

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

# СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

спеціальний курс  
для статистиків

м. Івано-Франківськ  
2008 р.

Посібник призначений для студентів спеціалізацій "Статистика" та "Компютерна статистика", а також може бути використаний студентами інших математичних спеціальностей.

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доцент Осипчук М.М.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Лекції</b>	<b>7</b>
1.1	Моделювання випадкових величин . . . . .	7
1.1.1	Моделювання дискретних випадкових величин . . . . .	8
1.1.2	Моделювання неперервних випадкових величин . . . . .	12
1.2	Моделювання випадкових векторів . . . . .	14
1.2.1	Стандартний метод . . . . .	14
1.2.2	Метод виключення . . . . .	15
1.2.3	Моделювання невиродженого багатовимірного нормального розподілу . . . . .	16
1.3	Моделювання випадкових процесів . . . . .	17
1.3.1	Моделювання багатовимірного марківського гаусівського процесу . . . . .	18
1.3.2	Моделювання траєкторій розв'язків стохастичного диференціального рівняння . . . . .	21
1.4	Метод Монте-Карло . . . . .	23
1.4.1	Обчислення інтегралів . . . . .	23
1.4.2	Інтерполювання функцій . . . . .	24
1.4.3	Розв'язання рівняння Лапласа . . . . .	26

<b>2</b>	<b>Лабораторні роботи</b>	<b>29</b>
2.1	Моделювання дискретних випадкових величин . . . . .	29
2.1.1	Завдання . . . . .	29
2.2	Моделювання неперервних в. в. . . . .	30
2.2.1	Завдання . . . . .	30
2.2.2	Виконання . . . . .	31
2.3	Моделювання нормально розп. в. век. . . . .	33
2.3.1	Завдання . . . . .	33
2.3.2	Виконання . . . . .	34
2.4	Моделювання траєкторій . . . . .	35
2.4.1	Завдання . . . . .	35
2.4.2	Виконання . . . . .	35
2.5	Метод Монте-Карло . . . . .	36
2.5.1	Завдання . . . . .	36
2.5.2	Виконання . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Питання та бібліографія</b>	<b>39</b>
	Питання до курсу. . . . .	39
	Рекомендована література . . . . .	41

# Вступ

Під статистичним моделюванням ми розумітимемо відтворення за допомогою електронної обчислювальної машини (ЕОМ) функціонування ймовірнісної моделі деякого об'єкту. Мета моделювання такого роду полягає в оцінюванні з його допомогою середніх характеристик моделі. Завичай це – математичні сподівання величин, що характеризують систему, їх дисперсії і коваріації.

Найбільш відомими ймовірнісними моделями є, мабуть, моделі теорії масового обслуговування і статистичної фізики. Завдання даного курсу полягають в тому, щоб навчитися відтворювати за допомогою ЕОМ поведінку таких моделей в часі, тобто:

- вибирати реалізації випадкових чисел, рівномірно розподілених на відрізьку  $[0; 1]$ , за допомогою спеціальної програми (датчика випадкових чисел);
- за допомогою цих чисел одержувати реалізації випадкових величин або випадкових процесів із складнішими законами розподілу;
- за допомогою одержаних реалізацій обчислювати значення величин, що характеризують модель і статистично обробляти отримані результати.



# Розділ 1

## Лекції

### 1.1 Моделювання випадкових величин

Для розв'язання задач методом Монте-Карло необхідно одержувати на ЕОМ послідовність вибірових значень випадкової величини із заданим розподілом. Такий процес прийнято називати *моделюванням випадкової величини*. Випадкові величини зазвичай моделюють за допомогою перетворень одного або декількох незалежних значень випадкової величини  $\alpha$ , рівномірно розподіленої в інтервалі  $(0, 1)$ . Незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені  $(0, 1)$ , надалі позначаються символом  $\alpha$  з різними індексами. Зауважимо, що випадкові величини  $\alpha$  і  $1 - \alpha$  мають один і той же розподіл. Дійсно

$$\mathbf{P}(1 - \alpha < x) = \mathbf{P}(\alpha > 1 - x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - (1 - x), & \text{при } x \in (0; 1) = \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x, & \text{при } x \in (0; 1) = \mathbf{P}(\alpha < x). \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

### 1.1.1 Моделювання дискретних випадкових величин

**Стандартний метод моделювання дискретної випадкової величини.**

Загальний метод моделювання дискретної випадкової величини заснований на наступному очевидному співвідношенні:

$$\mathbf{P} \left( \sum_{k=0}^{m-1} p_k \leq \alpha < \sum_{k=0}^m p_k \right) = p_m \quad (1.1)$$

де

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Стандартний алгоритм визначення  $m$  для заданого значення  $\alpha$  в (1.1) реалізується так:

- генеруємо значення  $\alpha$ ;
- від  $\alpha$  почергово віднімаємо значення  $p_k$ , поки не одержимо від'ємну різницю;
- номер останнього від'ємника є значенням  $m$ .

Найбільш важливими дискретними випадковими величинами є цілочисельні з розподілом  $p_k = P(\xi = k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), що задовольняє рекурентні формули:  $p_{k+1} = p_k r(k)$ . Для таких випадкових величин значення  $x_k$  можна не обчислювати, а обчислення  $p_k$  значно спрощується.

*Приклад 1.* Для біноміального розподілу з параметрами  $(p, n)$  маємо

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbf{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \\ r(k) &= \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{p}{1-p} = \\ &= \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p}; \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$



*Приклад 2.* Для розподілу Пуассона з параметром  $\lambda$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad r(k) = \frac{\lambda}{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

*Приклад 3.* Для геометричного розподілу з параметром  $p$

$$p_k = p(1-p)^k, \quad r(k) = 1-p, \quad k = 0, 1, \dots$$

### Спеціальні методи моделювання основних дискретних розподілів.

Для деяких дискретних розподілів існують моделюючі формули, що не вимагають виконання проб. Наприклад, очевидно, що випадкова величина  $\xi = [\alpha(n+1)]$  має рівномірний дискретний розподіл:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Далі, випадкова величина

$$\xi = \left[ \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} \right], \quad 0 < p < 1$$

має геометричний розподіл

Дійсно

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi = k) &= \mathbf{P}\left(k \leq \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} < k+1\right) \\ &= \mathbf{P}(-k \ln(1-p) \leq -\ln \alpha < -(k+1) \ln(1-p)) = \\ &= \mathbf{P}((1-p)^{k+1} \leq \alpha < (1-p)^k) = \\ &= (1-p)^k - (1-p)^{k+1} = p(1-p)^k, \end{aligned}$$

оскільки випадкова величина  $\alpha$  розподілена рівномірно на інтервалі  $(0, 1)$ .

Далі покажемо, що випадкова величина  $N$ , визначена співвідношенням

$$N = \min \left\{ n : \prod_{k=0}^n \alpha_k < e^{-\lambda} \right\},$$

розподілена за законом Пуассона з параметром  $\lambda$ .

Розглянемо випадкову величину  $\zeta_n = \prod_{k=0}^n \alpha_k$  і доведемо, що її розподіл задається щільністю<sup>1</sup>

$$f_n(x) = \frac{(-\ln x)^n}{n!}, \quad 0 < x \leq 1.$$

При  $n = 0$  це твердження очевидне. Припустимо, що воно правильне при  $n = m$ . Тоді<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} F_{m+1}(x) &= \mathbf{P}(\zeta_{m+1} < x) = \mathbf{P}(\alpha \zeta_m < x) = \\ &= \frac{1}{m!} \int_0^1 \mathbf{P}(\alpha \zeta_m < x / \zeta_m = y) (-\ln y)^m dy = \\ &= \frac{1}{m!} \left( \int_0^x (-\ln y)^m dy + \int_x^1 \frac{x}{y} (-\ln y)^m dy \right). \end{aligned}$$

Звідси диференціюванням одержуємо

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x) &= \frac{1}{m!} \left( (-\ln x)^m + \int_x^1 \frac{(-\ln y)^m}{y} dy - (-\ln x)^m \right) = \\ &= \frac{(-\ln x)^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Тут і далі в таких випадках вважаємо, що при інших значеннях  $x$   $f(x) = 0$ .

<sup>2</sup>Використано неперервний аналог формули повної ймовірності  $\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A/\xi = x) f(x) dx$ , де  $f(x)$  – щільність розподілу випадкової величини  $\xi$ .

Згідно принципу математичної індукції потрібна рівність доведена.

Оскільки

$$\{N = m\} = \{\zeta_{m-1}\alpha < e^{-\lambda}\} \cap \{\zeta_{m-1} > e^{-\lambda}\},$$

то, використовуючи формулу повної ймовірності, одержимо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = m) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (-\ln y)^{m-1} \mathbf{P}(\{\zeta_{m-1}\alpha < e^{-\lambda}\} \cap \\ &\cap \{\zeta_{m-1} > e^{-\lambda}\} / \zeta_{m-1} = y) dy = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{(m-1)!} \int_{e^{-\lambda}}^1 \frac{(-\ln y)^{m-1}}{y} dy, \end{aligned}$$

бо  $\mathbf{P}(\zeta_{m-1} > e^{-\lambda} / \zeta_{m-1} = y) = 0$  при  $y < e^{-\lambda}$  та  $\mathbf{P}(\{\zeta_{m-1}\alpha < e^{-\lambda}\} \cap \{\zeta_{m-1} > e^{-\lambda}\} / \zeta_{m-1} = y) = \mathbf{P}(\alpha < \frac{e^{-\lambda}}{y}) = \frac{e^{-\lambda}}{y}$  при  $y > e^{-\lambda}$ .

Тому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = m) &= \frac{-e^{-\lambda}}{m!} (-\ln y)^m \Big|_{-e^{-\lambda}}^1 = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Отже, генерувати пуасонівську з параметром  $\lambda$  випадкову величину можна таким чином

- генеруємо значення  $M$  рівномірно розподіленої на  $(0;1)$  випадкової величини;
- якщо воно менше  $e^{-\lambda}$ , то  $N = 0$ ;
- якщо ж ні, то генеруємо значення рівномірно розподіленої на  $(0;1)$  випадкової величини і множимо на нього попереднє значення  $M$  (добуток є наступним значенням  $M$ );
- якщо добуток менший  $e^{-\lambda}$ , то  $N = 1$ ;
- і так далі.

## 1.1.2 Моделювання неперервних випадкових величин

### Стандартний метод моделювання неперервної випадкової величини

Нехай розподіл випадкової величини  $\xi$  задається щільністю  $f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Будемо шукаючи генеруючу формулу виду  $\xi = \varphi(\alpha)$ , де  $\varphi(x)$  — монотонна диференційовна функція.

Припустимо, що  $\varphi(x)$  монотонно зростає. Тоді для функції розподілу випадкової величини  $\xi = \varphi(\alpha)$  маємо

$$F(x) = \mathbf{P}(\varphi(\alpha) < x) = \mathbf{P}(\alpha < \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x).$$

за умови, що  $\varphi^{-1}(x)$  приймає значення в інтервалі  $(0;1)$ . Звідси функцією  $\varphi(x)$  може бути  $F^{-1}(x)$ . Отже,  $\xi = F^{-1}(\alpha)$ .

Якщо  $\varphi(x)$  монотонно спадає, то аналогічно матимемо

$$F(x) = \mathbf{P}(\varphi(\alpha) < x) = \mathbf{P}(\alpha > \varphi^{-1}(x)) = 1 - \varphi^{-1}(x)$$

і  $\varphi(x) = (1 - F(x))^{-1} = F^{-1}(1 - x)$ . Тому  $\xi = F^{-1}(1 - \alpha)$ .

Враховуючи, що  $\alpha$  і  $1 - \alpha$  мають один і той же розподіл (рівномірний на  $(0;1)$ ), можна стверджувати, що обидві одержані формули є еквівалентними.

*Приклад 4.* Для показникового розподілу з параметром  $\lambda > 0$   $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$  ( $f(x) = 0$ ,  $x \leq 0$ ). Маємо  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$  і  $\xi = -\frac{\ln \alpha}{\lambda}$ .

*Приклад 5.* Нехай  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Побудуємо моделюючу процедуру для значень випадкової величини з кусково сталою щільністю розподілу:

$$f(x) = y_i, \quad x_{i-1} \leq x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(x) = 0, \quad x < x_0, x \geq x_n.$$

Моделююча формула  $\xi = F^{-1}(\alpha)$  приводить до необхідності розв'язувати рівняння

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x) = \alpha,$$

яке в даному випадку можна розв'язувати так:

- від згенерованого значення  $\alpha$  віднімаємо послідовно  $y_i(x_i - x_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  поки не одержимо відємне значення;
- для останньої додатної різниці  $M$  розв'язуємо рівняння  $M = y_k(\xi - x_k)$

Таким чином  $\xi = x_k + \frac{M}{y_k}$ .

### Метод виключення

Розглянемо спосіб моделювання точки рівномірно розподіленої на області обмеженій лініями  $y = g(x)$  та  $y = 0$  ( $g(x) \geq 0$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ ). Позначимо  $G = \{(x; y) : 0 \leq y \leq g(x), x \in (-\infty; +\infty)\}$ . Нехай

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Наступне твердження показує як будувати точку, що підпорядковується рівномірному розподілу на множині  $G$ .

*Теорема 1.* Нехай випадкова величина  $\xi$  має щільність розподілу  $f(x) = \frac{g(x)}{\bar{G}}$ , а умовна щільність розподілу випадкової величини  $\eta$  при умові  $\xi = x$  дорівнює

$$f_1(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)}, & 0 \leq y \leq g(x) \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді щільність сумісного розподілу  $\xi$  та  $\eta$  дорівнює

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{G}, & (x, y) \in G \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

*Доведення.* Твердження теореми випливає з рівності  $f_2(x, y) = f(x)f_1(y/x)$ , що є наслідком теореми множення ймовірностей.

Рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x, y) dy = \frac{1}{G} \int_0^{g(x)} dy = \frac{g(x)}{G}$$

показує, що перша координата рівномірно розподіленої на  $G$  точки має розподіл, який задається щільністю  $f(x) = \frac{g(x)}{G}$ .  $\square$

Отже, щоб випадкова величина  $\xi$  задавалась щільністю  $f(x)$  і  $\mathbf{P}(\xi \in [a; b]) \approx 1$ , то змодельювавши випадкову точку  $(x; y)$  рівномірно розподілену на  $[a; b] \times [0; M]$ , де  $M = \max(f(x))$ , візьмемо за значення величини  $\xi$  те значення  $x$ , для якого  $y < f(x)$ . В іншому випадку змодельовану точку виключаємо з розгляду. Для моделювання рівномірно розподіленої на прямокутнику  $[a; b] \times [0; M]$  точки досить змодельувати по одному значенню незалежних випадкових величин рівномірно розподілених на  $[a; b]$  та  $[0; M]$ , відповідно.

## 1.2 Моделювання випадкових векторів

### 1.2.1 Стандартний метод

Розглянемо випадок неперервного випадкового вектора

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Нехай щільність розподілу такого вектора  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Очевидно, що її можна подати у вигляді:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2/x_1)f_3(x_3/x_1, x_2) \cdot \dots$$

$$f_n(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

де  $f_1(x_1)$  – щільність розподілу  $\xi_1$ , а  $f_k(x_k/x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$  – щільність умовного розподілу  $\xi_k$  при умові

$$\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{k-1} = x_{k-1}.$$

Для моделювання випадкового вектора  $\xi$  досить моделювати випадкову величину  $\xi_1$  за щільністю  $f_1(x_1)$ , а  $\xi_k$  – відповідно до щільності  $f_k(x_k/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1})$ ,  $k = 2, \dots, n$ .

### 1.2.2 Метод виключення

Подібно до одновимірного випадку для моделювання випадкового вектора можна застосувати метод виключення.

Нехай

$$0 \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

причому

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \int \dots \int g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq \bar{G}_1 = \int \dots \int g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n < +\infty. \end{aligned}$$

Моделювати вектор  $\xi$  зі щільністю розподілу  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)/\bar{G}$  можна так:

1. вибирається значення  $\xi^{(0)}$  відповідно до щільності

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)/\bar{G}_1$$

і значення  $\eta = \alpha g_1(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ ;

2. якщо  $\eta > g(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ , то виконується 1 і т.д., інакше  $\xi = \xi^{(0)}$ .

*Зауваження 1.* Функцію  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  найпростіше взяти сталою, наприклад,  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(g(x_1, x_2, \dots, x_n))$ .

### 1.2.3 Моделювання невірродженого багатовимірного нормального розподілу

Багатовимірний нормальний розподіл повністю визначається вектором математичних сподівань  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  та коваріаційною матрицею

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

де  $K_{ij} = \mathbf{E}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)$ .

Вектор  $\xi$  з таким розподілом можна одержати з допомогою лінійного перетворення вектора  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ , елементи якого є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з параметрами 0 і 1. Зазвичай матрицю  $\mathbf{A}$  перетворення  $\xi = \mathbf{A}\eta + \mathbf{m}$  беруть трикутною, тобто

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При цьому коефіцієнти  $a_{ij}$  легко обчислюються рекурентно. Оскільки  $\xi_1 = a_{11}\eta_1 + m_1$ , то  $a_{11} = \sqrt{K_{11}} = \sqrt{\mathbf{D}\xi_1}$ . Далі  $\xi_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + m_2$  і оскільки

$$K_{12} = \mathbf{E}(a_{11}\eta_1(a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2)), \quad K_{22} = \mathbf{E}(a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2)^2,$$

то

$$a_{21} = \frac{K_{12}}{a_{11}} = \frac{K_{12}}{\sqrt{K_{11}}}, \quad a_{22} = \sqrt{K_{22} - \frac{K_{12}^2}{a_{11}^2}} = \sqrt{K_{22} - \frac{K_{12}^2}{K_{11}}}$$



Для кожних  $1 \leq j \leq i \leq n$  маємо систему рівнянь

$$\mathbf{E}(a_{i1}\eta_1 + \dots + a_{ii}\eta_i)(a_{j1}\eta_1 + \dots + a_{jj}\eta_j) = K_{ij},$$

з якої

$$a_{ij} = \frac{K_{ij} - \sum_{h=1}^{j-1} a_{ih}a_{jh}}{\sqrt{K_{jj} - \sum_{h=1}^{j-1} a_{jh}^2}}$$

Тут вважаємо, що  $\sum_{h=1}^0 a_{ih}a_{jh} = 0$ .

## 1.3 Моделювання випадкових процесів

При розв'язанні задач моделювання випадкових процесів переважно обчислюються значення реалізацій процесу для послідовності моментів часу  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Тобто, ми можемо говорити про моделювання випадкового вектора з розподілом, що задається функцією  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що є однією з функцій скінченно вимірних розподілів випадкового процесу. Але при великих  $n$  це досить складно. Для деяких класів процесів можна запропонувати значно простішу процедуру моделювання. Наприклад, для однорідного марківського ланцюга досить змоделювати випадкову величину  $\zeta(t_0) = \zeta_0$  із заданим початковим розподілом та скористатись перехідною ймовірністю  $p(t_0, \zeta_0, t_1, y)$  для моделювання наступного значення ланцюга  $\zeta(t_1)$ . Далі процедура продовжується.

Розглянемо інші методи моделювання випадкових процесів спеціального вигляду.

### 1.3.1 Моделювання багатовимірного марківського гаусівського процесу

Марківський процес  $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_d(t))^T$  можна моделювати, якщо задано початковий розподіл та ймовірність переходу

$$P(t_1, x, t_2, \Gamma) = \mathbf{P}(\zeta(t_2) \in \Gamma / \zeta(t_1) = x)$$

для всіх значень  $t_1 < t_2$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Для гаусівських процесів звичайно задається векторна функція математичних сподівань

$$\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_d(t))^T$$

та матрична коваріаційна функція

$$\mathbf{K}(s, t) = \|K_{ij}(s, t)\|_{i,j=1}^d,$$

де  $a_i(t) = \mathbf{E}\zeta_i(t)$ ,  $K_{ij}(s, t) = \mathbf{E}(\zeta_i(s) - a_i(s))(\zeta_j(t) - a_j(t)) = \mathbf{E}\zeta_i(s)\zeta_j(t) - a_i(s)a_j(t)$ .

Задачу легко розв'язати, якщо знайти умовне математичне сподівання  $\mathbf{a}(t/\zeta(s))$  та умовну коваріаційну матрицю  $\mathbf{K}(t, t/\zeta(s))$ . Тоді задача зводиться до моделювання багатовимірного нормального розподілу. Початкове значення  $\zeta(t_0)$  процесу знаходиться як реалізація випадкового нормального вектора з середнім  $\mathbf{a}(t_0)$  та коваріаційною матрицею  $\mathbf{K}(t_0, t_0)$ . Наступне значення знаходиться за формулою

$$\zeta(t_i) = \mathbf{a}(t_i/\zeta(t_{i-1})) + \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

де  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)^T$  – випадковий нормальний вектор з незалежними компонентами та  $\mathbf{E}w_k = 0$ ,  $\mathbf{D}w_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ , а матриця  $\mathbf{A}$  – нижня трикутна і така, що  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{K}(t_i, t_i/\zeta(t_{i-1}))$ .

Доведемо, що  $\zeta(t)$  має умовний при умові, що відомо значення  $\zeta(s)$  ( $s < t$ ), нормальний розподіл та знайдемо його характеристики. Очевидно, що  $f_{t/s}(y/x) = \frac{f_{st}(x,y)}{f_s(x)}$ , де  $f_s(x)$  – щільність розподілу  $\zeta(s)$ ,  $f_{st}(x, y)$  – сумісна щільність розподілу  $\zeta(s)$

та  $\zeta(t)$ ,  $f_{t/s}(y/x)$  – умовна щільність розподілу  $\zeta(t)$  при умові  $\zeta(s) = x$ . Відомо, що

$$f_s(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(\det \mathbf{K}(s, s))^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mathbf{a}(s))^T \mathbf{K}^{-1}(s, s)(x - \mathbf{a}(s)) \right\}.$$

Для визначення  $f_{st}(x, y)$  перетворимо вектор  $(\zeta(s), \zeta(t))^T$  так, щоб випадкові вектори  $\eta_1 = \zeta(s)$  та  $\eta_2 = \zeta(t) + \mathbf{B}\zeta(s)$ , де  $\mathbf{B}$  – деяка невинроджена матриця, були незалежними.

Оскільки  $\mathbf{E}(\eta_1 - \mathbf{E}\eta_1)(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2)^T = 0$ , то

$$0 = \mathbf{E}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s))(\zeta(t) + \mathbf{B}\zeta(s) - \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}\mathbf{a}(s))^T = \\ = \mathbf{E}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s))(\zeta(t) - \mathbf{a}(t))^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s))(\zeta(s) - \mathbf{a}(s))^T = \\ = \mathbf{K}(s, t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}(s, s).$$

Звідси  $\mathbf{B} = -\mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)$ .

Нехай  $\hat{f}_{st}(x, y)$  – сумісна щільність розподілу  $\eta_1$  та  $\eta_2$ . Тоді

$$f_{st}(x, y) = \hat{f}_{st}(x, y + \mathbf{B}x)|J|,$$

де  $|J|$  – якобіан перетворення  $(\zeta(s), \zeta(t))^T$  в  $(\eta_1, \eta_2)^T$ . Оскільки

$$J = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{E} \end{vmatrix} = 1, \text{ то } f_{st}(x, y) = \hat{f}_{st}(x, y - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)x).$$

Через незалежність  $\eta_1$  і  $\eta_2$   $\hat{f}_{st}(x, y) = \hat{f}_s(x) \cdot \hat{f}_t(y)$ , де  $\hat{f}_s(x)$  – щільність розподілу  $\eta_1$  а  $\hat{f}_t(y)$  – щільність розподілу  $\eta_2$ . Очевидно, що  $\hat{f}_s(x) = f_s(x)$  і розподіл  $\eta_2$  нормальний як лінійна комбінація нормальних розподілів. Його характеристики:

- математичне сподівання

$$\mathbf{E}\eta_2 = \mathbf{E}(\zeta(t) + \mathbf{B}\zeta(s)) = \\ = \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}\mathbf{a}(s) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{a}(s);$$

- коваріаційна матриця

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2)(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2)^T = \\
& = \mathbf{E}(\zeta(t) + \mathbf{B}\zeta(s) - \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}\mathbf{a}(s))(\zeta(t) + \mathbf{B}\zeta(s) - \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}\mathbf{a}(s))^T = \\
& = \mathbf{E}(\zeta(t) - \mathbf{a}(t))(\zeta(t) - \mathbf{a}(t))^T + \mathbf{E}(\zeta(t) - \mathbf{a}(t))(\mathbf{B}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s)))^T + \\
& \quad + \mathbf{E}(\mathbf{B}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s)))(\zeta(t) - \mathbf{a}(t))^T + \\
& \quad + \mathbf{E}(\mathbf{B}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s)))(\mathbf{B}(\zeta(s) - \mathbf{a}(s)))^T = \\
& = \mathbf{K}(t, t) + \mathbf{K}(t, s)\mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}(s, t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}(s, s)\mathbf{B}^T = \\
& = \mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t) - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t) + \\
& \quad + \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t) = \\
& = \mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t).
\end{aligned}$$

Тут враховано, що

$$\mathbf{B} = -\mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s),$$

$$\mathbf{B}^T = -(\mathbf{K}^{-1}(s, s))^T(\mathbf{K}(s, t))^T = -\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t),$$

бо  $\mathbf{K}^{-1}(s, s)$  і  $\mathbf{K}(s, t)$  – симетричні матриці. Тому

$$\begin{aligned}
\hat{f}_t(y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(\det(\mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t)))^{-\frac{1}{2}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y - \mathbf{a}(t) + \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{a}(s))^T \times \right. \\
& \quad \times (\mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t))^{-1} \times \\
& \quad \left. \times (y - \mathbf{a}(t) + \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{a}(s)) \right\}
\end{aligned}$$

Оскільки  $f_{st} = f_s(x)\hat{f}_t(y - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)x)$ , то

$$f_{t/s}(y/x) = \hat{f}_t(y - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)x) =$$

$$\begin{aligned}
& = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det(\mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t)))^{-\frac{1}{2}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)x - \mathbf{a}(t) + \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{a}(s))^T \times \right. \\
& \quad \times (\mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t))^{-1} \times \\
& \quad \left. \times (y - \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)x - \mathbf{a}(t) + \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{a}(s)) \right\}
\end{aligned}$$

Таким чином умовний розподіл  $\zeta(t)$  при умові, що відомо значення  $\zeta(s)$ , є нормальним з умовним математичним сподіванням

$$\mathbf{a}(t/\zeta(s)) = \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s)(\zeta(s) - \mathbf{a}(s)) + \mathbf{a}(t)$$

та умовною коваріаційною матрицею

$$\mathbf{K}(t, t/\zeta(s)) = \mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t).$$

*Зауваження 2.* У випадку, коли  $\zeta(s) = const$  з ймовірністю 1, умовний розподіл  $\zeta(t)$  при умові  $\zeta(s)$  очевидно є нормальним з математичним сподіванням  $\mathbf{a}(t)$  та коваріаційною матрицею  $\mathbf{K}(t, t)$ . Дійсно через незалежність сталої величини від будь-чого  $\mathbf{K}(s, t) = \mathbf{O}$ .

### 1.3.2 Моделювання траєкторій розв'язків стохастичного диференціального рівняння

Нагадаємо, що стохастичним диференціальним рівнянням називається рівняння виду

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dw(t), \quad (1.2)$$

де  $a: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$  ( $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$  — множина симетричних матриць розміру  $m \times m$ ),  $w(t)$  —  $m$ -вимірний

вінерівський процес. Для неперервних  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$  і таких, що  $|a(t, x)| + \|b(t, x)\| \leq C(1 + |x|)$  існує єдиний розв'язок рівняння 1.2 з довільною початковою умовою

$$\xi(0) = \xi_0. \quad (1.3)$$

Розв'язком задачі 1.2, 1.3 вважаємо випадковий процес  $\xi(t)$ , що задовольняє інтегральне рівняння

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^t b(s, \xi(s))dw(s). \quad (1.4)$$

Тут другий інтеграл є інтегралом Іто за вінерівським процесом.

Розбивши відрізок  $[0; T]$  на частини точками  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , де  $T > 0$  деяке довільне число, одержимо різнице-вий аналог рівняння 1.4:

$$\xi(t_{k+1}) = \xi(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s, \xi(s))ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s, \xi(s))dw(s).$$

За умови, що  $\max_k(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$  значення інтегралів в останній рівності можна наближено замінити виразами:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s, \xi(s))ds \approx a(t_k, \xi(t_k))(t_{k+1} - t_k),$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s, \xi(s))ds \approx b(t_k, \xi(t_k))(w(t_{k+1}) - w(t_k)).$$

Різниця  $w(t_{k+1}) - w(t_k)$  є нормально розподіленим випадковим вектором  $\mathbb{R}^m$  з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною матрицею  $(t_{k+1} - t_k)E$ . Таким чином розрахунковою формулою для моделювання траєкторій розв'язку стохастичного рівняння 1.2 з початковою умовою 1.3 в дискретні моменти часу  $t_0, t_1, \dots, t_n$  є:

$$\begin{aligned} \xi(t_{k+1}) &= \xi(t_k) + a(t_k, \xi(t_k))(t_{k+1} - t_k) + \\ &\quad + b(t_k, \xi(t_k))\eta_k \sqrt{t_{k+1} - t_k}, \\ \xi(t_0) &= \xi_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отже, досить змоделювати значення випадкового вектора  $\xi(t_0)$  відповідно до розподілу  $\xi_0$  та потрібну кількість незалежних значень  $m$ -вимірною випадкового вектора  $\eta_k$  із стандартним нормальним розподілом. За формулою 1.5 можна знайти всі значення траєкторії  $\xi(t)$  в моменти часу  $t_k$ .

## 1.4 Метод Монте-Карло

### 1.4.1 Обчислення інтегралів

Нехай  $G$  довільна область в  $\mathbb{R}^m$ . Розглянемо задачу про наближене обчислення інтегралу

$$I = \int_G f(x)p(x)dx, \quad (1.6)$$

де  $p(x)$  – деяка задана щільність розподілу на  $G$ .

*Зауваження 3.* Очевидно, що кожен інтеграл  $\int_G f(x)dx$  по обмеженій області  $G$  можна звести до виду (1.5). Дійсно, якщо через  $mes(G)$  позначити  $n$ -вимірну міру множини  $G$ , то  $p(x) = 1/mes(G)$  при  $x \in G$  є щільністю рівномірного розподілу на  $G$ . Тоді

$$\int_G f(x)dx = \int_G f_1(x)p(x)dx,$$

де  $f_1(x) = mes(G) \cdot f(x)$ .

Щоб побудувати метод для обчислення інтегралу (1.6) (метод Монте-Карло), розглянемо випадкову точку (вектор)  $\xi$  з щільністю розподілу  $p(x)$  і введемо скалярну випадкову величину  $\eta = f(\xi)$ . Математичне сподівання випадкової величини  $\eta$  дорівнює, очевидно, значенню інтеграла  $I$ . Згідно закону великих чисел за умови, що існує  $\mathbf{E}|\eta|$ , наближене значення  $I = \mathbf{E}\eta$

можна знайти як середнє арифметичне достатньо великої кількості незалежних випадкових величини з тим же розподілом, що і  $\eta$ . Нехай  $\{\xi_i : i = \overline{1, n}\}$  набір незалежних реалізацій випадкової точки  $\xi$  і  $\eta_i = f(\xi_i)$ , тоді оцінкою інтеграла (1.6) є величина

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

*Приклад 6.* Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{\infty} f(x)e^{-kx} dx$ ,  $k > 0$ .

Візьмемо щільність (показниковий з параметром  $k$  розподіл)  $p(x) = ke^{-kx}$ ,  $x > 0$  і функцію  $f_1 = \frac{f(x)}{k}$ . Якщо  $\xi_i$  – незалежні значення випадкової величини зі щільністю  $p(x)$ , то оцінкою інтеграла  $I$  є

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

Наближену формулу для обчислення  $I$  можна подати у вигляді<sup>3</sup>

$$I \approx \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^n f\left(-\frac{\ln \alpha_i}{k}\right),$$

де  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – незалежні рівномірно розподілені на  $[0; 1]$  числа.

## 1.4.2 Інтерполювання функцій

Розглянемо функцію  $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$ , значення якої відомі тільки у вершинах  $d$ -вимірного куба  $K^d$ . Потрібно проінтерполювати значення цієї функції в точці  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  (нехай це буде  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_d)$ ), розміщеній всередині  $K^d$ . Інтерполяція лінійна за кожною із змінних.

---

<sup>3</sup>Функцією показникового розподілу є  $F(x) = 1 - e^{-kx}$ ,  $x > 0$ . Твердження випливає з того, що  $F^{-1}(x) = -\frac{1}{k} \ln(1 - x)$  і числа  $1 - \alpha_i$  мають рівномірний на  $[0; 1]$  розподіл.



Введемо  $d$  незалежних випадкових величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ , кожна з яких приймає тільки два значення — 0 і 1, і нехай

$$\mathbf{P}(\xi_i = 0) = 1 - x_i, \quad \mathbf{P}(\xi_i = 1) = x_i. \quad (1.7)$$

Точка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$  є вершиною куба  $K^d$ .

*Теорема 2.* Нехай  $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$  така, що існує  $\mathbf{E}f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ , тоді

$$\mathbf{E}f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_d).$$

*Доведення.* Нехай  $k_i = 0$  або  $k_i = 1$ . Позначимо через

$$c(k_i) = \mathbf{P}(\xi_i = k_i) = \begin{cases} 1 - x_i, & k_i = 0; \\ x_i, & k_i = 1. \end{cases}$$

Тоді через незалежність  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_d) &= \mathbf{E}f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_d=0}^1 f(k_1, \dots, k_d) \mathbf{P}(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_d = k_d) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_d=0}^1 f(k_1, \dots, k_d) c(k_1) \dots c(k_d). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Доведемо, що в кожній вершині куба  $K^d$  одержане значення співпадає із значенням функції  $f$  в цій вершині та лінійність по кожному аргументу одержаної функції.

Нехай  $(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_d)$  — одна з вершинок куба. Тоді оскільки при  $x_i = \hat{k}_i \neq k_i$   $c(k_i) = 0$ , значення  $g(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_d)$  задається одним доданком  $f(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_d) c(\hat{k}_1) \dots c(\hat{k}_d)$ . Але при  $x_i = \hat{k}_i$   $c(\hat{k}_i) = 1$ . Тому  $g(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_d) = f(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_d)$ .

Зафіксуємо тепер всі значення аргументів функції  $g(x_1, \dots, x_d)$  крім одного. Кожен доданок (1.8) лінійно залежить від цієї змінної, тому і функція  $g(x_1, \dots, x_d)$  лінійна за цим аргументом.

Отже,  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_d) = g(x_1, \dots, x_d)$  □

З теореми 2 випливає метод лінійної інтерполяції функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$  всередині одиничного куба.

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_d) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_d^{(j)}),$$

де  $(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \dots, \xi_d^{(j)})$  набір випадкових незалежних вершин куба. Враховуючи, що розподіл кожної такої вершини задається рівностями (1.7), кожен з таких величин можна виразити через величини  $\alpha$  незалежні та рівномірно розподілені на  $[0; 1]$ :  $\xi_i = \mathbb{I}_{x_i - \alpha > 0}$  і отже,

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_d) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\mathbb{I}_{x_1 > \alpha_{1j}}, \mathbb{I}_{x_2 > \alpha_{2j}}, \dots, \mathbb{I}_{x_d > \alpha_{dj}}). \quad (1.9)$$

Формула (1.9) дає можливість інтерполювати значення функції у всіх точках куба використовуючи одні і ті ж змодельовані випадкові його вершини.

### 1.4.3 Розв'язання рівняння Лапласа

Нехай задана обмежена зв'язна область  $G$  і точка  $P_0 \in G$ . Визначимо випадкову траєкторію  $\xi_0 \rightarrow \xi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_n \rightarrow$  в такий спосіб: покладемо  $\xi_0 = P_0$  далі, якщо точка  $\xi_k$  відома, то побудуємо коло довільного радіуса  $r_k$  з центром в  $\xi_k$ , розташоване усередині  $G$ , і на цьому колі виберемо випадкову точку  $\xi_{k+1}$ . Таким чином,

$$\xi_{k+1} = \xi_k + r_k \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\omega_k = (\cos \varphi_k; \sin \varphi_k)$  і кут  $\varphi_k$  рівномірно розподілений в інтервалі  $(0; 2\pi)$ .

*Теорема 3.* Якщо функція  $u(P) = u(x, y)$  задовольняє в області  $G$  рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.10)$$

то при кожному  $n$  і при будь-яких  $r_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  математичне сподівання  $\mathbf{E}u(\xi_n)$  дорівнює значенню  $u(P_0)$  на початку траєкторії.

*Доведення.* Дамо більше точний зміст твердженню про довільність радіуса  $r_k$ . Будемо вважати, що задано деяку щільність  $f_k(r)$ , що тотожно дорівнює нулю при всіх  $r$  більших мінімальної відстані від  $\xi_k$  до границі області  $G$ , а також при  $r < 0$ ; і вибір  $r_k$  здійснюється відповідно до щільності  $f_k(x)$ .

Нехай  $p_k(x, y)$  щільність розподілу точки  $\xi_k$  в  $G$ . Тоді математичне сподівання величини  $u(\xi_{k+1}) = u(\xi_k + r_k \omega_k)$  дорівнює

$$\mathbf{E}u(\xi_{k+1}) = \int_G p_k(x, y) dx dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(r) dr \int_0^{2\pi} u(P + r\omega) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

За відомою теоремою про середнє значення гармонійної функції

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(P + r\omega) d\varphi = u(x, y).$$

Тому

$$\mathbf{E}u(\xi_{k+1}) = \int_G u(x, y) p_k(x, y) dx dy = \mathbf{E}u(\xi_k).$$

При  $k = 0$  точка  $\xi_0 = P_0$ ,  $u(\xi_0) = u(P_0)$  і  $\mathbf{E}u(\xi_0) = \mathbf{E}u(P_0)$ . Застосовуючи індукцію, одержимо твердження теореми.  $\square$

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа.

Для розв'язання цієї задачі можна використати побудовану вище траєкторію. Нехай на границі  $G_0$  області  $G$  задана обмежена функція  $g(P)$ . Позначимо через  $u(P)$  шуканий розв'язок, що задовольняє усередині  $G$  рівняння (1.10) і дорівнює  $g(P)$  при  $P \in G_0$ . Фіксуємо досить малий окіл  $G_0(\varepsilon)$  границі  $G_0$ . Щоб обчислити  $u(P_0)$  будемо будувати траєкторії виду  $P_0 = \xi_0 \rightarrow \xi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_\nu$  доти, поки випадкова точка  $\xi_\nu$  не попаде в  $G_0(\varepsilon)$ . Нехай  $P_\nu$  — найближча до  $\xi_\nu$  точка границі  $G_0$ . Можемо вважати, що значення випадкової величини  $u(\xi_\nu)$  приблизно дорівнює  $g(P_\nu)$ . Побудувавши  $n$  траєкторій такого типу, одержимо значення  $g(P_{\nu_1}), g(P_{\nu_2}), \dots, g(P_{\nu_n})$  за якими оцінюється шуканий розв'язок

$$u(P_0) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(P_{\nu_i}).$$

# Розділ 2

## Лабораторні роботи

### 2.1 Моделювання дискретних випадкових величин

#### 2.1.1 Завдання

1. Використовуючи стандартний метод згенерувати послідовність з  $100 + N$  значень випадкової величини з розподілом, що задається таблицею:

$x_k$	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{2} + 0.25$	$\frac{N+2}{2}$	$\frac{N}{2} + 1.5$	$\frac{N+5}{2}$
$p_k$	$\frac{N}{10(N+8)}$	$\frac{N+1}{10(N+8)}$	$\frac{N+3}{10(N+8)}$	$\frac{N+6}{10(N+8)}$	$\frac{N+7}{10(N+8)}$

$x_k$	$\frac{N}{2} + 4$	$\frac{N}{2} + 5$	$\frac{N+11}{2}$	$\frac{N+13}{2}$	$\frac{N+17}{2}$
$p_k$	$\frac{N+9}{10(N+8)}$	$\frac{N+11}{10(N+8)}$	$\frac{N+15}{10(N+8)}$	$\frac{N+17}{10(N+8)}$	$\frac{N+11}{10(N+8)}$

Тут і далі  $N$  — номер варіанта.

- Згенерувати набір з  $75+2N$  значень випадкової величини з розподілом Пуассона з параметром  $\lambda = 1 + \frac{N}{10}$  (використати один із спеціальних методів).
- Перевірити, чи узгоджується згенерована в попередньому пункті вибірка із законом розподілу Пуассона (рівень значущості взяти рівним  $\alpha = 1 - \frac{N}{200}$ ).

## 2.2 Моделювання неперервних випадкових величин

### 2.2.1 Завдання

- Розробити процедуру моделювання значень випадкових величин із щільністю розподілу (використати стандартний метод)

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- Сформувати вибірку із 100 значень даної випадкової величини.
- Побудувати емпіричну функцію розподілу одержаної вибірки та порівняти її із функцією розподілу моделюваної випадкової величини.

2. Використовуючи метод виключення змоделювати вибірку із 100 значень випадкової величини, що має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{(x-2)^2}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

### 2.2.2 Виконання

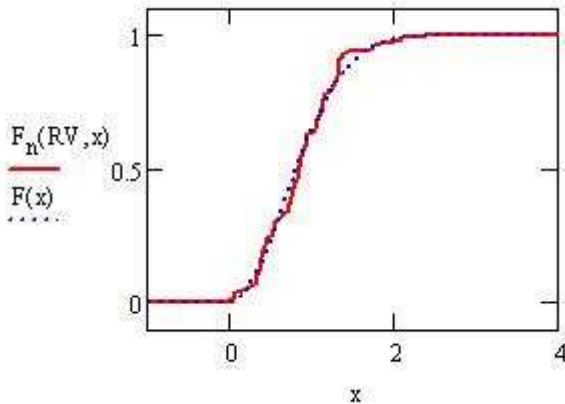
1. • Знайти моделюючу формулу  $\xi = u(\alpha)$ , де  $u(x) = F^{-1}(x)$  та виконати Mathcad-програму

```
RV := | for i ∈ 0..99
      | vi ← u(rnd(1))
      | v
```

- Визначити емпіричну функцію розподілу запрограмувавши в Mathcad функцію  $F_n(x)$
- Для порівняння емпіричної функції розподілу та функції розподілу модельованої випадкової величини побудувати їх графіки, задавши ці функції в Mathcad:

```
Fn(R,x) := | v ← 0
             | for i ∈ 0..99
             | v ← v + (Ri < x)
             | v ←  $\frac{v}{100}$ 
```

```
F(x) := | 1 - e-x2 if x ≥ 0
         | 0 otherwise
```



2. • Щільністю розподілу даної випадкової величини є

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

- Mathcad-процедура

```

RV := | for i ∈ 0..99
      | | u ← rnd(2)
      | | v ← rnd(1)
      | | while v ≥ f(u)
      | | | u ← rnd(2)
      | | | v ← rnd(1)
      | | ri ← u

```

моделює 100 значень випадкової величини із щільністю розподілу  $f(x)$ .



## 2.3 Моделювання нормально розподіленого випадкового вектора

### 2.3.1 Завдання

1. Змоделювати за методом виключення двовимірний нормально розподілений випадковий вектор  $\xi$  з незалежними компонентами, нульвим математичним сподіванням та одиничними дисперсіями.
2. Використовуючи лінійне перетворення  $\zeta = \mathbf{A}\xi + \mathbf{a}$  з нижньою трикутною матрицею  $\mathbf{A}$ , побудувати невироджений нормально-розподілений вектор з середнім

$$\mathbf{a} = \left( \frac{N}{10}; \frac{25 - N}{10} \right)$$

та коваріаційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} N & \frac{N}{25} \sqrt{N(25 - N)} \\ \frac{N}{25} \sqrt{N(25 - N)} & 25 - N \end{pmatrix}$$

3. Створивши вибірку об'єму  $100 + 2N$  значень випадкових величин згенерованих в пункті 2, перевірити якість розробленої процедури генерування невиродженого випадкового вектора, перевіривши гіпотези про:
  - нормальність розподілу елементів вектора з даними середніми та дисперсіями;
  - коефіцієнт кореляції між елементами вектора.

### 2.3.2 Виконання

1. Координати вектора є числа  $(x; y)$ , для яких  $(x; y; z)$  лежить нижче поверхні

$$z = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2} \right\}$$

та рівномірно розподілена на прямокутному паралелепіпеді

$$\left\{ (x; y; z) \mid -3 < x < 3, -3 < y < 3, 0 < z < \frac{1}{2\pi} \right\}.$$

2. Матриця

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

має елементи  $a_{11} = \sqrt{K_{11}}$ ,  $a_{21} = \frac{K_{12}}{\sqrt{K_{11}}}$ ,  $a_{22} = \sqrt{K_{22} - \frac{K_{21}^2}{K_{11}}}$

3. Використати пакет STATISTICA.

- використати Distributing Fitting для перевірки гіпотези про нормальність розподілу кожного елемента вектора з середніми  $\frac{N}{10}$  та  $\frac{25-N}{10}$  і дисперсіями  $N$  та  $25 - N$ .
- використати Basic statistics/Tables — Difference tests для перевірки гіпотези про рівність коефіцієнта кореляції між елементами випадкового вектора значенню  $\frac{N}{25}$  (попередньо обчислити оцінку коефіцієнта кореляції з допомогою Basic statistics/Tables — Correlation matrices).

## 2.4 Моделювання траєкторій марківського гаусівського процесу

### 2.4.1 Завдання

1. Розробити моделюючу процедуру побудови значень траєкторії двовимірного марківського гаусівського процесу з вектором середніх  $\mathbf{a}(t)$  та матричною кореляційною функцією  $\mathbf{K}(s, t)$ . Взяти  $\mathbf{a}(t) = \left( \frac{N}{N+1} \cos 2\pi t; \left( \frac{N-5}{15} + \frac{1}{2} \right) \sin 2\pi t \right)$  та

$$\mathbf{K}(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{N-1}{N} \min(s, t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \min(s, t) \end{pmatrix},$$

де  $N$  — номер варіанту.

2. Згенерувати та зобразити на графіку точки траєкторії з'єднані ламаною лінією, що відображають значення процесу в дискретні моменти часу  $t_k = \frac{k}{100+N}$ ,  $k = \overline{0; 100}$ .

### 2.4.2 Виконання

1. Задати значення процесу в початковий момент часу  $t_0 = 0$ , рівне  $\zeta(t_0) = \mathbf{a}(t_0)$ .
2. На кожному наступному кроці змоделювати значення процесу за формулою

$$\zeta(t_i) = \mathbf{a}(t_i/\zeta(t_{i-1})) + \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

де  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  — випадковий нормальний вектор з незалежними компонентами та  $\mathbf{E}\mathbf{w}_k = 0$ ,  $\mathbf{D}\mathbf{w}_k = 1$ ,  $k = 1, 2$ , а матриця  $\mathbf{A}$  — нижня трикутна і така, що  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{K}(t_i, t_i/\zeta(t_{i-1}))$ ,

$$\mathbf{a}(t/\zeta(s)) = \mathbf{K}(s, t)\mathbf{K}^{-1}(s, s) (\zeta(s) - \mathbf{a}(s)) + \mathbf{a}(t),$$

$$\mathbf{K}(t, t/\zeta(s)) = \mathbf{K}(t, t) - \mathbf{K}(t, s)\mathbf{K}^{-1}(s, s)\mathbf{K}(s, t).$$

Врахувати, що  $\zeta(t_0) = \text{const}$ , тому  $\zeta(t_1)$  є нормально розподіленим випадковим вектором з математичним сподіванням  $\mathbf{a}(t_1)$  та коваріаційною матрицею  $\mathbf{K}(t_1, t_1)$ . Матрицю  $\mathbf{A}$  можна знайти за допомогою функції `cholesky()` (Mathcad).

- Для побудови графіка траєкторії процесу скористатись Mathcad.

## 2.5 Метод Монте-Карло

### 2.5.1 Завдання

- Обчислити інтеграл  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 dt$ .
- Функція  $f(x, y, z)$  задана своїми значеннями у вершинах квадрата  $[0; 1]^2$ . Знайти її значення у всіх точках, координати яких лежать на відрізках  $[0; 1]$  з кроком 0, 1.

$(x; y)$	$f$	$(x; y)$	$f$	$(x; y)$	$f$	$(x; y)$	$f$
$(0; 0)$	1	$(1; 0)$	2	$(0; 1)$	3	$(1; 1)$	5

Побудувати графік функції.

### 2.5.2 Виконання

- Перетворити інтеграл до виду  $\sqrt{2\pi} \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin t^2 \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ . Моделюючи послідовність незалежних рівномірно розподілених на  $[0; 1]$  випадкових величин  $\alpha_k$ , обчислити наближене значення інтеграла за формулою  $I = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin 2\pi\alpha_k^2$ .

2. Згенерувати  $n = 100$  випадкових пар  $(\xi_k; \eta_k)$  чисел з рівномірним на  $[0; 1]$  розподілом. Значення функції в точках  $(x; y)$  знайти за формулою

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbb{I}_{x > \xi_k}, \mathbb{I}_{y > \eta_k}).$$

Графік функції будемо в Mathcad.



## Розділ 3

# Контрольні питання та бібліографія

### Питання до курсу.

1. Стандартний метод моделювання дискретних випадкових величин.
2. Моделювання рівномірного дискретного розподілу.
3. Спеціальний метод моделювання розподілу Пуассона.
4. Стандартний метод моделювання неперервних розподілів.
5. Метод виключення для моделювання неперервно розподілених випадкових величин.
6. Стандартний метод моделювання випадкових векторів.
7. Метод виключення для моделювання випадкових векторів.
8. Моделювання невиродженого багатовимірного нормального розподілу.

9. Схема моделювання траєкторій гаусівського марківського процесу .
10. Визначення умовних математичного сподівання та коваріаційної функції гаусівського процесу при відомому його значенні в попередній момент.
11. Моделювання траєкторій розв'язків стохастичного диференціального рівняння.
12. Обчислення інтегралів за методом Монте-Карло.
13. Інтерполювання функцій за методом Монте-Карло.
14. Розв'язання рівняння Лапласа за методом Монте-Карло.



# Рекомендована література

- [1] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Курс статистического моделирования*. М.: Наука, 1976. – 320 с.
- [2] Єріна А.М. *Статистичне моделювання та прогнозування*: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2001. — 170 с.
- [3] Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешкалин Л.Д. *Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных*. Справочное издание под ред. Айвазяна С.А. –М.: Финансы и статистика, 1983.

