 = -0.1, \quad x_3 = -0.2, \quad x_4 = 0.6,$$

$$x_5 = 0.14, \quad x_6 = 0.22, \quad x_7 = 0.3.$$

Обчислимо вибіркові середнє та дисперсію (скористаємось незміщеними оцінками):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

де $n = \sum_i n_i$. Тому $n = 70$, $\bar{x} = 0.057$, $s^2 = 0.012$

Знайдемо невідоме значення p_i при $i = 5$ — ймовірності попадання $N(\bar{x},\ s^2)$ -розподіленої випадкової величини в інтервал $[y_{i-1}; y_i]$:

$$p_i = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\ \mathrm{d}t,$$

де $\alpha = \dfrac{y_{i-1} - \bar{x}}{s}$, $\beta = \dfrac{y_i - \bar{x}}{s}$.

Значення p_i можна шукати як за таблицею значень функції Лапласа, так і якимось наближеним методом.

В нашому випадку $p_5 = 0.217$ і відповідна теоретична частота $n \cdot p_5 = 0.217 \cdot 70 = 15.19$.

Якість результатів, одержаних за критерієм Пірсона можна вважати прийнятною якщо всі теоретичні частоти $n \cdot p_i > 5$. В нас теоретичні частоти, що відповідають крайнім інтервалам менші 5. Тому об'єднаємо їх із сусідніми.

Тоді кількість інтервалів стане рівною $k = 7 - 2 = 5$, нові частоти $\bar{n}_1 = 9$, $\bar{n}_2 = 15$, $\bar{n}_3 = 25$, $\bar{n}_4 = 11$, $\bar{n}_5 = 10$ і теоретичні частоти $n \cdot \bar{p}_1 = 9.52$, $n \cdot \bar{p}_2 = 15.89$, $n \cdot \bar{p}_3 = 20.16$, $n \cdot \bar{p}_4 = 15.19$, $n \cdot \bar{p}_5 = 8.61$.

Оскільки

$$\chi^2_{\text{В}} = \sum_i \frac{(\bar{n}_i - n \cdot \bar{p}_i)^2}{n \cdot \bar{p}_i} = 2.62 < 5.99 = \chi^2_{0.95}(k - l - 1),$$

де $l = 2$ — кількість оцінюваних за вибіркою параметрів розподілу, $\chi^2_{0.95}(m)$ — квантиль порядку 0,95 χ^2 -розподілу з m ступенями свободи (визначається за таблицею), то з надійністю 0.95 (при рівні значущості 0.05) гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини узгоджується з емпіричним розподілом вибірки.

7.3 Завдання теми 8

Задача №29.

29.1. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівноймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$чотири останні цифри телефонного номера однакові$\}$; $B = \{$ всі цифри різні$\}$.

29.2. 10 чоловіків і 10 жінок випадковим чином зайняли ряд із 20 місць. Знайти ймовірності таких подій:
$A = \{$жодних два чоловіки не сидять поруч$\}$, $B = \{$всі чоловіки сидять поруч$\}$.

29.3. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій:$A = \{$кожний гравець отримає туза$\}$; $B = \{$один з гравців отримає всі 13 карт однієї масті$\}$.

29.4. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій:$A = \{$двоє певних гравців не отримають жодного туза $\}$; $B = \{$всі тузи попадуть до одного з гравців$\}$.

29.5. В три вагони поїзда заходять дев'ять пасажирів. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$в перший вагон зайде три пасажири$\}$; $B = \{$в кожний вагон зайде по три пасажири$\}$.

29.6. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на другому, третьому і четвертому поверхах не вийде жоден пасажир$\}$; $B = \{$троє пасажирів вийде на сьомому поверсі$\}$.

29.7. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на кожному поверсі вийде по одному пасажиру$\}$;
$B = \{$всі пасажири вийдуть на одному поверсі$\}$.

29.8. З 30 чисел (1, 2,..., 29, 30) випадково вибирається 10 різних чисел. Знайти ймовірності таких подій:
$A = \{$рівно 5 чисел ділиться на 3$\}$; $B = \{$5 чисел парних і 5 непарних, причому рівно одне число ділиться на 10$\}$.

29.9. 8 осіб займають місця з однієї сторони прямокутного стола. Кількість місць дорівнює 12. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$дві певні особи опиняться рядом$\}$; $B = \{$три вільних місця будуть знаходитися рядом$\}$.

29.10. В скринці є 3 білі, 5 чорних і 7 червоних кульок. Навмання вибрали 5 кульок. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$вибрано принаймні одну червону кульку$\}$,
$B = \{$вибрано всі червоні кульки$\}$.

29.11. Із скриньки, що містить 10 кульок, з яких 6 білих і 4 чорних, навмання вибрано 3 кульки. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі вибрані кульки білі$\}$, $B = \{$серед вибраних кульок рівно дві білі$\}$.

29.12. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо.Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі автомобілі поїдуть однією і тією ж вулицею$\}$; $B = \{$певною вулицею поїде три автомобілі$\}$.

29.13. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо.Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$кожною з чотирьох вулиць поїде рівно один автомобіль$\}$; $B = \{$принаймні однією з вулиць не поїде жоден з автомобілів$\}$.

29.14. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладуванні в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$з'виться число, що містить хоча б одну з цифр 2 або 3$\}$, $B = \{$з'явиться число, що не містить цифри 3$\}$.

29.15. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладуванні в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$одержане число складається з послідовних цифр$\}$, $B = \{$з'явиться парне число$\}$.

29.16. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі вибрані карти бубнової масті$\}$, $B = \{$всі вибрані карти однієї масті$\}$.

29.17. З множини всіх послідовностей довжини 10, що складається з цифр 0, 1, 2, випадково вибирається одна. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$послідовність містить рівно 6 нулів, причому 2 з них знаходяться на кінцях послідовності$\}$; $B = \{$послідовність містить рівно 5 одиниць$\}$.

29.18. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$числа 1 і 2 стоять поруч і в порядку зростання$\}$, $B = \{$числа 3, 6 і 9 розміщені поруч в довільному порядку$\}$.

29.19. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на парних місцях стоять парні числа$\}$, $B = \{$сума кожних двох чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10$\}$.

29.20. Яка ймовірність того, що п'ятизначний номер випадково взятого автомобіля в великому місті:$A = \{$має всі цифри різні $\}$; $B = \{$має тільки дві однакові цифри$\}$.

29.21. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 людей $A = \{$випадають на різні місяці року$\}$; $B = \{$випадають на один місяць року$\}$.

29.22. Колода з 36 карт добре перемішана (тобто всі можливі варіанти розташування карт рівноймовірні). Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$чотири тузи розташовані поряд$\}$; $B = \{$місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком 7$\}$.

29.23. Кидається 6 гральних кубиків. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$випаде 3 одиниці, дві трійки і одна шістка $\}$; $B = \{$випадуть різні цифри$\}$.

29.24. 10 варіантів контрольної роботи, написані кожний на окремій карточці, змішуються і розподіляються довільним чином серед восьми студентів, що сидять в одному ряду, причому кожний отримує один варіант. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$варіанти з номерами 1, 2 залишаться невикористаними $\}$; $B = \{$варіанти 1 і 2 дістануться студентам, що сидять поруч$\}$.

29.25. Кидають 10 однакових гральних кубиків. Обчислити ймовірності наступних подій: $A = \{$на жодному з кубиків не випаде 6 очок$\}$; $B = \{$хоча б на одному кубику випаде 6 очок$\}$.

29.26. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівноймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$номер починається з цифри 5$\}$; $B = \{$номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2$\}$.

29.27. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$ серед вибраних карт виявиться хоча б один туз$\}$, $B = \{$буде отримано наступний склад карт: валет, дама і два королі$\}$.

29.28. 7 яблук, 3 апельсина і 5 лимонів розкладаються випадковим чином в три пакета, але так, щоб в кожному була однакова кількість фруктів. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$в кожному з пакетів по одному апельсину$\}$; $B = \{$випадково вибраний пакет не містить апельсинів$\}$.

29.29. 12 осіб, серед яких є C і D шикуються в шеренгу довільним чином. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$ C і D будуть стояти поруч$\}$, $B = \{$між C і D буде знаходитись рівно 4 особи$\}$.

29.30. Вибрано п'ять різних цифр. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$вибрана цифра 1$\}$, $B = \{$вибрані тільки парні цифри$\}$.

Задача №30.

30.1. В трьох скриньках лежать білі та чорні кульки. У першій скриньці — 3 білі і одна чорна, у другій — 6 білих і 4 чорних, у третій — 9 білих і одна чорна. З навмання взятої скриньки виймають одну кульку. Знайти ймовіність того, що вона біла.

30.2. Автомашини випускаються трьома заводами в кількостях 5000, 3000, 4000 в рік, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.1, 0.2. Куплена автомашина виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі?

30.3. В першому ящику 5 білих і 10 чорних кульок, в другому — 3 білих і 7 чорних кульок. З другого ящика в перший переклали кульку, а потім з першого ящика витягли навмання одну кульку. Визначити ймовірність того, що витягнута кулька — біла.

30.4. Кількість вантажних машин, які проходять шосе відноситься до кількості легкових машин, як 3 і 2. Ймовірність того, що машина під'їде на заправку для вантажних машин дорівнює 0.1, а для легкових 0.2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що вона вантажна.

30.5. В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 легкоатлети. Ймовірності виконання норми майстра спорту для кожної групи спортсменів відповідно дорівнюють 0.9, 0.8, 0.75. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає норму майстра спорту.

30.6. В скриньці лежать три кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий склад скриньки рівноможливі. Три рази витягли зі скриньки по одній кулі з поверненням, причому перша куля виявилися чорною, решта — білі. Знайти апостеріорні ймовірності різних складів скриньки.

30.7. 10 студентів розв'язують задачу. Двоє з них вчаться на 5, п'ятеро на 4, троє на 3. Ймовірність розв'язати задачу для кожного студента з цих груп дорівнює відповідно 0.95, 0.8, 0.5. Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана одним із студентів.

30.8. З 10 деталей 4 пофакбованівані. Ймовірність того, що пофарбована деталь важча норми, дорівнює 0.3, а для непофарбованої деталі ця ймовірність дорівнює 0.1. Взята навмання деталь виявилась важчою норми. Знайти ймовірність того, що вона пофарбована.

30.9. В спеціалізовану лікарню поступають в середньому 50% з захворюванням A, 30% — B, 20% — C. Ймовірність повного вилікування для A дорівнює 0.7, B — 0.8, C — 0.9. Пацієнта виписано здоровим. Знайти ймовірність того, що він хворів B.

30.10. Продуктивність першого автомата вдвічі перевищує продуктивність другого. Перший автомат в середньому дає 60% деталей, другий — 84% деталей відмінної якості. Навмання взята деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірнсіть того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

30.11. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний. При підкиданні неправильного кубика одиниця з'являється з ймовірністю 1/9. Навмання вибирають із коробки гральний кубик і підкидають; в результаті випало 1 очко. Знайти ймовірність того, шо було підкинуто правильний кубик.

30.12. Маємо три скриньки. У першій міститься 8 білих і 2 чорних кульки, у другій — 5 білих і 5 чорних, у третій — 2 білих і 8 чорних. Навмання підкидають гральний кубик. Якщо випаде на грані число кратне 2, то навмання беруть дві кульки з першої скриньки, якщо випаде число 5 — дві кульки з другої скриньки, і якщо випаде число, яке не буде кратним 2 і не дорівнює 5 — дві кульки з третьої скриньки. Знайти ймовірність появи двох білих кульок в такому експерименті.

30.13. Прилад, що знаходиться на борту літака може працювати в двох режимах: в умовах нормального крейсерського польоту та в умовах перевантаження. Крейсерський режим відбувається протягом 80% всього часу польоту, умови перевантаження — протягом 20% всього часу польоту. Ймовірність відмови приладу під час польоту в нормальному режимі дорівнює 0.1, а в умовах перевантаження — 0.4. Обчислити надійність приладу (ймовірність безвідмовної роботи) за час польоту.

30.14. Два цехи штампують однотипні деталі. Перший цех дає 5% браку, другий — 10%. Для контролю відібрано 100 деталей з першого цеху та 300 з другого. Всі ці деталі змішали в одну партію, і з неї навмання вибрали одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?

30.15. В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20% телевізорів з прихованим дефектом, другого — 10% і третього — 5%. Яка ймовірність купити якісний телевізор, якщо в магазин надійшло 30% телевізорів з першого заводу, 20% — з другого та 50% — з третього заводу?

30.16. В ящику є 20 тенісних м'ячів, серед них 15 нових і 5 використовуваних. Для гри навмання вибираються два м'ячі і після гри повертаються назад в ящик. Потім для другої гри також навмання вибирають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитись новими м'ячами?

30.17. Із 10 студентів,що прийшли здавати екзамен, два знають 20 білетів із 30, один тільки 15, а решта студентів знають всі 30 білетів. Екзаменатор навмання викликає одного із студентів. Яка ймовірність того, що він здасть екзамен?

30.18. Людині, що має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% — другу, 20,9% — третю та 7,9% — четверту групи крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.

30.19. З множини чисел $E = \{1, 2, ..., 10\}$ навмання послідовно і без повернення беруть два числа. Яка ймовірність того, що перше число більше від другого не менш ніж на 5?

30.20. Студент знає тільки 10 із 25 екзаменаційних білетів. В якому випадку шанси цього студента одержати знайомий білет більші: коли він підходить брати білет першим чи другим?

30.21. В скринці знаходиться кулька невідомого кольору — з рівною ймовірністю біла або чорна. В скриньку кладуть білу кульку і після перемішування навмання витягують одну кульку. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в скриньці залишилась біла кулька?

30.22. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0.8 надходить суміш корисного сигналу з шумом, а з ймовірністю 0.2 — тільки шум. Якщо надходить корисний сигнал з шумом, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0.7; якщо тільки шум, то — з ймовірністю 0.3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність деякого сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

30.23. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0.2. Ймовірність виходу з ладу прилада за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T була зареєстрована відмова прилату. Знайти ймовірність події $A = \{$бракований один вузол$\}$.

30.24. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0.1. Ймовірність виходу з ладу прилада за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність події $A = \{$браковані два вузли$\}$.

30.25. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний, з нерівномірним розподілом маси по об'єму. При підкиданні неправильного кубика шість очок появляється з ймовірністю 1/3. Навмання вибирається із коробки гральний кубик і підкидається; в результаті випало 6 очок. Знайти ймовірність того, що було підкинуто правильний кубик.

30.26. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 1:4:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.01, 0.2. Куплений прилад виявився якісним. Яка ймовірність того, що цей прилад було виготовлено на другому заводі?

30.27. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 2:3:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.1, 0.2. Куплений прилад виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад було виготовлено на першому заводі?

30.28.

Кількість бракованих мікросхем з 10 апріорі вважається рівноможливим від 0 до 2. Навмання вибрані 3 мікросхеми виявились якісними. Яка ймовірність того, що всі мікросхеми якісні?

30.29. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навмання студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений незадовільно.

30.30. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навмання студент відповів на два задані питання.

Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений відмінно чи добре.

Задача №31.

В пункті а) описані випадковий експеримент і пов'язана з ним випадкова величина ξ, в пункті б) задана щільність $f_\xi(x)$ розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $\mathbf{M}\,\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\,\xi$.

31.1.

а) Двічі підкидають гральний кубик. ξ — сума очок, що випали.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

31.2.

а) Шість разів підкидається правильна монета. ξ — модуль різниці числа появ герба і числа появ цифри.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sin^2 x, & \text{якщо } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

31.3.

а) Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8; а для четвертого — 0,7. ξ — число студентів, котрі складуть іспит.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{9}{16}} - x^2, & \text{якщо } |x| \le \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

31.4.

а) Серед п'яти однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього потрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи справного телевізора. ξ — кількість перевірених телевізорів.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

31.5.

а) Гральний кубик підкидають 3 рази. ξ — кількість появ шести очок.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}\sqrt{x}, & \text{якщо } x \in \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

31.6.

а) Із скриньки, в якій лежать 4 білих та 6 чорних кульок беруть навмання 3 кульки. ξ — кількість білих кульок серед них.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

31.7.

а) Садівник посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Ймовірність того, що саджанець яблуні прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. ξ — число саджанців, які приймуться.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

31.8.

а) Чотири однакові електролампочки тимчасово викрутили з відповідних патронів і поклали в ящик. Потім із ящика навмання взяли по одній лампочці і навмання вкрутили в патрони. ξ — число лампочок, які вкручені в ті патрони, з яких вони були викручені.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & \text{якщо } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

31.9.

а) Випробовується 3 прилади. Ймовірність відмови кожного приладу не залежить від відмови інших і дорівнює 0,1. ξ — кількість приладів, що відмовили.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } |x| \le 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}.$$

31.10.

а) Робиться три незалежні постріли в мішень, ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0.8. ξ — кількість влучень.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}(x+1)^2, & \text{якщо } x \in (-1; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1; 3). \end{cases}$$

31.11.

а) На шляху машини 4 світлофори. Кожний з них з ймовірністю 0,5 або дозволяє або забороняє машині подальший рух. ξ — число світлофорів, пройдених машиною без зупинки.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(1 - \cos x), & \text{якщо } x \in (0; \pi); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

31.12.

а) Мішень складається з трьох концентричних кілець. Попадання в центральний круг оцінюється в 4 очки, в середнє кільце — 3 очки, в крайнє — 2 очки і промах — в 0 очок. Відповідні ймовірності попадань в центральний круг, середнє кільце, крайнє кільце і промах дорівнюють 0.4, 0.3, 0.2, 0.1. ξ — сума вибитих очок в результаті двох пострілів.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

31.13.

а) Задана множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ξ — число дільників навмання вибраного натурального числа з множини Ω.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (1; e); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; e). \end{cases}$$

31.14.

а) Два стрільці стріляють кожен в свою мішень і роблять незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність влучання для першого стрільця 0.85, для другого 0.9. $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 — кількість влучань першого стрільця, ξ_2 — кількість влучань другого стрільця.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & \text{якщо } x \in (-2;7); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-2;7). \end{cases}$$

31.15.

а) Є 3 транзистори, кожен з яких з ймовірністю 0.1 має дефект. Транзистор вмикають і, якщо він має дефект, то замінюють іншим. ξ — кількість транзисторів, які будуть випробувані.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{36}(x+1)(x-5), & \text{якщо } x \in (-1;5); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1;5). \end{cases}$$

31.16.

а) Є 3 ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому — 8 стандартних і 2 браковані, у третьому — 5 стандратних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. ξ — число появ стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 3\sin 3x, & \text{якщо } x \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

31.17.

а) Є партія з 10 виробів, серед яких 3 бракованих. Навмання беруть 4 вироби. ξ — кількість бракованих серед них.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} x-\frac{1}{2}, & \text{якщо } x \in (1;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1;2). \end{cases}$$

31.18.

а) Стріляють в ціль три рази. Влучання при окремих пострілах — незалежні події з ймовірністю $\frac{2}{3}$. ξ — кількість влучань при трьох пострілах.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}, & \text{якщо } x \in (0;+\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;+\infty). \end{cases}$$

31.19.

а) Підкидають два гральних кубики. $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 — число, яке випало на першому кубику, ξ_2 — на другому кубику.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}x, & \text{якщо } x \in \left(0;\frac{7}{4}\pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0;\frac{7}{4}\pi\right). \end{cases}$$

31.20.

а) З ящика, в якому лежать 2 білі та 4 чорні кульки беруть навмання 3 кульки. ξ — різниця між кількістю білих та чорних кульок серед них.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{4}{13}(x^3-x), & \text{якщо } x \in (1;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1;2). \end{cases}$$

31.21.

а) В яшику є 6 білих і 4 чорних кульки. З ящика 5 разів підряд витягають кульку, при цьому кожний раз витягнуту кульку повертаютьв ящик і кульку перемішують. ξ — кількість витягнутих білих кульок.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{26}(x^4 - 1), & \text{якщо } x \in (1;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1;2). \end{cases}$$

31.22.

а) В скриньці є кульки з номерами від 1 до 4. Витягли дві кульки. ξ — сума номерів кульок.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{якщо } x \in (0;3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;3). \end{cases}$$

31.23.

а) В мішень стріляють тричі. Ймовірність влучання в мішень при кожному пострілі дорівнює 0.3. ξ — кількість влучань.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2, & \text{якщо } x \in (2;3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (2;3). \end{cases}$$

31.24.

а) Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з ймовірністю 0.1. Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. ПІд час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. ξ — число лампочок, які будуть випробувані.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{якщо } x \in (0;+\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;+\infty). \end{cases}$$

31.25.

а) Стрілець на змаганнях має чотири кулі і стріляє в ціль до першого влучання. Ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0.7. ξ — число промахів.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4}x^3, & \text{якщо } x \in (0;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;2). \end{cases}$$

31.26.

а) Ймовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0.9. Футболіст виконав три такі удари. ξ — число реалізованих шрафних.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

31.27.

а) Один раз кинули три однакові гральні кубики. ξ приймає значення 1, якщо хоча б на одному кубику випаде цифра 6, приймає значення 0, якщо цифра 6 не випала на жодному кубику, але хоча б на одній з граней з'явилась цифра 5; і приймає значення -1 в інших випадках.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(2-x)^2, & \text{якщо } x \in (0;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;2). \end{cases}$$

31.28.

а) Тричі підкидається гральний кубик. $\xi = \xi_1 - -\xi_2$, де ξ_1 — число появ шести очок, ξ_2 — число появ непарної цифри.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & \text{якщо } x \in (1;3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1;3). \end{cases}$$

31.29.

а) Стрілець має 5 куль і стріляє в мішень до першого влучання. Ймовірність влучання при кожному пострілі дорівнює 0.7. ξ — число витрачених куль.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{якщо } x \in (0;+\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;+\infty). \end{cases}$$

31.30.

а) Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, величина стала і дорівнює 0.8. ξ — число верстатів, які потребують уваги за певний проміжок часу.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\frac{2}{3}x, & \text{якщо } x \in \left(0;\frac{3}{2}\pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0;\frac{3}{2}\pi\right). \end{cases}$$

Задача №32.

В пункті а) задано закон розподілу випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$, в пункті б) задана щільність розподілу $f_{\xi\eta}(x,y)$ випадкового вектора $(\xi,\ \eta)$. Знайти коефіцієнти кореляції $r_{\xi\eta}$ в кожному з пунктів.

32.1.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.2.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
1	0	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{28}(xy+y^2), & \text{при } 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.3.

а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
2	0.2	0.1	0
3	0.3	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(xy+x^2), & \text{при } 0 \le x \le 1; x^2 \le y \le x; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.4.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	0.1	0.2	0
2	0.3	0.3	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(1+xy)x, & \text{при } 0 \le x \le 1; x \le y \le \sqrt{x}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.5.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	-1	0
0	0.2	0.3	0
1	0.2	0.1	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.6.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
1	0.2	0.3	0.1
2	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 3(x+y), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.7.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
2	0.1	0.3	0.2
3	0.2	0.1	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(xy+y^2), & \text{при } x \ge 0; 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.8.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.2
0	0.1	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.9.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0.3	0.1	0.4
-1	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x+y)^2, & \text{при } 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.10.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(2y+x), & \text{при } 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.11.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.12.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0.3	0.1	0.2
2	0.2	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x-y), & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.13.

а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
-1	0.2	0.3	0.2
1	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.14.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	4
2	0.1	0.3	0.2
3	0.1	0	0.3

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2+y^2), & \text{при } x^2+y^2 \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.15.

а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0.2	0.3	0.2
2	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.16.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	0	3
-1	0.2	0.1	0
1	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} - x^2 - y^2, & \text{при } x^2 + y^2 \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.17.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	5
-1	0	0.1	0.2
3	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), & \text{при } x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.18.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
2	0.2	0.1	0
3	0.5	0.1	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x+y), & \text{при } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.19.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	0.1	0.2	0
3	0.1	0.5	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x-y), & \text{при } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.20.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	-1	2
-2	0.2	0.3	0
1	0.2	0.1	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(y+2x), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.21.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	1	3
1	0.1	0.4	0.1
2	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 3(x^2 + y^2), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.22.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.1	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \cos(2x+y), & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \le y \le 0; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.23.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0.1	0.1	0.2
2	0.1	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & \text{при } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.24.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0.3	0.1	0.4
-1	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^3y+x), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.25.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-2	0.1	0.5	0.2
1	0.1	0	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(x^3y+x), & \text{при } 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.26.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	4
-1	0.1	0.1	0.2
1	0.2	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2y+x), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.27.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0.4	0.1	0.2
3	0.2	0	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 8(xy+y^2), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.28.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
-1	0.1	0.4	0.2
1	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x+y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.29.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
2	0.2	0.2	0.2
3	0.1	0	0.3

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \sin(2x+y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

32.30.

а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0.1	0.5	0.1
2	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x+x^2y^3), & \text{при } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача №33.

Дано межі інтервалів, емпіричні частоти попадання вибіркових значень та деякі теоретичні частоти попадання в ці інтервали. Необхідно довизначити невідомі теоретичні частоти та, використовуючи критерій Пірсона (χ^2) при рівні значущості α, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

33.1. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-5.05; -4.03)$	1	1.64
$[-4.03; -3.01)$	7	5.86
$[-3.01; -1.99)$	15	15.36
$[-1.99; -0.97)$	34	29.55
$[-0.97; 0.04)$	43	
$[0.04; 1.06)$	36	43.35
$[1.06; 2.08)$	32	33.05
$[2.08; 3.10)$	20	
$[3.10; 4.12]$	12	7.62

33.2. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.59; -3.45)$	1	2.26
$[-3.45; -2.32)$	12	
$[-2.32; -1.18)$	20	19.63
$[-1.18; -0.05)$	31	35.21
$[-0.05; 1.09)$	48	
$[1.09; 2.22)$	39	41.98
$[2.22; 3.36)$	28	27.91
$[3.36; 4.49)$	15	13.33
$[4.49; 5.63]$	6	4.57

33.3. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.49; 0.05)$	4	3.17
$[0.05; 0.60)$	10	10.04
$[0.60; 1.14)$	28	22.97
$[1.14; 1.68)$	34	38.00
$[1.68; 2.23)$	40	
$[2.23; 2.77)$	43	39.27
$[2.77; 3.31)$	25	
$[3.31; 3.86)$	11	11.08
$[3.86; 4.40]$	5	3.62

33.4. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-1.16; -0.59)$	10	4.40
$[-0.59; -0.03)$	7	9.80
$[-0.03; 0.54)$	15	16.46
$[0.54; 1.10)$	23	
$[1.10; 1.67)$	21	19.91
$[1.67; 2.23)$	9	
$[2.23; 2.80)$	10	7.80
$[2.80; 3.36]$	5	3.20

33.5.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.75; -0.17)$	4	1.63
$[-0.17; 0.41)$	6	5.26
$[0.41; 0.98)$	7	
$[0.98; 1.56)$	17	19.90
$[1.56; 2.14)$	27	
$[2.14; 2.72)$	21	19.33
$[2.72; 3.29)$	13	11.45
$[3.29; 3.87]$	5	4.83

$\alpha = 0.1$.

33.6.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.14; -2.60)$	9	6.23
$[-2.60; -1.06)$	17	19.16
$[-1.06; 0.48)$	31	36.03
$[0.48; 2.03)$	47	
$[2.03; 3.57)$	30	29.21
$[3.57; 5.11)$	12	
$[5.11; 6.65)$	3	3.32
$[6.65; 8.19]$	1	0.54

$\alpha = 0.075$.

33.7.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-5.16; -3.95)$	4	1.85
$[-3.95; -2.75)$	8	7.57
$[-2.75; -1.54)$	18	
$[-1.54; -0.33)$	31	34.74
$[-0.33; 0.87)$	44	
$[0.87; 2.08)$	26	28.22
$[2.08; 3.28)$	15	13.30
$[3.28; 4.49]$	4	4.06

$\alpha = 0.05$.

33.8.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-3.04; -2.44)$	9	5.85
$[-2.44; -1.84)$	10	13.02
$[-1.84; -1.23)$	26	20.62
$[-1.23; -0.63)$	24	
$[-0.63; -0.03)$	11	18.57
$[-0.03; 0.57)$	12	
$[0.57; 1.18)$	6	4.28
$[1.18; 1.78]$	2	1.23

$\alpha = 0.025$.

33.9. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.15; -3.30)$	2	1.43
$[-3.30; -2.45)$	6	7.20
$[-2.45; -1.61)$	18	19.98
$[-1.61; -0.76)$	34	
$[-0.76; 0.09)$	25	25.55
$[0.09; 0.94)$	11	
$[0.94; 1.78)$	3	2.98
$[1.78; 2.63]$	1	0.42

33.10. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-3.26; -1.98)$	3	2.43
$[-1.98; -0.71)$	6	7.05
$[-0.71; 0.57)$	16	
$[0.57; 1.84)$	23	21.56
$[1.84; 3.11)$	25	
$[3.11; 4.39)$	10	17.08
$[4.39; 5.66)$	11	9.16
$[5.66; 6.94]$	6	3.51

33.11. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-2.01; -1.50)	13	8.18
[-1.50; -1.00)	16	18.18
[-1.00; -0.49)	36	30.90
[-0.49; 0.01)	41	
[0.01; 0.52)	36	39.85
[0.52; 1.02)	27	
[1.02; 1.53)	19	17.54
[1.53; 2.03)	8	7.77
[2.03; 2.54]	4	2.63

33.12. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-3.67; -3.05)	3	2.30
[-3.05; -2.43)	9	9.28
[-2.43; -1.80)	23	
[-1.80; -1.18)	44	43.70
[-1.18; -0.56)	54	
[-0.56; 0.06)	40	39.54
[0.06; 0.69)	18	20.26
[0.69; 1.31)	7	6.87
[1.31; 1.93]	2	1.54

33.13.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-4.01; -2.73)	5	5.55
[-2.73; -1.45)	24	16.81
[-1.45; -0.16)	32	34.58
[-0.16; 1.12)	44	48.33
[1.12; 2.40)	51	
[2.40; 3.68)	25	29.62
[3.68; 4.97)	14	
[4.97; 6.25)	3	3.87
[6.25; 7.53]	2	0.78

$\alpha = 0.025.$

33.14.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-6.63; -4.85)	6	3.76
[-4.85; -3.06)	13	11.71
[-3.06; -1.28)	24	
[-1.28; 0.50)	37	41.07
[0.50; 2.29)	50	
[2.29; 4.07)	35	37.14
[4.07; 5.85)	25	21.25
[5.85; 7.64)	5	8.67
[7.64; 9.42]	5	2.52

$\alpha = 0.1.$

33.15.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.22; -5.98)	5	5.38
[-5.98; -3.73)	19	14.77
[-3.73; -1.49)	27	29.39
[-1.49; 0.76)	44	
[0.76; 3.00)	38	44.31
[3.00; 5.25)	38	33.58
[5.25; 7.49)	21	
[7.49; 9.74)	5	7.35
[9.74; 11.98]	3	2.12

$\alpha = 0.05.$

33.16.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-1.47; -0.80)	1	0.47
[-0.80; -0.12)	1	2.78
[-0.12; 0.55)	13	10.88
[0.55; 1.22)	30	
[1.22; 1.90)	40	46.60
[1.90; 2.57)	53	51.06
[2.57; 3.24)	37	
[3.24; 3.92)	18	17.20
[3.92; 4.59]	7	5.28

$\alpha = 0.025.$

33.17.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.09; -6.88)	3	1.47
[-6.88; -5.68)	4	5.92
[-5.68; -4.47)	17	16.72
[-4.47; -3.26)	37	33.13
[-3.26; -2.06)	42	
[-2.06; -0.85)	41	44.83
[-0.85; 0.36)	35	
[0.36; 1.56)	16	14.67
[1.56; 2.77]	5	4.93

$\alpha = 0.05.$

33.18.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-11.28; -8.23)	5	3.65
[-8.23; -5.19)	13	11.06
[-5.19; -2.14)	22	
[-2.14; 0.91)	40	38.93
[0.91; 3.95)	41	45.16
[3.95; 7.00)	46	
[7.00; 10.05)	17	23.23
[10.05; 13.09)	9	10.30
[13.09; 16.14]	7	3.32

$\alpha = 0.075.$

33.19.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-15.26;-11.93)	3	0.73
[-11.93; -8.59)	3	3.77
[-8.59; -5.26)	10	12.99
[-5.26; -1.93)	30	
[-1.93; 1.41)	52	46.75
[1.41; 4.74)	45	
[4.74; 8.07)	33	34.25
[8.07; 11.41)	20	16.14
[11.41; 14.74]	4	5.11

$\alpha = 0.1.$

33.20.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-12.03; -9.96)	1	0.25
[-9.96; -7.88)	3	1.88
[-7.88; -5.81)	10	8.93
[-5.81; -3.73)	25	
[-3.73; -1.66)	37	48.05
[-1.66; 0.42)	65	54.41
[0.42; 2.49)	35	
[2.49; 4.57)	20	16.63
[4.57; 6.64]	4	4.49

$\alpha = 0.05.$

33.21. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-25.69;-20.76)	4	1.65
[-20.76;-15.82)	6	6.94
[-15.82;-10.89)	22	19.77
[-10.89; -5.95)	30	38.06
[-5.95; -1.02)	56	
[-1.02; 3.92)	42	43.69
[3.92; 8.85)	26	
[8.85; 13.79)	11	10.50
[13.79; 18.72]	3	2.87

33.22. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-10.21; -7.75)	2	0.82
[-7.75; -5.30)	7	4.17
[-5.30; -2.84)	6	
[-2.84; -0.39)	29	31.76
[-0.39; 2.07)	58	47.93
[2.07; 4.52)	49	48.35
[4.52; 6.98)	30	
[6.98; 9.43)	15	14.70
[9.43; 11.89]	4	4.43

33.23. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.38; -5.80)	8	5.04
[-5.80; -3.22)	16	12.64
[-3.22; -0.63)	25	24.35
[-0.63; 1.95)	30	
[1.95; 4.53)	40	
[4.53; 7.11)	38	35.78
[7.11; 9.70)	22	24.01
[9.70; 12.28)	15	12.38
[12.28; 14.86]	6	4.90

33.24. $\alpha = 0.025$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-9.56; -6.47)	11	6.78
[-6.47; -3.39)	16	15.93
[-3.39; -0.30)	33	28.56
[-0.30; 2.79)	36	
[2.79; 5.87)	33	40.83
[5.87; 8.96)	34	32.55
[8.96; 12.05)	24	
[12.05; 15.13)	10	9.20
[15.13; 18.22]	3	3.26

33.25.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-14.25;-11.62)	4	2.92
[-11.62; -8.98)	8	9.10
[-8.98; -6.35)	24	20.86
[-6.35; -3.71)	35	35.22
[-3.71; -1.08)	41	
[-1.08; 1.56)	42	40.14
[1.56; 4.19)	27	
[4.19; 6.83)	10	13.47
[6.83; 9.46]	9	4.93

$\alpha = 0.05.$

33.26.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-24.60;-19.39)	3	2.75
[-19.39;-14.18)	8	9.90
[-14.18; -8.97)	26	24.50
[-8.97; -3.76)	48	41.67
[-3.76; 1.45)	47	
[1.45; 6.66)	38	
[6.66; 11.87)	18	21.71
[11.87; 17.08)	7	8.26
[17.08; 22.29]	5	2.16

$\alpha = 0.075.$

33.27.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-27.23;-21.66)	4	2.84
[-21.66;-16.09)	9	9.94
[-16.09;-10.52)	24	
[-10.52; -4.95)	43	40.95
[-4.95; 0.61)	51	48.12
[0.61; 6.18)	32	
[6.18; 11.75)	23	22.29
[11.75; 17.32)	9	8.78
[17.32; 22.89]	5	2.40

$\alpha = 0.05.$

33.28.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-13.96;-11.27)	10	6.82
[-11.27; -8.58)	22	19.11
[-8.58; -5.89)	37	36.74
[-5.89; -3.20)	46	48.47
[-3.20; -0.50)	39	
[-0.50; 2.19)	29	27.24
[2.19; 4.88)	14	
[4.88; 7.57)	2	3.39
[7.57; 10.26]	1	0.68

$\alpha = 0.1.$

33.29. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-16.49;-12.29)	5	3.28
[-12.29; -8.10)	12	10.34
[-8.10; -3.90)	22	
[-3.90; 0.29)	39	38.59
[0.29; 4.49)	38	
[4.49; 8.68)	44	38.91
[8.68; 12.88)	19	23.92
[12.88; 17.07)	19	10.60
[17.07; 21.27]	2	3.39

33.30. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-4.90; -4.32)	4	2.24
[-4.32; -3.74)	5	7.58
[-3.74; -3.15)	21	18.68
[-3.15; -2.57)	34	
[-2.57; -1.99)	48	43.97
[-1.99; -1.41)	34	41.99
[-1.41; -0.82)	29	
[-0.82; -0.24)	19	14.84
[-0.24; 0.34]	6	5.49

Бібліоґрафія

[1] Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

[2] Вища математика. Підручник у двох книгах. За ред. Г.Л.Кулініча. -К.: Либідь:
Кн. 1 Основні розділи – 1995. – 372 с.
Кн. 2 Спеціальні розділи – 1996. – 336 с.

[3] Вища математика: основні означення, приклади і задачі. У двох частинах: Навчальний посібник. – К.: Либідь, – 1992.
Ч. 1 за ред. Г.Л.Кулініча. – 288 с.
Ч. 2 за ред. І.П.Васильченко. – 254 с.

[4] Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у двох частинах. – К.: Техніка, – 2000. Ч. 1 – 592 с., Ч. 2 – 792 с.

[5] Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, – 1996. – 440 с.

[6] Вища математика: Підручник у трьох книгах. – К.: Либідь, –1994.
Кн. 1 Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – 280 с.
Кн. 2 Шкіль М.І., Колесник Т.В. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – 352 с.
Кн. 3 Шкіль М.І., Колесник Т.В. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – 352 с.

Зміст