

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

Т.П. ГОЙ  
Г.П. МАЛИЦЬКА  
А.В. СОЛОМКО

# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Івано-Франківськ

2012

УДК 517.44  
ББК 22.161.2  
Г 57

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики  
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний  
посібник для студентів напрямів підготовки "математика", "прикладна  
математика" (протокол № 11 від 11 травня 2010 р.).*

### **Рецензенти:**

*Маслюченко В.К.*, доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича),

*Новосядлий С.П.*, доктор технічних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника),

*Обшта А.Ф.*, доктор технічних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

**Гой Т.П.**

Г 57 Операційне числення: Навчальний посібник / Т.П. Гой, Г.П. Малицька, А.В. Соломко. – Івано-Франківськ: Сімик, 2012. – 206 с.

У посібнику викладений курс операційного числення на основі перетворення Лапласа та його основні застосування: обчислення невластних інтегралів, розв'язування лінійних звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь із загалюванням, інтегральних рівнянь типу згортки, деяких типів інтегро-диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь та крайових задач для лінійних рівнянь з частинними похідними.

Окремий розділ присвячений опису алгоритмів реалізації методів операційного числення засобами популярних систем комп'ютерної математики Maple, Mathematica та Mathcad.

Для студентів напрямів підготовки "математика", "прикладна математика" вищих навчальних закладів.

**УДК 517.44**  
**ББК 22.161.2**

# Зміст

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП . . . . .   | 6  |
| РОЗДІЛ I. Перетворення Лапласа . . . . .  | 9  |
| § 1.1. Функція-оригінал . . . . .   | 9  |
| § 1.2. Зображення функції-оригінала. Область існування та<br>аналітичність зображення . . . . . | 12 |
| § 1.3. Зображення деяких функцій . . . . .  | 15 |
| Контрольні питання до розділу I . . . . .   | 20 |
| Вправи для самостійного виконання . . . . .   | 21 |
| РОЗДІЛ II. Основні властивості перетворення Лапласа . . . . .                                   | 23 |
| § 2.1. Лінійність і подібність перетворення Лапласа . . . . .                                   | 23 |
| § 2.2. Загаювання та випередження оригіналу . . . . .   | 26 |
| § 2.3. Зміщення зображення . . . . .  | 31 |
| § 2.4. Зображення періодичного оригінала . . . . .  | 32 |
| § 2.5. Диференціювання оригіналу та зображення . . . . .  | 34 |
| § 2.6. Інтегрування оригіналу та зображення . . . . .   | 38 |
| § 2.7. Диференціювання та інтегрування за параметром. Граничні<br>теореми . . . . .             | 42 |
| Контрольні питання до розділу II . . . . .  | 47 |

|  |     |
|--|-----|
| Вправи для самостійного виконання . . . . .  | 48  |
| РОЗДІЛ III. Згортка функцій . . . . .  | 51  |
| § 3.1. Згортка функцій та її властивості . . . . .                                 | 51  |
| § 3.2. Неперервність згортки . . . . .   | 54  |
| § 3.3. Згортка оригіналів та зображення згортки . . . . .                          | 56  |
| § 3.4. Узагальнене множення зображень . . . . .                                    | 60  |
| § 3.5. Теорема Дюамеля . . . . .   | 63  |
| Контрольні питання до розділу III . . . . .  | 64  |
| Вправи для самостійного виконання . . . . .  | 65  |
| РОЗДІЛ IV. Обернене перетворення Лапласа . . . . .                                 | 67  |
| § 4.1. Формула Рімана-Мелліна . . . . .  | 67  |
| § 4.2. Множення оригіналів . . . . .   | 71  |
| § 4.3. Теореми розвинення . . . . .  | 72  |
| Контрольні питання до розділу IV . . . . .   | 80  |
| Вправи для самостійного виконання . . . . .  | 80  |
| РОЗДІЛ V. Застосування операційного числення . . . . .                             | 82  |
| § 5.1. Обчислення невластних інтегралів . . . . .                                  | 82  |
| § 5.2. Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь . . . . .                    | 86  |
| § 5.3. Інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь . . . . .             | 100 |
| § 5.4. Розв'язування диференціальних рівнянь із загаюванням . . . . .              | 104 |
| § 5.5. Розв'язування рівнянь з частинними похідними . . . . .                      | 107 |
| § 5.6. Розв'язування інтегральних рівнянь . . . . .                                | 112 |
| § 5.7. Розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь . . . . .                     | 116 |
| Контрольні питання до розділу V . . . . .  | 118 |
| Вправи для самостійного виконання . . . . .  | 120 |
| РОЗДІЛ VI. Дискретне перетворення Лапласа . . . . .                                | 126 |
| § 6.1. Гратчасті функції. $D$ -перетворення і обернене $D$ -перетворення . . . . . | 126 |

|  |            |
|--|------------|
| § 6.2. Основні властивості $D$ -перетворення . . . . .   | 131        |
| § 6.3. Різницеві рівняння . . . . .  | 141        |
| Контрольні питання до розділу VI . . . . .   | 149        |
| Вправи для самостійного виконання . . . . .  | 150        |
| <b>РОЗДІЛ VII. Застосування систем комп'ютерної математики для<br/>розв'язування задач операційного числення . . . . .</b>           | <b>152</b> |
| § 7.1. Перетворення Лапласа та обернене перетворення Лапласа<br>у математичних пакетах Mathematica, Maple, Mathcad . . . . .         | 152        |
| § 7.2. Розв'язування прикладних задач операційного числення<br>засобами математичних пакетів Mathematica, Maple та Mathcad . . . . . | 163        |
| <b>ДОДАТКИ . . . . .</b>   | <b>178</b> |
| Додаток 1. Операційне числення в прикладних фізичних задачах . . . . .   | 178        |
| Додаток 2. Таблиця властивостей оригіналів і зображень . . . . .   | 185        |
| Додаток 3. Таблиця зображень основних функцій . . . . .  | 188        |
| Додаток 4. Таблиця властивостей дискретних оригіналів та зображень . . . . .   | 192        |
| Додаток 5. Таблиця зображень основних дискретних оригіналів . . . . .  | 193        |
| Покажчик . . . . .   | 195        |
| Бібліографічний покажчик . . . . .   | 198        |
| Рекомендована література . . . . .   | 204        |

## ВСТУП

Операційне (символьне) числення є ефективним апаратом дослідження багатьох теоретичних питань і прикладних задач математики та інших областей науки і техніки, особливо питань і задач, пов'язаних з розв'язуванням лінійних диференціальних рівнянь (звичайних та з частинними похідними), інтегральних, інтегро-диференціальних, диференціально-різницевих, різницевих рівнянь. Зокрема, до таких рівнянь приводять задачі з електротехніки, радіотехніки, імпульсної техніки, теорії автоматичного регулювання, моделювання динаміки фінансових ресурсів.

Таку універсальність методів операційного числення можна пояснити передовсім його ефективністю – можливістю отримати розв'язок доволі простими і економними засобами.

Методи неперервного операційного числення дозволяють розглядати символ диференціювання  $\frac{d}{dt} = p$  як величину, над якою можна проводити певну сукупність формальних операцій. На основі цих операцій будується відповідний аналіз, який є строго обґрунтованою математичною теорією. У системі операцій дії диференціювання функції за певних умов відповідає дія множення на оператор  $p$  деякої функції  $F(p)$ , яка залежить від цього оператора, а дії інтегрування функції  $f(t)$  – ділення на  $p$  функції  $F(p)$ . У результаті цього багато операцій математичного аналізу зводяться до більш простих алгебраїчних дій. Зокрема, розв'язування лінійних диференціальних рівнянь

зі сталими коефіцієнтами відносно шуканої функції  $f(t)$  зводиться до розв'язування алгебраїчних рівнянь відносно функції  $F(p)$ .

Розвиток операційного числення розпочався у XVII-XVIII ст. з робіт Г. Лейбніца<sup>1</sup>, Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, О. Коші.

Англійський вчений Олівер Гевісайд у 1887-1912 роках ввів у символічне числення правила дій з оператором  $\frac{d}{dt} = p$  і функціями цього оператора. Саме О. Гевісайд започаткував систематичне застосування операційного числення до розв'язування фізичних і технічних задач, зокрема він використав побудоване числення для розробки питань "працездатності" трансатлантичного телеграфно-телефонного кабеля, що з'єднав Європу і Америку наприкінці XIX століття. Тому створення операційного числення пов'язують саме з його іменем.

Значний внесок у теорію операційного числення вніс професор Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченко. У своїй монографії "Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений" (1862 р.) за 30 років до появи робіт О. Гевісайда він розглядає символи та їх властивості, застосовує операційне числення до розв'язування лінійних звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами.

Однак операційне числення, яке використовувалось у працях О. Гевісайда, не було строго обґрунтованим. Лише у 20-х роках XX ст. у роботах Т. Бромвіча, Д. Карсона, П. Леві, Б. Ван дер Поля, деяких інших вчених метод отримав строге обґрунтування і назву операційного методу. Це обґрунтування зроблено на основі загальної теорії так званих інтегральних перетворень, один клас яких вперше було введений Л. Ейлером (1737 р.), а в 1787 р. досліджений П. Лапласом. У зв'язку з цим операційне числення часто називають методом інтегрального перетворення Лапласа.

Інший напрям розвитку операційне числення отримало у працях Я. Міку-

---

<sup>1</sup> Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на стор. 198

сінського [19]. У нього операційне числення обґрунтовується на операторній основі без зв'язку з перетворенням Лапласа. Дії множення у алгебрі функцій Мікусінського відповідає згортка. У результаті утворюється поле, елементи якого є одночасно операторами і узагальненими або реальними функціями. Реальні функції можуть бути зображені оператором диференціювання, що дозволяє переходити від диференціального рівняння до операторного.

На операторній основі Я. Мікусінського операційне числення можна застосовувати і до функцій, перетворення Лапласа яких не існує. Однак застосування перетворення Лапласа значно спрощує одержання формул операційного числення і полегшує вивчення поля операторів, представляючи його функціями комплексної змінної.

Сьогодні теорія операційного числення та її застосування набули широкого використання і стали однією з актуальних галузей прикладної математики.



# РОЗДІЛ I. Перетворення Лапласа

## § 1.1. Функція-оригінал

*Функцією-оригіналом* (або просто *оригіналом*) називають комплексну функцію  $f(t) = u(t) + iv(t)$  дійсної змінної  $t$ , яка задовольняє такі умови:

1)  $f(t)$  та всі її похідні до  $n$ -го порядку включно неперервні на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , або мають на будь-якому скінченному відрізку  $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$  скінченну кількість точок розриву першого роду;

2)  $f(t) \equiv 0$  для  $t < 0$ ;

3)  $|f(t)|$  зростає не швидше, ніж деяка експоненціальна функція, тобто існують такі сталі  $M > 0$  і  $s > 0$ , не залежні від  $t$ , що для будь-яких  $t > 0$

$$|f(t)| < Me^{st}. \quad (1.1)$$

Нагадаємо, що функція, яка має на довільному інтервалі скінченну кількість розривів першого роду, називається кусково-неперервною на цьому інтервалі.

**Зауваження 1.1.** Першу умову в наведеному означенні можна замінити простішою (мінімальна вимога – інтегровність на довільному скінченному інтервалі) або більш жорсткою, наприклад, умовами Діріхле, де додатково вимагається, щоб функція  $f(t)$  була кусково монотонною. Вибір

однієї з таких умов не є суттєвим з практичної точки зору і пов'язаний передовсім з особливостями побудови математичної теорії.

Друга умова є найменш жорсткою для прикладних процесів, бо зазвичай можна вказати початок відліку часу  $t = 0$  і досліджувати процеси для  $t > 0$ .

Третя умова означення також не надто обтяжлива з практичної точки зору, бо переважна більшість функцій, які описують прикладні процеси, цю умову задовольняють.

Для довільної функції-оригінала  $f(t)$  число  $s$  у формулі (1.1) визначається неоднозначно. Число  $s_0 \geq 0$ , для якого нерівність (1.1) виконується для довільного числа  $s = s_0 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) і не виконується для  $s = s_0 - \varepsilon$  (тобто  $s_0 = \inf\{s\}$  – точна нижня грань чисел  $s$ ), називають **показником зростання** функції  $f(t)$ .

З (1.1) випливає, що всі функції-оригінали  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  є або обмеженими (тоді  $s = 0$ ), або прямують до нескінченності, але не швидше, ніж функція  $e^{s_0 t}$ , де  $s_0$  – показник зростання  $f(t)$ . Такі функції називають **функціями експоненціального типу**.

Сукупність усіх оригіналів  $f(t)$  називають **простором оригіналів**.

Найпростішими оригіналами є **функція Гевісайда**

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t > 0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \end{cases}$$

та **узагальнена функція Гевісайда**

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t > t_0, \\ 0, & \text{якщо } t < t_0, \end{cases}$$

де  $t_0 > 0$ .

Якщо деяка функція  $f(t)$  задовольняє першу та третю умови означення оригіналу, але не задовольняє другу умову (такими є, наприклад, функції

1,  $\sin t$ ,  $e^t$ ,  $t^n$ ), то функція

$$f(t)\theta(t) = \begin{cases} f(t), & \text{якщо } t > 0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \end{cases}$$

задовольняє всі умови з означення оригінала. Надалі, використовуючи позначення  $f(t)$ , вважатимемо, що для  $t < 0$  ця функція продовжена нулем. Така домовленість пояснюється фізичним змістом задач, які приводять до диференціальних рівнянь з початковими умовами в момент часу  $t = 0$ , адже процес досліджується тільки на інтервалі  $t \in [0, +\infty)$ , тому не має значення, який процес описує шукана функція до початкового моменту часу, тобто для  $t < 0$ .

У просторі оригіналів функція Гевісайда є одиничною функцією: якщо  $f(t)$  – функція-оригінал, то  $f(t)\theta(t) \equiv f(t)$ .

**Приклад 1.1.** *Перевірити, чи є оригіналами функції  $f_1(t) = e^{3t-2}$ ,  $f_2(t) = \frac{1}{2t-3}$ ,  $f_3(t) = 3^{3t}$ .*

**Розв'язання.** Функція  $f_1(t)$  є оригіналом, бо для неї усі умови означення виконуються ( $M = e^{-2}$ ,  $s_0 = 3$ ). Функція  $f_2(t)$  не є оригіналом, бо у точці  $t = 3/2$  вона має розрив другого роду, тобто не виконується перша умова означення. Функція  $f_3(t)$  не є оригіналом, бо зростає швидше експоненціальної функції (не виконується третя умова означення, адже  $3^{3t} > Me^{st}$  для довільних  $M$ ,  $s$  і достатньо великих  $t > 0$ ). ►

З (1.1) одержуємо нерівність

$$\frac{\ln |f(t)|}{t} \leq s + \ln \frac{M}{t},$$

з якої випливає, що показник зростання функції-оригінала  $f(t)$  можна знайти за формулою

$$s_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(t)|}{t}. \quad (1.2)$$

Якщо  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(t)|}{t} = +\infty$ , то кажуть, що функція  $f(t)$  має **необмежене зростання**. Такою є, наприклад, функція  $f(t) = e^{t^2}$ , бо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{t^2}}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

**Приклад 1.2.** Знайти показник зростання многочлена  $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ .

**Розв'язання.** Скористаємося формулою (1.2):

$$\begin{aligned} s_0 &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0|}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |t^n (a_n + \dots + a_1 t^{1-n} + a_0 t^{-n})|}{t} = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n \ln t + \ln |a_n + \dots + a_1 t^{1-n} + a_0 t^{-n}|}{t} = n \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Зауважимо, що для довільної функції-оригінала  $f(t)$  з показником зростання  $s_0$  функція  $t f(t)$  також є оригіналом з тим самим показником зростання. Отже, після множення оригінала на довільний степінь  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , одержимо оригінал з тим самим показником зростання.

## § 1.2. Зображення функції-оригінала. Область існування та аналітичність зображення

**Перетворенням Лапласа** називають інтегральне перетворення, визначене співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (1.3)$$

де  $p = s + i\sigma$  – комплексна змінна. Інтеграл у правій частині рівності (1.3) називають **інтегралом Лапласа**.

**Зображенням** функції-оригінала  $f(t)$  називають функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p$ , визначену інтегралом Лапласа (1.3).

Сукупність усіх зображень  $F(p)$  називають **простором зображень**.

Визначений інтеграл Лапласа є невластим, причому областю його збіжності є сукупність тих комплексних чисел  $p$ , для яких цей інтеграл має зміст.

**Теорема 1.1.** Якщо  $f(t)$  – функція-оригінал з показником зростання  $s_0$ , то інтеграл Лапласа (1.3) збігається, якщо  $\operatorname{Re} p > s_0$ , причому для  $\operatorname{Re} p \geq \tilde{s} > s_0$  збіжність рівномірна.

**Доведення.** Скористаємося ознакою збіжності невласних інтегралів ([18], розд. 2, § 1.2). Оскільки  $|f(t)| < M e^{s_0 t}$ ,  $|e^{-pt}| = e^{-st}$  і  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , то з (1.3) маємо оцінку

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-pt}| dt < M \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \\ &= M \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0-s} \right|_0^a = M \left( \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^{(s_0-s)a}}{s_0-s} - \frac{1}{s_0-s} \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $s > s_0$ , то  $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{(s_0-s)a} = 0$ , а тому

$$|F(p)| < \frac{M}{s - s_0}, \quad (1.4)$$

тобто у півплощині  $s > s_0$  інтеграл Лапласа  $F(p)$  збігається, причому абсолютно.

Якщо  $\operatorname{Re} p \geq \tilde{s} > s_0$ , то аналогічно одержуємо оцінку

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\tilde{s} - s_0}.$$

За мажорантною ознакою Вейерштрасса ([18], розд. 2, § 1.2) інтеграл  $F(p)$  збігається рівномірно на множині  $\operatorname{Re} p \geq \tilde{s} > s_0$ . •

**Теорема 1.2.** Якщо  $f(t)$  – функція-оригінал з показником зростання  $s_0$ , то її зображення  $F(p)$  у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$  є аналітичною функцією.

**Доведення.** Покажемо, що у довільній півплощині  $s \geq s_1 > s_0$  інтеграл  $\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt$ , одержаний з інтеграла Лапласа диференціюванням за змінною  $p$ , збігається рівномірно. Справді, оскільки

$$\left| \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} t |f(t)| |e^{-pt}| dt < M \int_0^{+\infty} t e^{(s_0-s_1)t} dt =$$

$$= M \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( t \frac{e^{(s_0-s_1)t}}{s_0-s_1} \Big|_0^a - \frac{e^{(s_0-s_1)t}}{(s_0-s_1)^2} \Big|_0^a \right) = \frac{M}{(s_1-s_0)^2},$$

то інтеграл  $\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt$  мажорується збіжним інтегралом, який не залежить від  $p$ . Тому згідно з мажорантною ознакою Вейерштрасса функція  $F(p)$  у довільній точці півплощини  $s > s_0$  має похідну, тобто є аналітичною функцією. •

**Теорема 1.3 (необхідна умова існування зображення).** *Якщо  $F(p)$  є зображенням функції  $f(t)$  з показником зростання  $s_0$ , то*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

**Доведення.** З (1.4) випливає, що  $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0$ . Оскільки у півплощині  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  функція  $F(p)$  аналітична (теорема 1.2), то  $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$ . •

Згідно з теоремою 1.3 не можуть бути зображеннями такі функції комплексної змінної, як-от  $1$ ,  $p$ ,  $e^p$ ,  $\cos p$ ,  $\frac{p^2}{p^2-1}$ , бо при необмеженому зростанні  $p$  вони не є нескінченно малими.

За формулою (1.3) кожній функції-оригіналу  $f(t)$  можна поставити у відповідність певну функцію  $F(p)$ , аналітичну у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Зв'язок між функціями  $f(t)$  і  $F(p)$  символічно позначатимемо знаком  $\rightarrow$ , тобто

$$f(t) \rightarrow F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \rightarrow f(t).$$

Зміст цих позначень полягає у тому, що оригіналу  $f(t)$  зіставлено зображення  $F(p)$ , а зображення  $F(p)$  має своїм оригіналом  $f(t)$ . У перетворенні Лапласа оригінал позначатимемо малою буквою, а його зображення – відповідною великою буквою, наприклад,  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$ .

Вказуючи зв'язок між оригіналом  $f(t)$  і зображенням  $F(p)$ , використовують також символи  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $F(p) = L\{f(t)\}$ ,  $f(t) \downarrow F(p)$ .

Формула для оберненого переходу від зображення  $F(p)$  до оригіналу  $f(t)$  має більш складний вигляд і вивчатиметься пізніше (§4.1).

**Зауваження 1.2.** Для побудови операційного числення, окрім перетворення Лапласа, можна розглядати також й інші інтегральні перетворення. Наприклад, О. Гевісайд і Д. Карсон використовували інтегральне перетворення

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

яке тільки множителем  $p$  відрізняється від перетворення Лапласа. Мають широке практичне застосування також перетворення Мелліна, Фур'є, Бесселя тощо [14].

### § 1.3. Зображення деяких функцій

Використовуючи (1.3), знайдемо зображення деяких оригіналів.

**Зображення функції Гевісайда  $\theta(t)$ .** Маємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \theta(t)e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pb} \right).$$

Якщо  $\operatorname{Re} p > 0$ , то  $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-pb} = 0$ . Отже,

$$\theta(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.5)$$

**Зображення узагальненої функції Гевісайда  $\theta(t - t_0)$ .** Маємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \theta(t - t_0)e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-pt} \Big|_{t_0}^b = \frac{e^{-t_0 p}}{p}.$$

Отже,

$$\theta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-t_0 p}}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.6)$$

**Зображення експоненти  $e^{\alpha t}$ .** Оскільки

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{(\alpha-p)t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - p} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-p)t} \Big|_0^b = \frac{1}{\alpha - p} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( e^{(\alpha-p)b} - 1 \right) \end{aligned}$$

і  $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-p)b} = 0$ , якщо  $\operatorname{Re}(p - \alpha) > 0$ , то

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha. \quad (1.7)$$

**Зауваження 1.3.** Зображення  $F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$  є визначеною і аналітичною функцією в усій комплексній площині, крім особливої точки  $p = \alpha$ , хоча відповідний інтеграл Лапласа збігається лише у півплощині  $\operatorname{Re} p > \alpha$ . Така ситуація є типовою: як правило, функція  $F(p)$  є визначеною і аналітичною у значно більшій частині комплексної площини, ніж  $\operatorname{Re} p > \alpha$ . Згідно з теоремою 1.1 функція  $F(p)$  не має особливих точок у цій півплощині, усі вони лежать або на прямій  $\operatorname{Re} p = \alpha$ , або лівіше від неї.

**Зображення  $\delta$ -функції Дірака.** Нагадаємо, що  $\delta$ -функцією Дірака називають функцію, визначену рівностями

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \neq 0, \\ \infty, & \text{якщо } t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Ця функція дозволяє записати просторову густину фізичної величини (маси, заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо), зосередженої або прикладеної в одній точці.

Функцію Дірака можна означити як границю при  $h \rightarrow 0$  імпульсної функції

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in (-\infty, 0) \cup (h, +\infty), \\ 1/h, & \text{якщо } t \in [0, h). \end{cases}$$

Використовуючи функцію Гевісайда та узагальнену функцію Гевісайда,  $\delta_h(t)$  можна записати у вигляді

$$\delta_h(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - h)}{h}.$$



Виходячи з означення  $\delta$ -функції, вважатимемо, що її зображення є граничним при  $h \rightarrow +0$  для зображення функції  $\delta_h(t)$ , яке знайдемо, використовуючи (1.5) і (1.6):

$$\delta_h(t) \rightarrow \frac{1}{h} \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-ph}}{p} \right) = \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Тоді

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow +0} \delta_h(t) \rightarrow \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1.$$

Таким чином,

$$\delta(t) \rightarrow 1. \quad (1.8)$$

**Зауваження 1.4.** Очевидно, що зображення  $\delta$ -функції не задовольняє необхідну умову існування (теорема 1.3). У таких випадках доводиться розширювати поняття оригіналу і зображення. Зокрема, простір оригіналів можна розширити, ввівши в нього функції, які є необмеженими в околах скінченної кількості точок, але інтеграл Лапласа від яких абсолютно збігається у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Такі оригінали та відповідні зображення називають **узагальненими**. Узагальненими оригіналами є степенева функція  $t^\alpha$ , де  $\alpha > -1$ , функція  $\ln t$  та деякі інші. Взагалі, узагальненим оригіналом є кожна функція  $f(t)$ , яка в деяких точках  $t_1, \dots, t_n$  є нескінченно великою функцією порядку, меншого за одиницю, тобто така, що  $\lim_{t \rightarrow t_j} (t - t_j)^{q_j} f(t) = 0$  для деякого  $q_j < 1$ , і якщо поза деякими околами точок  $t_1, \dots, t_n$  вона задовольняє умови з означення оригіналу.

**Зображення степеневої функції  $t^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ .** Нагадаємо спочатку деякі твердження і формули, пов'язані з **гама-функцією**  $\Gamma(s)$ , тобто функцією, яка задається за допомогою інтегрального перетворення

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad s > 0. \quad (1.9)$$

З курсу математичного аналізу відомо ([18], розд. 2, §6.2), що  $\Gamma(s)$  є неперервною функцією змінної  $s > 0$ ,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , а також

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (1.10)$$

Використовуючи (1.10), маємо

$$\Gamma(s+k) = s(s-1)(s-2)\dots(s-k) \cdot \Gamma(s-k), \quad k < s.$$

Якщо  $s = n \in \mathbb{N}$ , то

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots\cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \quad (1.11)$$

З (1.10) одержуємо, що

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}. \quad (1.12)$$

За формулою (1.10) гама-функцію довільного аргументу  $s > 0$  можна виразити через гама-функцію аргументу  $0 < s < 1$ . Використовуючи (1.10), цю функцію можна означити також і для  $s < 0$ . Справді, якщо  $-1 < s < 0$ , то  $0 < s+1 < 1$  і права частина рівняння

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1) \quad (1.13)$$

визначена, а отже, вираз у лівій частині має зміст, тобто функцію  $\Gamma(s)$  означено на інтервалі  $(-1; 0)$ . Аналогічно можна означити функцію  $\Gamma(s)$  на інтервалах  $(-2; -1)$ ,  $(-3; -2)$  і т.д. Для  $n \in \mathbb{N}$  маємо

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}. \quad (1.14)$$

Відомо ([18], розд. 2, § 6.9), що функція  $\Gamma(p)$  – аналітична у кожній точці площини  $p$ , крім точок  $p = 0, -1, -2, \dots$ , де вона має прості полюси. Отже, у півплощині  $\operatorname{Re} p > 0$  функція  $\Gamma(p)$  може бути зображенням деякого оригіналу.

Повернімося до знаходження зображення степеневої функції  $t^\alpha$ , де  $\alpha > -1$ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt} dt.$$

Зробимо заміну  $pt = \tau$ , яка перетворює дійсну вісь  $t > 0$  у промінь з напрямом  $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$  (рис. 1). Тоді

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_{l_1} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau.$$

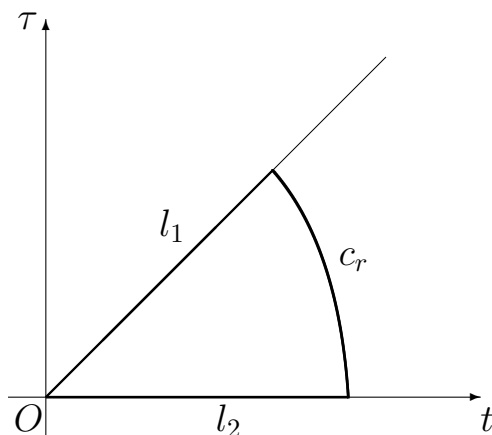


Рис. 1

Функція  $e^{-\tau}\tau^\alpha$  аналітична у півплощині  $\operatorname{Re} \tau > 0$ . Для виділення однозначних віток функції  $\tau^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} \tau}$  зробимо розріз по від'ємній частині дійсної осі. У площині  $\tau$  контур  $l = l_2 + c_r + l_1$  (рис. 1). За інтегральною теоремою Коші ([4], §4.2)  $\int_l e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = 0$  або  $\int_{l_1} = \int_{l_2} + \int_{c_r}$ . У цій рівності перейдемо до границі, спрямувавши  $r$  до  $+\infty$ :

$$\int_{l_1} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^\alpha dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau.$$

Оскільки  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |e^{-\tau}\tau^\alpha| = 0$ , то  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = 0$ . Таким чином,

$$\int_{l_1} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^\alpha dt = \Gamma(\alpha + 1), \quad \alpha > -1.$$

Отже,

$$t^\alpha \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.15)$$

На інтервалі  $-1 < \alpha < 0$  функція  $f(t) = t^\alpha$  є узагальненим оригіналом (див. зауваження 1.3).

Якщо у формулі (1.15)  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , то  $t^n \rightarrow \frac{\Gamma(n + 1)}{p^{n+1}}$  або, враховуючи (1.11),

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (1.16)$$

**Приклад 1.3.** Знайти зображення функцій:

$$\text{а) } f(t) = t^4, \quad \text{б) } f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{в) } f(t) = t^{-n-\frac{1}{2}}.$$

**Розв'язання.** а) Згідно з формулою (1.16)

$$t^4 \rightarrow \frac{4!}{p^5} = \frac{24}{p^5}.$$

б) З формули (1.15) одержуємо, що  $t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n)}{p^{\frac{3}{2}+n}}$ , а використовуючи (1.11), маємо співвідношення

$$t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!} \sqrt{\pi} \frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!} \cdot p^{-n-\frac{3}{2}}.$$

Зокрема, якщо  $n = 0$ ,

$$\sqrt{t} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot p^{-\frac{3}{2}}.$$

в) Згідно з (1.15)  $t^{-n-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Gamma(-n+\frac{1}{2})}{p^{-n+\frac{1}{2}}}$ , а з врахуванням (1.11), отримуємо

$$t^{-n-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{(-1)^n 2^{2n} n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \cdot p^{n-\frac{1}{2}},$$

зокрема, якщо  $n = 0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \sqrt{\pi} \cdot p^{-\frac{1}{2}}. \quad \blacktriangleright$$

## Контрольні питання до розділу I

1. Які умови має задовольняти функція комплексної змінної  $f(t)$ , щоб вона була оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, які не є оригіналами.
2. Яку функцію називають функцією Гевісайда? Яку роль відіграє ця функція у просторі оригіналів?
3. Що називають показником зростання функції-оригінала? За якою формулою можна знайти показник зростання функції  $f(t)$ ? Чому дорівнює показник зростання обмеженої функції, експоненти  $e^{\alpha t + \beta}$ , довільного многочлена?

4. Які функції називають функціями експоненціального типу та функціями необмеженого зростання? Наведіть приклади таких функцій.
5. Що називають перетворенням Лапласа, інтегралом Лапласа, зображенням функції-оригінала?
6. У якій півплощині гарантується збіжність (рівномірна збіжність) інтеграла Лапласа?
7. Як формулюється теорема про аналітичність зображення функції-оригінала?
8. Якою є необхідна умова існування зображення? Використовуючи цю умову, поясніть, чому не можуть бути зображеннями функції  $\sin p$ ,  $\frac{p}{p+1}$ ?
9. Якими є зображення функції Гевісайда, узагальненої функції Гевісайда, функції Дірака, експоненціальної функції  $e^{\alpha t}$ , степеневих функцій  $t^\alpha$ ,  $\alpha \in (-1, +\infty)$  і  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ?

*Рекомендована література:* [1, с. 190-198], [2, с. 154-166], [4, с. 154-166], [7, с. 9-20], [8, с. 221-227], [10, с. 173-179].

### Вправи для самостійного виконання

**Вправа 1.1.** *Перевірте, чи є функція  $f(t)$  оригіналом. У випадку ствердної відповіді знайдіть показник зростання цієї функції:*

- |  |                                    |                                |
|--|------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(t) = e^{3t} \sin 2t$ ,           | 2) $f(t) = e^{t^3}$ ,              | 3) $f(t) = t^3$ ,              |
| 4) $f(t) = e^{-t}$ ,                   | 5) $f(t) = \ln(t+1)$ ,             | 6) $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ ,  |
| 7) $f(t) = t \sin \frac{1}{t}$ ,       | 8) $f(t) = t^t$ ,                  | 9) $f(t) = e^{(2+4i)t}$ ,      |
| 10) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t$ , | 11) $f(t) = 5^t$ ,                 | 12) $f(t) = e^{-t^2}$ ,        |
| 13) $f(t) = t^2 + 4$ ,                 | 14) $f(t) = e^{t^2-3}$ ,           | 15) $f(t) = \frac{1}{t^2+2}$ , |
| 16) $f(t) = e^{-t^3}$ ,                | 17) $f(t) = \operatorname{tg} t$ , | 18) $f(t) = e^{-t} \cos t$ ,   |
| 19) $f(t) = e^t \cos^2 t$ ,            | 20) $f(t) = e^{\sqrt{t}}$ .        |                                |

**Вправа 1.2.** Користуючись означенням, знайдіть зображення функції

$f(t)$ :

1)  $f(t) = e^{-3t} \cos 4t$ ,

2)  $f(t) = 3 \cos 2t$ ,

3)  $f(t) = e^{4t} \sin^2 t$ ,

4)  $f(t) = te^{2t}$ ,

5)  $f(t) = \sin^2 \pi t$ ,

6)  $f(t) = e^t \sin t$ ,

7)  $f(t) = t \operatorname{sh} t$ ,

8)  $f(t) = e^t \cos^2 t$ ,

9)  $f(t) = \cos 3t \cos 5t$ ,

10)  $f(t) = t \operatorname{ch} 2t$ ,

11)  $f(t) = \operatorname{ch} 2t \cos \frac{t}{2}$ ,

12)  $f(t) = \cos 2t \sin 3t$ ,

13)  $f(t) = \sin 3t - 5$ ,

14)  $f(t) = t^2 e^{2t}$ ,

15)  $f(t) = 3 \sin 3t - 2 \operatorname{ch} 2t$ ,

16)  $f(t) = \operatorname{sh} 4t \sin 3t$ ,

17)  $f(t) = \operatorname{ch} t + \cos t$ ,

18)  $f(t) = \operatorname{sh} t + \sin t$ ,

19)  $f(t) = \sin \frac{t}{3} \sin 3t$ ,

20)  $f(t) = \operatorname{sh} 4t \cos 2t$ .

**Вправа 1.3.** Доведіть, що функція  $f(t)$  є оригіналом, та знайдіть її

зображення:

1)  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{якщо } t > 1, \end{cases}$

2)  $f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{якщо } t > 1, \end{cases}$

3)  $f(t) = \begin{cases} 2t-1, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{якщо } t > 1, \end{cases}$

4)  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ e^{1-t}, & \text{якщо } t > 1, \end{cases}$

5)  $f(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{якщо } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{якщо } t > 2, \end{cases}$

6)  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < 4, \\ 2-3t, & \text{якщо } t > 4, \end{cases}$

7)  $f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ -1, & \text{якщо } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{якщо } t > 2, \end{cases}$

8)  $f(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 2-t, & \text{якщо } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{якщо } t > 2, \end{cases}$

9)  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ 1, & \text{якщо } 1 < t < 3, \\ 2, & \text{якщо } t > 3, \end{cases}$

10)  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < t < 1, \\ t-1, & \text{якщо } 1 < t < 2, \\ 1, & \text{якщо } t > 2. \end{cases}$

## РОЗДІЛ II. Основні властивості перетворення Лапласа

Важливою перевагою операційного числення є те, що здійснюючи перехід з простору оригіналів у простір зображень, ми одні математичні операції замінюємо іншими простішими математичними операціями. Ця заміна здійснюється за основними правилами операційного числення, які сформулюємо у вигляді теорем.

### § 2.1. Лінійність і подібність перетворення Лапласа

**Теорема 2.1 (лінійність оригіналу).** *Якщо  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  – оригінали з показниками зростання  $s_1$ ,  $s_2$ , а  $F_1(p)$ ,  $F_2(p)$  – відповідні їм зображення і  $\operatorname{Re} p > s_1$ ,  $\operatorname{Re} p > s_2$ , то для довільних комплексних чисел  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  лінійна комбінація  $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$  також є оригіналом, причому*

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \rightarrow \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

*у півплощині  $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$ .*

**Доведення.** Використовуючи формулу (1.3) та лінійність операції інтегрування, маємо

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) &\rightarrow \int_0^{+\infty} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) e^{-pt} dt = \\ &= \alpha_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + \alpha_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p). \end{aligned}$$

Оскільки інтеграли  $\int_0^{+\infty} f_1(t)e^{-pt} dt$  і  $\int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-pt} dt$  збігаються, взагалі кажучи, у різних півплощинах  $\operatorname{Re} p > s_1$  і  $\operatorname{Re} p > s_2$ , то інтеграл

$$\int_0^{+\infty} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) e^{-pt} dt$$

збігається на перетині цих півплощин, тобто у півплощині  $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$ . •

**Зауваження 2.1.** У теоремі 2.1 умова, що обидва доданки функції  $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$  мають бути оригіналами, є суттєвою. Наприклад,  $\frac{e^t - 1}{t}$  – функція-оригінал, але  $f_1(t) = \frac{e^t}{t}$  і  $f_2(t) = \frac{1}{t}$  не є оригіналами, бо вони є нескінченно великими при  $t \rightarrow +0$ .

**Приклад 2.1.** Використовуючи лінійність перетворення Лапласа, знайти зображення функцій  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\operatorname{sh} t$ ,  $\operatorname{ch} t$ .

**Розв'язання.** За формулами Ейлера

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Використовуючи тепер знайдене у § 1.3 зображення  $e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}$ ,  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$ , і лінійність перетворення Лапласа, одержуємо зображення тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} \sin t &\rightarrow \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i} - \frac{1}{p + i} \right) = \frac{1}{p^2 + 1}, \\ \cos t &\rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i} + \frac{1}{p + i} \right) = \frac{p}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Аналогічно, виходячи з означень гіперболічних функцій, маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 1} \right) = \frac{1}{p^2 - 1}, \\ \operatorname{ch} t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - 1} + \frac{1}{p + 1} \right) = \frac{p}{p^2 - 1}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$



**Теорема 2.2 (подібність оригіналу).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_0$ , і  $\alpha > 0$  – деяке число, то

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (2.1)$$

у півплощині  $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \alpha s_0\}$ .

**Доведення.** В інтегралі з формули (1.3) виконаємо заміну  $\tau = \alpha t$ . Тоді  $0 \leq \tau < +\infty$  і

$$f(\alpha t) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad \bullet$$

Підставляючи у формулу (2.1)  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ , де  $\beta > 0$ , одержуємо, що

$$F(\beta p) \rightarrow \frac{1}{\beta} \cdot f\left(\frac{t}{\beta}\right). \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.1) і (2.2) виражають **властивість подібності оригіналу й зображення**: при зміні масштабу аргумента оригіналу (зображення) аргумент зображення (оригіналу) змінює масштаб в оберненому відношенні, причому у такому ж оберненому відношенні змінюється масштаб самого зображення (оригіналу).

За допомогою формули (2.1), не використовуючи безпосередньо формулу (1.3), можна одержати зображення багатьох оригіналів.

**Приклад 2.2.** Використовуючи подібність перетворення Лапласа, знайти зображення функцій  $\sin \alpha t$ ,  $\cos \alpha t$ ,  $\operatorname{sh} \alpha t$ ,  $\operatorname{ch} \alpha t$ .

**Розв'язання.** Використовуючи формулу (2.1) і знайдені у прикладі 2.1 зображення функцій  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\operatorname{sh} t$ ,  $\operatorname{ch} t$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} \sin \alpha t &\rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, & \cos \alpha t &\rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}, \\ \operatorname{sh} \alpha t &\rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 - 1} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, & \operatorname{ch} \alpha t &\rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Два останні зображення можна знайти й інакше, використовуючи зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \alpha t &= \frac{1}{i} \cdot \sin i \alpha t \rightarrow \frac{1}{i} \cdot \frac{i \alpha}{p^2 + (i \alpha)^2} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, \\ \operatorname{ch} \alpha t &= \cos i \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + (i \alpha)^2} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

## § 2.2. Загаювання та випередження оригіналу

**Теорема 2.3 (загаювання оригіналу).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_0$ , і  $t_0 > 0$  – деяке число, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (2.3)$$

**Доведення.** Перш за все з'ясуємо зміст поняття "загаювання". Графік функції  $f(t - t_0)$  одержуємо зсувом графіка функції  $f(t)$  вправо на  $t_0$  одиниць, причому на проміжку  $(0, t_0)$  графік збігається з віссю абсцис, бо на цьому проміжку  $t - t_0 < 0$ , а за означенням оригінала  $f(t - t_0) \equiv 0$  (рис. 2). Таким чином, процес, який описує функція  $f(t - t_0)$ , починається ніби із загаюванням (запізненням) на час  $t_0$  відносно процесу, який описує функція  $f(t)$ .

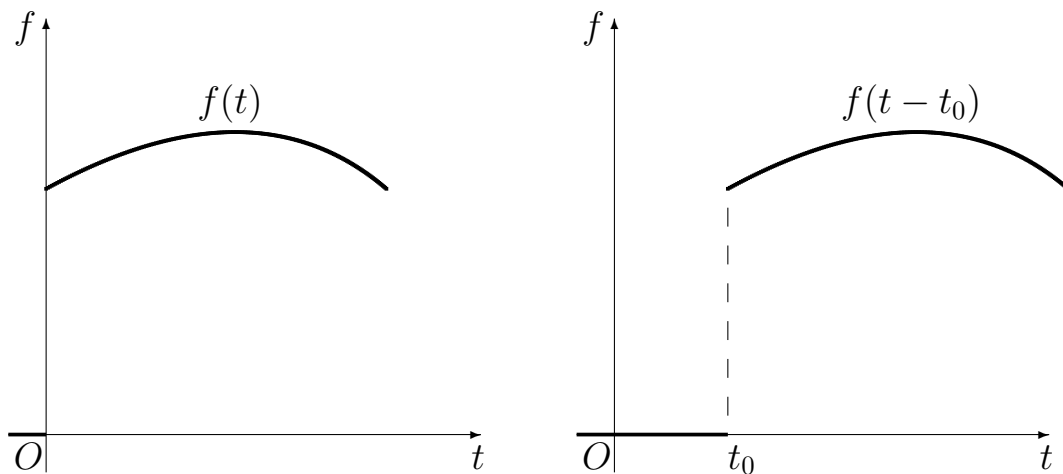


Рис. 2

Знайдемо зображення оригіналу  $f(t - t_0)$ . Згідно з (1.3)

$$f(t - t_0) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну  $u = t - t_0$ . Тоді  $0 \leq u < +\infty$  і

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-p(u+t_0)} du = e^{-pt_0} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = e^{-pt_0} F(p)$$

або  $f(t - t_0) \rightarrow e^{-pt_0} F(p)$ , де  $t > t_0$ . •

Співвідношення (2.3) виражає **властивість загаювання оригіналу**: зміщенню аргументу у просторі оригіналів на час  $t_0$  відповідає операція множення на експоненту  $e^{-pt_0}$  у просторі зображень. Інакше кажучи, зображення  $F(p)$  на  $e^{-pt_0}$  зсуває графік його оригінала  $f(t)$  на  $t_0$  одиниць вправо. Ця геометрична властивість зсуву відома у фізиці як загаювання явища на час  $t_0$ .

Властивість загаювання оригіналу використовується для розв'язування різного роду лінійних рівнянь, які містять функції із загаювальним аргументом  $t - t_1, t - t_2, \dots, t - t_k$ , де  $t_j > 0, j = 1, \dots, k$ .

Застосовуючи властивості подібності та загаювання оригінала, можна знайти зображення оригінала  $f(\alpha t - t_0)$ , де  $t_0 > 0, \alpha$  – деяке число. Справді, якщо  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то згідно з (2.1)  $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ , а використовуючи співвідношення (2.3), знаходимо

$$f(\alpha t - t_0) = f\left(\alpha \left(t - \frac{t_0}{\alpha}\right)\right) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p}.$$

Отже,

$$f(\alpha t - t_0) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha s_0. \quad (2.4)$$

**Приклад 2.3.** Знайти зображення функцій  $\sin(\omega t - \varphi_0), \cos(\omega t - \varphi_0), \operatorname{sh}(\omega t - \varphi_0), \operatorname{ch}(\omega t - \varphi_0), (at - b)^m$ .

**Розв'язання.** Використовуючи (2.4) та одержані раніше зображення функцій  $\sin t, \cos t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t^m$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \varphi_0) &\rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, & \cos(\omega t - \varphi_0) &\rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\ \operatorname{sh}(\omega t - \varphi_0) &\rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \cdot \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, & \operatorname{ch}(\omega t - \varphi_0) &\rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \cdot \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

$$(at - b)^m \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\left(\frac{p}{a}\right)^{m+1}} \cdot e^{-\frac{b}{a}p} = \frac{a^m \Gamma(m+1)}{p^{m+1}} \cdot e^{-\frac{b}{a}p}. \quad \blacktriangleright$$

Теорема загалювання є також зручним засобом для знаходження зображень кусково-неперервних функцій.

**Приклад 2.4.** Знайти зображення функцій

$$f_1(t) = \begin{cases} a, & \text{якщо } 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{якщо } t > \tau, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } 0 < t < a, \\ 2a - t, & \text{якщо } a < t < 2a, \\ 0, & \text{якщо } t > 2a. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Функцію  $f_1(t)$  за допомогою функції Гевісайда і узагальненої функції Гевісайда запишемо у вигляді  $f_1(t) = a \cdot (\theta(t) - \theta(t - \tau))$ . Враховуючи, що

$$\theta(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad \theta(t - \tau) \rightarrow \frac{e^{-p\tau}}{p},$$

знаходимо зображення оригінала  $f_1(t)$ :

$$F_1(p) = a \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{p}.$$

Функцію  $f_2(t)$  можемо записати у вигляді

$$f_2(t) = t\theta(t) - t\theta(t - a) + (2a - t)\theta(t - a) + (t - 2a)\theta(t - 2a)$$

або

$$f_2(t) = t\theta(t) - 2(t - a)\theta(t - a) + (t - 2a)\theta(t - 2a).$$

Зображенням цієї функції є  $F_2(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-ap} + \frac{1}{p^2}e^{-2ap}$  або

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2} \cdot (1 - e^{-ap})^2. \quad \blacktriangleright$$

Співвідношення (2.3) встановлено за умови, що  $t_0 > 0$ , тобто при загалюванні аргумента оригіналу. Якщо  $t_0 < 0$ , тобто при випередженні аргументу, ця властивість не виконується. У цьому випадку справджується таке твердження.

**Теорема 2.4 (випередження оригіналу).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_0$ , і  $t_0 > 0$ , то

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{pt_0} \left( F(p) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt \right). \quad (2.5)$$

**Доведення.** Графік функції  $f(t + t_0)$  одержуємо зсувом графіка  $f(t)$  вліво на  $t_0$  одиниць. Зміщена частина графіка функції  $f(t)$  на інтервалі  $t_0 < t < 0$  вироджується у відрізок осі  $t$ , а зрізана частина при  $t > 0$  є графіком функції  $f(t + t_0)$  (рис. 3).

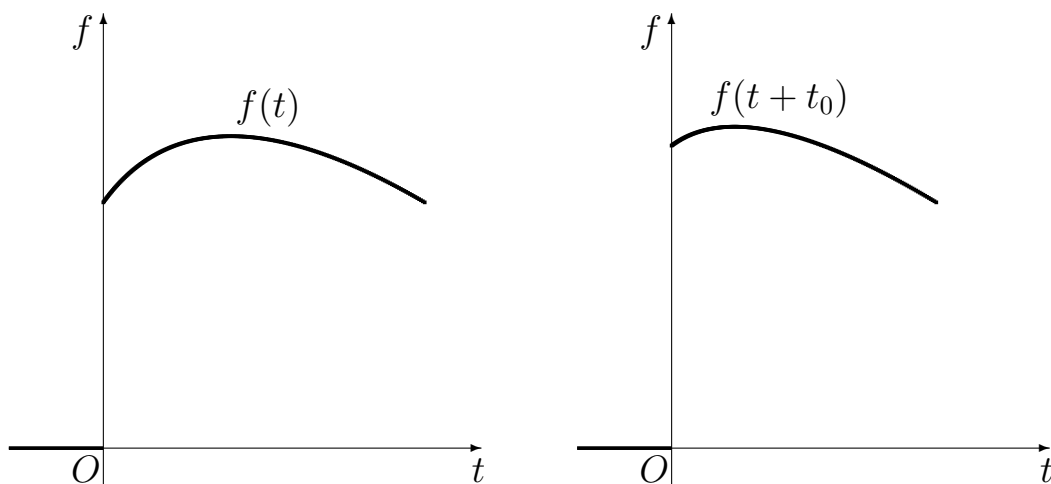


Рис. 3

Знайдемо зображення оригінала  $f(t + t_0)$  :

$$f(t + t_0) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t + t_0) e^{-pt} dt.$$

Виконуючи в інтегралі заміну  $u = t + t_0$  (тоді  $t_0 \leq u < +\infty$ ), одержуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t + t_0) e^{-pt} dt &= \int_{t_0}^{+\infty} f(u) e^{-p(u-t_0)} du = e^{pt_0} \int_{t_0}^{+\infty} f(u) e^{-pu} du = \\ &= e^{pt_0} \left( \int_0^{+\infty} f(u) e^{-pu} du - \int_0^{t_0} f(u) e^{-pu} du \right) = e^{pt_0} \left( F(p) - \int_0^{t_0} f(u) e^{-pu} du \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{pt_0} \left( F(p) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt \right). \quad \bullet$$

Властивість випередження оригіналу використовують для розв'язування різного роду лінійних рівнянь, які містять функції з випереджувальним аргументом  $t + t_1, t + t_2, \dots, t + t_k$ , де  $t_j > 0, j = 1, \dots, k$ .

Застосуємо цю властивість, наприклад, для відшукування зображення періодичних оригіналів<sup>2</sup>. Періодичну функцію  $f(t)$  з періодом  $T > 0$  можна розглядати як розв'язок функціонального рівняння  $f(t) = f(t + T)$ . Застосовуючи до обох частин цього рівняння перетворення Лапласа і використовуючи співвідношення (2.5) при  $t_0 = T$ , одержуємо у просторі зображень рівняння

$$F(p) = e^{pT} \left( F(p) - \int_0^T f(t)e^{-pt} dt \right),$$

з якого знаходимо

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt.$$

Застосовуючи теорему подібності та формулу (2.5), можемо знайти зображення оригінала  $f(\alpha t + t_0)$ , де  $t_0 > 0, \alpha$  – деяке дійсне число, відмінне від нуля. Справді, якщо  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то за теоремою подібності

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

а використовуючи формулу (2.5), одержуємо співвідношення

$$f(\alpha t + t_0) = f\left(\alpha \left(t + \frac{t_0}{\alpha}\right)\right) \rightarrow \frac{1}{\alpha} e^{\frac{t_0}{\alpha} p} \left( F\left(\frac{p}{\alpha}\right) - \int_0^{t_0} e^{-\frac{p}{\alpha} t} f(t) dt \right)$$

або

$$f(\alpha t + t_0) \rightarrow \frac{1}{\alpha} e^{\frac{t_0}{\alpha} p} \left( F\left(\frac{p}{\alpha}\right) - \int_0^{t_0} e^{-\frac{p}{\alpha} t} f(t) dt \right).$$

<sup>2</sup> Інший спосіб побудови зображень періодичних оригіналів вивчатиметься у § 2.4.

### § 2.3. Зміщення зображення

**Теорема 2.5 (зміщення зображення).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$  і  $p_0$  – деяке число, то

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0) \quad (2.6)$$

у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} p_0$ .

**Доведення.** Застосовуючи перетворення Лапласа до оригінала  $e^{-p_0 t} f(t)$ , одержуємо

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+p_0)t} dt$$

або

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0).$$

Показником зростання функції  $e^{-p_0 t} f(t) \in s_0 - \operatorname{Re} p_0$ , тому співвідношення (2.6) справджується у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} p_0$ . •

Таким чином, при множенні оригінала на  $e^{\pm p_0 t}$  у площині  $p = s + i\sigma$  відбувається зміщення зображення на вектор  $\mp p_0$  (рис. 4).

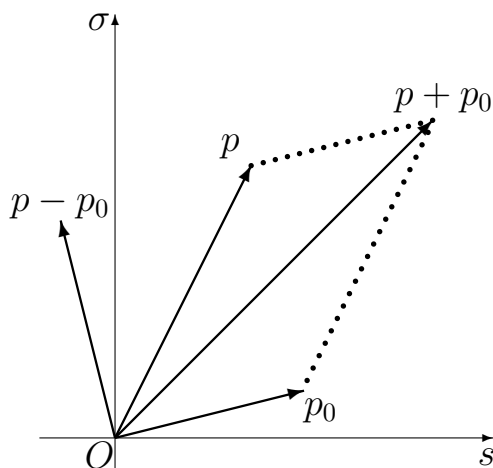


Рис. 4

Властивість зміщення часто використовують, досліджуюючи фізичні явища та процеси, пов'язані із згасаючими коливаннями.

Теорема 2.5 дозволяє за відомим співвідношенням  $f(t) \rightarrow F(p)$  знаходити зображення функції  $e^{-p_0 t} f(t)$ , де  $p_0$  – деяке число.

**Приклад 2.5.** Використовуючи властивість зміщення, знайти зображення функцій  $e^{\alpha t} \sin \omega t$ ,  $e^{\alpha t} \operatorname{ch} \omega t$ ,  $t^\alpha e^{\beta t}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи формулу (2.6) та раніше знайдені зображення

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad t^\alpha \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}},$$

одержуємо співвідношення

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}, \quad e^{\alpha t} \operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \omega^2},$$

$$t^\alpha e^{\beta t} \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \beta)^{\alpha+1}}. \quad \blacktriangleright$$

З останнього зображення прикладу 2.5 випливають, зокрема, такі зображення ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$$t^n e^{\beta t} \rightarrow \frac{n!}{(p - \beta)^{n+1}},$$

$$t^n e^{(\alpha+i\beta)t} \rightarrow \frac{n!}{(p - \alpha - i\beta)^{n+1}} = n! \frac{(p - \alpha + i\beta)^{n+1}}{((p - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}},$$

$$t^n e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re} t^n e^{(\alpha+i\beta)t} \rightarrow n! \frac{\operatorname{Re}(p - \alpha + i\beta)^{n+1}}{((p - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}},$$

$$t^n e^{\alpha t} \sin \beta t = \operatorname{Im} t^n e^{(\alpha+i\beta)t} \rightarrow n! \frac{\operatorname{Im}(p - \alpha + i\beta)^{n+1}}{((p - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}}.$$

## § 2.4. Зображення періодичного оригінала

**Теорема 2.6.** Якщо

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & \text{якщо } 0 < t < T, \\ 0, & \text{якщо } t > T, \end{cases}$$

де  $f(t)$  – періодична функція з періодом  $T$  і  $f_0(t) \rightarrow F_0(p)$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (2.7)$$



**Доведення.** Функцію  $f(t)$  можна виразити через  $f_0(t)$ , а саме

$$f(t) = f_0(t) + f(t - T),$$

бо  $f(t - T) \equiv 0$  для  $t < T$ . Тоді, використовуючи лінійність перетворення Лапласа та співвідношення (2.3), одержуємо рівняння  $F(p) = F_0(p) + e^{-pT} F(p)$ , звідки

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}},$$

де  $F_0(p) = \int_0^T f_0(t) e^{-pt} dt.$  •

Нехай  $T$ -періодична функція  $f(t)$  змінює знак на півперіоді, тобто  $f(t + T/2) = -f(t)$  і

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & \text{якщо } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{якщо } t > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Тоді  $f(t) = f_0(t) - f(t - T/2)$  і  $F(p) = F_0(p) - e^{-pT/2} F(p)$ . Звідси

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 + e^{-pT/2}},$$

де  $F_0(p) = \int_0^{-T/2} f(t) e^{-pt} dt.$

**Приклад 2.6.** Знайти зображення періодичних оригіналів:

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{якщо } 2\pi n < t < (2n + 1)\pi, \\ 0, & \text{якщо } (2n + 1)\pi < t < (2n + 2)\pi, \end{cases} \quad f_2(t) = |\sin 2t|.$$

**Розв'язання.** Періодами функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  є числа  $2\pi$  і  $\pi/2$  відповідно.

Нехай  $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ ,  $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$ . Використовуючи (2.7), одержуємо:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2 + 1} (-p \sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi p}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(p) &= \frac{1}{1 - e^{-p\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pt} \sin 2t \, dt = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-p\pi/2}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2 + 4} (-p \sin 2t - 2 \cos 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{p^2 + 4} \cdot \operatorname{cth} \frac{\pi p}{4}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

## § 2.5. Диференціювання оригіналу та зображення

Наступна теорема встановлює правило диференціювання співвідношення  $f(t) \rightarrow F(p)$  за змінною  $t$ .

**Теорема 2.7 (диференціювання оригіналу).** *Якщо функції  $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  є оригіналами і  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то*

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0), \quad (2.8)$$

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \dots,$$

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (2.9)$$

де у випадку розривів першого роду у точці  $t = 0$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

**Доведення.** Застосуємо перетворення Лапласа до оригінала  $f'(t)$ :

$$f'(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Інтегруючи частинами ( $u = e^{-pt}$ ,  $dv = f'(t)dt$ ), отримуємо

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Оскільки  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , де  $s_0$  – показник зростання функції  $f(t)$ , то

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-pt}| < M e^{-(s-s_0)t},$$

а тому  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ . Якщо функція  $f(t)$  у точці  $t = 0$  неперервна, то  $f(0) = 0$ , оскільки  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ . Якщо у точці  $t = 0$  функція  $f(t)$

має розрив першого роду, то при  $t \rightarrow 0$  вона має границю справа, тобто  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)e^{-pt} = f(0)$ , а отже,  $e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} = -f(0)$ .

Таким чином,

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Якщо у точці  $t = 0$  функція  $f(t)$  неперервна, то  $f'(t) \rightarrow pF(p)$ . Це означає, що диференціюванню оригінала  $f(t)$  у просторі зображень відповідає множення на  $p$  функції  $F(p)$ .

Двічі інтегруючи частинами інтеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f''(t) dt$ , одержуємо співвідношення

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Використаємо метод математичної індукції. Припустимо, що формула

$$f^{(n)}(t) \rightarrow \Phi(p) \equiv p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

справджується для деякого  $n$  і доведемо, що вона справджується також для  $n + 1$ .

З доведеного для  $n = 1$  маємо, що  $(f^{(n)}(t))' \rightarrow p\Phi(p) - f^{(n)}(0)$  або

$$f^{(n+1)}(t) \rightarrow p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

Таким чином, формула (2.9) справджується для довільного  $n \in \mathbb{N}$ . •

**Зауваження 2.2.** Умова теореми 2.7, що  $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  – оригінали, є суттєвою, бо якщо функція  $f^{(n)}(t)$  має зображення, то  $f^{(n-1)}(t)$  також має зображення. Обернене твердження, взагалі кажучи, не справджується. Наприклад, функція  $\ln t$  має зображення, але похідна  $(\ln t)' = \frac{1}{t}$  не є оригіналом, бо при  $t \rightarrow +0$  вона необмежена.

Формула (2.9) стає особливо простою у випадку, коли  $f^{(k)}(0) = 0$  для  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Тоді

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

тобто  $n$ -кратному диференціюванню у просторі оригіналів відповідає множення на  $p^n$  функції  $F(p)$  у просторі зображень.

Формули (2.9) і (2.10) мають широке застосування для розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (§ 5.2).

**Приклад 2.7.** Знайти зображення диференціального виразу

$$f(t) \equiv x^{\text{IV}}(t) - 2x'''(t) + 4x''(t) + 3x'(t) + 6x(t) + 3,$$

якщо  $x(0) = 4$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = -1$ ,  $x'''(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ . Згідно з (2.9)

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - 4, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 4p,$$

$$x'''(t) \rightarrow p^3X(p) - 4p^2 + 1, \quad x^{\text{IV}}(t) \rightarrow p^4X(p) - 4p^3 + p - 1.$$

Звідси, використовуючи лінійність зображення, маємо

$$f(t) \rightarrow X(p) (p^4 - 2p^3 + 4p^2 + 3p + 6) - 4p^3 + 8p^2 - 15p - 15 + \frac{3}{p}. \blacktriangleright$$

Встановимо тепер правило диференціювання співвідношення  $F(p) \rightarrow f(t)$  за змінною  $p$ .

**Теорема 2.8 (диференціювання зображення).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\text{Re } p > s_0$ , то

$$F'(p) \rightarrow -tf(t), \quad F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t), \quad \dots,$$

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t), \quad \text{Re } p > s_1 > s_0. \quad (2.11)$$

**Доведення.** Оскільки  $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ , то для  $t > 0$  маємо

$$|t^n f(t)| < t^n |f(t)| < Mt^n e^{-\alpha t} e^{(s_0 + \alpha)t},$$

де  $\alpha$  – мале додатне число. Функція  $Mt^n e^{-\alpha t}$  у точці  $t = \frac{n}{\alpha}$  має єдиний максимум  $M_1$ , який для  $t > 0$  буде її найбільшим значенням, тобто  $Mt^n e^{-\alpha t} < M_1$ .

Отже,  $|t^n f(t)| < M_1 e^{s_1 t}$ , де  $s_1 \leq s_0 + \alpha$ .

Таким чином, якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ , то функція  $t^n f(t)$  також є оригіналом, а її зображення визначене у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$ .

Зображення  $F(p)$  функції-оригінала  $f(t)$  у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$  є аналітичною функцією (теорема 1.2). Оскільки

$$F'(p) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt,$$

то  $F'(p) \rightarrow t f(t)$ . Тоді у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$  функція  $F(p)$  має похідну довільного порядку ([18], розд. 2, § 7). Отже,  $(F'(p))' \rightarrow -t(-t f(t))$  або

$$F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t).$$

Тоді  $F'''(p) \rightarrow -t \cdot ((-1)^2 t^2 f(t)) = (-1)^3 t^3 f(t)$  і, взагалі,

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t), \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0. \quad \bullet$$

Отже, диференціюванню зображення  $F(p)$  відповідає у просторі оригіналів множення на  $(-t)$  функції  $f(t)$ .

**Приклад 2.8.** Знайти зображення функцій  $t \sin \alpha t$ ,  $t \operatorname{ch} \alpha t$ ,  $t^2 \cos^2 \alpha t$ ,  $t^2 \operatorname{sh}^2 \alpha t$ .

**Розв'язання.** Використовуючи зображення  $\sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$ ,  $\operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$ , а також формулу (2.11), знаходимо зображення перших двох функцій:

$$\begin{aligned} -t \sin \alpha t &\rightarrow \left( \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right)', & t \sin \alpha t &\rightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}, \\ -t \operatorname{ch} \alpha t &\rightarrow \left( \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \right)', & t \operatorname{ch} \alpha t &\rightarrow \frac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Далі, з відомих формул

$$\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha t, \quad \operatorname{sh}^2 \alpha t = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\alpha t - \frac{1}{2},$$

використовуючи (2.1), знаходимо зображення функцій  $\cos^2 \alpha t$  і  $\operatorname{sh}^2 \alpha t$ :

$$\cos^2 \alpha t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2} \right), \quad \operatorname{sh}^2 \alpha t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p^2 - 4\alpha^2} - \frac{1}{p} \right).$$

Застосовуючи формулу (2.11) для  $n = 2$ , отримуємо інші зображення:

$$t^2 \cos^2 \alpha t \rightarrow \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2} \right) \right)'' = \frac{p^3 - 12p\alpha^2}{(p^2 + 4\alpha^2)^3} + \frac{1}{p^3},$$

$$t^2 \operatorname{sh}^2 \alpha t \rightarrow \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p^2 - 4\alpha^2} - \frac{1}{p} \right) \right)'' = \frac{p^3 + 12p\alpha^2}{(p^2 - 4\alpha^2)^3} - \frac{1}{p^3}. \quad \blacktriangleright$$

## § 2.6. Інтегрування оригіналу та зображення

Встановимо правила інтегрування співвідношення  $f(t) \rightarrow F(p)$  за змінними  $t$  та  $p$ .

**Теорема 2.9 (інтегрування оригіналу).** Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_0$ , то  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  також є оригіналом з показником зростання  $s_0$  і

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p} \quad (2.12)$$

у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ .

**Доведення.** Покажемо, що функція  $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  є оригіналом з показником зростання  $s_0$ . Справді,  $\varphi(t)$ , очевидно, задовольняє перші дві умови означення функції-оригінала (§ 1.1), а також третю умову цього означення, бо

$$|\varphi(t)| < \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}.$$

Знайдемо тепер зображення  $\Phi(p)$  функції  $\varphi(t)$ . Оскільки  $\varphi(0) = 0$ , то згідно з формулою (2.8)  $\varphi'(t) \rightarrow p\Phi(p)$ .

Оскільки  $\varphi'(t) = f(t)$ , то з (2.8) маємо  $F(p) = p\Phi(p)$ , звідки  $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ .

Отже,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad \bullet$$

Таким чином, операції інтегрування оригіналу відповідає операція ділення на  $p$  у просторі зображень.

Використаємо формулу (2.12) для відшукування зображень оригіналів  $t, t^2, \dots, t^k$ . Маючи зображення для  $t^0 = 1 \rightarrow \frac{1}{p} = F(p)$ , з (2.12) одержуємо співвідношення:

$$t = \int_0^t d\tau \rightarrow \frac{1}{p} F(p) = \frac{1}{p^2} \equiv F_1(p).$$

Далі аналогічно знаходимо

$$t^2 = 2 \int_0^t \tau d\tau \rightarrow \frac{2}{p} F_1(p) = \frac{2!}{p^3} \equiv F_2(p),$$

$$t^3 = 3 \int_0^t \tau^2 d\tau \rightarrow \frac{3}{p} F_2(p) = \frac{3!}{p^4} \equiv F_3(p),$$

... ..

$$t^k = k \int_0^t \tau^{k-1} d\tau \rightarrow \frac{k}{p} F_{k-1}(p) = \frac{k!}{p^{k+1}} \equiv F_k(p).$$

З цих формул, зокрема, випливає, що зображенням визначеної для  $t \geq 0$  функції  $f(t)$ , яка розвинена у ряд Тейлора

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \dots,$$

є функція, визначена рядом Лорана

$$F(p) = \frac{f(0)}{p} + \frac{f'(0)}{p^2} + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{p^{k+1}} + \dots$$

Наприклад, якщо  $f(t) = e^t$ , то

$$f(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots$$

i

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^{k+1}} + \dots = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p-1},$$

що збігається з результатом, одержаним раніше (формула (1.7)).

**Приклад 2.9.** Користуючись теоремою про інтегрування оригінала, знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4p + 5)}$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $\frac{1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{1}{(p - 2)^2 + 1}$ , то використовуючи зображення  $e^{\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$ , одержане у прикладі 2.5, маємо

$$e^{2t} \sin t \rightarrow \frac{1}{(p - 2)^2 + 1}.$$

Тому за формулою (2.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p^2 - 4p + 5)} &\rightarrow \int_0^t e^{2\tau} \sin \tau d\tau = \frac{e^{2\tau}(2 \sin \tau - \cos \tau)}{5} \Big|_0^t = \\ &= \frac{e^{2t}(2 \sin t - \cos t) + 1}{5}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Зауваження 2.3.** Вирази для зображення похідної та інтеграла (формули (2.8) і (2.12)) мають важливе значення в операційному численні: діям аналізу – диференціюванню та інтегруванню у просторі оригіналів – відповідає множення та ділення на цілі степені  $p$  у просторі зображень. Таким чином, вираз  $p$  набуває характеру оператора.

**Теорема 2.10 (інтегрування зображення).** Якщо  $f(t)$  – оригінал з показником зростання  $s_0$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_0$ , та інтеграл  $\int_p^{+\infty} F(p) dp$  збігається у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$ , то

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp \quad (2.13)$$

у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$ .

**Доведення.** Оскільки у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$  інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$



збігається рівномірно відносно  $p$  (теорема 1.1), то у цій півплощині його можна інтегрувати за параметром  $p$ , причому за контур інтегрування можна вибрати будь-який промінь, який виходить з точки  $p$  і утворює гострий кут з дійсною віссю площини. Отже,

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp = \int_p^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Оскільки за умовою теореми інтеграл  $\int_p^{+\infty} F(p) dp$  збігається у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$ , то змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\int_p^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_p^{+\infty} f(t) dt \int_0^{+\infty} e^{-pt} dp$$

або

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt.$$

Отже, функція  $\frac{f(t)}{t}$  є оригіналом з показником зростання  $s_1$ , де  $s_1 > s_0$ . Таким чином, інтегрування зображення  $F(p)$  зводиться до ділення на  $t$  функції  $f(t)$  у просторі оригіналів, тобто

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0. \quad \bullet$$

**Приклад 2.10.** Знайти зображення функції  $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ .

**Розв'язання.** Використовуючи зображення  $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$  та формулу (2.13), знаходимо

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

Звідси за формулою (2.12) одержуємо, що

$$\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \operatorname{arcctg} p. \quad \blacktriangleright$$

## § 2.7. Диференціювання та інтегрування за параметром. Граничні теореми

Для одержання більшої кількості нових зображень зручно розглядати оригінали та зображення, залежні від деякого параметра. Отже, нехай функція  $f(t, \lambda)$  є неперервною функцією від параметра  $\lambda$  і для кожного фіксованого значення  $\lambda$  є оригіналом, тобто

$$f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) e^{-pt} dt.$$

**Зауваження 2.4.** За означенням оригіналу для будь-яких  $t > 0$

$$|f(t, \lambda)| < M e^{st},$$

де числа  $M$  та  $s$  не залежать від  $\lambda$ , тому інтеграл Лапласа від функції  $f(t, \lambda)$  є рівномірно збіжним відносно  $\lambda$ .

**Теорема 2.11 (граничний перехід за параметром).** Якщо оригінал  $f(t, \lambda)$  має зображення  $F(p, \lambda)$ , де  $\lambda$  – параметр, та існує границя  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda)$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda). \quad (2.14)$$

**Доведення.** Оскільки  $F(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) e^{-pt} dt$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) e^{-pt} dt.$$

У цій рівності знак границі та інтеграла можна переставити, бо невластний інтеграл Лапласа є рівномірно збіжним відносно  $p$  (теорема 1.1) і  $\lambda$  (зауваження 2.3). Отже,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) e^{-pt} dt$$

або

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda). \quad \bullet$$

**Теорема 2.12 (диференціювання за параметром).** *Якщо оригінал  $f(t, \lambda)$  має зображення  $F(p, \lambda)$ , де  $\lambda$  – параметр, та існує частинна похідна  $\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda}$ , яка також є оригіналом, то*

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (2.15)$$

**Доведення.** Нехай приросту  $\Delta\lambda$  параметра  $\lambda$  відповідає приріст  $\Delta F(p, \lambda)$  функції  $F(p, \lambda)$ . Знайдемо відношення приростів  $\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta\lambda}$ :

$$\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{F(p, \lambda + \Delta\lambda) - F(p, \lambda)}{\Delta\lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{f(t, \lambda + \Delta\lambda) - f(t, \lambda)}{\Delta\lambda} e^{-pt} dt.$$

Оскільки

$$\frac{f(t, \lambda + \Delta\lambda) - f(t, \lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} + \varepsilon,$$

де  $\varepsilon(t, \lambda, \Delta\lambda) \rightarrow 0$  рівномірно при  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , то

$$\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta\lambda} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} + \varepsilon \right) e^{-pt} dt.$$

Перейшовши до границі при  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , одержуємо

$$\frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta\lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} e^{-pt} dt + \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-pt} dt.$$

За теоремою 2.11 про граничний перехід за параметром знаходимо

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \varepsilon e^{-pt} dt = 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Отже,

$$\frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} e^{-pt} dt$$

або

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad \bullet$$

**Приклад 2.11.** Знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \frac{2\lambda^3}{(p^2 + \lambda^2)^2}$ .

**Розв'язання.** Диференціюючи співвідношення  $\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \sin \lambda t$  за параметром  $\lambda$ , одержуємо, що

$$\frac{p^2 - \lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow t \cos \lambda t$$

або

$$\frac{1}{p^2 + \lambda^2} - \frac{2\lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow t \cos \lambda t.$$

Звідси, використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \frac{\sin \lambda t}{\lambda}$$

та лінійність перетворення Лапласа, маємо

$$\frac{2\lambda^3}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow \sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2.13 (інтегрування за параметром).** Якщо оригінал  $f(t, \lambda)$  має зображення  $F(p, \lambda)$ , де  $\lambda$  – параметр, та існують інтеграли

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \quad \text{і} \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda, \quad \text{то}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda. \quad (2.16)$$

**Доведення.** Для будь-якого числа  $A \geq 0$  виконується рівність

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^A f(t, \lambda) e^{-pt} dt = \int_0^A dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) e^{-pt} d\lambda. \quad (2.17)$$

За умовою теореми границя

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^A f(t, \lambda) e^{-pt} dt = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) e^{-pt} dt$$

існує, тому існує також границя справа у рівності (2.17) при  $A \rightarrow +\infty$ , тобто

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) e^{-pt} d\lambda = \int_0^{+\infty} dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) e^{-pt} d\lambda.$$

Інтегруючи тепер рівність  $F(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) e^{-pt} dt$  за параметром  $\lambda$  у межах від  $\lambda_0$  до  $\lambda$ , одержуємо, що

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left( \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \right) dt$$

або

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda. \quad \bullet$$

**Приклад 2.12.** Знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \ln \frac{p}{p - \lambda}$ .

**Розв'язання.** З відомого співвідношення  $\frac{1}{p - \lambda} \rightarrow e^{\lambda t}$  за формулою (2.16) знаходимо

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{p - \lambda} \rightarrow \int_0^{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda$$

або

$$\ln \frac{p}{p - \lambda} \rightarrow \frac{e^{\lambda t} - 1}{t}. \quad \blacktriangleright$$

Наступні дві теореми дають змогу за границею зображення  $pF(p)$  встановити граничне значення оригіналу  $f(t)$ .

**Теорема 2.14 (гранична теорема при  $t \rightarrow +0$ ).** Якщо  $f(t)$  і  $f'(t)$  є оригіналами,  $f(t) \rightarrow F(p)$  та існує границя  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t). \quad (2.18)$$

**Доведення.** Оскільки  $f'(t)$  – оригінал, то згідно з (2.8)  $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$ . Використовуючи необхідну ознаку існування зображення (теорема 1.3), маємо

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (pF(p) - f(0)) = 0,$$

а тому

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t). \quad \bullet$$

**Зауваження 2.5.** З теореми 2.14 випливає, що початкове значення оригінала  $f(t)$  через його зображення  $F(p)$  можна знайти за формулою  $f(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$ .

**Теорема 2.15 (гранична теорема при  $t \rightarrow +\infty$ ).** Якщо  $f(t)$  і  $f'(t)$  є оригіналами,  $f(t) \rightarrow F(p)$  та існує границя  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t). \quad (2.19)$$

**Доведення.** Оскільки  $f'(t)$  – оригінал, то  $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$  або

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Перейдемо у цій рівності до границі при  $p \rightarrow 0$ . Тоді

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0).$$

Підінтегральна функція задовольняє умови теореми 2.11 про граничний перехід за параметром, а тому

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow 0} f'(t)e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t). \quad \bullet$$

**Зауваження 2.6.** З теореми 2.15 випливає, що для неперіодичних процесів значення оригінала  $f(t)$  у нескінченно віддаленій точці можна знайти за формулою

$$f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

## Контрольні питання до розділу II

1. Як формулюється властивість лінійності перетворення Лапласа? У якій півплощині визначена лінійна комбінація двох оригіналів?
2. Якими співвідношеннями характеризується властивість подібності оригінала і зображення?
3. У чому полягають властивості загаювання та випередження оригінала? Які їх практичні застосування?
4. За допомогою якої формули виражається властивість зміщення зображення?
5. Як знайти зображення періодичного оригінала?
6. Як формулюється теорема про диференціювання оригінала? Коли  $n$ -кратному диференціюванню оригінала відповідає множення на  $p^n$  відповідного зображення? Чи обов'язково похідна оригінала є оригіналом?
7. За допомогою якої формули здійснюється диференціювання співвідношення  $f(t) \rightarrow F(p)$  за змінною  $p$ ?
8. Яким співвідношенням пов'язані зображення і оригінал у випадку інтегрування зображення (оригінала)?
9. Як формулюється теорема про граничний перехід у співвідношенні  $f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda)$  за параметром  $\lambda$ ?
10. Якими є співвідношення між оригіналом і зображенням у випадку диференціювання (інтегрування) співвідношення  $f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda)$  за параметром?

11. Як формулюються теореми про знаходження граничного значення оригінала  $f(t)$  при  $t \rightarrow +0$  ( $t \rightarrow +\infty$ )?

*Рекомендована література:* [1, с. 199-219], [2, с. 166-181], [7, с. 21-57], [21, с. 49-62].

### Вправи для самостійного виконання

**Вправа 2.1.** Використовуючи лінійність і подібність перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції  $f(t)$ :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $f(t) = e^{2t} + e^{3t}$ ,               | 2) $f(t) = t^4 + t^3 - 3t^2 + 2t + 9$ ,                                |
| 3) $f(t) = 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ ,           | 4) $f(t) = t^2e^t + 2te^{-t}$ ,  |
| 5) $f(t) = e^t \sin 2t$ ,                   | 6) $f(t) = \theta(t) + 2\theta(2t)$ ,                                  |
| 7) $f(t) = \cos 3t \sin 2t$ ,               | 8) $f(t) = \operatorname{ch} 3t \operatorname{sh} 2t$ ,                |
| 9) $f(t) = \cos^3 2t$ ,                     | 10) $f(t) = 2\theta(t) - 3\theta(3t)$ ,                                |
| 11) $f(t) = \sin^2 2t \cos^4 2t$ ,          | 12) $f(t) = \frac{1}{3} (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)$ , |
| 13) $f(t) = \operatorname{sh} 3t \sin 3t$ , | 14) $f(t) = e^t \sin^2 t$ ,  |
| 15) $f(t) = 3 \cos 2t - 2 \sin 3t$ ,        | 16) $f(t) = \cos t \sin 2t \cos 3t$ ,                                  |
| 17) $f(t) = (t^2 + 2t - 3) \sin 2t$ ,       | 18) $f(t) = (t^2 - 4t + 1) \cos 3t$ ,                                  |
| 19) $f(t) = \cos^4 t + \sin^4 t$ ,          | 20) $f(t) = \cos^8 t$ .  |

**Вправа 2.2.** Використовуючи теореми загалювання та випередження, знайдіть зображення функції  $f(t)$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f(t) = \theta(t - 2)$ ,  | 2) $f(t) = (t - 3)^2 e^t$ ,  |
| 3) $f(t) = t^3 e^{t-2}$ ,  | 4) $f(t) = \theta(t) - 2\theta(t - 3)$ ,   |
| 5) $f(t) = \sin^2(2t - 3)$ ,   | 6) $f(t) = \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$ ,  |
| 7) $f(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$ , | 8) $f(t) = \cos^4\left(2t - \frac{\pi}{8}\right)$ ,  |
| 9) $f(t) = (t - 1)^2 + 3(t + 2) + 8$ ,   | 10) $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(t - 3) + \frac{1}{3} \operatorname{ch}(t + 3)$ , |
| 11) $f(t) = e^{t-1} + 2e^{t+2} + 8e^{t-3}$ ,   | 12) $f(t) = \cos^2\left(2t - \frac{\pi}{8}\right) \sin^4 t$ ,                              |



$$\begin{array}{ll}
13) f(t) = \theta(t) - 2\theta(t-3) + 3t\theta(t-1), & 14) f(t) = \theta(t) \cos t + \theta(t-3) \sin t, \\
15) f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{якщо } 0 \leq t < 1, \\ e^t, & \text{якщо } t \geq 1, \end{cases} & 16) f(t) = \begin{cases} (t-1)e^t, & \text{якщо } 0 \leq t < 2, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 2, \end{cases} \\
17) f(t) = \begin{cases} 2t^4, & \text{якщо } 0 \leq t < 3, \\ \sin t, & \text{якщо } t \geq 3, \end{cases} & 18) f(t) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 \leq t < 4, \\ e^{3t-2}, & \text{якщо } t \geq 4, \end{cases} \\
19) f(t) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 \leq t < 2, \\ 3-t, & \text{якщо } 2 \leq t < 3, \\ t^2, & \text{якщо } t \geq 3, \end{cases} & 20) f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{якщо } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ t, & \text{якщо } t \geq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}
\end{array}$$

**Вправа 2.3.** Використовуючи теорему зміщення, знайдіть зображення функції  $f(t)$ :

$$\begin{array}{ll}
1) f(t) = e^{-3t} \sin^2 t, & 2) f(t) = e^t \cos^3 2t, \\
3) f(t) = (e^{3t} + e^{-2t}) \cos 2t, & 4) f(t) = (e^{-t} + 3e^{2t}) \sin^2 \left(t - \frac{\pi}{4}\right), \\
5) f(t) = (e^{-3t} + 2e^t) (\sin t + \cos 2t), & 6) f(t) = t^2 (e^{3t} + e^{-2t}), \\
7) f(t) = 3te^{2t} \cos^2 2t, & 8) f(t) = 4t^2 e^{-t} \sin^3 4t, \\
9) f(t) = 3t^3 e^{2t} (\cos t + \sin 2t), & 10) f(t) = t^2 e^{2t} (3 \sin t - 2 \cos 2t).
\end{array}$$

**Вправа 2.4.** Використовуючи теорему зміщення, знайдіть оригінал за зображенням:

$$\begin{array}{ll}
1) F(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2}, & 2) F(p) = \frac{p + 2}{p^2 - 4p}, \\
3) F(p) = \frac{3p - 4}{p^2 + 3p - 6}, & 4) F(p) = \frac{p - 2}{(2p - 1)(p + 2)}, \\
5) F(p) = \frac{4 - 3p}{6 - 2p - p^2}, & 6) F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p}, \\
7) F(p) = \frac{3p - 2}{3 - 2p - p^2}, & 8) F(p) = \frac{2 - p}{5 + 4p - p^2}, \\
9) F(p) = \frac{4p^2 - 1}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}, & 10) F(p) = \frac{p - 3}{p^3 + 2p^2 - p - 2}.
\end{array}$$

**Вправа 2.5.** Знайдіть зображення періодичного оригіналу:

$$\begin{aligned}
 1) f(t) &= |\sin t + \cos t|, & 2) f(t) &= |\sin 3t|, \\
 3) f(t) &= \frac{1}{3} \sin 2t, & 4) f(t) &= \frac{2}{3} \cos^2 3t, \\
 5) f(t) &= |\sin t \cos t|, & 6) f(t) &= |\sin^4 t + \cos^4 t|, \\
 7) f(t) &= \begin{cases} 2, & \text{якщо } 2n < t < 2n + 1, \\ 0, & \text{якщо } 2n + 1 < t < 2n + 2, \end{cases} \\
 8) f(t) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } 2\pi n < t < (2n + 1)\pi, \\ \cos 2t, & \text{якщо } (2n + 1)\pi < t < (2n + 2)\pi, \end{cases} \\
 9) f(t) &= \begin{cases} 3 \sin t, & \text{якщо } 2\pi n < t < (2n + 1)\pi, \\ 0, & \text{якщо } (2n + 1)\pi < t < (2n + 2)\pi, \end{cases} \\
 10) f(t) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } 2\pi n < t < (2n + 1)\pi, \\ \sin 3t, & \text{якщо } (2n + 1)\pi < t < (2n + 2)\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Вправа 2.6.** Використовуючи різні властивості перетворення Лапласа, знайдіть зображення оригіналу  $f(t)$ :

$$\begin{aligned}
 1) f(t) &= 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t, & 2) f(t) &= te^{2t} \sin 3t, \\
 3) f(t) &= \frac{2}{t}(1 - \cos t), & 4) f(t) &= t^2 \cos 3t, \\
 5) f(t) &= \frac{1}{2}(t - 3)^2 e^{-(t-3)} \theta(t - 3), & 6) f(t) &= e^{2t} + \theta(t - 4) \sin 3(t - 4), \\
 7) f(t) &= \int_0^t \frac{\text{sh } \tau}{\tau} d\tau, & 8) f(t) &= \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau, \\
 9) f(t) &= \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau, & 10) f(t) &= \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau.
 \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ III. Згортка функцій

### § 3.1. Згортка функцій та її властивості

У багатьох прикладних задачах, наприклад, при побудові фільтрів, у питаннях обчислення функцій розподілів випадкових величин, автокореляційних функцій, кодування і стиску інформації, використовується поняття згортки функцій.

**Згорткою** двох неперервних функцій  $f(t)$  і  $\varphi(t)$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , називають функцію  $f * \varphi$ , яка визначена формулою

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad (3.1)$$

Отже, згортка – це дія, яка парі функцій з деякої множини ставить у відповідність певну функцію з цієї ж множини. Операція одержання згортки  $(f * \varphi)(t)$  називається **згортанням** функцій  $f(t)$  і  $\varphi(t)$ .

**Приклад 3.1.** Знайти згортки функцій:

$$1) f(t) = t, \varphi(t) = e^t; \quad 2) f(t) = \cos t, \varphi(t) = e^{2t}.$$

**Розв'язання.** 1) Згідно з (3.1)

$$t * e^t = \int_0^t (t - \tau)e^\tau d\tau = \left| \begin{array}{l} u = t - \tau, \quad dv = e^\tau d\tau \\ du = -d\tau, \quad v = e^\tau \end{array} \right| =$$

$$= (t - \tau)e^{\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^t - t - 1.$$

Отже,  $t * e^t = e^t - t - 1$ .

2) За означенням згортки

$$\begin{aligned} \cos t * e^{2t} &= \int_0^t \cos(t - \tau)e^{2\tau} d\tau = \left| \sigma = t - \tau \right| = \\ &= - \int_t^0 \cos \sigma e^{2(t-\sigma)} d\sigma = e^{2t} \int_0^t \cos \sigma e^{-2\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Враховуючи формулу

$$\int \cos ax e^{bx} dx = \frac{b \cos ax + a \sin ax}{a^2 + b^2} e^{bx},$$

остаточно одержуємо

$$\cos t * e^{2t} = \frac{\sin t - 2 \cos t}{5} + \frac{2}{5} e^{2t}. \quad \blacktriangleright$$

Наведемо *основні властивості згортки*.

**1. Комутативність:**  $f * \varphi = \varphi * f$ .

**Доведення.** Використовуючи (3.1), одержуємо

$$\begin{aligned} f * \varphi &= \int_0^t f(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau = \left| \begin{array}{l} u = t - \tau \\ t \leq u \leq 0 \end{array} \right| = - \int_t^0 f(u)\varphi(t - u) du = \\ &= \int_0^t \varphi(t - u)f(u) du = \varphi * f. \quad \bullet \end{aligned}$$

**2. Асоціативність:**  $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$ .

**Доведення.** Якщо позначити

$$g(t) \equiv f * \varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau) d\tau, \quad h(t) \equiv \varphi * \psi = \int_0^t \varphi(t - \tau)\psi(\tau) d\tau,$$

то потрібно довести, що  $g * \psi = f * h$ . Маємо

$$g * \psi = \int_0^t g(t - \tau)\psi(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left[ \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \right] \psi(\tau)d\tau = \left| \omega = \tau + \sigma \right| = \\
&= \int_0^t \left[ \int_{\tau}^t f(t-\omega)\varphi(\omega-\tau)d\omega \right] \psi(\tau)d\tau = \iint_D f(t-\omega)\varphi(\omega-\tau)\psi(\tau)d\tau d\omega,
\end{aligned}$$

де інтегрування у подвійному інтегралі здійснюється у області (трикутнику)  
 $D = \{(\tau, \omega) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \omega \leq t, 0 \leq \tau \leq \omega\}$  (рис. 5).

Змінюючи порядок інтегрування у трикутнику  $D$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
\iint_D f(t-\omega)\varphi(\omega-\tau)\psi(\tau)d\tau d\omega &= \int_0^t f(t-\omega)d\omega \int_0^{\omega} \varphi(\omega-\tau)\psi(\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t f(t-\omega)h(\omega)d\omega.
\end{aligned}$$

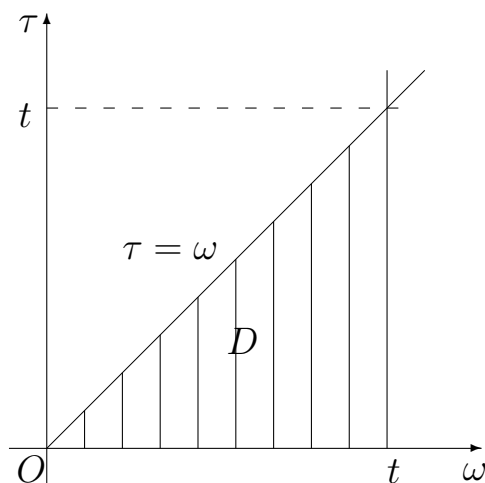


Рис. 5

Отже,

$$\int_0^t g(t-\tau)\psi(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

тобто  $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$ . •

Таким чином, результат згортання трьох або більшої кількості функцій не залежить від способу їх поєднання у згортці.

**3. Дистрибутивність:**  $f * (\varphi + \psi) = f * \varphi + f * \psi$ .

**Доведення.** За означенням згортки

$$\begin{aligned} f * (\varphi + \psi) &= \int_0^t f(t - \tau)(\varphi(\tau) + \psi(\tau))d\tau = \\ &= \int_0^t f(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t f(t - \tau)\psi(\tau)d\tau = f * \varphi + f * \psi. \quad \bullet \end{aligned}$$

**4. Оцінка модуля згортки:**  $|f * \varphi| \leq |f| * |\varphi|$ .

**Доведення.** Використовуючи означення згортки та відому властивість про модуль визначеного інтеграла, одержуємо

$$|f * \varphi| = \left| \int_0^t f(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |f(t - \tau)| \cdot |\varphi(\tau)|d\tau = |f| * |\varphi|. \quad \bullet$$

### § 3.2. Неперервність згортки

**Теорема 3.1.** Якщо  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  – неперервні функції для  $t \geq 0$ , то їх згортка  $f * \varphi$  є неперервною функцією для  $t \geq 0$ .

**Доведення.** Спочатку доведемо неперервність згортки справа. Розглянемо приріст функції  $f * \varphi$  у довільній точці  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} (f * \varphi)(t + \Delta t) - (f * \varphi)(t) &= \\ &= \int_0^{t+\Delta t} f(t + \Delta t - \tau)\varphi(\tau)d\tau - \int_0^t f(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} f(t + \Delta t - \tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t (f(t + \Delta t - \tau) - f(t - \tau))\varphi(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

На довільному відрізку  $[0, T]$  неперервні функції  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  обмежені (нехай, наприклад,  $|f(t)| \leq M$ ,  $|\varphi(t)| \leq M$ ), а тому для  $t < T$  і  $\Delta t < T - t$  одержуємо:

$$|(f * \varphi)(t + \Delta t) - (f * \varphi)(t)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq M^2 \Delta t + M \int_0^t |f(t + \Delta t - \tau) - f(t - \tau)| d\tau = \left| u = t - \tau \right| = \\ &= M^2 \Delta t + M \int_0^t |f(u + \Delta t) - f(u)| du. \end{aligned}$$

Оскільки функція  $f(u)$  неперервна на  $[0, T]$ , то вона на цьому відрізку є рівномірно неперервною. Тому для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що для будь-яких двох точок  $u', u'' \in [0, T]$  з нерівності  $|u' - u''| < \delta$  випливає  $|f(u') - f(u'')| < \varepsilon$ . Взявши  $\Delta t < \min\{T - t, \delta\}$ , одержуємо оцінку

$$\int_0^t |f(u + \Delta t) - f(u)| du \leq \int_0^T |f(u + \Delta t) - f(u)| du < \varepsilon \int_0^T du = \varepsilon T.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^t |f(u + \Delta t) - f(u)| du = 0,$$

тобто неперервність згортки  $f * \varphi$  справа доведено, бо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |(f * \varphi)(t + \Delta t) - (f * \varphi)(t)| = 0. \quad (3.2)$$

Доведемо тепер, що згортка є неперервною зліва в довільній точці  $t > 0$ .

Розглянемо приріст функції  $f * \varphi$  зліва для  $\Delta t < t$ :

$$\begin{aligned} &(f * \varphi)(t) - (f * \varphi)(t - \Delta t) = \\ &= \int_0^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau - \int_0^{t - \Delta t} f(t - \Delta t - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t - \Delta t}^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_0^{t - \Delta t} (f(t - \tau) - f(t - \Delta t - \tau)) \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &|(f * \varphi)(t) - (f * \varphi)(t - \Delta t)| \leq \\ &\leq M^2 \Delta t + M \int_0^{t - \Delta t} |f(t - \tau) - f(t - \Delta t - \tau)| d\tau = \left| u = t - \tau \right| = \end{aligned}$$

$$= M^2 \Delta t + M \int_{\Delta t}^t |f(u) - f(u - \Delta t)| du.$$

Вибираючи  $\Delta t < \min\{t, \delta\}$ , отримуємо

$$\int_{\Delta t}^t |f(u) - f(u - \Delta t)| du \leq \int_0^T |f(u) - f(u - \Delta t)| du < \varepsilon \int_0^T du = \varepsilon T.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^t |f(u) - f(u - \Delta t)| du = 0,$$

тобто неперервність згортки зліва для будь-якої точки  $t > 0$  доведено, бо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |(f * \varphi)(t) - (f * \varphi)(t - \Delta t)| = 0. \quad (3.3)$$

З формул (3.2) та (3.3) випливає, що операція згортки  $f * \varphi$  є неперервною функцією для  $t \geq 0$ . •

**Зауваження 3.1.** Якщо  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  – оригінали, то вони на будь-якому відрізку інтегровні і можуть мати скінченну кількість розривів першого роду на цьому відрізку. Теорема 3.1 справджується і для таких функцій.

### § 3.3. Згортка оригіналів та зображення згортки

**Теорема 3.2.** Якщо  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  – оригінали з показниками зростання  $s_1$  і  $s_2$  відповідно, то згортка  $f * \varphi$  є оригіналом з показником зростання  $\max\{s_1, s_2\}$ .

**Доведення.** Для функції

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$$



дві перші умови означення оригінала (§ 1.1), як легко переконатися, виконуються. Покажемо, що ця функція задовольняє також третю умову цього означення. Нехай  $s_1 > s_2$ . Оскільки  $|f(t)| < M_1 e^{s_1 t}$  і  $|\varphi(t)| < M_2 e^{s_2 t}$ , то

$$\begin{aligned} |f * \varphi| &\leq \int_0^t |f(t - \tau)| \cdot |\varphi(\tau)| d\tau < \int_0^t M_1 e^{s_1(t-\tau)} \cdot M_2 e^{s_2 \tau} d\tau < \\ &< M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1(t-\tau)} e^{s_2 \tau} d\tau = M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1 t} d\tau = M t e^{-\alpha t} e^{(s_1 + \alpha)t}, \end{aligned}$$

де  $M = M_1 M_2$ ,  $\alpha$  – мале додатне число.

Легко довести, що функція  $M t e^{-\alpha t}$  для  $t > 0$  має єдиний максимум  $\tilde{M}$ , тому  $|f * \varphi| \leq \tilde{M} e^{(s_1 + \alpha)t}$  або

$$|f * \varphi| \leq \tilde{M} e^{s_1 t},$$

оскільки  $s_1$  – точна нижня грань чисел  $s_1 + \alpha$ . Отже, згортка  $f * \varphi$  є оригіналом з показником зростання  $s_1$ , якщо  $s_1 > s_2$ .

Якщо  $s_1 < s_2$ , то згортка  $f * \varphi$  є оригіналом з показником зростання  $s_2$ . У загальному випадку показником зростання згортки  $f * \varphi$  є число  $\max\{s_1, s_2\}$ . •

**Теорема 3.3 (теорема Бореля).** *Якщо  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$  – оригінали з показниками зростання  $s_1$  і  $s_2$  відповідно,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_1$ , і  $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_2$ , то у півплощині  $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$*

$$f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p). \quad (3.4)$$

**Доведення.** За означенням згортки

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{+\infty} (f * \varphi)(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

В отриманій рівності повторний інтеграл у області інтегрування (смузі)  $D = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t < +\infty, 0 \leq \tau \leq t\}$  (рис. 6) збігається абсолютно, бо зображення оригінала  $f * \varphi$  визначене у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_1$ , якщо

$s_1 > s_2$  (теореми 3.2 та 1.1). Тому у повторному інтегралі можна змінити порядок інтегрування ( $0 \leq \tau < +\infty$ ,  $\tau \leq t < +\infty$ ), тобто

$$\begin{aligned} f * \varphi &\rightarrow \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = t - \tau \\ 0 \leq u < +\infty \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} f(u) e^{-pu} du = F(p)\Phi(p). \quad \bullet \end{aligned}$$

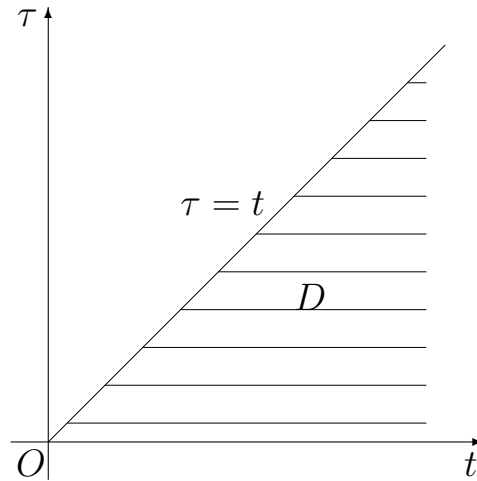


Рис. 6

З теореми 3.3 випливає, що згортці оригіналів у просторі зображень відповідає операція множення зображень згортуваних функцій.

**Приклад 3.2.** Знайти зображення згортки двох функцій  $f(t) = t^2$  та  $\varphi(t) = \cos \omega t$ .

**Розв'язання.** За означенням згортки

$$f * \varphi = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos \omega \tau d\tau.$$

Оскільки  $\cos \omega \tau \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ,  $t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3}$ , то за формулою (3.4)

$$t^2 * \cos \omega t \rightarrow \frac{2\omega}{p^3(p^2 + \omega^2)}. \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 3.3.** Знайти згортку функцій  $t^\alpha$  і  $t^\beta$ , де  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

**Розв'язання.** Оскільки

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \rightarrow \frac{1}{p^{\alpha+1}}, \quad \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \rightarrow \frac{1}{p^{\beta+1}},$$

то згідно з (3.4)

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{p^{\beta+1}} \rightarrow \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} * \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

або

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} t^\alpha * t^\beta.$$

Але оскільки

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \rightarrow \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)},$$

то

$$\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} t^\alpha * t^\beta.$$

Таким чином,

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} t^{\alpha+\beta+1}. \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 3.4.** Використовуючи теорему Бореля, знайти оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{1}{(p + 1)(p + 2)^2}.$$

**Розв'язання.** Розкладемо функцію  $F(p)$  на прості дроби (наприклад, методом невизначених коефіцієнтів):

$$F(p) = \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{p + 2} - \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

Оскільки  $\frac{1}{p + 1} \rightarrow e^{-t}$ ,  $\frac{1}{p + 2} \rightarrow e^{-2t}$ , то залишається знайти оригінал функції

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p + 2)^2} = \frac{1}{p + 2} \cdot \frac{1}{p + 2}.$$

За формулою (3.4)

$$\Phi(p) \rightarrow \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t d\tau = te^{-2t}$$

і остаточно

$$\frac{1}{(p + 1)(p + 2)^2} \rightarrow e^t - (1 + t)e^{-2t}. \quad \blacktriangleright$$

## § 3.4. Узагальнене множення зображень

**Теорема 3.4 (теорема Ефроса).** Нехай  $f(t)$ ,  $\varphi(t, \tau)$ ,  $\int_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau$  є оригіналами, а інтеграл  $\int_0^{+\infty} \varphi(t, \tau)e^{-pt} dt$  рівномірно збіжний відносно  $\tau \geq 0$ . Якщо  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\varphi(t, \tau) \rightarrow \Phi(p)e^{-\tau h(p)}$ , де  $\operatorname{Re} h(p) > s_0$  для  $\operatorname{Re} p > s_0$ , то

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau \rightarrow \Phi(p)F(h(p)). \quad (3.5)$$

**Доведення.** Оскільки  $\varphi(t, \tau) \rightarrow \int_0^{+\infty} \varphi(t, \tau)e^{-pt} dt$  (за означенням) і  $\varphi(t, \tau) \rightarrow \Phi(p)e^{-\tau h(p)}$  (за умовою теореми), то

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t, \tau)e^{-pt} dt = \Phi(p)e^{-\tau h(p)}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на  $f(\tau)d\tau$  і зінтегруємо за змінною  $\tau$  у межах від 0 до  $+\infty$ :

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} \varphi(t, \tau)e^{-pt} dt = \Phi(p) \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\tau h(p)} d\tau. \quad (3.6)$$

Оскільки за умовою теореми  $\operatorname{Re} h(p) > s_0$ , то

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\tau h(p)} d\tau \rightarrow F(h(p)).$$

За умовою теореми інтеграл  $\int_0^{+\infty} \varphi(t, \tau)e^{-pt} dt$  рівномірно збіжний відносно  $\tau$ , а тому у лівій частині рівності (3.6) можна змінити порядок інтегрування.

Тоді

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau = \Phi(p)F(h(p)),$$

звідки одержуємо співвідношення (3.5). •

Розглянемо окремі випадки теореми 3.4.

1. Якщо у формулі (3.5)  $h(p) = p$ , то  $\varphi(t, \tau) \rightarrow \Phi(p)e^{-\tau p}$ , а оскільки за теоремою загаювання (теорема 2.3)

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi(t - \tau), & \text{якщо } t > \tau, \\ 0, & \text{якщо } t < \tau, \end{cases}$$

і  $\int_t^{+\infty} f(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau = 0$ , то

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau$$

або

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau \rightarrow \Phi(p)F(p).$$

2. Якщо  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,  $h(p) = \sqrt{p}$ , то  $\varphi(t, \tau) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}\tau}$ , а отже, використовуючи співвідношення  $\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \rightarrow \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$  (див. таблицю зображень), знаходимо

$$\varphi(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

Тоді за формулою (3.5) одержуємо оригінал за зображенням  $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ :

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

3. Нехай  $\Phi(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}}$ ,  $h(p) = \frac{1}{p}$ , тоді з теореми Ефроса випливає, що

$$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{\tau}{p}} \rightarrow \varphi(t, \tau).$$

З таблиці зображень знаходимо оригінал  $\varphi(t, \tau) = \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}$ . У результаті отримуємо співвідношення

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Пропонуємо читачам самостійно довести ще одне цікаве співвідношення:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right).$$

**Приклад 3.5.** Використовуючи теорему Ефроса, знайти оригінал за зображенням

$$\Psi(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{p}.$$

**Розв'язання.** Нехай  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,  $h(p) = \sqrt{p}$ , тоді

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot e^{-\tau\sqrt{p}} \rightarrow \varphi(t, \tau), \quad \tau > 0.$$

З таблиці зображень маємо

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot e^{-\tau\sqrt{p}} \rightarrow e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0.$$

Якщо  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,  $F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p}}$ , то  $F(p) = \frac{e^{-xp/a}}{p}$ , і з таблиці зображень знаходимо оригінал

$$\frac{e^{-\frac{xp}{a}}}{p} \rightarrow \theta\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

де  $\theta\left(t - \frac{x}{a}\right)$  – узагальнена функція Гевісайда (§ 1.1).

Тоді за теоремою Ефроса

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \Phi(p) \cdot F(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot F(\sqrt{p}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x}{a}}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \\ &= \left| \begin{array}{l} s = \frac{\tau}{\sqrt{2t}}, \quad d\tau = \sqrt{2t} ds \\ \frac{x}{a} \leq \tau < +\infty \\ \frac{x}{a\sqrt{2t}} \leq s < +\infty \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} \sqrt{2t} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \end{aligned}$$

$$= \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right) = 1 - 2\Phi \left( \frac{x}{a\sqrt{2t}} \right),$$

де  $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$  – функція Лапласа. ►

### § 3.5. Теорема Дюамеля

У прикладних задачах операційного числення часто знайдені зображення мають вигляд  $pF_1(p)F_2(p)$ , причому оригінали  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  зображень  $F_1(p)$  і  $F_2(p)$  відомі. Виявляється, що за допомогою оригіналів  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  можна знайти оригінал і для виразу  $pF_1(p)F_2(p)$ .

**Теорема 3.5 (теорема Дюамеля).** *Якщо функції  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  – оригінали з показниками зростання  $s_1$ ,  $s_2$  відповідно,  $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_1$ ,  $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_2$ , та існують похідні  $f_1'(t)$ ,  $f_2'(t)$ , то*

$$pF_1(p)F_2(p) \rightarrow f_1(0) \cdot f_2(t) + (f_1' * f_2)(t). \quad (3.7)$$

**Доведення.** Позначимо

$$g(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

і знайдемо похідну функції  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_2(\tau) \cdot f_1(t - \tau) \Big|_{\tau=t} + \\ &+ \int_0^t f_1'(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_1(0) \cdot f_2(t) + (f_1' * f_2)(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

За теоремою 3.2 функція  $g(t)$  є оригіналом, а з теореми 2.7 про диференціювання оригіналу

$$g'(t) \rightarrow pG(p) - g(0),$$

де  $G(p)$  – зображення оригінала  $g(t)$ . Таким чином, з теореми 3.3 про зображення згортки отримуємо співвідношення

$$g'(t) \rightarrow pF_1(p)F_2(p) - g(0) = pF_1(p)F_2(p), \quad (3.9)$$

оскільки  $g(0) = 0$ .

Отже, з формул (3.8), (3.9) випливає, що

$$pF_1(p)F_2(p) \rightarrow f_1(0) \cdot f_2(t) + (f_1' * f_2)(t). \quad \bullet$$

Враховуючи комутативність згортки (§3.1), одержуємо симетричну до співвідношення (3.7) формулу:

$$pF_1(p)F_2(p) \rightarrow f_1(t) \cdot f_2(0) + (f_1 * f_2')(t). \quad (3.10)$$

Праві частини формул (3.7) і (3.10) називають *інтегралами Дюамеля*.

**Приклад 3.6.** Використовуючи теорему Дюамеля, знайти оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p-3)}.$$

**Розв'язання.** Оскільки

$$F(p) = p \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p-3},$$

а

$$\frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t} = f_1(t), \quad \frac{1}{p-3} \rightarrow e^{3t} = f_2(t),$$

то з формули (3.10) одержуємо:

$$\begin{aligned} F(p) &\rightarrow f_1(t)f_2(0) + (f_1 * f_2')(t) = \\ &= e^{-t} \cdot 1 + \int_0^t e^{-\tau} \cdot 3e^{3(t-\tau)} d\tau = e^{-t} + 3e^{3t} \int_0^t e^{-4\tau} d\tau = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема Дюамеля має широке практичне застосування, зокрема для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (§5.2).

### Контрольні питання до розділу III

1. Що називають згорткою двох неперервних функцій? Як називають операцію знаходження згортки функцій?



2. У чому полягають властивості комутативності, асоціативності і дистрибутивності згортки?
3. Як формулюється теорема про неперервність згортки?
4. У якій півплощині згортка двох оригіналів є оригіналом?
5. Як формулюється теорема Бореля про зображення згортки?
6. Як формулюється теорема Ефроса про узагальнене множення зображень? Напишіть окремі випадки зображень, які впливають з цієї теореми.
7. За допомогою якої формули, знаючи оригінали  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  та відповідні зображення  $F_1(p)$ ,  $F_2(p)$ , можна знайти оригінал за відомим зображенням  $pF_1(p)F_2(p)$ ? Як формулюється теорема Дюамеля? Що називають інтегралами Дюамеля?

*Рекомендована література:* [2, с. 171-174], [7, с. 57-69], [21, с. 63-79], [22, с. 91-102].

### Вправи для самостійного виконання

**Вправа 3.1.** Знайдіть згортку функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f(t) = \sin t$ , $g(t) = \operatorname{sh} t$ ,              | 2) $f(t) = \sin t$ , $g(t) = \cos 2t$ ,                |
| 3) $f(t) = t^2$ , $g(t) = 3 - 2t$ ,                              | 4) $f(t) = e^t$ , $g(t) = \sin 3t$ ,                   |
| 5) $f(t) = \operatorname{sh} t$ , $g(t) = \operatorname{ch} t$ , | 6) $f(t) = t$ , $g(t) = \sin^2 t$ ,                    |
| 7) $f(t) = e^{4t}$ , $g(t) = 1 - e^{4t}$ ,                       | 8) $f(t) = \cos t$ , $g(t) = \cos t$ ,                 |
| 9) $f(t) = t^2$ , $g(t) = t^3$ ,                                 | 10) $f(t) = \operatorname{sh} 2t$ , $g(t) = \cos 3t$ . |

**Вправа 3.2.** Використовуючи теорему Бореля, знайдіть зображення згортки функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f(t) = \operatorname{sh} 2t$ , $g(t) = \cos 5t$ ,              | 2) $f(t) = \sin 2t$ , $g(t) = \cos 5t$ , |
| 3) $f(t) = t^2$ , $g(t) = 3t - 5$ ,                                | 4) $f(t) = e^{3t}$ , $g(t) = \sin 3t$ ,  |
| 5) $f(t) = \operatorname{sh} 2t$ , $g(t) = \operatorname{ch} 3t$ , | 6) $f(t) = t^2$ , $g(t) = \sin^2 t$ ,    |
| 7) $f(t) = e^{3t}$ , $g(t) = e^{3t} - 2$ ,                         | 8) $f(t) = \cos^2 t$ , $g(t) = \cos t$ , |

$$9) f(t) = t^2, \quad g(t) = t^3 - 1, \quad 10) f(t) = \sin 4t, \quad g(t) = \operatorname{sh} 6t.$$

**Вправа 3.3.** Використовуючи теорему Бореля, знайдіть оригінал за відомим зображенням:

$$\begin{array}{ll} 1) F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}, & 2) F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-2)}, \\ 3) F(p) = \frac{3p}{(p^2-3)(p^2-1)}, & 4) F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}, \\ 5) F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+4)}, & 6) F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}, \\ 7) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}, & 8) F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}, \\ 9) F(p) = \frac{p^2}{(p^2+16)(p^2+4)}, & 10) F(p) = \frac{p^2}{p^2+1}. \end{array}$$

**Вправа 3.4.** Використовуючи теорему Дюамеля, знайдіть оригінал за відомим зображенням:

$$\begin{array}{ll} 1) F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)}, & 2) F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-2)}, \\ 3) F(p) = \frac{p}{(p^2-3)(p^2-1)}, & 4) F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}, \\ 5) F(p) = \frac{1}{p^3(p^2+1)}, & 6) F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}, \\ 7) F(p) = \frac{p^2}{(p^2-4)(p^2+9)}, & 8) F(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}, \\ 9) F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}, & 10) F(p) = \frac{1}{p^3(p^2-16)}. \end{array}$$

## РОЗДІЛ IV. Обернене перетворення Лапласа

### § 4.1. Формула Рімана-Мелліна

Розв'язування багатьох практичних задач приводить до необхідності відновлення оригінала за відомим зображенням. У багатьох випадках це можна зробити за допомогою наступного твердження.

**Теорема 4.1 (про обернення інтеграла Лапласа).** *Якщо  $f(t)$  – функція-оригінал з показником зростання  $s_0$  і  $f(t) \rightarrow F(p)$ , то у будь-якій точці неперервності оригінала  $f(t)$  справджується рівність*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (4.1)$$

причому інтеграл в (4.1) береться вздовж довільної прямої, для точок якої  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , і визначається як

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p)e^{pt} dp.$$

**Доведення.** Оскільки

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} e^{pt} \left( \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \right) dp.$$

Згідно з теоремою 1.1 інтеграл Лапласа збігається рівномірно відносно  $p$  в будь-якій точці півплощини  $\operatorname{Re} p > s_0$ , а тому порядок інтегрування в отриманому подвійному інтегралі можна змінити. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} e^{pt} \left( \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) dp &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} e^{p(t-\tau)} dp = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(\tau) e^{s(t-\tau)}}{t-\tau} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{s(t-\tau)} \frac{\sin \omega(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} \xi = \tau - t \\ -t \leq \xi < +\infty \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{+\infty} f(t+\xi) e^{-s\xi} \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi = \left| g(\xi) = f(t+\xi) e^{-s\xi} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-t}^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi, \end{aligned}$$

тобто

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^0 g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi. \quad (4.2)$$

Для дослідження другого інтегралу з (4.2) зобразимо його у вигляді

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi &= g(0) \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi + \int_0^{\varphi_1} \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \sin \omega\xi d\xi + \\ &+ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi + \int_{\varphi_2}^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi = I_1(\omega) + I_2(\omega) + I_3(\omega) + I_4(\omega). \end{aligned}$$

Оскільки інтеграли

$$I_2(\omega) = \int_0^{\varphi_1} \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \sin \omega\xi d\xi, \quad I_4(\omega) = \int_{\varphi_2}^{+\infty} g(\xi) \frac{\sin \omega\xi}{\xi} d\xi,$$

як відомо з математичного аналізу, збігаються, то для будь-якого наперед заданого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  межу  $\varphi_1$  можна підібрати настільки

малою, а межу  $\varphi_2$  – настільки великою, що для всіх значень  $\omega$  модулі цих інтегралів будуть менші  $\varepsilon$ .

Інтеграл  $I_3(\omega)$  зінтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} I_3(\omega) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\xi) \frac{\sin \omega \xi}{\xi} d\xi = \left| \begin{array}{l} u = \frac{g(\xi)}{\xi} \\ dv = \sin \omega \xi d\xi \end{array} \right| = \\ &= - \frac{g(\xi)}{\xi} \cdot \frac{\cos \omega \xi}{\omega} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{g'(\xi)\xi - g(\xi)}{\xi^2} \cdot \frac{\cos \omega \xi}{\omega} d\xi. \end{aligned}$$

Враховуючи, що межі  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  є фіксованими, одержуємо границю

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I_3(\omega) = 0.$$

Перетворимо інтеграл  $I_1(\omega)$  :

$$I_1(\omega) = g(0) \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin \omega \xi}{\xi} d\xi = \left| \begin{array}{l} z = \omega \xi \\ 0 < z < \omega \varphi_1 \end{array} \right| = g(0) \int_0^{\omega \varphi_1} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Відомо ([17], розд. 7, § 9.8), що  $\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$ , а тому  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I_1(\omega) = \frac{\pi}{2} g(0)$ .

Враховуючи тепер, що  $g(\xi) = f(t + \xi)e^{-s\xi}$ , а функція  $f(t)$  неперервна у точці  $t$ , одержуємо:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = g(0) = f(t),$$

а отже,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I_1(\omega) = \frac{\pi}{2} f(t).$$

Аналогічно можна довести, що для першого інтеграла з (4.2) маємо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-t}^0 g(\xi) \frac{\sin \omega \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2} f(t).$$

Враховуючи одержані результати, з рівності (4.2) остаточно знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p) e^{pt} dp = f(t),$$

що й потрібно було довести. •

Інтеграл у правій частині формули (4.1) називають *інтегралом Мелліна*, а саму рівність – *формулою Рімана-Мелліна*. Вона визначає *обернене перетворення Лапласа*, тобто дозволяє за відомим зображенням функції знайти її оригінал.

**Зауваження 4.1.** *За означенням для від’ємних значень  $t$  оригінал то-тожсно дорівнює нулю. Однак у загальному випадку, використовуючи перетворення (4.1), можна отримати функцію  $f(t) \neq 0$  і для  $t < 0$ .*

З (4.1) випливає, що якщо два оригінали  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  мають однакове зображення  $F(p)$ , то у точках неперервності вони набувають однакових значень, бо виражаються через  $F(p)$  за допомогою того самого інтеграла. Звідси випливає *теорема єдиності оригінала*: *якщо функції  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  мають однакове зображення  $F(p)$ , то вони збігаються у точках їх неперервності.*

Нагадаємо, що теореми 1.1 і 1.3 визначають необхідні умови, за яких задана функція комплексної змінної  $F(p)$ , визначена у деякій правій півплощині, є зображенням функції дійсної змінної  $f(t)$ . Але ці умови не є достатніми. Наступне твердження, яке наводимо без доведення, визначає достатні умови існування зображення (доведення можна знайти, наприклад, у [2, § 6.1]).

**Теорема 4.2 (достатні умови існування зображення).** *Нехай функція  $F(p)$  комплексної змінної  $p = s + i\sigma$  задовольняє такі умови:*

а)  $F(p)$  – аналітична у півплощині  $s > s_0$ ;

б) у будь-якій півплощині  $s \geq s_1 > s_0$ , існує границя

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0;$$

в) функція  $F(p)$  абсолютно інтегровна за змінною  $\sigma$ , тобто інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(p)| d\sigma$  збігається.

Тоді  $F(p)$  є зображенням деякої функції-оригінала  $f(t)$ , яка має показник зростання не більше, ніж  $s_0$ , і визначається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad s > s_0. \quad (4.3)$$

## § 4.2. Множення оригіналів

Як приклад застосування теореми 4.1 розглянемо питання про множення оригіналів, тобто про визначення зображення добутку за відомими зображеннями множників.

**Теорема 4.3 (про множення оригіналів).** *Нехай  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  – оригінали з показниками зростання  $s_1, s_2$  відповідно,  $f_1(t) \rightarrow F_1(p), \operatorname{Re} p > s_1$ , і  $f_2(t) \rightarrow F_2(p), \operatorname{Re} p > s_2$ . Тоді*

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq, \quad (4.4)$$

причому функція  $F(p)$  визначена й аналітична в області  $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$ , а інтегрування відбувається по довільній прямій, яка паралельна до уявної осі та задовольняє умову  $s_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - s_2$ .

**Доведення.** Очевидно, що функція  $f_1(t)f_2(t)$  задовольняє перші дві умови означення оригінала. Крім того, оскільки для оригіналів  $f_1(t), f_2(t)$  справджуються оцінки  $|f_1(t)| < M_1 e^{s_1 t}, |f_2(t)| < M_2 e^{s_2 t}$ , то

$$|f_1(t)f_2(t)| < M_1 M_2 e^{(s_1+s_2)t},$$

а отже, функція  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$  є оригіналом з показником зростання  $s_1 + s_2$  і маємо співвідношення

$$f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-pt} dt. \quad (4.5)$$

Функція  $F_1(q)$  згідно з теоремою 1.2 визначена у півплощині  $\operatorname{Re} q > s_1$ . Підставимо у (4.5) функцію  $f_1(t)$  у вигляді інтеграла Мелліна (4.1):

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q)e^{qt} dq \right) f_2(t)e^{-pt} dt.$$

Оскільки інтеграли  $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q)e^{qt}dq$  і  $\int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-(p-q)t}dt$  абсолютно збіжні (пропонуємо довести це самостійно), то можемо змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі, тобто

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q) \left( \int_0^{+\infty} e^{-(p-q)t} f_2(t) dt \right) dq.$$

Внутрішній інтеграл існує, якщо  $\operatorname{Re}(p - q) > s_2$ , тобто у півплощині  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q + s_2$  і дорівнює у ній зображенню  $F_2(p - q)$ , а отже,

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q)F_2(p - q)dq. \quad \bullet$$

Формули (3.4) і (4.4) пов'язують добуток оригіналів  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  з добутком відповідних зображень  $F_1(p)$  і  $F_2(p)$ . У цьому сенсі ці формули є взаємно двоїстимим.

**Зауваження 4.2.** Величина  $s_2$  у теоремі 4.3 може бути як завгодно близькою до  $s_1$ , тому можна вважати, що зображення добутку  $f_1(t)f_2(t)$  визначене для значень  $p$ , які задовольняють нерівність  $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$ , де  $s_1 + s_2$  – показник зростання функції  $f_1(t)f_2(t)$ .

### § 4.3. Теореми розвинення

Відновити оригінал за його зображенням у багатьох випадках можна і без використання формули Рімана-Мелліна. При певних умовах це дозволяють зробити теореми розвинення. Наприклад, наступна теорема дозволяє це зробити у більш загальному випадку, причому вона простіша з точки зору практичних застосувань.

**Теорема 4.4 (перша теорема розвинення).** *Нехай функція  $F(p)$  розвивається в околі точки  $p_0 = 0$  у ряд Лорана*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}, \quad (4.6)$$



збіжний для  $1/|p| < r$ . Тоді функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (4.7)$$

є аналітичною функцією й оригіналом для зображення  $F(p)$ .

**Доведення.** Оскільки

$$\frac{1}{p^k} \rightarrow \frac{t^{k-1}}{(k-1)!},$$

то ряд (4.7) формально є оригіналом для зображення  $F(p)$ . Покажемо, що  $f(t)$  є аналітичною функцією змінної  $t$ .

У (4.6) зробимо заміну  $u = \frac{1}{p}$ . Тоді  $F(p) = F\left(\frac{1}{u}\right) = \Phi(u)$ , де

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k. \quad (4.8)$$

Очевидно, що функція  $\Phi(u)$  є аналітичною для  $|u| \leq r^{-1}$ , а з нерівності Коші для коефіцієнтів ряду (4.8) одержуємо оцінки

$$|a_k| \leq Mr^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq Mr \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r|t|)^k}{k!} = Mr e^{r|t|}, \quad (4.9)$$

звідки випливає, що ряд (4.7) збіжний для всіх  $t$ , тобто  $f(t)$  є аналітичною функцією змінної  $t$ .

З (4.9) випливає, що для  $t > 0$

$$|f(t)| < Le^{rt},$$

де  $L > Mr$ , тобто  $f(t)$  є оригіналом з показником зростання  $r$ . Оскільки ряд (4.7) рівномірно збіжний для всіх  $t$ , то його можна помножити на  $e^{-pt} dt$  і почленно зінтегрувати за змінною  $t$  у межах від 0 до  $+\infty$ . Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-pt} dt$$

і оскільки  $\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-pt} dt = \frac{(k-1)!}{p^k}$  (пропонуємо цю формулу вивести самостійно,  $k-1$  разів інтегруючи частинами), то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = F(p). \quad \bullet$$

**Приклад 4.1.** Використовуючи першу теорему розвинення, знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи відоме розвинення  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{2!p^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!p^{2n}} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{2!p^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!p^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

За першою теоремою розвинення одержуємо потрібний оригінал

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{[(2k)!]^2}. \quad \blacktriangleright$$

**Зауваження 4.3.** З теореми 4.4 випливає, що перехід від степеневих рядів за степенями  $\frac{1}{p}$  до степеневих рядів за степенями  $t$  приводить до збіжних на всій осі  $t$  рядів. Однак в результаті оберненого переходу не завжди одержуватимемо збіжний ряд, бо нові коефіцієнти одержуються з коефіцієнтів заданого ряду множенням на  $n!$

**Теорема 4.5** (друга теорема розвинення – випадок простих полюсів). Нехай зображення  $F(p)$  є дробово-раціональною функцією

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m},$$

де  $n < m$  і всі полюси  $p_1, p_2, \dots, p_m$  функції  $F(p)$  прості й відмінні від нуля.

Тоді оригінал  $f(t)$  за зображенням  $F(p)$  визначається формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.10)$$

**Доведення.** Спочатку розкладемо  $F(p)$  на суму простих дробів:

$$F(p) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{p - p_k},$$

де коефіцієнти  $c_1, \dots, c_m$  знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} c_k &= \lim_{p \rightarrow p_k} \left( \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right) = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p) - F_2(p_k)} = \\ &= \frac{F_1(p_k)}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p - p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тоді

$$F(p) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k},$$

а оскільки  $e^{p_k t} \rightarrow \frac{1}{p - p_k}$ , то

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = f(t). \quad \bullet$$

**Зауваження 4.4.** Умова  $n < m$  у теоремі 4.5 є суттєвою, інакше у  $F(p)$  можна виділити цілий невід'ємний степінь змінної  $p$  і в цьому випадку не виконуватиметься необхідна умова існування зображення, бо  $F(p)$  не прямуватиме до нуля для  $p \rightarrow \infty$  (теорема 1.3).

**Зауваження 4.5.** Оскільки ([8], розд. 5, § 1)

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) = \operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)},$$

то оригінал  $f(t)$  за зображенням  $F(p)$ , яке задовольняє умови теорем 4.5, можна знайти за формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p=p_k} F(p) e^{p_k t} = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Нехай зображення  $F(p)$  має простий полюс  $p = 0$ , тобто  $F_2(p) = p \tilde{F}_2(p)$ , де  $\tilde{F}_2(p)$  – многочлен  $(m - 1)$ -го степеня, причому  $\tilde{F}_2(0) \neq 0$ . Тоді

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot \tilde{F}_2(p)} = \frac{c_1}{p} + \sum_{k=2}^m \frac{c_k}{p - p_k},$$

а застосовуючи для коефіцієнтів  $c_1, \dots, c_m$  формулу (4.11), одержуємо формулу

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{\tilde{F}_2(0)} + \sum_{k=2}^m \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot \tilde{F}_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

**Приклад 4.2.** Використовуючи другу теорему розвинення, знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)(p^2+4)}$ .

**Розв'язання.** Функція  $F(p)$  має чотири прості полюси в точках  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_{3,4} = \pm 2i$ . За другою теоремою розвинення

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}_{p=-1} F(p)e^{-t} + \operatorname{Res}_{p=-2} F(p)e^{-2t} + \operatorname{Res}_{p=-2i} F(p)e^{-2it} + \operatorname{Res}_{p=2i} F(p)e^{2it} = \\ &= \frac{p+3}{(p+2)(p^2+4)} \Big|_{p=-1} \cdot e^{-t} + \frac{p+3}{(p+1)(p^2+4)} \Big|_{p=-2} \cdot e^{-2t} + \\ &+ \frac{p+3}{(p+1)(p+2)(p-2i)} \Big|_{p=-2i} \cdot e^{-2it} + \frac{p+3}{(p+1)(p+2)(p+2i)} \Big|_{p=2i} \cdot e^{2it} = \\ &= \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{3-2i}{4i(1-2i)(2-2i)}e^{-2it} + \frac{3+2i}{4i(1+2i)(2+2i)}e^{2it} = \\ &= \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{11}{40}\cos 2t + \frac{3}{40}\sin 2t. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Теорема 4.6** (друга теорема розвинення – випадок кратних полюсів). *Нехай*

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}, \quad n < m,$$

а полюси  $p_1, p_2, \dots, p_k$  функції  $F(p)$  мають кратності  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  відповідно ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = m$ ). Тоді оригінал  $f(t)$  за зображенням  $F(p)$  визначається формулою

$$f(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{\alpha_j} A_{lj} \frac{t^{\alpha_j-l}}{(\alpha_j-l)!} e^{p_j t},$$

де

$$A_{lj} = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \left( (p-p_j)^{\alpha_j} F(p) \right).$$

**Доведення.** Нехай головна частина розвинення дробово-раціональної функції  $F(p)$  у ряд має вигляд

$$S_j(p) = \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{A_{lj}}{(p - p_j)^{\alpha_j - l + 1}}.$$

В цьому випадку функція  $F_0(p) = F(p) - \sum_{j=1}^k S_j(p)$  є цілою. Крім того, оскільки  $S_j(+\infty) = 0$  і  $F(+\infty) = 0$ , то  $F_0(+\infty) \equiv 0$  як обмежена ціла функція.

Таким чином, одержуємо зображення

$$F(p) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{A_{lj}}{(p - p_j)^{\alpha_j - l + 1}},$$

у якому, використовуючи лінійність перетворення Лапласа (теорема 2.1), можна перейти до оригіналів почленно. Кожна з функцій  $(p - p_j)^{\alpha_j} F(p)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , розвивається в околі точки  $p_j$  у ряд Тейлора

$$(p - p_j)^{\alpha_j} F(p) = \sum_{l=1}^{\alpha_j} A_{lj} (p - p_j)^{l-1} + \dots,$$

коефіцієнти  $A_{lj}$  якого можуть бути знайдені за відомими формулами. •

**Зауваження 4.6.** Якщо зображення  $F(p)$  задовольняє умови теореми 4.6, то для знаходження оригінала  $f(t)$  за зображенням  $F(p)$  можна використовувати формулу, відому з курсу комплексного аналізу ([8], розд. 5, § 1.2):

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{p=p_j} F(p) e^{pt} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{(\alpha_j - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{\alpha_j - 1}}{dp^{\alpha_j - 1}} \left( F(p) e^{pt} (p - p_j)^{\alpha_j} \right). \end{aligned}$$

**Приклад 4.3.** Використовуючи другу теорему розвинення, знайти оригінал за зображенням  $F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p + 1)^2}$ .

**Розв'язання.** Зображення  $F(p)$  має простий полюс  $p_1 = 1$  і полюс  $p_2 = -1$  кратності 2. За другою теоремою розвинення

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=1} F(p) e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=-1} F(p) e^{pt}.$$

Тоді

$$\operatorname{Res}_{p=1} F(p)e^{pt} = \left. \frac{p^2 + 1}{(p + 1)^2} \right|_{p=1} \cdot e^t = \frac{1}{2}e^t.$$

З формули (4.6.) випливає, що

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-1} F(p)e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p + 1)^2} e^{pt} \cdot (p + 1)^2 \right)'_p = \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{p^2 + 1}{p - 1} e^{pt} \right)'_p = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{2p(p - 1) - p^2 - 1}{(p - 1)^2} e^{pt} + \frac{p^2 + 1}{p - 1} \cdot te^{pt} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{p^2 - 2p - 1}{(p - 1)^2} e^{pt} + \frac{p^2 + 1}{p - 1} \cdot te^{pt} \right) = \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t}. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-t}. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 4.7 (третя теорема розвинення).** Нехай  $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$  — мероморфна функція з простими полюсами  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , причому  $\operatorname{Re} p_k \leq a$ , тобто всі полюси лежать зліва від деякої прямої, паралельної до уявної осі площини  $p$ . Тоді

$$F(p) \rightarrow f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

**Доведення.** Вважаємо, що за даних умов можна побудувати сукупність концентричних кіл  $C_m$  з центрами в початку координат, які не проходять через полюси. Крім того, нехай для всіх  $C_m$  виконується нерівність  $|F(p)| < M$ , де число  $M$  не залежить від  $m$ .

Тоді за умовою теореми функція  $F(p)$  розвивається в ряд

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{p - p_k},$$

де

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \left( (p - p_k) \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \right) = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Розглянемо сукупність контурів  $\Gamma_m$ , які утворені з дуг відповідних кіл  $C_m$  і відрізків прямої  $\operatorname{Re} p = a$ , що відтинаються цими колами. Позначимо кіль-

кість полюсів, які лежать всередині контура  $\Gamma_m$ , через  $N_m$ . Тоді за теоремою Коші про лишки ([4], §7.2)

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_m} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

а отже,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad \bullet$$

**Зауваження 4.7.** У теоремі 4.5 замість умови, що всі полюси зображення  $F(p)$  лежать зліва від прямої  $\operatorname{Re} p = a$ , можна обмежитись припущенням про те, що справа від цієї прямої лежить лише скінченна кількість полюсів функції.

**Приклад 4.4.** Знайти оригінал за відомим зображенням

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \frac{1}{4}}}, \quad |p| > \frac{1}{2}.$$

**Розв'язання.** Зображення  $F(p)$  має два прості полюси  $p = \pm \frac{1}{2}i$ . Оскільки  $|p| > \frac{1}{2}$ , то розвинемо функцію  $F(p)$  в ряд за степенями  $\frac{1}{p}$ . Тоді

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2p}\right)^2}} = p^{-1} \left(1 + \frac{1}{4p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-k + \frac{1}{2}\right)}{k!} \cdot \frac{1}{4^k p^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2k} p^{2k+1}}. \end{aligned}$$

З того, що  $\frac{(2k)!}{p^{2k+1}} \rightarrow t^{2k}$ , отримуємо

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \frac{1}{4}}} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{t}{4}\right)^{2k} = f(t). \quad \blacktriangleright$$

**Контрольні питання до розділу IV**

1. Як формулюється теорема про обернення перетворення Лапласа?
2. Який вигляд має формула Рімана-Мелліна? Яке її практичне значення?
3. Як формулюється теорема єдиності оригінала?
4. Якими є достатні умови існування зображення аналітичної функції?
5. Як визначити зображення добутку за відомими зображеннями множників?  
Сформулюйте відповідну теорему.
6. Як формулюється перша теорема розвинення?
7. Як визначити оригінал від зображення дробово-раціональної функції для випадку простих (кратних) полюсів?
8. Як формулюється теорема розвинення для зображень, які є мероморфними функціями?

*Рекомендована література:* [1, с. 230-242], [2, с. 181-188], [7, с. 87-104], [13, с. 159-176], [21, с. 80-86].

**Вправи для самостійного виконання**

**Вправа 4.1.** *Застосовуючи теореми розвинення, знайдіть оригінал за зображенням:*

$$1) F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)},$$

$$2) F(p) = \frac{p}{(p+2)(2-p)},$$

$$3) F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2},$$

$$4) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3},$$

$$5) F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)^4},$$

$$6) F(p) = \frac{p}{p^2+3p+2},$$

$$7) F(p) = \frac{p-4}{(p+3)(p-4)(p+5)},$$

$$8) F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2(p+2)},$$

$$9) F(p) = \frac{p}{(p+6)^2},$$

$$10) F(p) = \frac{4p+1}{(p+4)^2},$$

$$11) F(p) = \frac{p^3+p+1}{p^3(p+1)},$$

$$12) F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)},$$



13) 
$$F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p-1)^3},$$

15) 
$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)},$$

17) 
$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2},$$

19) 
$$F(p) = \frac{p}{p^4-1},$$

14) 
$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2},$$

16) 
$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+9)^2},$$

18) 
$$F(p) = \frac{p+3}{p(p-1)(p-2)(p-3)},$$

20) 
$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}.$$

# РОЗДІЛ V. Застосування операційного числення

## § 5.1. Обчислення невластних інтегралів

Одне із застосувань перетворення Лапласа полягає в обчисленні та дослідженні невластних інтегралів.

Наведемо основні формули, які можна використовувати для обчислення невластних інтегралів.

1. Окремі випадки теореми Ефроса (§ 3.4):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right), \quad (5.1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right), \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p}). \quad (5.3)$$

2. Окремі випадки формули (2.16) з теореми 2.13 про інтегрування за параметром:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \rightarrow \int_0^{+\infty} F(q) dq, \quad (5.4)$$

$$\int_0^{+\infty} \tau^n f(\tau) d\tau \rightarrow (-1)^{n+1} \left. \frac{d^n F(q)}{dq^n} \right|_0^{+\infty}. \quad (5.5)$$

Доведемо формули (5.4), (5.5). Інтегруючи співвідношення (2.2)

$$\frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right) \rightarrow F(\beta p),$$

за змінною  $\beta$  у межах від 0 до 1, одержуємо:

$$\int_0^1 \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right) d\beta \rightarrow \int_0^1 F(\beta p) d\beta. \quad (5.6)$$

У (5.6) зробимо заміни  $\tau = \frac{t}{\beta}$  і  $q = \beta p$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right) d\beta &= \int_{+\infty}^t \frac{\tau}{t} f(\tau) d\left(\frac{t}{\tau}\right) = \\ &= \int_t^{+\infty} \frac{\tau}{t} f(\tau) \frac{t d\tau}{\tau^2} = \int_t^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq, \end{aligned}$$

тобто

$$\int_t^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq. \quad (5.7)$$

Згідно з (2.13) маємо співвідношення  $\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(q) dq$ , застосовуючи до якого теорему 2.9 про інтегрування оригінала одержуємо, що

$$\int_0^t \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \frac{1}{p} \int_p^{+\infty} F(q) dq. \quad (5.8)$$

Тепер з (5.7) і (5.8), використовуючи лінійність перетворення Лапласа, знаходимо співвідношення, з якого

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} F(q) dq,$$

звідки, враховуючи, що  $1 \rightarrow \frac{1}{p}$ , одержуємо формулу (5.4).

Співвідношення (5.5) отримуємо з формули (5.4), якщо її застосувати до оригінала  $t^{n+1}f(t)$  і врахувати співвідношення  $t^{n+1}f(t) \rightarrow (-1)^{n+1}F^{(n+1)}(p)$ , яке випливає з теореми 2.8 про диференціювання зображення.

## 3. Формула

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) = F(0), \quad (5.9)$$

яку отримуємо з (1.3) за допомогою граничного переходу при  $p \rightarrow 0$  (якщо існує границя  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ ).

## 4. Формула

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) f(t, \tau) d\tau \rightarrow \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) F(p, \tau) d\tau, \quad (5.10)$$

яка випливає з теореми інтегрування за параметром (формула (2.16)).

5. **Рівність Парсеваля.** Якщо  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$  і функції  $F(p)$ ,  $\Phi(p)$  – аналітичні у півплощині  $\operatorname{Re} p \geq 0$ , то

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) F(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.11)$$

Доведемо формулу (5.11). Оскільки  $F(\tau) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\tau t} dt$ , то

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) F(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) \left( \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\tau t} dt \right) d\tau.$$

Змінюючи порядок інтегрування, маємо

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) F(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-\tau t} d\tau \right) f(t) dt,$$

звідки, враховуючи, що  $\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-\tau t} d\tau = \Phi(t)$ , одержуємо формулу (5.11).

Якщо у (5.11) підставити

$$\varphi(t) = \theta(t - a) - \theta(t - b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a < t < b, \\ 0, & \text{якщо } t < a, t > b. \end{cases}$$

і врахувати, що  $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p) = \frac{1}{p} (e^{-ap} - e^{-bp})$ , то одержуємо формулу

$$\int_a^b F(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\tau} - e^{-b\tau}}{\tau} f(\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

**Приклад 5.1.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ .

*Розв'язання. I спосіб.* Якщо у формулу (5.4) підставити  $f(t) = \sin t$ , то, враховуючи співвідношення  $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ , знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \operatorname{arctg} q \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

*II спосіб.* Згідно з формулою (2.13) інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

а використовуючи (5.9), одержуємо, що  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2}$ . ►

**Приклад 5.2.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\tau} - 1}{\tau e^{4\tau}} d\tau$ .

*Розв'язання.* Підставляючи в (5.12)  $f(t) = 1$  і  $F(p) = \frac{1}{p}$ , одержуємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\tau} - 1}{\tau e^{4\tau}} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\tau} - e^{-4\tau}}{\tau} d\tau = \int_2^4 \frac{d\tau}{\tau} = \ln 2. \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 5.3.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t\tau}{\tau^2 + \alpha^2} d\tau$ , де  $\alpha \neq 0$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\cos t\tau \rightarrow \frac{p}{p^2 + \tau^2}$ , то за формулою (5.10) одержуємо

$$\int_0^{+\infty} \cos t\tau \cdot \frac{1}{\tau^2 + \alpha^2} d\tau \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{p}{p^2 + \tau^2} \cdot \frac{1}{\tau^2 + \alpha^2} d\tau =$$

$$= \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\tau^2 + \alpha^2} - \frac{1}{\tau^2 + p^2} \right) d\tau = \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \cdot \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\alpha(p + \alpha)}.$$

Враховуючи тепер співвідношення  $\frac{1}{p + \alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}$ , остаточно одержуємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t\tau}{\tau^2 + \alpha^2} d\tau = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 5.4.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau}{\tau} d\tau$ , де  $\alpha > 0$ .

**Розв'язання.** Позначимо  $\varphi(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t$ ,  $f(t) = 1$ . Тоді  $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p) = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$ ,  $f(t) \rightarrow F(p) = \frac{1}{p}$ , а тому за формулою (5.11)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau}{\tau} d\tau &= \beta \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau + \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\tau + \alpha}{\beta} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

## § 5.2. Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь

### 5.2.1. Звичайні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Методи операційного числення широко використовують для інтегрування лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та систем таких рівнянь. Це використання ґрунтується на теоремі 2.7 про диференціювання оригіналу.

Позначимо через

$$L[x(t)] \equiv x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t)$$

диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, який діє у просторі оригіналів, і розглянемо задачу Коші

$$L[x(t)] = f(t), \quad (5.13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (5.14)$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (5.13) не залежать від часу, то без втрати загальності можемо вважати, що  $t_0 = 0$ . Інакше від функції  $x(t)$  завжди можна перейти до функції  $y(t) = x(t+t_0)$ , яка є розв'язком диференціального рівняння з правою частиною  $f(t+t_0)$  і задовольняє початкові умови

$$y(0) = x_0, \quad y'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Припустимо, що шукана функція  $x(t)$ , всі її похідні до порядку  $n$  включно, а також права частина  $f(t)$  є оригіналами. Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ . Згідно з теоремою 2.7 про диференціювання оригіналу

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x_0, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px_0 - x'_0,$$

... ..

$$x^{(n-1)}(t) \rightarrow p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \dots - x_0^{(n-2)},$$

$$x^{(n)}(t) \rightarrow p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - x_0^{(n-1)}.$$

Використовуючи початкові умови та лінійність оригінала, перейдемо від диференціального рівняння (5.13) до алгебраїчного рівняння з невідомою функцією  $X(p)$  у просторі зображень:

$$p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - x_0^{(n-1)} + a_1 \left( p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \dots - x_0^{(n-2)} \right) + \dots$$

$$\dots + a_{n-1} \left( pX(p) - x_0 \right) + a_nX(p) = F(p)$$

або

$$Q_n(p)X(p) = F(p) + R_{n-1}(p), \quad (5.15)$$

де

$$Q_n(p) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_{n-1}p + a_n,$$

$$R_{n-1}(p) = p^{n-1}x_0 + \dots + x_0^{(n-1)} + a_1 \left( p^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{(n-2)} \right) + \dots$$

$$\dots + a_{n-2} \left( px_0 + x'_0 \right) + a_{n-1}x_0.$$

Легко бачити, що  $Q_n(p)$  є характеристичним многочленом рівняння  $L[x(t)] = 0$ .

Рівняння (5.15) називають **операторним рівнянням** для задачі Коші (5.13), (5.14). Розв'язуючи його відносно  $X(p)$ , одержуємо зображення розв'язку цієї задачі:

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (5.16)$$

Якщо за зображенням (5.16) вдасться знайти відповідний оригінал  $x(t)$  (за теоремами розвинення або безпосередньо, використовуючи властивості перетворення Лапласа), то згідно з теоремою про єдиність оригінала функція  $x(t)$  буде шуканим розв'язком задачі Коші (5.13), (5.14).

**Приклад 5.5.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

**Розв'язання.** Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x'(t) \rightarrow pX(p), \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 1, \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Складемо та розв'яжемо операторне рівняння:

$$p^2X(p) - 1 + 2pX(p) + 5X(p) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + 1,$$

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{1}{p^2 + 2p + 5}.$$

Розкладемо праву частину на прості дроби (використовуючи, наприклад, метод невизначених коефіцієнтів):

$$X(p) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{10} \cdot \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 4} + \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{(p + 1)^2 + 4}.$$

Використовуючи тепер таблицю зображень оригіналів, знаходимо шуканий розв'язок

$$x(t) = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{9}{20} e^{-t} \sin 2t. \quad \blacktriangleright$$



Інтегральне перетворення Лапласа дозволяє знаходити не тільки частинні розв'язки (які задовольняють початкові умови), але й загальні розв'язки диференціальних рівнянь. Для цього рівняння (5.13) потрібно доповнити початковими умовами

$$x(0) = c_0, \quad x'(0) = c_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

де  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  – довільні сталі.

### Приклад 5.6. Зінтегрувати рівняння

$$x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = 24t^2e^{3t} + e^{2t}.$$

**Розв'язання.** Задане рівняння доповнимо початковими умовами

$$x(0) = c_0, \quad x'(0) = c_1, \quad x''(0) = c_2,$$

де  $c_0, c_1, c_2$  – довільні сталі. Операторним рівнянням для утвореної задачі Коші є

$$\begin{aligned} X(p)(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) &= \frac{48}{(p-3)^3} + \frac{1}{p-2} + \\ &+ p^2c_0 + p(c_1 - 6c_0) + 11c_0 - 6c_1 + c_2, \end{aligned}$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{48(p-2) + (p-3)^3}{(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)(p-3)^3(p-2)} + \\ &+ \frac{p^2c_0 + p(c_1 - 6c_0) + 11c_0 - 6c_1 + c_2}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Розкладемо перший дріб з (5.17) на суму простих дробів:

$$\begin{aligned} \frac{48(p-2) + (p-3)^3}{(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)(p-3)^3(p-2)} &= \frac{48(p-2) + (p-3)^3}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)} = \\ &= \frac{A}{p-3} + \frac{B}{(p-3)^2} + \frac{C}{(p-3)^3} + \frac{D}{(p-3)^4} + \frac{E}{p-2} + \frac{F}{(p-2)^2} + \frac{G}{p-1}. \end{aligned}$$

Застосовуючи відомі методи, одержуємо коефіцієнти  $B = 42$ ,  $C = -36$ ,  $D = 24$ ,  $F = -1$ . Коефіцієнти  $A$ ,  $E$ ,  $G$  знаходити не обов'язково.

Отже,

$$X(p) = \frac{A}{p-3} + \frac{42}{(p-3)^2} - \frac{36}{(p-3)^3} + \frac{24}{(p-3)^4} + \frac{E}{p-2} - \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{G}{p-1} + \frac{p^2c_0 + p(c_1 - 6c_0) + 11c_0 - 6c_1 + c_2}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Останній дріб у цьому виразі можна розкласти на суму елементарних дробів:

$$\frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{p-2} + \frac{A_3}{p-3},$$

де коефіцієнти  $A_1, A_2, A_3$  виражатимуться через  $c_0, c_1, c_2$ . Позначивши  $C_1 = A_1 + G, C_2 = A_2 + E, C_3 = A_3 + A$ , знаходимо зображення шуканого розв'язку:

$$X(p) = \frac{C_1}{p-1} + \frac{C_2}{p-2} + \frac{C_3}{p-3} - \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{42}{(p-3)^2} - \frac{36}{(p-3)^3} + \frac{24}{(p-3)^4}$$

і за відомими формулами – відповідний оригінал:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} - te^{2t} + (42t - 18t^2 + 4t^3)e^{3t}. \quad \blacktriangleright$$

**5.2.2. Використання інтеграла Дюамеля для інтегрування рівнянь з нульовими початковими умовами.** Розглянемо рівняння (5.13) з нульовими початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5.18)$$

**Зауваження 5.1.** *Перехід від ненульових початкових умов (5.14) до умов (5.18) завжди можна здійснити за допомогою заміни шуканої функції*

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad (5.19)$$

де  $y(t)$  – нова функція.

Розглянемо також рівняння з лівою частиною  $L[z(t)]$  і правою частиною  $f(t) \equiv 1$ , тобто рівняння

$$z^{(n)}(t) + a_1z^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}z'(t) + a_nz(t) = 1. \quad (5.20)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (5.20), який задовольняє нульові початкові умови  $z(0) = 0, z'(0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(0) = 0$ .

Операторними рівняннями для відшукування зображень  $X(p)$  та  $Z(p)$  відповідно є:

$$p^n X(p) + a_1 p^{n-1} X(p) + \dots + a_{n-1} p X(p) + a_n X(p) = F(p),$$

$$p^n Z(p) + a_1 p^{n-1} Z(p) + \dots + a_{n-1} p Z(p) + a_n Z(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \quad Z(p) = \frac{1}{pQ_n(p)},$$

де  $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ , а отже,

$$X(p) = pF(p)Z(p).$$

Для переходу до оригіналів в останньому співвідношенні використаємо інтеграл Дюамеля (§ 3.5). Згідно з формулою (3.10)

$$X(p) = pF(p)Z(p) \rightarrow x(t) = f(t)z(0) + \int_0^t f(\tau)z'_t(t-\tau)d\tau,$$

а оскільки  $z(0) = 0$ , то остаточно одержуємо

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)z'_t(t-\tau)d\tau. \quad (5.21)$$

Відзначимо, що застосування формули (5.21) не вимагає знаходження зображення правої частини рівняння (5.13).

**Приклад 5.7.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо розв'язок рівняння  $z''(t) - z(t) = 1$ , який задовольняє нульові початкові умови. Оскільки

$$z(t) \rightarrow Z(p), \quad z'(t) \rightarrow pZ(p), \quad z''(t) \rightarrow p^2 Z(p), \quad 1 \rightarrow \frac{1}{p},$$

то  $Z(p)(p^2 - 1) = \frac{1}{p}$ , звідки

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p}.$$

З таблиці зображень оригіналів одержуємо функцію  $z(t) = \operatorname{ch} t - 1$ , а за формулою (5.21) знаходимо шуканий розв'язок:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(t - \tau)}{1 + e^\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{1 + e^\tau} d\tau = \\ &= -\frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} d(e^{-\tau})}{1 + e^{-\tau}} - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \frac{d(1 + e^\tau)}{1 + e^\tau} = \\ &= -\frac{e^t}{2} (e^{-t} - 1 - \ln(e^{-t} + 1) + \ln 2) - \frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{1 + e^t}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$x(t) = \frac{e^t}{2} \ln \frac{1 + e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{1 + e^t}{2} + \frac{e^t - 1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Інтеграл Дюамеля особливо зручно використовувати для інтегрування декількох диференціальних рівнянь з однаковими лівими та різними правими частинами. У цьому випадку формула (5.21) значно зменшує кількість необхідних обчислень.

**5.2.3. Використання дельта-функції для інтегрування рівнянь зі сталими коефіцієнтами.** Розглянемо спосіб розв'язування задачі Коші (5.13), (5.18), пов'язаний з використанням дельта-функції  $\delta(t)$ , визначеної у § 1.3.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$L[y(t)] \equiv y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = \delta(t) \quad (5.22)$$

з нульовими початковими умовами

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5.23)$$

Розв'язок  $y(t)$  задачі (5.22), (5.23) називають **імпульсною перехідною функцією**.

Оскільки

$$y(t) \rightarrow Y(p), \quad x(t) \rightarrow X(p), \quad f(t) \rightarrow F(p), \quad \delta(t) \rightarrow 1,$$

$$x^{(j)}(t) \rightarrow p^j X(p), \quad y^{(j)}(t) \rightarrow p^j Y(p), \quad j = 1, \dots, n,$$

то одержуємо такі операторні рівняння для задач Коші (5.13), (5.18) і (5.22), (5.23) відповідно:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) = F(p),$$

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)Y(p) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$X(p) = Y(p) \cdot F(p).$$

Тепер розв'язок задачі Коші (5.13), (5.18) знаходимо згідно з теоремою Бореля про зображення згортки (теорема 3.3):

$$x(t) = \int_0^t y(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (5.24)$$

або, враховуючи комутативність згортки (§ 3.1),

$$x(t) = \int_0^t y(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.25)$$

**Приклад 5.8.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

**Розв'язання.** Для отримання нульових початкових умов згідно з (5.19) зробимо заміну шуканої функції за формулою

$$x(t) = z(t) + x(0) + tx'(0) = z(t) + 3t + 1.$$

Для знаходження функції  $z(t)$  маємо задачу Коші з нульовими початковими умовами:

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 2e^{3t} - 6t + 7, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Розглянемо також задачу Коші

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Складемо та розв'яжемо відповідне операторне рівняння:

$$p^2 Y(p) - 3pY(p) + 2Y(p) = 1,$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{p - 1}.$$

Тоді  $y(t) = e^{2t} - e^t$  і за формулою (5.25) знаходимо функцію  $z(t)$ :

$$z(t) = \int_0^t (e^{2t-2\tau} - e^{t-\tau}) (2e^{3\tau} - 6\tau + 7) d\tau = e^{3t} - 3t - 1,$$

а отже,  $x(t) = e^{3t} - 3t - 1 + 3t + 1 = e^{3t}$ . ►

Розглянемо більш загальне, ніж (5.22), диференціальне рівняння, правою частиною якого є диференціальний оператор від деякої заданої функції  $g(t)$ :

$$L[x(t)] = \omega(t), \quad (5.26)$$

де

$$\omega(t) = b_m g^{(m)}(t) + b_{m-1} g^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 g(t),$$

$b_0, b_1, \dots, b_m$  – деякі сталі, з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (5.27)$$

Розв'язуючи задачу Коші (5.26), (5.27), у загальному випадку можемо скористатись принципом суперпозиції, згідно з яким розв'язок цієї задачі дорівнює сумі розв'язків двох задач: задачі Коші для однорідного рівняння з неоднорідними початковими умовами

$$L[x(t)] = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (5.28)$$

та задачі Коші для неоднорідного рівняння з однорідними початковими умовами

$$L[x(t)] = \omega(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5.29)$$

Розв'язок задачі (5.28) називають **вільним рухом**. Позначимо цей розв'язок через  $x_{\text{в}}(t)$ . Вільний рух характеризується впливом початкових умов. Очевидно, що для нульових початкових умов  $x_{\text{в}}(t) = 0$ .

Розв'язок задачі Коші (5.29) називають **залежним рухом**. Його позначимо через  $x_{\text{з}}(t)$ . Очевидно, що  $x_{\text{з}}(t)$  характеризується впливом функції  $g(t)$ . Для відшукування  $x_{\text{з}}(t)$  використаємо дельта-функцію  $\delta(t)$ . Спочатку знаходимо імпульсну перехідну функцію  $y(t)$  – розв'язок задачі Коші

$$L[y(t)] = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тоді за формулою (5.24) отримуємо

$$x_{\text{з}}(t) = \int_0^t y(\tau)\omega(t - \tau)d\tau, \quad (5.30)$$

а розв'язок задачі Коші (5.26), (5.27) запишеться у вигляді

$$x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{з}}(t).$$

**Приклад 5.9.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = g''(t) + 5g'(t) + 6g(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$$

де  $g(t) = e^t$ .

**Розв'язання.** Вільний рух  $x_{\text{в}}(t)$  знайдемо як розв'язок задачі Коші

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Складемо та розв'яжемо відповідне операторне рівняння:

$$p^2X(p) - p - 2 - 3pX(p) + 3 + 2X(p) = 0,$$

$$(p^2 - 3p + 2)X(p) = p - 1, \quad X(p) = \frac{1}{p - 2}.$$

Отже,  $x_{\text{в}}(t) = e^{2t}$ .

Імпульсну перехідну функцію  $y(t)$  шукаємо як розв'язок задачі Коші

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Нехай  $y(t) \rightarrow Y(p)$ . Тоді у просторі зображень маємо:

$$p^2 Y(p) - 3Y(p) + 2Y(p) = 1, \quad Y(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1},$$

а тому  $y(t) = e^{2t} - e^t$ .

Функцію  $\omega(t)$  знаходимо із заданого рівняння

$$\omega(t) = g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 12e^t,$$

а залежний рух одержуємо з формули (5.30):

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \int_0^t (e^{2\tau} - e^\tau) \cdot 12e^{t-\tau} d\tau = \\ &= \int_0^t (12e^{t+\tau} - 12e^t) d\tau = 12(e^{2t} - e^t) - 12te^t. \end{aligned}$$

Оскільки  $x(t) = x_B(t) + x_3(t)$ , то розв'язком заданої задачі Коші є

$$x(t) = 13e^{2t} - 12e^t - 12te^t. \quad \blacktriangleright$$

**5.2.4. Рівняння зі сталими коефіцієнтами, права частина яких є кусково-неперервною функцією.** Операційний метод розв'язування диференціальних рівнянь є особливо ефективним, коли права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. Нехай маємо кусково-неперервну функцію

$$f(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{якщо } 0 < t < t_1, \\ \varphi_2(t), & \text{якщо } t_1 < t < t_2, \\ \dots & \dots \dots \\ \varphi_{n+1}(t), & \text{якщо } t > t_n. \end{cases} \quad (5.31)$$

Використовуючи традиційні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з такою правою частиною, потрібно спочатку розв'язати задачу на інтервалі  $t \in (0, t_1)$ , потім отриманий розв'язок використати для постановки нових початкових умов на інтервалі  $t \in (t_1, t_2)$  і розв'язати утворену задачу з правою частиною  $\varphi_2(t)$  і т.д.



Використання функції Гевісайда та узагальненої функції Гевісайда дає можливість кусково-неперервну функцію  $f(t)$  записати у вигляді суми більш простих оригіналів і використати властивість лінійності перетворення Лапласа. Наприклад, функцію  $f(t)$  з (5.31) можемо записати у вигляді

$$f(t) = \varphi_1(t) \cdot (\theta(t) - \theta(t - t_1)) + \\ + \varphi_2(t) \cdot (\theta(t - t_1) - \theta(t - t_2)) + \dots + \varphi_{n+1}(t) \cdot \theta(t - t_n).$$

Зауважимо, що багато математичних моделей описуються за допомогою диференціальних рівнянь, у правій частині яких є функція Гевісайда. Такими є, наприклад, рівняння динамічних систем, які зазнають зовнішніх сил не неперервно, а у певні моменти часу.

**Приклад 5.10.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) + 3x'(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

де

$$f(t) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } 0 < t < 3, \\ 2 - t, & \text{якщо } t \geq 3. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Праву частину рівняння запишемо у вигляді

$$f(t) = 4(\theta(t) - \theta(t - 3)) + (2 - t) \cdot \theta(t - 3) = 4\theta(t) - (t + 2) \cdot \theta(t - 3).$$

Враховуючи, що  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $\theta(t - t_0) \rightarrow \frac{1}{p}e^{-t_0p}$ ,  $t\theta(t - t_0) \rightarrow \frac{t_0p + 1}{p^2}e^{-t_0p}$  (останнє співвідношення пропонуємо довести самостійно), переходимо до операторного рівняння

$$p^2X(p) + 3pX(p) = \frac{4}{p} - \left( \frac{1}{p^2} + \frac{5}{p} \right) e^{-3p},$$

звідки знаходимо

$$X(p) = \frac{4}{p^2(p + 3)} - \frac{5}{p^2(p + 3)}e^{-3p} - \frac{1}{p^3(p + 3)}e^{-3p}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2(p + 3)} = \frac{1}{3p^2} - \frac{1}{9p} + \frac{1}{9(p + 3)},$$

$$\frac{1}{p^3(p+3)} = \frac{1}{3p^3} - \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{27p} - \frac{1}{27(p+3)},$$

то

$$\begin{aligned} X(p) \rightarrow & \frac{4}{3}t - \frac{4}{9} + \frac{4}{9}e^{-3t} - 5 \left( \frac{t-3}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3(t-3)} \right) \theta(t-3) - \\ & - \left( \frac{(t-3)^2}{6} - \frac{t-3}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27}e^{-3(t-3)} \right) \theta(t-3), \end{aligned}$$

а отже,

$$x(t) = \frac{4}{3}t - \frac{4}{9} + \frac{4}{9}e^{-3t} - \left( \frac{t^2}{6} + \frac{5}{9}t - \frac{199}{54} + \frac{14}{27}e^{-3t+9} \right) \theta(t-3). \quad \blacktriangleright$$

**5.2.5. Рівняння зі змінними коефіцієнтами.** Методи операційного числення ефективно використовуються для інтегрування звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі степеневими коефіцієнтами, тобто коефіцієнтами, які є многочленами відносно  $t$ . Здійснюючи перехід до зображень, диференціювання оригінала перетворюється в множення на параметр  $p$  (теорема 2.7), а множення оригінала на незалежну змінну – у диференціювання зображення (теорема 2.8):

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad tx(t) \rightarrow -X'(p), \quad t^2x(t) \rightarrow X''(p), \quad \dots,$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0), \quad tx'(t) \rightarrow -(pX(p))', \quad t^2x'(t) \rightarrow -(pX(p))'', \quad \dots,$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px(0), \quad tx''(t) \rightarrow -(p^2X(p))' + x(0),$$

$$t^2x''(t) \rightarrow (p^2X(p))'', \quad \dots$$

Таким чином, при переході до зображень у диференціальному рівнянні зі степеневими коефіцієнтами порядок рівняння і степені коефіцієнтів міняються місцями, тобто у просторі зображень одержуємо диференціальне рівняння, порядок якого дорівнює максимальному степеню коефіцієнтів, а степені коефіцієнтів не перевищують порядку заданого диференціального рівняння. Якщо максимальний ступінь многочленів менший, ніж порядок рівняння, то у просторі зображень одержуємо рівняння меншого порядку, яке, як правило, легше розв'язується.

**Приклад 5.11.** Знайти розв'язок рівняння

$$tx''(t) + (t + 3)x'(t) + 2x(t) = 0,$$

який задовольняє умову  $x(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0), \quad tx'(t) \rightarrow -X(p) - pX'(p),$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0), \quad tx''(t) \rightarrow -2pX(p) - p^2X'(p) + x(0).$$

Операторне рівняння має вигляд

$$-2pX(p) - p^2X'(p) + 1 - X(p) - pX'(p) + 3pX(p) - 3 + 2X(p) = 0$$

або

$$X'(p) - \frac{1}{p}X(p) = -\frac{2}{p(p+1)}.$$

Це рівняння є лінійним. Його загальним розв'язком, як легко перевірити, є

$$X(p) = 2p \left( \ln \left| \frac{p}{p+1} \right| + \frac{1}{p} \right) + Cp,$$

де  $C$  – довільна стала. Але оскільки  $p$  не є зображенням неперервної функції, то функція  $X(p)$  буде зображенням тільки тоді, коли  $C = 0$ . Таким чином,

$$X(p) = 2p \left( \ln \left| \frac{p}{p+1} \right| + \frac{1}{p} \right).$$

Перейдемо від зображення до оригінала. Оскільки  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \rightarrow 1 - e^{-t}$ , то згідно з (2.13) одержуємо:

$$\int_p^{+\infty} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) dq \rightarrow \frac{1 - e^{-t}}{t},$$

$$\ln \frac{q}{q+1} \Big|_p^{+\infty} \rightarrow \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

Отже,

$$\frac{1}{p} - \ln \frac{p+1}{p} \rightarrow 1 - \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

Використовуючи формулу (2.9), знаходимо співвідношення

$$p \left( \frac{1}{p} - \ln \frac{p+1}{p} \right) \rightarrow \left( 1 - \frac{1-e^{-t}}{t} \right)' = \frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{t^2}.$$

Таким чином,

$$x(t) = 2 \cdot \frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{t^2}. \quad \blacktriangleright$$

### § 5.3. Інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

Використання операційного методу для інтегрування систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами проводиться аналогічно до розв'язування одного диференціального рівняння (§ 5.2).

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk}x_k''(t) + b_{jk}x_k'(t) + c_{jk}x_k(t)) = f_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.32)$$

з початковими умовами

$$x_k(0) = x_{k0}, \quad x_k'(0) = x_{k1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.33)$$

Нехай  $x_k(t) \rightarrow X_k(p)$ ,  $f_j(t) \rightarrow F_j(p)$ ,  $k, j = 1, \dots, n$ . Тоді

$$x_k'(t) \rightarrow pX_k(p) - x_{k0}, \quad x_k''(t) \rightarrow p^2X_k(p) - px_{k0} - x_{k1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

і від задачі (5.32), (5.33) переходимо до системи рівнянь у просторі зображень відносно  $X_k(p)$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_{jk}p^2 + b_{jk}p + c_{jk}) X_k(p) = \\ & = F_j(p) + \sum_{k=1}^n ((a_{jk}p + b_{jk})x_{k0} + a_{jk}x_{k1}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Розв'язуючи (5.34) як лінійну алгебраїчну систему рівнянь, знайдемо зображення  $X_k(p)$ , а потім за допомогою відомих способів відповідні оригінали  $x_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – розв'язок задачі Коші (5.32), (5.33).

**Приклад 5.12.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} x''(t) = x(t) - y(t) - z(t), \\ y''(t) = -x(t) + y(t) - z(t), \\ z''(t) = -x(t) - y(t) + z(t), \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

**Розв'язання.** Нехай  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $y(t) \rightarrow Y(p)$ ,  $z(t) \rightarrow Z(p)$ . У просторі зображень маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p^2 X(p) - p - X(p) + Y(p) + Z(p) = 0, \\ p^2 Y(p) + X(p) - Y(p) + Z(p) = 0, \\ p^2 Z(p) + X(p) + Y(p) - Z(p) = 0, \end{cases}$$

яку запишемо у вигляді

$$\begin{cases} (p^2 - 1)X(p) + Y(p) + Z(p) = p, \\ X(p) + (p^2 - 1)Y(p) + Z(p) = 0, \\ X(p) + Y(p) + (p^2 - 1)Z(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь є

$$X(p) = \frac{p^3}{(p^2 - 2)(p^2 + 1)}, \quad Y(p) = \frac{p}{(p^2 - 2)(p^2 + 1)},$$

$$Z(p) = -\frac{p}{(p^2 - 2)(p^2 + 1)}.$$

Оскільки

$$X(p) = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{p^2 - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}, \quad Y(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 + 1},$$

$$Z(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 + 1},$$

то, перейшовши до оригіналів, одержуємо розв'язок заданої системи

$$x(t) = \frac{2 \operatorname{ch} \sqrt{2}t}{3} + \frac{\cos t}{3}, \quad y(t) = -\frac{\operatorname{ch} \sqrt{2}t}{3} + \frac{\cos t}{3}, \quad z(t) = -\frac{\operatorname{ch} \sqrt{2}t}{3} + \frac{\cos t}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Відомо, що кожен канонічний систему звичайних диференціальних рівнянь можна звести до нормальної системи, тобто до системи рівнянь першого порядку за кожною невідомою функцією, розв'язаних відносно похідних. У матричній формі задачу Коші для нормальної системи можна записати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

де

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перейшовши до зображень, одержуємо, що  $p\mathbf{X} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$  або

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F},$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця порядку  $n$ .

Матриця  $p\mathbf{E} - \mathbf{A}$  має обернену матрицю для кожного значення  $p$ , для якого  $\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$ , тобто для всіх значень  $p$ , крім характеристичних. Елементами оберненої матриці будуть елементарні функції від  $p$ , які є зображеннями (особливими точками будуть тільки характеристичні числа, яких є скінченна кількість). Тому

$$\mathbf{X} = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}.$$

Оскільки матричні добутки справа є сумами попарних добутків, то можемо перейти до оригіналів за допомогою теореми 3.3 про згортку:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau, \quad (5.35)$$

де  $\mathbf{R}(t)$  – оригінал матриці-зображення  $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ . Матриця-оригінал  $\mathbf{R}(t)$  є резольвентою системи або нормальною фундаментальною системою розв'язків відповідної однорідної системи: якщо  $\mathbf{f} \equiv 0$  і  $\mathbf{x}_0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0$ , то розв'язком буде  $k$ -й стовпець матриці  $\mathbf{R}(t)$ .

**Приклад 5.13.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \sin t, \\ y'(t) = x(t) + y(t) + \cos t - \sin t - e^t, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Маємо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t - e^t \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} p-1 & 1 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix},$$

а також резольвенту системи

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{p-1}{(p-1)^2+1} \right\} & -L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-1)^2+1} \right\} \\ L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-1)^2+1} \right\} & L^{-1} \left\{ \frac{p-1}{(p-1)^2+1} \right\} \end{pmatrix},$$

де символом  $L^{-1}$  позначено оператор оберненого перетворення Лапласа.

Таким чином,

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (5.35) знаходимо розв'язок заданої задачі:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau - \sin \tau - e^\tau \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Провівши необхідні обчислення, знаходимо, що

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

тобто  $x(t) = e^t$ ,  $y(t) = \sin t$ . ►

## § 5.4. Розв'язування диференціальних рівнянь із загаюванням

Рівняння вигляду

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) = f(t), \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (5.36)$$

де  $a_k$ ,  $\tau_k$  – деякі невід'ємні числа, причому  $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1}$ , називають **диференціальним рівнянням із загаюванням**.

Диференціальні рівняння із загаюванням мають широке застосування у багатьох прикладних задачах, наприклад, у теорії автоматичного регулювання, у задачах автоматики, телемеханіки, радіолокації, радіозв'язку, ракетній техніці тощо ([21], [22]). Такі рівняння виникають, наприклад, якщо сила, яка діє на матеріальну точку, залежить від швидкості та положення цієї точки не тільки у заданий момент часу, але й у певний момент, який передує заданому.

Припустимо, що невідома функція  $x(t)$  і права частина рівняння (5.36) є оригіналами,  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ . Для спрощення міркувань вважатимемо, що  $x^{(k)}(0) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Тоді  $x^{(k)}(t) \rightarrow p^k X(p)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Використовуючи теорему загаювання (теорема 2.3), запишемо для (5.36) операторне рівняння

$$\left( p^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p} \right) \cdot X(p) = F(p),$$

звідки знаходимо

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \quad (5.37)$$



**Приклад 5.14.** Знайти розв'язок рівняння

$$x''(t) + 2x'(t - 2) + x(t - 4) = t,$$

який задовольняє умови  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .

**Розв'язання.** З операторного рівняння

$$p^2 X(p) + 2pe^{-2p} X(p) + e^{-4p} X(p) = \frac{1}{p^2}$$

одержуємо

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p^2 \cdot (p^2 + 2pe^{-2p} + e^{-4p})} = \frac{1}{p^4} \left( \frac{1}{1 + \frac{e^{-2p}}{p}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{p^4} \cdot \left( 1 - 2\frac{e^{-2p}}{p} + 3\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)^2 - 4\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

або

$$X(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)e^{-2kp}}{p^{k+4}}.$$

Перейшовши до оригіналу, одержуємо шуканий розв'язок у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!} \cdot \theta(t-2k). \quad \blacktriangleright$$

Операційним методом можна розв'язати *основну початкову задачу* для диференціального рівняння з загаюванням. Наприклад, для рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (5.38)$$

де  $\tau > 0$ , вона полягає у відшуканні такого неперервного для  $t > t_0$  розв'язку  $x(t)$ , що  $x(t) = \varphi(t)$  на відрізку  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ , де  $\varphi(t)$  – задана неперервна функція, яку називають *початковою* (рис. 7). Відрізок  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  називають *початковою множиною*. Оскільки йдеться про неперервний розв'язок рівняння (5.38), то  $\varphi(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} x(t) = x(t_0)$ .

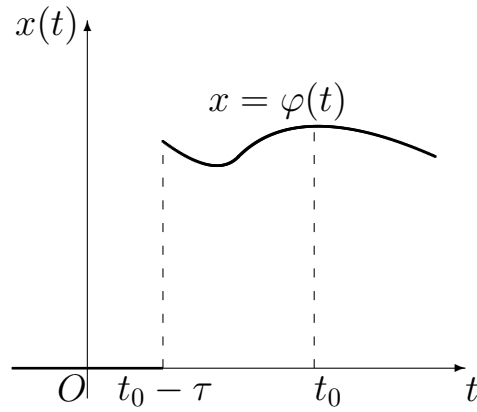


Рис. 7

**Приклад 5.15.** Знайти розв'язок рівняння  $x'(t) = x(t - 1)$  на відрізку  $-1 \leq t \leq 0$ , якщо  $\varphi(t) = t$ .

**Розв'язання.** Маємо  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $x'(t) \rightarrow pX(p)$ ,  $x(0) = \varphi(0) = 0$ .

З формули (2.3) одержуємо співвідношення

$$x(t - 1) \rightarrow e^{-p} \left( \int_{-1}^0 t e^{-pt} dt + X(p) \right),$$

а оскільки

$$\int_{-1}^0 t e^{-pt} dt = \frac{e^p - 1}{p^2} - \frac{e^p}{p},$$

то

$$x(t - 1) \rightarrow \frac{1 - e^{-p}}{p^2} - \frac{1}{p} + e^{-p} X(p).$$

Складемо і розв'яжемо відповідне операторне рівняння:

$$pX(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2} - \frac{1}{p} + e^{-p} X(p),$$

$$X(p) = -\frac{1}{p(p - e^{-p})} + \frac{1 - e^{-p}}{p^2(p - e^{-p})}$$

або

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{1}{p^2} \cdot \left( 1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots \right) + \\ &+ \frac{1 - e^{-p}}{p^3} \left( 1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kp}}{p^{k+3}}. \end{aligned}$$

Перейшовши від зображень до оригіналів, одержуємо шуканий розв'язок

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \theta(t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \theta(t-k) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \cdot \theta(t-k). \quad \blacktriangleright$$

## § 5.5. Розв'язування рівнянь з частинними похідними

У диференціальних рівняннях з частинними похідними невідомою є функція декількох незалежних змінних. Обмежимося розглядом функції двох незалежних змінних  $u(x, t)$ .

Розв'язуючи рівняння з частинними похідними із заданими початковими і крайовими умовами методами операційного числення, дотримуються такого алгоритму:

1) здійснити перехід з простору оригіналів у простір зображень. При цьому рівняння з частинними похідними у просторі оригіналів перейде у звичайне диференціальне рівняння у просторі зображень. Початкові умови будуть враховані у самому рівнянні внаслідок застосування теореми 2.7 про диференціювання оригіналу, а крайові умови для рівняння з частинними похідними перейдуть у початкові умови рівняння, залежного від невідомого зображення;

2) зінтегрувати отримане звичайне диференціальне рівняння;

3) для одержання розв'язку заданого рівняння з частинними похідними застосувати обернене перетворення Лапласа, теореми розвинення або таблицю зображень оригіналів.

Оскільки при розв'язуванні рівнянь з частинними похідними еліптичного типу методами операційного числення виникають певні труднощі, то обмежимося на застосуванні перетворення Лапласа до гіперболічних та параболічних рівнянь.

**5.5.1. Гіперболічні рівняння другого порядку.** Нехай задано рівняння поперечних коливань струни скінченної довжини  $l$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (5.39)$$

з крайовими умовами

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (5.40)$$

і початковими умовами

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (5.41)$$

Оскільки операційні співвідношення між оригіналами та їх зображеннями згідно з теоремою 2.12 можна диференціювати за параметром, то

$$\begin{aligned} u(x, t) &\rightarrow U(x, p), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\rightarrow p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= p^2 U(x, p) - pf(x). \end{aligned}$$

Отже, рівнянню (5.39) у просторі зображень відповідає рівняння

$$p^2 U(x, p) - pf(x) = a^2 \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2},$$

яке запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = -\frac{p}{a^2} f(x). \quad (5.42)$$

Таким чином, одержали звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно невідомої функції  $U(x, p)$ , яка залежить від незалежної змінної  $x$  та параметра  $p$ . Розв'язуючи рівняння (5.42), наприклад, методом варіації довільних сталих, одержуємо загальний розв'язок

$$U(x, p) = C_1 \operatorname{ch} \frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{px}{a} - \frac{1}{a} \int_0^x f(y) \operatorname{sh} \frac{p(x-y)}{a} dy, \quad (5.43)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

З крайових умов (5.40) випливає, що

$$U(0, p) = C_1 = 0, \quad U(l, p) = C_2 \operatorname{sh} \frac{pl}{a} - \frac{1}{a} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{p(l-y)}{a} dy = 0,$$

тобто

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{a \operatorname{sh} \frac{pl}{a}} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{p(l-y)}{a} dy.$$

Підставляючи знайдені  $C_1$ ,  $C_2$  у (5.43), одержуємо формулу для зображення шуканого розв'язку:

$$U(x, p) = \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{a}}{a \operatorname{sh} \frac{pl}{a}} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{p(l-y)}{a} dy - \frac{1}{a} \int_0^x f(y) \operatorname{sh} \frac{p(x-y)}{a} dy.$$

Для знаходження розв'язку задачі (5.39)-(5.41) скористаємося третьою теоремою розвинення (§ 4.3). Полюсами функції  $U(x, p)$  є корені рівняння  $\operatorname{sh} \frac{pl}{a} = 0$ , тобто числа

$$p_n = \frac{n\pi a}{l} i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо лишки функції  $U(x, p)$  за цими полюсами (усі вони – прості):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=p_n} U(x, p) e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow p_n} \left( (p - p_n) U(x, p) e^{pt} \right) = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \frac{p_n x}{a}}{l \operatorname{ch} \frac{p_n l}{a}} \cdot e^{p_n t} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{p_n(l-y)}{a} dy. \end{aligned}$$

Якщо  $n = 0$ , тобто  $p_n = 0$ , то

$$\operatorname{Res}_{p=0} U(x, p) e^{pt} = 0.$$

Якщо  $p_n = \frac{n\pi a}{l} i$  для  $n > 0$ , то

$$\operatorname{Res}_{p=\frac{n\pi a}{l} i} U(x, p) e^{pt} = \frac{1}{l} e^{\frac{n\pi a t}{l} i} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{l} i}{\operatorname{ch} n\pi i} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{n\pi(l-y)}{l} i dy.$$

Враховуючи тепер, що

$$\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{l} i = -\frac{1}{i} \sin \frac{n\pi x}{l} = i \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\operatorname{ch} n\pi i = \cos n\pi = (-1)^n,$$

$$\sin \frac{n\pi(l-y)}{l} = \sin n\pi \cos \frac{n\pi y}{l} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi y}{l} = -(-1)^n \sin \frac{n\pi y}{l},$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=\frac{n\pi a}{l}i} U(x, p)e^{pt} &= \frac{e^{\frac{n\pi at}{l}i}}{l} \cdot \frac{i \sin \frac{n\pi x}{l}}{(-1)^n} \int_0^l f(y) i \sin \frac{n\pi(l-y)}{l} dy = \\ &= \frac{1}{l} e^{\frac{n\pi at}{l}i} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що

$$\operatorname{Res}_{p=-\frac{n\pi a}{l}i} U(x, p)e^{pt} = \frac{1}{l} e^{-\frac{n\pi at}{l}i} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Тоді

$$\operatorname{Res}_{p=\pm\frac{n\pi a}{l}i} U(x, p)e^{pt} = b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l},$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Підсумовуючи всі лишки за відповідними полюсами для  $n = 1, 2, \dots$ , отримуємо розв'язок задачі (5.39)-(5.41) у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}.$$

**5.5.2. Параболічні рівняння другого порядку.** Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (5.44)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = 0 \quad (5.45)$$

і крайовою умовою

$$u(0, t) = h. \quad (5.46)$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (5.44)-(5.46), одержуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow pU(x, p), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}.$$

Для відшукування зображення  $U(x, p)$  маємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$U(x, p) = C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}. \quad (5.47)$$

Згідно з теоремою 2.14 про граничний перехід при  $t \rightarrow +0$  маємо

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pU(x, p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left( C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} \right) = \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = 0.$$

Оскільки  $\lim_{p \rightarrow +\infty} pC_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} = 0$ , то  $C_1(p) = 0$ .

Тоді  $u(0, t) = h \rightarrow U(0, p) = \frac{h}{p}$ . Враховуючи це, з (5.47) знаходимо, що  $C_2(p) = \frac{h}{p}$ , а отже,

$$U(x, p) = \frac{h}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

Використовуючи результат прикладу 3.5, отримуємо оригінал

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} \rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau.$$

Тоді

$$\frac{h}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} \rightarrow h \cdot \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right),$$

а отже, розв'язком задачі (5.44)-(5.46) є функція

$$u(x, t) = h \cdot \left( 1 - 2\Phi \left( \frac{x}{a\sqrt{2t}} \right) \right),$$

де

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

**Приклад 5.16.** Кінці струни  $x = 0$ ,  $x = l$  закріплені жорстко. Початкове відхилення задане рівністю  $u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Знайти відхилення  $u(x, t)$  для  $t > 0$ , вважаючи, що початкова швидкість рівна нулю.

**Розв'язання.** Заданий процес описується хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

причому за умовою

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Після застосування операційного числення одержуємо операторне рівняння у зображеннях:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

де  $U(0, p) = U(l, p) = 0$ .

Загальним розв'язком одержаного лінійного неоднорідного рівняння є

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{px}{a}} + C_2 e^{-\frac{px}{a}} - \frac{a^2 A}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

З крайових умов  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  випливає, що  $C_1 + C_2 = 0$ ,  $C_1 e^{\frac{pl}{a}} + C_2 e^{-\frac{pl}{a}} = 0$ , звідки  $C_1 = C_2 = 0$ .

Таким чином,

$$U(x, p) = -\frac{a^2 A}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l},$$

а перейшовши від зображення до оригінала, одержуємо шуканий розв'язок

$$u(x, t) = -\frac{laA}{\pi} \cos \frac{a\pi t}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \quad \blacktriangleright$$

## § 5.6. Розв'язування інтегральних рівнянь

Операційне числення можна використовувати для відшукування розв'язків інтегральних рівнянь типу згортки, тобто рівнянь вигляду

$$\int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (5.48)$$



або

$$x(t) + \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (5.49)$$

де  $x(t)$  – невідома функція,  $k(t)$  і  $f(t)$  – деякі задані функції. У теорії інтегральних рівнянь співвідношення (5.48) називають **рівнянням першого роду**, а (5.49) – **рівнянням другого роду**.

Використовуючи означення згортки (§ 3.1), інтеграл з (5.48), (5.49) можемо зобразити у вигляді згортки функцій  $k(t)$  і  $f(t)$ :

$$\int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = k(t) * f(t).$$

Застосовуючи до рівнянь (5.48) і (5.49) методи операційного числення, припускаємо, що шукана функція  $x(t)$ , ядро  $k(t)$  і права частина  $f(t)$  є оригіналами і  $x(t) \rightarrow X(p)$ ,  $k(t) \rightarrow K(p)$ ,  $f(t) \rightarrow F(p)$ .

**5.6.1. Інтегральні рівняння другого роду.** Якщо невластний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} k(t) * f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau$$

абсолютно збігається, то за теоремою Бореля (§ 3.3) згортці  $k(t) * f(t)$  у просторі зображень відповідає добуток відповідних зображень, тобто

$$k(t) * f(t) \rightarrow K(p) \cdot F(p).$$

Отже, інтегральному рівнянню (5.49) у просторі зображень відповідає операторне рівняння

$$X(p) + K(p)X(p) = F(p),$$

звідки знаходимо зображення

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p) + 1},$$

яке запишемо у вигляді

$$X(p) = F(p) - \frac{K(p)}{K(p) + 1}F(p).$$

Функція

$$\Psi(p) = \frac{K(p)}{K(p) + 1}$$

завжди є зображенням. Якщо оригінал цього зображення позначити через  $\psi(t)$ , то рівнянню у просторі зображень  $X(p) = F(p) - \Psi(p)F(p)$  відповідає рівняння

$$x(t) = f(t) - \psi(t) * f(t)$$

у просторі оригіналів.

Зокрема, якщо ядро інтегрального рівняння (5.48) є многочленом, тобто  $k(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ , то

$$k(t) \rightarrow K(p) = a_0 \frac{n!}{p^{n+1}} + a_1 \frac{(n-1)!}{p^n} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{p^2} + a_n \frac{1}{p}.$$

Тоді зображення

$$\Psi(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 (n-1)! p + a_0 n!}{p^{n+1} + a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 (n-1)! p + a_0 n!}$$

є правильною дробово-раціональною функцією, а тому її оригінал  $\psi(t)$  можна знайти, наприклад, за теоремами розвинення.

Отже, розв'язок  $F(p)$  операторного рівняння, яке відповідає інтегральному рівнянню другого роду типу згортки, завжди можна перетворити у простір оригіналів.

**Приклад 5.17.** Знайти розв'язок інтегрального рівняння другого роду

$$x(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 x(\tau) d\tau.$$

**Розв'язання.** Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \int_0^t (t - \tau)^2 x(\tau) d\tau = t^2 * x \rightarrow \frac{2}{p^3} X(p).$$

З операторного рівняння

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^3} X(p)$$

знаходимо зображення

$$X(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)},$$

яке розкладемо на елементарні дробі:

$$X(p) = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Отже, шуканим розв'язком є

$$x(t) = \frac{1}{6} \left( e^t + 3 \cos t + 3 \sin t - 4e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right). \quad \blacktriangleright$$

**5.6.2. Інтегральні рівняння першого роду.** Інтегральному рівнянню (5.48) відповідає операторне рівняння  $K(p)X(p) = F(p)$ , розв'язок якого

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)}$$

може не бути зображенням. Тоді інтегральне рівняння першого роду не матиме розв'язків у класі оригіналів. Однак у деяких випадках розв'язок інтегрального рівняння (5.48) операційними методами знайти можна. Наприклад, якщо функції  $k(t)$  і  $f(t)$  диференційовні і  $k(0) \neq 0$ , то здиференціювавши (5.48), одержимо інтегральне рівняння другого роду

$$f'(t) = \int_0^t k'(t-\tau)x(\tau)d\tau + k(0)x(t),$$

розв'язок якого існує.

Якщо  $k(0) = k'(0) = \dots = k^{(n-1)}(0) = 0$ , але  $k^{(n)}(0) \neq 0$ , то диференціюючи обидві частини рівняння (5.48)  $(n+1)$  разів, одержуємо інтегральне рівняння другого роду

$$f^{(n+1)}(t) = \int_0^t k^{(n+1)}(t-\tau)x(\tau)d\tau + k^{(n)}(0)x(t).$$

**Приклад 5.18.** Знайти розв'язок інтегрального рівняння першого роду

$$\int_0^t e^{2(t-\tau)}x(\tau)d\tau = t^2e^t.$$

**Розв'язання.** Оскільки ядро  $k(t) = e^{2t}$  інтегрального рівняння є диференційовною функцією і  $k'(t) = 2e^{2t} \neq 0$ , то це рівняння має розв'язок. Здійснюючи перехід до зображень, маємо співвідношення

$$t^2 e^t \rightarrow \frac{2}{(p-1)^3}, \quad \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau = e^{2t} * x(t) \rightarrow \frac{1}{p-2} X(p),$$

а отже, з операторного рівняння

$$\frac{1}{p-2} X(p) = \frac{2}{(p-1)^3}$$

одержуємо зображення

$$X(p) = \frac{2(p-2)}{(p-1)^3} = \frac{2}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Здійснюючи перехід до оригіналів, знаходимо розв'язок заданого інтегрального рівняння:  $x(t) = 2te^t - t^2 e^t$ . ►

## § 5.7. Розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь

Методи операційного числення є ефективним засобом для відшукування розв'язків деяких типів *інтегро-диференціальних* рівнянь, тобто рівнянь, в яких шукана функція міститься як під знаком похідної, так і під знаком інтеграла. Обмежимося розглядом лінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, тобто рівнянь вигляду:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) + \sum_{j=0}^n \int_0^t k_j(t-\tau) x^{(j)}(\tau) d\tau = f(t). \quad (5.50)$$

Вважаємо, що невідома функція  $x(t)$ , ядра  $k_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , права частина  $f(t)$  є оригіналами і

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad f(t) \rightarrow F(p), \quad k_j(t) \rightarrow K_j(p), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (5.50), який задовольняє початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (5.51)$$

Покажемо, що рівняння (5.50) можна звести до операторного рівняння відносно зображення  $X(p)$ . Для цього спочатку знайдемо зображення оператора  $L[x(t)] \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t)$  (його називають **зовнішнім диференціальним оператором**) та інтегрального оператора

$$V(t) \equiv \sum_{j=0}^n \int_0^t k_j(t-\tau) x^{(j)}(\tau) d\tau$$

з формули (5.50).

Як доведено у п. 5.2.1,

$$L[x(t)] \rightarrow Q_n(p)X(p) - R_{n-1}(p),$$

де

$$\begin{aligned} Q_n(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ R_{n-1}(p) &= x_0 p^{n-1} + x'_0 p^{n-2} + \dots + x_0^{(n-1)} + a_1 \left( x_0 p^{n-2} + x'_0 p^{n-1} + \dots + x_0^{(n-2)} \right) + \dots \\ &\quad \dots + a_{n-2} (x_0 p + x'_0) + a_{n-1} x_0. \end{aligned}$$

Згідно з (2.9)

$$x^{(j)}(t) \rightarrow p^j X(p) - M_j(p),$$

де  $M_j(p) = x_0 p^{j-1} + x'_0 p^{j-2} + \dots + x_0^{(n-1)}$ .

Зображення інтегрального оператора  $V(t)$  знайдемо, використовуючи теорему Бореля (теорема 3.3):

$$V(t) = \sum_{j=1}^n k_j(t) * x^{(j)}(t) \rightarrow \sum_{j=1}^n K_j(p) (p^j X(p) - M_j(p)).$$

Отже, для відшукування зображення  $X(p)$  у просторі зображень одержуємо рівняння

$$Q_n(p)X(p) - R_{n-1}(p) + \sum_{j=1}^n K_j(p) (p^j X(p) - M_j(p)) = F(p),$$

звідки легко знаходимо

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p) + \sum_{j=1}^n K_j(p) M_j(p)}{Q_n(p) + \sum_{j=1}^n p^j K_j(p)}.$$

Знаходження оригінала  $x(t)$  за знайденим зображенням  $X(p)$  здійснюється за відомими правилами.

За аналогічною схемою можна розв'язувати системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду (5.50).

**Приклад 5.19.** Знайти розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$x''(t) + \int_0^t \cos(t - \tau)(x''(\tau) + x(\tau))d\tau = 2 \sin t,$$

який задовольняє умови  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$x(t) \rightarrow X(p), \quad x''(t) \rightarrow p^2 X(p), \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

а тому за теоремою Бореля

$$\begin{aligned} & \int_0^t \cos(t - \tau)(x''(\tau) + x(\tau))d\tau = \\ & = \cos t * (x''(t) + x(t)) \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} (p^2 X(p) + X(p)) = pX(p). \end{aligned}$$

Отже, операторним рівнянням є

$$p^2 X(p) + pX(p) = \frac{2}{p^2 + 1},$$

звідки знаходимо

$$X(p) = \frac{2}{p(p+1)(p^2+1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Здійснюючи перехід до оригіналів, одержуємо шуканий розв'язок

$$x(t) = 2 - e^{-t} - \cos t - \sin t. \quad \blacktriangleright$$

## Контрольні питання до розділу V

1. Які співвідношення операційного числення використовуються для обчислення та дослідження невластних інтегралів?

2. На використанні якої теореми ґрунтується розв'язування звичайних диференціальних рівнянь методами операційного числення?
3. Як побудувати операторне рівняння для задачі Коші для звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами? Яка його роль у відшуванні розв'язку задачі Коші?
4. Як використовується інтеграл Дюамеля для відшукування розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, які задовольняють нульові початкові умови? У якому випадку використання цього методу інтегрування диференціальних рівнянь має суттєві переваги і значно зменшує кількість необхідних обчислень?
5. У чому полягає алгоритм розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з використанням дельта-функції? Що називають імпульсною перехідною функцією?
6. У чому перевага операційного методу інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, права частина яких є кусково-неперервною функцією?
7. На використанні яких теорем операційного числення ґрунтується розв'язування звичайних диференціальних рівнянь зі змінними (степеневими) коефіцієнтами?
8. Що називають диференціальним рівнянням із загалюванням? Як формулюється основна початкова задача для такого рівняння? Які методи операційного числення використовуються для відшукування розв'язків диференціальних рівнянь із загалюванням?
9. Як методами операційного числення можна знайти розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними? Рівняння з частинними похідними яких типів зручно розв'язувати операційними методами?
10. Який загальний вигляд мають інтегральні рівняння типу згортки першого (другого) роду? Використання якої теореми операційного числення дає можливість розв'язувати такі рівняння?

11. Які теореми операційного числення використовуються для розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь?

*Рекомендована література:* [2, с. 188-209], [14, с. 50-73], [20, с. 237-265], [21, с. 131-196], [22, с. 59-74, с. 175-193].

### Вправи для самостійного виконання

**Вправа 5.1.** Використовуючи різні методи, обчисліть невласні інтеграли:

$$\begin{aligned}
 & 1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau, \quad 2) \int_0^{+\infty} \tau e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau, \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\tau - 2 \sin \tau}{\tau^2} d\tau, \\
 & 4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3\tau} - \cos 3\tau}{\tau} d\tau, \quad 5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \tau}{\tau^3} d\tau, \quad 6) \int_0^{+\infty} (e^{4\tau} - e^{-2\tau}) \frac{d\tau}{\tau}, \\
 & 7) \int_0^{+\infty} \frac{\tau \cos 3\tau}{e^\tau} d\tau, \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 3\tau}{\tau^2(1 - \tau^2)} d\tau, \quad 9) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\tau^2} - \cos \tau}{\tau^2} d\tau, \\
 & 10) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 4\tau}{\tau(\tau^4 + 9)} d\tau.
 \end{aligned}$$

**Вправа 5.2.** Знайдіть розв'язок  $x = x(t)$  задачі Коші:

- 1)  $x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$
- 2)  $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2,$
- 3)  $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0,$
- 4)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$
- 5)  $x^{\text{IV}} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 6, \quad x'''(0) = -14,$
- 6)  $x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$
- 7)  $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1,$
- 8)  $x^{\text{IV}} + x''' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = 2,$
- 9)  $x^{\text{IV}} + 2x'' + x = t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0,$
- 10)  $x''' + 5x'' + 2x' - 8x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = -1.$



**Вправа 5.3.** Зінтегруйте рівняння:

1)  $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$ ,

2)  $x'' + 2x' + 2x = 1$ ,

3)  $x'' + 2x' + 5x = 3$ ,

4)  $x'' + 2x' + x = \sin t$ ,

5)  $x'' + x = t \cos 2t$ ,

6)  $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$ ,

7)  $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t} \cos 3t$ ,

8)  $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$ ,

9)  $x'' - 2x' - 3x = te^t$ ,

10)  $x'' + x' + x = 2te^t$ .

**Вправа 5.4.** Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1)  $x'' + 4x = 2(\theta(t) - \theta(t - 3))$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,

2)  $x'' + x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{якщо } 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \text{якщо } t \geq \pi, \end{cases}$

3)  $x'' + 4x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{якщо } 0 \leq t < 1, \\ 4 - 2t, & \text{якщо } 1 \leq t < 2, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 2, \end{cases}$

4)  $x'' + x' = f(t)$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ ,  $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 1, \end{cases}$

5)  $x'' + 9x = f(t)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{якщо } 1 \leq t < 2, \\ 3 - t, & \text{якщо } 2 \leq t < 3, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 3, \end{cases}$

6)  $x'' + x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t < 1, \\ -1, & \text{якщо } 1 \leq t < 2, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 2, \end{cases}$

7)  $x'' + x = f(t)$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq t < 2, \\ 2, & \text{якщо } t \geq 2, \end{cases}$

$$8) x'' + 9x = \theta(t - 3) - \theta(t - 4), \quad x(0) = x'(0) = 1,$$

$$9) x'' - 2x' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 2) \cup [3; 5), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; 3) \cup [5; +\infty), \end{cases}$$

$$10) x'' - 9x = \theta(t) - \theta(t - 3), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

**Вправа 5.5.** Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайдіть розв'язок заданого рівняння, який задовольняє нульові початкові умови:

$$1) x'' + x' = t,$$

$$2) x'' + 3x' + 2x = e^t,$$

$$3) x'' + 2x' + 2x = \sin t,$$

$$4) x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t},$$

$$5) x'' + x = \frac{1}{1 + \cos t},$$

$$6) x'' + x = \frac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t},$$

$$7) x'' - 2x' + x = \operatorname{ch} t,$$

$$8) x'' + x = \frac{1}{1 + \cos^2 t},$$

$$9) x'' + x = \frac{1}{2 + \sin t},$$

$$10) x'' - x = \operatorname{th} t.$$

**Вправа 5.6.** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння зі степеневими коефіцієнтами, який задовольняє задану умову:

$$1) tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0, \quad x(0) = 0,$$

$$2) x'' + (t + 1)x' + tx = 0, \quad x(0) = -1,$$

$$3) x'' + tx' - (t + 1)x = 0, \quad x(0) = 1,$$

$$4) x'' + (t - 3)x' = 0, \quad x(0) = -1,$$

$$5) x'' - tx' + 3x = 0, \quad x(0) = 1.$$

**Вправа 5.7.** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння із загальними коефіцієнтами, який задовольняє задані початкові умови:

$$1) x''(t) - x(t - 2) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$2) x''(t) - 2x'(t - 1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$3) x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) = -1, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$4) x''(t) - 3x'(t-1) + 2x(t-3) = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$5) x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

**Вправа 5.8.** Знайдіть розв'язок задачі Коші:

$$1) \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0,$$

$$2) \begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - y - 2x = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4,$$

$$3) \begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0,$$

$$4) \begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ y'' - 5y' + 4y - x' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1,$$

$$5) \begin{cases} x' + x - y = 1 + \sin t, \\ y' - x' + y = t - \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1,$$

$$6) \begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1,$$

$$7) \begin{cases} x - y'' + y = e^{-t} - 1, \\ x' + y' - y = -3e^{-t} + t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2,$$

$$8) \begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1,$$

$$9) \begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0,$$

$$10) \begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \\ z' = z - x, \end{cases} \quad x(0) = z(0) = 0, \quad y(0) = 0,5.$$

**Вправа 5.9.** Розв'яжіть інтегральне рівняння:

$$1) x(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad 2) \sin^2 \frac{t}{2} = 2 \int_0^t \operatorname{ch}(t - \tau)x(\tau)d\tau,$$

$$3) t^3 = \int_0^t (\tau - t)^2 x(\tau)d\tau, \quad 4) x(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau)d\tau,$$

$$5) x(t) = \sin t + \int_0^t x(\tau)d\tau, \quad 6) x(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau,$$

$$7) x(t) = t + \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad 8) x(t) = t^2 + \int_0^t x(\tau)d\tau,$$

$$9) 1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad 10) \sin t = \int_0^t \cos(\tau - t)x(\tau)d\tau.$$

**Вправа 5.10.** Знайдіть розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

який задовольняє задані крайові та початкові умови:

$$1) u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$2) u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax(l - x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$3) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = A \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$4) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = A \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$5) u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Вправа 5.11.** Знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

який задовольняє задані крайові та початкові умови:

$$1) u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$2) u(0, t) = A, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{A}{l}(l - x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$3) u(0, t) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$4) u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$5) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) = A, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

**Вправа 5.12.** Знайдіть розв'язок інтегро-диференціального рівняння:

$$1) x''(t) + \int_0^t \sin(t - \tau)(x''(\tau) + x(\tau)) d\tau = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

$$2) x''(t) - \int_0^t e^{\tau-t}(x'(\tau) + x(\tau)) d\tau = e^{-t},$$

$$3) x'(t) + x(t) + \int_0^t (t - \tau + 2)x(\tau) d\tau = 0,$$

$$4) x''(t) - x(t) + 4 \int_0^t (\tau - t) \cos(\tau - t)x(\tau) d\tau = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0,$$

$$5) x''(t) = 2 \int_0^t e^{\tau-t}(x'(\tau) + x(\tau)) d\tau, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 12.$$

## РОЗДІЛ VI. Дискретне перетворення Лапласа

### §6.1. Ґратчасті функції. $D$ -перетворення і обернене $D$ -перетворення

Вивчаючи у попередніх розділах перетворення Лапласа, у якості ориґіналів  $f(t)$  розглядалися функції неперервного аргументу. З практичної точки зору великий інтерес має також аналог операційного числення для випадку, коли ориґіналами є функції цілочислового аргумента (послідовності). Таке числення є математичною основою теорії лінійних імпульсних систем, тобто систем, робота яких пов'язана з передачею і перетворюванням послідовностей імпульсів.

Наведемо основні означення.

Функцію  $f(n) = f_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , називають **ґратчастою функцією** (рис. 8). Цій функції можуть відповідати різні функції  $f(t)$  неперервного аргументу, якщо  $f_n = f(t)$  для  $n = t = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 9). Такі функції  $f(t)$  називають **обвідними** ґратчастих функцій  $f_n$ .

До ґратчастих функцій можна застосувати теорію перетворення Лапласа, яку називають **дискретним перетворенням Лапласа** або  **$D$ -перетворенням**.

Функцію  $f_n$ , обвідною якої є ориґінал  $f(t)$  перетворення Лапласа, називають **дискретним ориґіналом**. За означенням ґратчаста функція-ориґінал визначена для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для  $n = -1, -2, \dots$ , вважаємо, що  $f_n = 0$ .

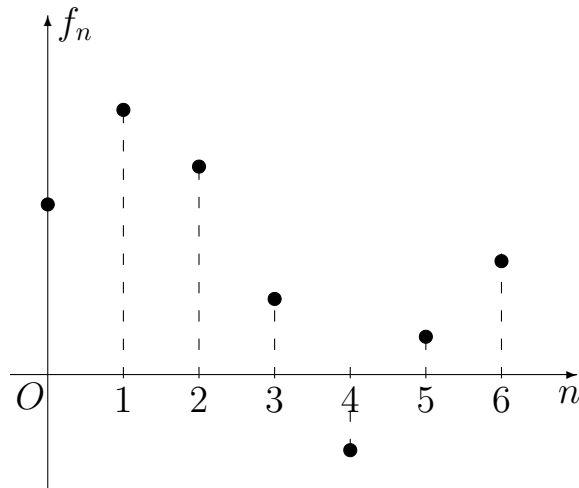


Рис. 8

Найпростішим дискретним оригіналом є **одична функція**  $\theta_n$  – аналог функції Гевісайда  $\theta(t)$ :

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

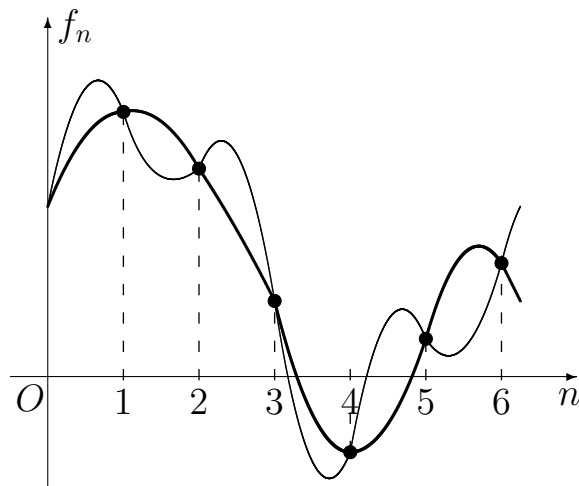


Рис. 9

Функцію  $F^*(p)$  комплексної змінної  $p = s + i\sigma$ , визначену за допомогою ряду

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}, \quad (6.1)$$

називають **зображенням** дискретного оригінала  $f_n$ .

Відповідність між оригіналом  $f_n$  і його зображенням  $F^*(p)$ , задану формулою (6.1), позначатимемо  $f_n \rightarrow F^*(p)$  або  $F^*(p) \rightarrow f_n$ .

**Теорема 6.1.** *Якщо ряд (6.1) збігається для  $\operatorname{Re} p = \tilde{s}$ , то він збігається рівномірно й абсолютно у півплощині  $\operatorname{Re} p > \tilde{s}$ .*

**Доведення.** Якщо  $\operatorname{Re} p = \tilde{s}$ , то згідно з необхідною умовою збіжності числового ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n e^{-pn} = 0$ , а тому існує таке число  $M > 0$ , що в околі нескінченно віддаленої точки  $n = +\infty$

$$|f_n| e^{-\tilde{s}n} < M. \quad (6.2)$$

Використовуючи (6.2), знайдемо оцінку загального члена ряду (6.1) у півплощині  $\operatorname{Re} p > \tilde{s}$ :

$$|f_n e^{-pn}| < |f_n| \cdot |e^{-pn}| < M e^{(\tilde{s}-s)n}.$$

Якщо  $s > \tilde{s}$ , то права частина отриманої нерівності є загальним членом збіжного ряду геометричної прогресії, а тому за ознакою Вейерштрасса ([18], розд. 2, §1.2) ряд (6.1) рівномірно й абсолютно збігається при  $\operatorname{Re} p > \tilde{s}$ . •

Аналогічно можна довести таке твердження: *якщо ряд (6.1) розбігається при  $\operatorname{Re} p = \tilde{s}$ , то він розбігається і для  $\operatorname{Re} p < \tilde{s}$ .*

Число  $\tilde{s}$ , для якого при  $\operatorname{Re} p > \tilde{s}$  ряд (6.1) збігається, а при  $\operatorname{Re} p < \tilde{s}$  – розбігається, називають **абсцисою збіжності**.

Якщо ґратчаста функція  $f_n$  задовольняє умову

$$|f_n| < M e^{s_0 n},$$

то абсциса збіжності  $\tilde{s} > s_0$  і, отже, зображення такої функції існує. Число  $s_0$  називають **показником зростання** функції  $f_n$ .

**Теорема 6.2.** *Якщо  $f_n$  – дискретний оригінал з показником зростання  $s_0$ , то її зображення  $F^*(p)$  є аналітичною функцією у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ .*

**Доведення.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-n) f_n e^{-pn}$ , утворений з похідних членів ряду (6.1), рівномірно збігається у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ , бо  $|-n f_n e^{-pn}| < n M e^{(s_0-s)n}$  і ряд  $M \sum_{n=0}^{\infty} n e^{(s_0-s)n}$  збігається, якщо  $s > s_0$ . Тоді



$$\frac{dF^*(p)}{dp} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) f_n e^{-pn}$$

і, отже, у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$  функція  $F^*(p)$  аналітична. •

**Зауваження 6.1.** Зображення  $F^*(p)$  є  $2\pi i$ -періодичною функцією, бо  $e^{-(p+2k\pi i)n} = e^{-pn}$ , тому його достатньо розглядати тільки у смугі  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$ . Таким чином, зображення  $F^*(p)$  дискретного оригінала  $f_n$  існує та є однозначною аналітичною функцією в області  $\operatorname{Re} p > s_0$ ,  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$ . Але функцію  $F^*(p)$  можна аналітично продовжити на всю смугу  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$ , якщо вона у цій смугі при  $\operatorname{Re} p \leq s_0$  є аналітичною, крім скінченної кількості особливих точок.

Введемо поняття оберненого  $D$ -перетворення. У (6.1) зробимо заміну  $z = e^p$ . Тоді  $F^*(p) = F(e^p) = F(z)$  і співвідношення  $f_n \rightarrow F(z)$  визначається рядом

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad (6.3)$$

який є правильною частиною ряду Лорана в околі точки  $z = +\infty$ .

Співвідношення (6.3) називають **перетворенням Лорана** або  **$Z$ -перетворенням**.

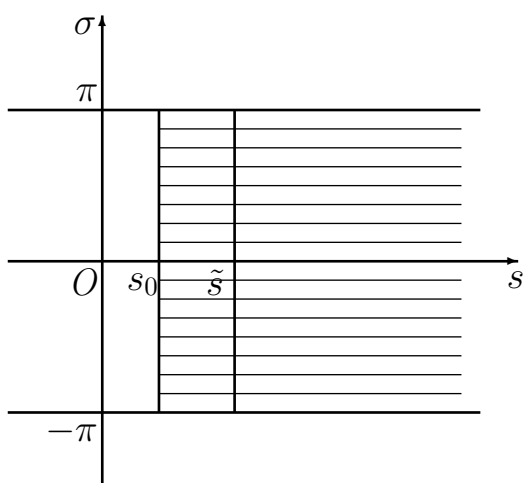


Рис. 10 а

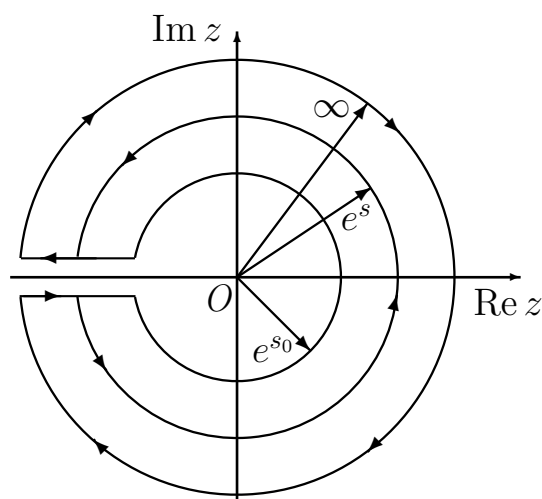


Рис. 10 б

Функція  $z = e^p$  взаємно однозначно відображає смугу  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$  на всю площину  $z$  з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі ( $\sigma = \pm\pi i$ ,  $z =$

$= e^{s \pm i\pi} = -e^s < 0$ ), область існування функції  $F^*(p)$  – смугу  $\operatorname{Re} p > s_0$ ,  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$  – в область  $|z| > e^{s_0}$  (рис. 10 а, 10 б), а смугу  $\operatorname{Re} p \leq s_0$ ,  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$  аналітичного продовження зображення  $F^*(p)$  – у круг  $|z| \leq e^{s_0}$  (рис. 11 а, 11 б).

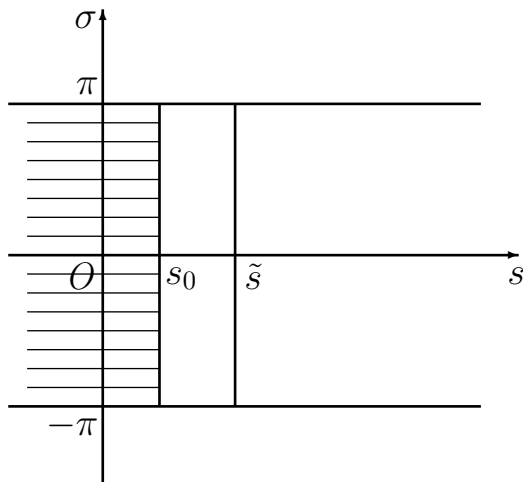


Рис. 11 а

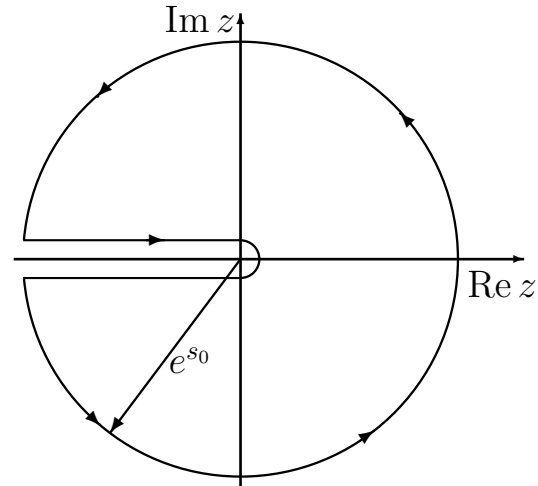


Рис. 11 б

Відомо ([4], § 5.3), що коефіцієнти ряду (6.3) обчислюються за формулою

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz, \quad (6.4)$$

де контур інтегрування  $\gamma$  – будь-яка замкнена крива, що охоплює всі особливі точки функції  $F(z)$ , зокрема, довільне коло досить великого радіусу з центром у початку координат, яке лежить в області аналітичності функції  $F(z)$  і яке обходимо проти руху годинникової стрілки.

У формулі (6.4) підставимо  $z = e^p$ . Тоді коло  $|z| = e^{s_0}$  відобразиться у відрізок  $[s - i\pi, s + i\pi]$ ,  $s > s_0$ , площини  $p$ . Таким чином, одержуємо формулу **оберненого D-перетворення**:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\pi}^{s+i\pi} F^*(p) e^{pn} dp. \quad (6.5)$$

Оскільки відображення  $z = e^p$  взаємнооднозначне, то обернене  $D$ -перетворення, визначене формулою (6.5), є однозначним.

**Приклад 6.1.** Знайти зображення ґратчастих функцій  $\theta_n$ ,  $(-1)^n$ ,  $e^{\alpha n}$ ,  $a^{\alpha n}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи (6.1) та формулу для суми геометричної прогресії, одержуємо зображення перших трьох функцій:

$$\theta_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} = \frac{1}{1 - e^{-p}} = \frac{e^p}{e^p - 1}, \quad \operatorname{Re} p > 0; \quad (6.6)$$

$$(-1)^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-pn} = \frac{1}{1 + e^{-p}} = \frac{e^p}{e^p + 1}, \quad \operatorname{Re} p > 0;$$

$$e^{\alpha n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha-p)n} = \frac{1}{1 - e^{\alpha-p}} = \frac{e^p}{e^p - e^{\alpha}}, \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > 0. \quad (6.7)$$

Зображення функції  $a^{\alpha n}$  знайдемо, використовуючи співвідношення (6.7):

$$a^{\alpha n} = e^{\alpha \ln a \cdot n} \rightarrow \frac{e^p}{e^p - e^{\alpha \ln a \cdot n}}, \quad \operatorname{Re}(p - \alpha \ln a) > 0. \quad \blacktriangleright \quad (6.8)$$

## § 6.2. Основні властивості $D$ -перетворення

Зображення  $F^*(p)$ , отримані за допомогою дискретного перетворення Лапласа, володіють низкою властивостей, аналогічних до відповідних властивостей неперервного перетворення Лапласа (розділ II).

**Теорема 6.3 (лінійність оригіналу).** *Якщо*

$$f_{1n} \rightarrow F_1^*(p), \quad f_{2n} \rightarrow F_2^*(p), \quad \dots, \quad f_{kn} \rightarrow F_k^*(p),$$

то для довільних сталих  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j f_{jn} \rightarrow \sum_{j=1}^k \alpha_j F_j^*(p).$$

**Доведення** теореми випливає з теорем про множення збіжного ряду на число і про суми збіжних рядів. •

**Приклад 6.2.** *Використовуючи властивість лінійності, знайти зображення оригіналів  $\cos \alpha n$ ,  $\operatorname{sh} \alpha n$ ,  $\sin^2 \frac{\alpha n}{2}$ .*

**Розв'язання.** Використовуючи лінійність  $D$ -перетворення та співвідношення (6.7), знаходимо зображення перших двох оригіналів:

$$\cos \alpha n = \frac{e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{e^p}{e^p - e^{i\alpha}} + \frac{e^p}{e^p - e^{-i\alpha}} \right),$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha n &\rightarrow \frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}; \\ \operatorname{sh} \alpha n &= \frac{e^{\alpha n} - e^{-\alpha n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} - \frac{e^p}{e^p - e^{-\alpha}} \right), \\ \operatorname{sh} \alpha n &\rightarrow \frac{e^p \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Зображення оригіналу  $\sin^2 \frac{\alpha n}{2}$  знайдемо, використовуючи зображення одиничної функції (6.6), а також знайдене у цьому прикладі зображення функції  $\cos \alpha n$ . Маємо

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha n}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{e^p}{2} \left( \frac{1}{e^p - 1} - \frac{e^p - \cos \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} \right)\end{aligned}$$

або, після очевидних перетворень,

$$\sin^2 \frac{\alpha n}{2} \rightarrow \frac{e^p (e^p + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(e^p - 1)(e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1)}. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 6.4 (загаювання оригіналу).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$  і  $k$  – деяке натуральне число ( $k < n$ ), то

$$f_{n-k} \rightarrow e^{-pk} F^*(p). \quad (6.9)$$

**Доведення.** Згідно з (6.1) маємо

$$\begin{aligned}f_{n-k} &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} e^{-pn} = |m = n - k| = e^{-pk} \sum_{m=-k}^{\infty} f_m e^{-pm} = \\ &= e^{-pk} \left( \sum_{m=-k}^{-1} f_m e^{-pm} + \sum_{m=0}^{\infty} f_m e^{-pm} \right) = e^{-pk} \left( \sum_{m=1}^k f_{-m} e^{pm} + F^*(p) \right),\end{aligned}$$

звідки, враховуючи, що  $f_{-1} = f_{-2} = f_{-3} = \dots = 0$ , остаточно одержуємо формулу (6.9). •

**Приклад 6.3.** Використовуючи властивість загаювання, знайти зображення оригіналів  $\theta_{n-1}$ ,  $e^{\alpha(n-1)}$ ,  $\cos \alpha(n-1)$ .

**Розв'язання.** Використовуючи співвідношення (6.9) та знайдені раніше зображення для функцій  $\theta_n$ ,  $e^{\alpha n}$ ,  $\cos \alpha n$ , одержуємо:

$$\begin{aligned}\theta_{n-1} &\rightarrow e^{-p} \frac{e^p}{e^p - 1} = \frac{1}{e^p - 1}, \\ e^{\alpha(n-1)} &\rightarrow e^{-p} \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} = \frac{1}{e^p - e^\alpha}, \\ \cos \alpha(n-1) &\rightarrow e^{-p} \frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} = \frac{e^p - \cos \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

**Теорема 6.5 (випередження оригінала).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$  і  $k$  – деяке натуральне число, то

$$f_{n+k} \rightarrow e^{pk} \left( F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m e^{-pm} \right). \quad (6.10)$$

**Доведення.** Згідно з (6.1)

$$\begin{aligned}f_{n+k} &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} e^{-pn} = |m = n+k| = e^{pk} \sum_{m=k}^{\infty} f_m e^{-pm} = \\ &= e^{pk} \left( \sum_{m=0}^{\infty} f_m e^{-pm} - \sum_{m=0}^{k-1} f_m e^{-pm} \right) = e^{pk} \left( F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m e^{-pm} \right). \quad \bullet\end{aligned}$$

**Приклад 6.4.** Використовуючи властивість випередження, знайти зображення оригіналів:

$$\text{а) } 2^{\alpha n+2}, \quad \text{б) } \cos \alpha(n+1), \quad \text{в) } \operatorname{sh} \alpha(n+1).$$

**Розв'язання.** а) Для одержання зображення функції  $2^{\alpha n+2}$  знайдемо спочатку зображення оригінала  $f_{1n} = 2^{\alpha n}$ . Використовуючи співвідношення (6.8), маємо

$$2^{\alpha n} \rightarrow \frac{e^p}{e^p - 2^\alpha}, \quad \operatorname{Re}(p - \alpha \ln 2) > 0.$$

Тепер, використовуючи (6.10) ( $f_{10} = 1$ ,  $f_{11} = 2^\alpha$ ), одержуємо потрібне співвідношення

$$2^{\alpha n+2} \rightarrow e^{2p} \left( \frac{e^p}{e^p - 2^\alpha} - \sum_{m=0}^1 f_m e^{-pm} \right) = e^{2p} \left( \frac{e^p}{e^p - 2^\alpha} - 1 - 2e^{-p} \right).$$

б) Оскільки

$$f_{2n} = \cos \alpha n \rightarrow \frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}, \quad f_{20} = 1,$$

то згідно з (6.10)

$$\cos \alpha(n+1) \rightarrow \frac{e^p(e^p \cos \alpha - 1)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

в) З формули (6.10), враховуючи, що

$$f_{3n} = \operatorname{sh} \alpha n \rightarrow \frac{e^p \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1}, \quad f_{30} = 0,$$

одержуємо співвідношення

$$\operatorname{sh} \alpha(n+1) \rightarrow \frac{e^{2p} \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1}. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 6.6 (зміщення зображення).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$ , то для будь-якого комплексного числа  $p_0$  виконується співвідношення

$$e^{\pm p_0 n} f_n \rightarrow F^*(p \mp p_0). \quad (6.11)$$

**Доведення.** Згідно з (6.1)

$$e^{\pm p_0 n} f_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn} e^{\pm p_0 n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-(p \mp p_0)n} = F^*(p \mp p_0). \quad \bullet$$

**Приклад 6.5.** Використовуючи властивість зміщення, знайти зображення оригіналів  $e^{p_0 n} \cos \alpha n$ ,  $e^{-p_0 n} \operatorname{sh} \alpha n$ .

**Розв'язання.** Використовуючи співвідношення

$$\operatorname{sh} \alpha n \rightarrow \frac{e^p \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1},$$

$$\cos \alpha n \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{e^p}{e^p - e^{i\alpha}} - \frac{e^p}{e^p - e^{-i\alpha}} \right),$$

з (6.11) одержуємо

$$e^{p_0 n} \cos \alpha n \rightarrow \frac{e^{p-p_0}(e^{p-p_0} - \cos \alpha)}{e^{2(p-p_0)} - 2e^{p-p_0} \cos \alpha + 1} = \frac{e^p(e^p - e^{p_0} \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^{p+p_0} \cos \alpha + e^{2p_0}};$$

$$e^{-p_0 n} \operatorname{sh} \alpha n \rightarrow \frac{e^{p+p_0} \operatorname{sh} \alpha}{e^{2(p+p_0)} - 2e^{p+p_0} \operatorname{ch} \alpha + 1} = \frac{e^{p-p_0} \operatorname{sh} \alpha}{e^{2p} - 2e^{p-p_0} \operatorname{ch} \alpha + e^{-2p_0}}. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 6.7 (диференціювання зображення).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$ , то

$$\frac{d^k}{dp^k} F^*(p) \rightarrow (-1)^k n^k f_n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

**Доведення.** Згідно з теоремою 6.2 зображення  $F^*(p)$  є однозначною аналітичною функцією у смузі  $\operatorname{Re} p > s_0$ ,  $-\pi \leq \operatorname{Im} p \leq \pi$ , а тому у цій смузі функція  $F^*(p)$  має похідні довільного порядку. Диференціюючи (6.1)  $k$  разів, одержуємо співвідношення (6.12). •

**Приклад 6.6.** Використовуючи диференціювання зображення, знайти зображення оригіналів:

$$\text{а) } n^2, \quad \text{б) } \frac{n!}{(n-m)!}, \quad \text{в) } n \cos \alpha(n-1).$$

**Розв'язання.** а) З (6.12), використовуючи співвідношення  $\theta_n = 1 \rightarrow \frac{e^p}{e^p - 1}$ , одержуємо

$$n^2 \rightarrow (-1)^2 \left( \frac{e^p}{e^p - 1} \right)_p'' = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}.$$

б) Знайдемо спочатку зображення оригінала  $n$ . З (6.12) при  $k = 1$  маємо

$$n \rightarrow - \left( \frac{e^p}{e^p - 1} \right)_p' = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}.$$

Тепер, використовуючи (6.9), одержуємо співвідношення

$$n - 1 \rightarrow \frac{1}{(e^p - 1)^2}.$$

Застосовуючи послідовно формули (6.12) і (6.9), знаходимо:

$$n(n-1) \rightarrow \frac{2!e^p}{(e^p - 1)^3}, \quad (n-1)(n-2) \rightarrow \frac{2!}{(e^p - 1)^3}.$$

Далі аналогічно маємо

$$n(n-1)(n-2) \rightarrow \frac{3!e^p}{(e^p - 1)^4}, \quad (n-1)(n-2)(n-3) \rightarrow \frac{3!}{(e^p - 1)^4}.$$

За допомогою методу математичної індукції легко довести, що

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) \rightarrow \frac{m!e^p}{(e^p - 1)^{m+1}}$$

або

$$\frac{n!}{(n-m)!} \rightarrow \frac{m! e^p}{(e^p - 1)^{m+1}}. \quad (6.13)$$

в) Маємо  $\cos \alpha n \rightarrow \frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$ . За формулою (6.9)

$$\cos \alpha(n-1) \rightarrow \frac{e^p - \cos \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Використовуючи тепер (6.12), одержуємо співвідношення

$$n \cos \alpha(n-1) \rightarrow - \left( \frac{e^p - \cos \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} \right)'$$

або

$$n \cos \alpha(n-1) \rightarrow \frac{e^{3p} + e^p \cos 2\alpha - 2e^{2p} \cos \alpha}{(e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1)^2}. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 6.8 (інтегрування зображення).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$ ,  $f_0 = 0$

та  $\left. \frac{f_n}{n} \right|_{n=0} = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{f_n}{n} = 0$ , то

$$\int_p^{+\infty} F^*(p) dp \rightarrow \frac{f_n}{n}. \quad (6.14)$$

**Доведення.** Оскільки зображення  $F^*(p)$  згідно з теоремою 6.2 є аналітичною функцією, а ряд (6.1) збігається рівномірно при  $\operatorname{Re} p > \tilde{s}$  (теорема 6.1)

і інтеграл  $\int_p^{+\infty} F^*(p) dp$  – збіжний, то (6.1) можна зінтегрувати за змінною  $p$  у межах від  $p$  до  $+\infty$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} F^*(p) dp &= \int_p^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn} dp = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_p^{+\infty} e^{-pn} dp = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( -\frac{e^{-pn}}{n} \right) \Big|_p^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} e^{-pn} \rightarrow \frac{f_n}{n}. \quad \bullet \end{aligned}$$

**Зауваження 6.2.** Якщо  $f_0 \neq 0$ , то інтеграл у лівій частині формули (6.14) буде розбіжним і теорема 6.8 не справджується. Однак, якщо

$\left. \frac{f_n}{n} \right|_{n=0} = a \neq 0$ , то

$$a + \int_p^{+\infty} F^*(p) dp \rightarrow \frac{f_n}{n}. \quad (6.15)$$



**Зауваження 6.3.** Аналогічно до (6.14) можна довести, що за виконання умови  $\frac{f_n}{n^m} \Big|_{n=0} = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ , справджується співвідношення

$$\underbrace{\int_p^{+\infty} \dots \int_p^{+\infty}}_k F^*(p) \underbrace{dp \dots dp}_k \rightarrow \frac{f_n}{n^k}.$$

**Приклад 6.7.** Використовуючи інтегрування зображення, знайти зображення дискретних оригіналів  $\frac{\sin \alpha n}{n}$ ,  $\frac{\theta_{n-1}}{n}$ .

**Розв'язання.** Оскільки

$$\sin \alpha n \rightarrow \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}, \quad \frac{\sin \alpha n}{n} \Big|_{n=0} = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{\sin \alpha n}{n} = \alpha,$$

то за формулою (6.15) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha n}{n} &\rightarrow \alpha + \int_p^{+\infty} \frac{e^p \sin \alpha dp}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} = \alpha + \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Big|_p^{+\infty} = \\ &= \alpha + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \alpha + \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{e^p - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Знайдемо зображення оригінала  $\frac{\theta_{n-1}}{n}$ . Із співвідношення  $\theta_{n-1} \rightarrow \frac{1}{e^p - 1}$ , враховуючи формулу (6.14), а також те, що  $\frac{\theta_{n-1}}{n} \Big|_{n=0} = 0$ , одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{n-1}}{n} &\rightarrow \int_p^{+\infty} \frac{dp}{e^p - 1} = \int_p^{+\infty} \frac{d(e^p)}{e^p - 1} - \int_p^{+\infty} \frac{d(e^p)}{e^p} = \\ &= \ln \left| \frac{e^p - 1}{e^p} \right| \Big|_p^{+\infty} = \ln \frac{e^p}{|e^p - 1|}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Згорткою**  $f_n * \varphi_n$  двох ґратчастих функцій  $f_n$  і  $\varphi_n$  називають суму

$$f_n * \varphi_n = \sum_{k=0}^n f_{n-k} \varphi_k. \quad (6.16)$$

Якщо в (6.16) зробити заміну  $l = n - k$ , то одержимо, що

$$f_n * \varphi_n = \sum_{l=0}^n f_l \varphi_{n-l} = \sum_{k=0}^n \varphi_{n-k} f_k = \varphi_n * f_n,$$

тобто згортка ґратчастих функцій комутативна.

**Теорема 6.9 (зображення згортки).** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$ ,  $\varphi_n \rightarrow \Phi^*(p)$ ,

то

$$f_n * \varphi_n \rightarrow F^*(p)\Phi^*(p). \quad (6.17)$$

**Доведення.** Оскільки  $F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-pk}$ , то

$$F^*(p)\Phi^*(p) = \Phi^*(p) \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-pk} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^*(p) f_k e^{-pk}.$$

Згідно з (6.9)  $e^{-pk}\Phi^*(p) \rightarrow \varphi_{n-k}$ , а враховуючи, що  $\varphi_{n-k} = 0$  для  $k > n$ , одержуємо

$$F^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{n-k} f_k = \sum_{k=0}^n \varphi_{n-k} f_k = \varphi_n * f_n = f_n * \varphi_n. \quad \bullet$$

**Приклад 6.8.** Знайти оригінал за зображенням

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e^\alpha)(e^p - e^\beta)}.$$

**Розв'язання.** Введемо позначення  $F^*(p) = F_1^*(p)F_2^*(p)$ , де  $F_1^*(p) = \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$ ,  $F_2^*(p) = \frac{1}{e^p - e^\beta}$ . Враховуючи, що  $e^{\alpha n} \rightarrow \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$  і  $e^{\beta(n-1)} \rightarrow \frac{1}{e^p - e^\beta}$ , одержуємо співвідношення  $F_1^*(p) \rightarrow e^{\alpha(n-1)}$ ,  $F_2^*(p) \rightarrow e^{\beta(n-1)}$ . Використовуючи тепер теорему 6.9 про зображення згортки та формулу суми скінченної геометричної прогресії, знаходимо

$$\begin{aligned} F^*(p) &= F_1^*(p)F_2^*(p) \rightarrow \sum_{k=0}^n e^{\alpha(n-k)} e^{\beta(k-1)} = e^{\alpha n - \beta} \sum_{k=1}^n e^{(\beta-\alpha)k} = \\ &= e^{\alpha n - \beta} \frac{e^{(\beta-\alpha)(n+1)} - e^{\beta-\alpha}}{e^{\beta-\alpha} - 1} = \frac{e^{\alpha n} - e^{\beta n}}{e^\alpha - e^\beta}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Розглянемо питання про знаходження оригінала за формулою обернення дискретного перетворення Лапласа.

Гратчасту функцію-оригінал  $f_n$  за відомим зображенням  $F^*(p)$  можна знайти за формулою (6.5):

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\pi}^{s+i\pi} F^*(p) e^{pn} dp,$$

де  $s > s_0$  ( $s_0$  – показник зростання оригінала  $f_n$ ).

Якщо зображення  $F^*(p)$  є правильним раціональним дробом відносно  $e^p$ , то легко вивести формулу для знаходження оригіналів, використовуючи теорію лишків, а саме

$$f_n = \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} F^*(p) e^{(n-1)p}; \quad (6.18)$$

де лишки беруться за полюсами, які розміщені в смужці  $-\pi < \operatorname{Im} p \leq \pi$  або на її межі  $\operatorname{Im} p = \pi$ . Зокрема:

– якщо  $p_k$  – простий полюс, то

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F^*(p) e^{p(n-1)} = \lim_{p \rightarrow p_k} F^*(p) (e^p - e^{p_k}) e^{p(n-1)}, \quad (6.19)$$

– якщо  $p_k$  – полюс кратності  $\nu_k$ , то

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} F^*(p) e^{p(n-1)} = \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{\nu_k-1}}{de^{p(\nu_k-1)}} \left( F^*(p) (e^p - e^{p_k})^{\nu_k} e^{p(n-1)} \right). \quad (6.20)$$

Оригінал  $f_n$  можна знайти також, використовуючи деякі властивості  $D$ -перетворення або розкладаючи зображення  $F^*(p)$  на прості дроби. Зокрема, функція  $F^*(p)$  може містити елементарні дроби

$$\frac{A}{e^p - e^{p_0}}, \quad (6.21)$$

$$\frac{A}{(e^p - e^{p_0})^m}, \quad m \geq 2. \quad (6.22)$$

Для дроби (6.21), використовуючи співвідношення  $e^{\alpha(n-1)} \rightarrow \frac{1}{e^p - e^\alpha}$ , знайдене у прикладі 6.3, одержуємо:

$$\frac{A}{e^p - e^{p_0}} \rightarrow A e^{p_0(n-1)}.$$

Знайдемо тепер оригінал за зображенням (6.22). Використовуючи співвідношення (6.13), маємо

$$\frac{e^p}{(e^p - 1)^m} \rightarrow \frac{n^{(m-1)}}{(m-1)!},$$

а за теоремою зміщення (формула (6.11))

$$\frac{e^{p-p_0}}{(e^{p-p_0} - 1)^m} \rightarrow e^{p_0 n} \frac{n^{(m-1)}}{(m-1)!}, \quad \frac{e^p e^{p_0(m-1)}}{(e^p - e^{p_0})^m} \rightarrow e^{p_0 n} \frac{n^{(m-1)}}{(m-1)!}.$$

Використовуючи тепер теорему загаювання (формула (6.9)), одержуємо

$$\frac{e^p e^{p_0(m-1)}}{(e^p - e^{p_0})^m} \rightarrow \frac{e^{p_0(n-1)}(n-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

або

$$\frac{1}{(e^p - e^{p_0})^m} \rightarrow \frac{(n-1)^{(m-1)}}{(m-1)!} e^{p_0(n-m)}.$$

Отже,

$$\frac{A}{(e^p - e^{p_0})^m} \rightarrow A \frac{(n-1)^{(m-1)}}{(m-1)!} e^{p_0(n-m)}.$$

**Приклад 6.9.** Знайти оригінал за відомим зображенням:

$$\text{а) } F_1^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{4p} - 1}, \quad \text{б) } F_2^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 2)(e^p - 1)^2}.$$

**Розв'язання.** а) Функція

$$F_1^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{4p} - 1}$$

має прості полюси у точках  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \pm \frac{\pi i}{2}$  та  $p_3 = \pi i$ . За формулою (6.19)

знаходимо лишки

$$\operatorname{Res}_{p=0} F_1^*(p) e^{p(n-1)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)} (e^p - 1)}{e^{4p} - 1} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)}}{(e^p + 1)(e^{2p} + 1)} = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=\frac{\pi i}{2}} F_1^*(p) e^{p(n-1)} &= \lim_{p \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)} (e^p - i)}{e^{4p} - 1} = \lim_{p \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)}}{(e^{2p} - 1)(e^p + i)} = \\ &= -\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(n+1)}}{4i} = -\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2}(n+1) + \frac{1}{4} i \cos \frac{\pi}{2}(n+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-\frac{\pi i}{2}} F_1^*(p) e^{p(n-1)} &= \lim_{p \rightarrow -\frac{\pi i}{2}} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)} (e^p + i)}{e^{4p} - 1} = \lim_{p \rightarrow -\frac{\pi i}{2}} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)}}{(e^{2p} - 1)(e^p - i)} = \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}(n+1)}}{4i} = -\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2}(n+1) - \frac{1}{4} i \cos \frac{\pi}{2}(n+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=\pi i} F_1^*(p) e^{p(n-1)} &= \lim_{p \rightarrow \pi i} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)} (e^p + 1)}{e^{4p} - 1} = \lim_{p \rightarrow \pi i} \frac{e^{2p} e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^{2p} + 1)} = \\ &= \frac{e^{\pi(n+1)i}}{(e^{\pi i} - 1)(e^{2\pi i} + 1)} = -\frac{1}{4} \cos \pi(n+1) = \frac{(-1)^n}{4}. \end{aligned}$$

Остаточно з (6.19) отримуємо

$$f_n = \frac{1}{4} ((-1)^n + 1) - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}(n+1).$$

б) Функція  $F_2^*(p)$  має простий полюс  $p = \ln 2$  та полюс  $p = 0$  кратності 2. Тоді з формули (6.19) отримуємо

$$\operatorname{Res}_{p=\ln 2} F_2^*(p) e^{p(n-1)} = \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^p e^{p(n-1)} (e^p - 2)}{(e^p - 2)(e^p - 1)^2} = \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^p e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)^2} = 2^n.$$

За формулою (6.20) для кратного полюса  $p = 0$  знаходимо

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=0} F_2^*(p) e^{p(n-1)} &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{e^p e^{p(n-1)} (e^p - 1)^2}{(e^p - 2)(e^p - 1)^2} \right)'_{e^p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(n-1)e^{np} - 2ne^{p(n-1)}}{(e^p - 2)^2} = -n - 1. \end{aligned}$$

Отже,  $f_n = 2^n - n - 1$ . ►

### § 6.3. Різницеві рівняння

Рівняння вигляду

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}) = 0, \quad (6.23)$$

де  $f_n$  – шукана функція цілої змінної, називають **різницеvim рівнянням  $k$ -го порядку**.

Різницеві рівняння виникають у теорії інтерполяції, автоматичного кодування з цифровим обчислювальним пристроєм, теорії фінансів тощо.

Рівняння (6.23) можна записати також у вигляді

$$F(n, f_n, \Delta f_n, \Delta^2 f_n, \dots, \Delta^k f_n) = 0, \quad (6.24)$$

де

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n,$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - f_{n+1} + f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n,$$

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n,$$

... ..

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f_{n+k-j}, \quad (6.25)$$

$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$  – кількість комбінацій з  $k$  елементів по  $j$ .

Вираз  $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$  називають *різницею першого порядку* функції  $f_n$ . *Різниця  $k$ -го порядку* визначається формулою

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

Функцію  $f_{n+k}$  можна виразити через різниці  $\Delta^j f_n$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , ( $\Delta^0 f_n \equiv f_n$ ). Справді,

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f_n,$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + \Delta f_{n+1} = f_n + \Delta f_n + \Delta f_n + \Delta^2 f_n = f_n + 2\Delta f_n + \Delta^2 f_n,$$

$$f_{n+3} = f_n + 3\Delta f_n + 3\Delta^2 f_n + \Delta^3 f_n,$$

... ..

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^k C_k^j \Delta^j f_n.$$

Якщо рівняння (6.23) є лінійним відносно функції  $f_n$  та її різниць, то його називають *лінійним різницеvim рівнянням*.

У загальному випадку лінійне різницеve рівняння із сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$b_0 \Delta^k f_n + b_1 \Delta^{k-1} f_n + \dots + b_k f_n = \varphi_n, \quad (6.26)$$

де  $\varphi_n$  – задана функція,  $f_n$  – невідома функція,  $b_0, b_1, \dots, b_k$  – сталі, причому  $b_0 \neq 0$ .

Замінюючи в рівнянні (6.26) різниці  $\Delta^j f_n$ ,  $j = 1, \dots, k$ , з формули (6.25), отримуємо іншу форму запису лінійного різницевого рівняння

$$a_0 f_{n+k} + a_1 f_{n+k-1} + \dots + a_k f_n = \varphi_n. \quad (6.27)$$

Якщо  $\varphi_n \equiv 0$ , то рівняння (6.26) та (6.27) називаються *однорідними*, якщо ґратчаста функція  $\varphi_n$  тотожно відмінна від нуля, то – *неоднорідними*.

Різницеve рівняння (6.27), яке містить функції  $f_n$  та  $f_{n+k}$ , називають різницеvim рівнянням  $k$ -го порядку. Якщо у (6.26)  $b_0 = 0$  або  $b_k = 0$ , то це

рівняння матиме порядок, менший, ніж  $k$ . Однак, порядок різницевого рівняння може не збігатися з порядком найвищої різниці, що входить у нього, якщо різницеве рівняння записане у вигляді (6.26).

**Приклад 6.10.** Знайти порядок різницевого рівняння:

$$\text{а) } \Delta^3 f_n - \Delta^2 f_n - 5\Delta f_n - 3f_n = n^2; \quad \text{б) } \Delta^3 f_n + 3\Delta^2 f_n + 3\Delta f_n + 2f_n = 0.$$

**Розв'язання.** а) Згідно з формулою (6.25)

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \quad \Delta^2 f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n,$$

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n.$$

Підставляючи ці формули у задане рівняння, одержуємо різницеве рівняння  $f_{n+3} - 4f_{n+2} = n^2$ , з якого після заміни  $k = n + 2$  одержуємо

$$f_{k+1} - 4f_k = (k - 2)^2,$$

звідки випливає, що задане рівняння є різницевим рівнянням першого порядку.

б) Аналогічно, після застосування формул (6.25) та нескладних перетворень одержуємо рівняння

$$f_{n+3} + f_n = 0,$$

а тому задане рівняння є різницевим рівнянням третього порядку. ►

Виведемо формули для зображень різниць  $\Delta^k f_n$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Теорема 6.10.** Якщо  $f_n \rightarrow F^*(p)$ , то

$$\Delta f_n \rightarrow (e^p - 1)F^*(p) - e^p f_0,$$

$$\Delta^2 f_n \rightarrow (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f_0 - e^p \Delta f_0,$$

... ..

$$\Delta^k f_n \rightarrow (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{j=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-1-j} \Delta^j f_0. \quad (6.28)$$

**Доведення.** Згідно з (6.25)

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \quad \Delta^2 f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n,$$

... ..

$$\Delta^k f_n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f_{n+k-j}.$$

Використовуючи теореми випередження і лінійності дискретного оригіналу, запишемо зображення оригіналів  $\Delta f_n$ ,  $\Delta^2 f_n$ , ...,  $\Delta^k f_n$ :

$$\Delta f_n \rightarrow e^p F^*(p) - e^p f_0 - F^*(p) = (e^p - 1)F^*(p) - e^p f_0,$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_n &\rightarrow e^{2p} (F^*(p) - f_0 - e^{-p} f_1) - 2e^p (F^*(p) - f_0) + F^*(p) = \\ &= (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f_0 - e^p \Delta f_0. \end{aligned}$$

Методом математичної індукції легко довести співвідношення

$$\begin{aligned} \Delta^k f_n &\rightarrow \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j e^{(k-j)p} \left( F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1-j} e^{-mp} f_m \right) = \\ &= (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{j=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-1-j} \Delta^j f_0. \quad \bullet \end{aligned}$$

Формула (6.28) значно спрощується, якщо  $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$  або  $\Delta^j f_0 = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ . Тоді

$$\Delta^k f_n \rightarrow (e^p - 1)^k F^*(p),$$

тобто зображенню різниці  $k$ -го порядку від оригіналу  $f_n$  відповідає множення відповідного зображення  $F^*(p)$  на  $(e^p - 1)^k$ .

**Приклад 6.11.** Знайти зображення функції  $f_n = n^3$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\Delta f_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

$$\Delta^2 f_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1 = 6n + 6,$$

$$\Delta^3 f_n = 6(n+1) + 6 - 6n - 6 = 6,$$



$$\Delta^k f_n = 0, \quad k \geq 4.$$

Оскільки  $f_0 = 0$ ,  $\Delta f_0 = 1$ ,  $\Delta^2 f_0 = 6$ ,  $\Delta^3 f_0 = 6$ , то з (6.28) отримуємо

$$\begin{aligned} n^3 &\rightarrow \frac{e^p}{(e^p - 1)^4} \sum_{j=0}^3 \frac{\Delta^j f_0}{(e^p - 1)^j} = \\ &= \frac{e^p}{(e^p - 1)^4} \left( \frac{1}{e^p - 1} + \frac{6}{(e^p - 1)^2} + \frac{6}{(e^p - 1)^3} \right) = \frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^7}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Покажемо, як, використовуючи методи операційного числення, можна розв'язати лінійне різницеве рівняння (6.27)

$$a_0 f_{n+k} + a_1 f_{n+k-1} + \dots + a_k f_n = \varphi_n.$$

Зазвичай потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє **початкові умови**

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \quad \dots, \quad f(k-1) = f_{k-1}. \quad (6.29)$$

**Розв'язком** задачі (6.27), (6.29) називають ґратчасту функцію  $f_n = f(n)$ , яка перетворює рівняння (6.27) у тотожність і задовольняє умови (6.29).

Застосування операційного методу до розв'язування задачі (6.27), (6.29) полягає у тому, що після застосування до обох частин рівняння (6.27)  $D$ -перетворення одержуємо **операторне рівняння** з невідомою функцією  $F^*(p) \rightarrow f_n$ . Оскільки операторне рівняння є алгебраїчним, то знайти зображення  $F^*(p)$ , як правило, нескладно. Для відшукування оригіналу  $f_n$  – розв'язку задачі (6.27), (6.29) – можна використати, наприклад, властивості  $D$ -перетворення або таблицю зображень.

У результаті наведеного алгоритму одержимо **частинний розв'язок** рівняння (6.27). Якщо початкові умови різницевого рівняння не задані, то вважаючи в (6.29) числа  $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$  довільними, одержимо **загальний розв'язок** рівняння (6.27).

Зауважимо, що початкові умови для різницевого рівняння (6.26) задають у вигляді значень шуканої функції  $f_n$  та її різниць до  $(k-1)$ -го порядку включно при  $n = 0$ .

**Приклад 6.12.** Знайти розв'язок різницевого рівняння

$$f_{n+2} - 4f_n = 4^n, \quad (6.30)$$

який задовольняє початкові умови  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ .

**Розв'язання.** Нехай  $f_n \rightarrow F^*(p)$ . З формули (6.10), враховуючи задані початкові умови, одержуємо співвідношення

$$f_{n+2} \rightarrow e^{2p} (F^*(p) - f_0 - e^{-p} f_1) = e^{2p} F^*(p) - e^p.$$

Застосовуючи до обох частин рівняння (6.30)  $D$ -перетворення, отримуємо алгебраїчне рівняння

$$e^{2p} F^*(p) - e^p - 4F^*(p) = \frac{1}{1 - 4e^{-p}},$$

$$(e^{2p} - 4)F^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 4} + e^p,$$

звідки

$$F^*(p) = \frac{e^p(e^p - 3)}{(e^p - 4)(e^p - 2)(e^p + 2)}.$$

Функція  $F^*(p)$  має три прості полюси  $p_1 = \ln 4$ ,  $p_2 = \ln 2$ ,  $p_3 = 2 \ln \sqrt{2}i$ .

Тоді

$$\operatorname{Res}_{p=\ln 4} F^*(p)e^{(n-1)p} = \lim_{p \rightarrow \ln 4} \frac{e^{np}(e^p - 3)}{(e^p - 2)(e^p + 2)} = \frac{4^{n-1}}{3},$$

$$\operatorname{Res}_{p=\ln 2} F^*(p)e^{(n-1)p} = \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^{np}(e^p - 3)}{(e^p - 4)(e^p + 2)} = 2^{n-3},$$

$$\operatorname{Res}_{p=2 \ln \sqrt{2}i} F^*(p)e^{(n-1)p} = \lim_{p \rightarrow 2 \ln \sqrt{2}i} \frac{e^{np}(e^p - 3)}{(e^p - 4)(e^p - 2)} = \frac{5}{3}(-1)^{n+1}2^{n-3}.$$

Отже, за формулою (6.18)

$$f_n = \frac{4^{n-1}}{3} + 2^{n-3} \left( 1 + \frac{5}{3}(-1)^{n+1} \right). \quad \blacktriangleright$$

За допомогою  $D$ -перетворення можна розв'язувати також і системи різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами. До таких систем, зокрема, приводять задачі, пов'язані з передачею і перетворенням імпульсів.

Нехай багатовимірний лінійний дискретний стаціонарний системний описується рівнянням стану

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{g}_n \quad (6.31)$$

і рівнянням вихідного сигналу

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n, \quad (6.32)$$

де  $\mathbf{x}_n$  –  $k$ -вимірний вектор стану системи,  $\mathbf{g}_n$  –  $r$ -вимірний вхідний сигнал,  $\mathbf{y}_n$  –  $m$ -вимірний вихідний сигнал,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – матриці порядків  $k \times k$ ,  $k \times r$ ,  $m \times k$  відповідно. Для  $k$ -вимірного вектора початкового стану  $\mathbf{x}_0$ , використовуючи  $D$ -перетворення, знайдемо закон зміни вектора стану та вихідного сигналу.

Застосуємо до обох частин матричних рівнянь (6.31) та (6.32)  $D$ -перетворення, враховуючи, що  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{X}^*(p)$ ,  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{Y}^*(p)$  і  $\mathbf{g}_n \rightarrow \mathbf{G}^*(p)$ . Тоді операторним рівнянням є:

$$e^p \mathbf{X}^*(p) - e^p \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}^*(p) + \mathbf{B}\mathbf{G}^*(p)$$

або

$$(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}^*(p) = e^p \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{G}^*(p),$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця. Звідси

$$\mathbf{X}^*(p) = (e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} e^p \mathbf{x}_0 + (e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{G}^*(p).$$

Зображення вихідного сигналу з рівняння (6.32) запишеться у вигляді:

$$\mathbf{Y}^*(p) = \mathbf{C}(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} e^p \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{G}^*(p).$$

Застосовуючи до зображень  $\mathbf{X}^*(p)$  та  $\mathbf{Y}^*(p)$  формулу (6.18), можна знайти закон зміни вектора стану  $\mathbf{x}_n$  та вихідний сигнал  $\mathbf{y}_n$ .

**Приклад 6.13.** Знайти закон зміни вектора стану і вихідного сигналу динамічної системи

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = x_n^1 + x_n^2 + g_n, \\ x_{n+1}^2 = 2x_n^1 - 2g_n, \end{cases} \quad \mathbf{y}_n = x_n^1 + x_n^2,$$

для вхідного сигналу  $g_n = 2^n$  і початкових умов  $x_0^1 = 2$ ,  $x_0^2 = 0$ .

**Розв'язання.** Зображенням вхідного сигналу є

$$\mathbf{g}_n \rightarrow \mathbf{G}^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 2}.$$

Оскільки

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 1), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то

$$(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} e^p - 1 & -1 \\ -2 & e^p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} \begin{pmatrix} e^p & 1 \\ 2 & e^p - 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} e^p & 1 \\ 2 & e^p - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} (e^p + 2 \ e^p),$$

$$(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} \begin{pmatrix} e^p & 1 \\ 2 & e^p - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} \begin{pmatrix} e^p - 2 \\ 4 - 2e^p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(e^p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} (e^p + 2 \ e^p) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{e^p + 1}.$$

Знайдемо зображення  $\mathbf{X}^*(p)$  та  $\mathbf{Y}^*(p)$ :

$$\mathbf{X}^*(p) = \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} \begin{pmatrix} e^p & 1 \\ 2 & e^p - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{e^{2p} - e^p - 2} \begin{pmatrix} e^p - 2 \\ 4 - 2e^p \end{pmatrix} \frac{e^p}{e^p - 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2p} + e^p}{e^{2p} - e^p - 2} \\ \frac{2e^p}{e^{2p} - e^p - 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2e^p}{e^p - 2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^p - 2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^p + 1} \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{e^p - 2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^p + 1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Y}^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - e^p - 2} (e^p + 2 \ e^p) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{e^p + 1} \cdot \frac{e^p}{e^p - 2} =$$

$$= \frac{2e^p}{e^p - 2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^p - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^p + 1}.$$

Оскільки

$$\frac{e^p}{e^p - 2} \rightarrow 2^n, \quad \frac{1}{e^p - 2} \rightarrow 2^{n-1}, \quad \frac{1}{e^p + 1} \rightarrow (-1)^{n-1},$$

то вектор стану і вихідний сигнал визначаються відповідно такими формулами

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot (-1)^{n-1} \\ \frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \\ \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_n = \frac{7}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n. \quad \blacktriangleright$$

### Контрольні питання до розділу VI

1. Які функції називають ґратчастими? Наведіть приклади таких функцій. Яку функцію називають обвідною ґратчастих функцій?
2. Яку ґратчасту функцію називають дискретним оригіналом? Наведіть приклади таких функцій. Яку функцію можна вважати найпростішим дискретним оригіналом? За якою формулою можна знайти зображення дискретного оригінала  $f_n$ ?
3. Якими формулами визначаються дискретне перетворення Лапласа та перетворення Лорана?
4. Як визначається обернене перетворення Лапласа?
5. У чому полягають властивості лінійності, загалювання та випередження дискретного оригіналу?
6. За допомогою яких формул визначаються властивості зміщення, диференціювання та інтегрування зображення дискретного оригіналу?
7. Які формули з теорії лишків використовують для відшукування оригіналів  $D$ -перетворення?
8. Що називають згорткою двох ґратчастих функцій? Чи є ця згортка комутативною? За якою формулою можна знайти зображення згортки двох ґратчастих функцій?
9. Яке рівняння називають різницеvim рівнянням (лінійним різницеvim рівнянням)? Як визначаються різниці  $k$ -го порядку? Як за допомогою рі-

зниць можна записати різницеве рівняння? Як визначається порядок різницевого рівняння?

10. За якими формулами можна знайти зображення різниць різного порядку?

11. Яку функцію називають розв'язком різницевого рівняння? Як задають початкові умови розв'язку? Які формули лежать в основі застосування операційних методів до розв'язування різницевих рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами?

*Рекомендована література:* [4, с. 53-112], [5, с. 156-171], [9, с.184-196], [13, с. 200-246].

### Вправи для самостійного виконання

**Вправа 6.1.** Використовуючи властивості  $D$ -перетворення, знайдіть зображення дискретних оригіналів:

$$1) f_n = \operatorname{sh}^2 n,$$

$$2) f_n = e^{\frac{n}{2}} - 3e^{\frac{n}{4}},$$

$$3) f_n = \operatorname{ch} 2(n-3)\theta_{n-3},$$

$$4) f_n = e^{-2n} \cos 3n,$$

$$5) f_n = e^{2n} \operatorname{sh} n,$$

$$6) f_n = n^3 e^{4n},$$

$$7) f_n = n^2 \sin \frac{n\pi}{3},$$

$$8) f_n = (n+2) \operatorname{ch} 2n,$$

$$9) f_n = \frac{3^n - 1}{n},$$

$$10) f_n = \frac{1 - \cos 3n}{n}.$$

**Вправа 6.2.** Знайдіть ґратчасті функції для заданих відображень:

$$1) F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 9e^p + 20},$$

$$2) F^*(p) = \frac{e^{3p}}{e^{6p} - 1},$$

$$3) F^*(p) = \frac{2e^p}{(e^p - e)^2},$$

$$4) F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 2e^p + 2},$$

$$5) F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2(e^p + 2)},$$

$$6) F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p + 1)(e^p - e)^2}.$$

**Вправа 6.3.** Визначте порядок різницевого рівняння:

$$1) \Delta^4 f_n + 3\Delta^3 f_n + 3\Delta^2 f_n - f_n = 0,$$

2)  $\Delta^3 f_n + 2\Delta^2 f_n + 2\Delta f_n + f_n = n^2 + 2,$

3)  $\Delta^3 f_n - 3\Delta^2 f_n + 3\Delta f_n - f_n = 3^n,$

4)  $\Delta^3 f_n + 2\Delta^2 f_n - 2\Delta f_n + f_n = e^n,$

5)  $\Delta^4 f_n + 4\Delta^3 f_n + 6\Delta^2 f_n - 5\Delta f_n - 6f_n = n + 1,$

6)  $\Delta^3 f_n - 2\Delta^2 f_n + f_n = \cos \frac{n\pi}{3}.$

**Вправа 6.4.** Знайдіть розв'язок різницевого рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

1)  $f_{n+2} - f_{n+1} + f_n = 0, \quad f_0 = f_1 = 0,$

2)  $f_{n+2} - 2f_n = 0, \quad f_0 = 1, \quad f_1 = 2,$

3)  $f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n = 0, \quad f_0 = 1, \quad f_1 = 0,$

4)  $f_{n+3} + 2f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n = 0, \quad f_0 = f_1 = 0, \quad f_2 = 2,$

5)  $f_{n+4} + f_n = 0, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = f_2 = 1, \quad f_3 = 0,$

6)  $f_{n+1} + 2f_n = n, \quad f_0 = 0,$

7)  $f_{n+2} + f_n = 1 + (-1)^n, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1,$

8)  $f_{n+2} - 6f_{n+1} + 9f_n = n2^n, \quad f_0 = f_1 = 0,$

9)  $f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n = \cos n\pi, \quad f_0 = f_1 = f_2 = 0,$

10)  $f_{n+3} + 3f_{n+2} + 3f_{n+1} + f_n = n^2, \quad f_0 = f_1 = f_2 = 0.$

# РОЗДІЛ VII. Застосування систем комп'ютерної математики для розв'язування задач операційного числення

Сьогодні спостерігаємо стрімке зростання застосування універсальних математичних пакетів (Mathematica, Maple та Mathcad, MATLAB та ін.) у наукових дослідженнях і освіті. Вони мають дружній інтерфейс, реалізують численні стандартні та спеціальні математичні операції, містять потужні графічні засоби і мають власні мови програмування [3], [11], [16].

У цьому розділі показано, як методи операційного числення, викладені у розділах I-VI, можна реалізувати у таких системах комп'ютерної математики, як Mathematica, Maple та Mathcad.

## § 7.1. Перетворення Лапласа та обернене перетворення Лапласа у математичних пакетах Mathematica, Maple, Mathcad

Наведемо спочатку основні команди та функції для роботи з комплексними числами у системах Mathematica, Maple та Mathcad.

У Maple такими функціями є:

>  $Z:=2-3*I;$

>  $\text{Re}(Z);$

2

>  $\text{Im}(Z);$

-3



```

> abs(Z);
                                 $\sqrt{13}$ 
> argument(Z);
                                 $-\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ 
> conjugate(Z);
                                 $2 + 3I$ .

```

У Mathcad для цього ж комплексного числа використовують такі команди:

```

Z := 2 - 3i      Re(Z) = 2
Im(Z) = -3      |Z| = 3.606
arg(Z) = -0.983  Z̄ = 2 + 3i.

```

У системі Mathematica основні функції для роботи з комплексними числами є такими:

```

Z:=2 - 3 * I;
Re[Z]      Im[Z]      Conjugate[Z]
2          -3         2 + 3i
Abs[Z]     Arg[Z]
 $\sqrt{13}$        $-\text{ArcTan}\left[\frac{3}{2}\right]$ .

```

Розглянемо тепер способи знаходження зображень оригіналів в системах комп'ютерної математики.

У системі Maple знайти зображення оригінала  $f(t)$  можна двома способами: безпосередньо за означенням, тобто за формулою

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (7.1)$$

або за допомогою пакету **inttrans**. Розглянемо ці способи на конкретному прикладі.

**Приклад 7.1.** Знайти зображення оригінала  $\sin^4 4t$  засобами Maple.

**Розв'язання.** I спосіб. Набираємо у робочому полі Maple:

```
> assume(t::real);
> assume(p::complex);
> assume(Re(p)>0);
> int(exp(-p*t)*(sin(4*t))^4, t=0..+infinity);
```

У результаті одержуємо

$$\frac{6144}{p \sim (p \sim^2 + 256)(p \sim^2 + 64)}.$$

Знак  $\sim$  означає, що  $p$  є комплексною змінною з додатною дійсною частиною.

*II спосіб.* Підключаємо пакет **inttrans** за допомогою команди

```
> with(inttrans);
```

У переліку команд, які з'являються на екрані, нас цікавить команда **laplace**. Параметри вводу цієї команди є такими:

```
> laplace(f(t), t, p);
```

У цьому записі  $f(t)$  – оригінал, зображення якого потрібно знайти,  $t$  – змінна, від якої залежить оригінал,  $p$  – змінна, відносно якої записується результат перетворення.

Набираючи у робочому полі Maple

```
> laplace((sin(4*t))^4, t, p);
```

одержуємо шукане зображення:

$$\frac{6144}{p(p^2 + 256)(p^2 + 64)}.$$

Отже,

$$\sin^4 4t \rightarrow \frac{6144}{p(p^2 + 256)(p^2 + 64)}. \blacktriangleright$$

Для відшукування зображення деякого оригінала у системі Mathcad на панелі інструментів Symbolic натискаємо кнопку **laplace**, після чого у робочій області з'явиться шаблон

■ laplace, ■  $\rightarrow$  .

Зліва від команди laplace потрібно ввести формулу оригінала, зображення якого шукаємо, а справа – змінну інтегрування у інтегралі Лапласа.

**Приклад 7.2.** Знайти зображення оригіналів  $(t^2 + 1) \cos 3t$  і  $(t^2 + 3t)e^{4t}$  засобами *Mathcad*.

**Розв'язання.** У робочому полі *Mathcad* набираємо наступні команди:

$$(t^2 + 1) \cdot \cos(3 \cdot t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{-6}{(s^2 + 9)^2} \cdot s + 8 \cdot \frac{s^3}{(s^2 + 9)^3} + \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$(t^2 + 3 \cdot t) \cdot e^{4t} \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{3 \cdot s - 10}{(s - 4)^3}.$$

З правої частини отриманих співвідношень маємо шукані зображення, тобто

$$(t^2 + 1) \cos 3t \rightarrow \frac{-6p}{(p^2 + 9)^2} + \frac{8p^3}{(p^2 + 9)^3} + \frac{p}{p^2 + 9}, \quad (t^2 + 3t)e^{4t} \rightarrow \frac{-10 + 3p}{(p - 4)^3}. \blacktriangleright$$

У системі *Mathematica* для знаходження зображення оригінала передбачена функція **LaplaceTransform**.

**Приклад 7.3.** Знайти зображення оригіналів  $2t - 3$  і  $3t \sin 2t$  засобами *Mathematica*.

**Розв'язання.** Використовуючи функцію **LaplaceTransform**, одержуємо

$$\text{LaplaceTransform}[2 * t - 3, t, p]$$

$$\frac{2}{p^2} - \frac{3}{p}$$

$$\text{LaplaceTransform}[3 * t * \text{Sin}[2 * t], t, p]$$

$$\frac{12p}{(4+p^2)^2}.$$

Отже,

$$2t - 3 \rightarrow \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p}, \quad 3t \sin 2t \rightarrow \frac{12p}{(4 + p^2)^2}. \blacktriangleright$$

За допомогою систем комп'ютерної математики можна знаходити також зображення кусково-неперервних функцій.

**Приклад 7.4.** Засобами *Maple* знайти зображення оригіналу

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{якщо } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t), & \text{якщо } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin 2t, & \text{якщо } \frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

**Розв'язання.** *I спосіб.* Потрібне зображення знаходимо, використовуючи формулу (7.1) та адитивність інтеграла Лапласа:

```
> restart;
> A:=int(exp(-p*t)*sin(t), t=0..Pi/2):
> B:=int(exp(-p*t)*2/Pi*(Pi-t), t=Pi/2..3*Pi/2):
> C:=int(exp(-p*t)*sin(2*t), t=3*Pi/2..2*Pi):
> A+B+C;
```

$$-\frac{-1 + pe^{(-\frac{\pi p}{2})}}{p^2 + 1} + \frac{e^{(-\frac{\pi p}{2})}\pi p - 2e^{(-\frac{\pi p}{2})} + e^{(-\frac{3\pi p}{2})}\pi p + 2e^{(-\frac{3\pi p}{2})}}{p^2\pi} - \frac{2\left(e^{(\frac{\pi p}{2})} + 1\right)e^{(-2\pi p)}}{p^2 + 4}.$$

*II спосіб.* Використовуємо пакет **inttrans** та функцію **Heaviside**:

```
> with(inttrans):
> laplace((Heaviside(t)-Heaviside(t-Pi/2))*sin(t)+
(Heaviside(t-Pi/2)- Heaviside(t-3*Pi/2))*2/Pi*(Pi-t)+
(Heaviside(t-3*Pi/2)-Heaviside(t-2*Pi))*sin(2*t),t,p);
```

$$-\frac{2\left(e^{(-\frac{3\pi p}{2})} + e^{(-2\pi p)}\right)}{p^2 + 4} + \frac{2\left(e^{(-\frac{3\pi p}{2})} - e^{(-\frac{\pi p}{2})}\right)}{\pi p^2} + \frac{1 - pe^{(-\frac{\pi p}{2})}}{p^2 + 1} + \frac{e^{(-\frac{3\pi p}{2})} + e^{(-\frac{\pi p}{2})}}{p}.$$

Отже,

$$f(t) \rightarrow \frac{-2}{p^2 + 4} \left( e^{-\frac{3\pi p}{2}} + e^{-2\pi p} \right) + \frac{2}{\pi p^2} \left( e^{-\frac{3\pi p}{2}} - e^{-\frac{\pi p}{2}} \right) + \frac{1 - pe^{-\frac{\pi p}{2}}}{p^2 + 1} + \frac{1}{p} \left( e^{-\frac{3\pi p}{2}} + e^{-\frac{\pi p}{2}} \right). \blacktriangleright$$

Покажемо тепер, як засобами систем комп'ютерної математики можна знайти зображення заданого оригіналу.

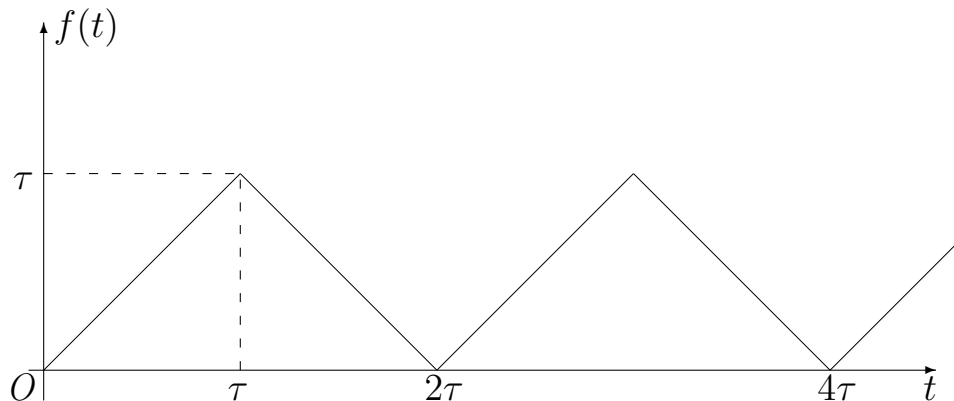


Рис. 12

**Приклад 7.5.** Знайти зображення оригінала  $f(t)$ , графік якого зображений на рис. 12.

**Розв'язання.** Функція  $f(t)$  є періодичною з періодом  $T = 2\tau$ . На інтервалі  $(0, 2\tau)$  вона задається формулою

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } 0 < t < \tau, \\ 2\tau - t, & \text{якщо } \tau < t < 2\tau. \end{cases}$$

Знайдемо зображення оригінала  $f_0(t)$  у системах Mathematica, Maple та Mathcad.

У пакеті Mathematica маємо:

```
F = Integrate[t * Exp[(-p) * t], {t, 0, τ}] +  
Integrate[(2 * τ - t) * Exp[(-p) * t], {t, τ, 2 * τ}]  
 $\frac{e^{-2p\tau}(1+e^{p\tau}(-1+p\tau))}{p^2} + \frac{1-e^{-p\tau}(1+p\tau)}{p^2}$   
FullSimplify[F]  
 $\frac{e^{-2p\tau}(-1+e^{p\tau})^2}{p^2}.$ 
```

Засобами Maple одержуємо:

```
> F1:=Int(t*exp(-p*t), t=0..tau)=int(t*exp(-p*t), t=0..tau);
```

$$F1 := \int_0^{\tau} t e^{(-pt)} dt = -\frac{-1 + e^{(-p\tau)} + e^{(-p\tau)} p\tau}{p^2}$$

```
> F2:=Int((2*tau-t)*exp(-p*t), t=tau..2*tau)=  
int((2*tau-t)*exp(-p*t), t=tau..2*tau);
```

$$F2 := \int_{\tau}^{2\tau} (2\tau - t) e^{(-pt)} dt = \frac{e^{(-p\tau)} p\tau - e^{(-p\tau)} + e^{(-2p\tau)}}{p^2}$$

> **collect(F1+F2, p);**

$$\int_0^{\tau} t e^{-pt} dt + \int_{\tau}^{2\tau} (2\tau - t) e^{-pt} dt = \frac{1 - 2e^{-p\tau} + e^{-2p\tau}}{p^2}.$$

У Mathcad з панелі інструментів Calculus введемо інтеграли, які потрібно знайти:

$$\begin{aligned} F(p) &:= \int_0^{\tau} t \cdot e^{-p \cdot t} dt + \int_{\tau}^{2 \cdot \tau} (2 \cdot \tau - t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \text{ simplify} \\ &\rightarrow \frac{-[2 \cdot e^{(-\tau) \cdot p} - 1 - e^{(-2) \cdot \tau \cdot p}]}{p^2} \\ F(p) \text{ collect, p} &\rightarrow \frac{(-2) \cdot e^{(-\tau) \cdot p} + 1 + e^{(-2) \cdot \tau \cdot p}}{p^2}. \end{aligned}$$

В усіх системах комп'ютерної математики отримали однаковий результат:

$$f_0(t) \rightarrow \frac{e^{-2p\tau} (e^{p\tau} - 1)^2}{p^2}.$$

Враховуючи тепер формулу (2.7), одержуємо зображення  $F(p)$  оригіналу  $f(t)$ :

$$F(p) = \frac{e^{-2p\tau} (1 - e^{p\tau})^2}{p^2 (1 - e^{-2p\tau})}. \quad \blacktriangleright$$

Засобами математичного пакету Maple зручно знаходити зображення диференціальних виразів.

**Приклад 7.6.** Знайти зображення диференціального виразу

$$x^{\text{IV}}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8,$$

якщо  $x(0) = 5$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = -1$ ,  $x'''(0) = 2$ .

**Розв'язання.** Відшукання потрібного зображення в Maple можна реалізувати, наприклад, за допомогою таких команд:

> **with(inttrans):**

> **ode :=diff(x(t), t\$4)-5\*diff(x(t), t\$3)-4\*diff(x(t), t\$2)+**

```

2*diff(x(t), t)-x(t)+8;
ode :=  $\left(\frac{d^4}{dt^4}x(t)\right) - 5\left(\frac{d^3}{dt^3}x(t)\right) - 4\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) - x(t) + 8$ 
> F:=laplace(ode, t, p);
> subs({x(0)=5, D(x)(0)=0, (D@@2)(x)(0)=-1, (D@@3)(x)(0)=2,
laplace(x(t), t, p) = X(p)}, F);
 $p^4X(p) - 17 + 21p - 5p^3 - 5p^3X(p) + 25p^2 - 4p^2X(p) + 2pX(p) - X(p) + \frac{8}{p}$ 
> collect(%, X(p));
 $(p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)X(p) - 17 + 21p - 5p^3 + 25p^2 + \frac{8}{p}. \blacktriangleright$ 

```

Покажемо тепер, як засобами систем комп'ютерної математики можна реалізувати теорему Бореля (теорема 3.3) для знаходження зображення заданого оригінала.

**Приклад 7.7.** Знайти зображення оригіналу  $\sin t \cos^3 t$ .

**Розв'язання.** У пакеті Mathematica алгоритм знаходження зображення може бути таким:

```

f1 = Sin[t];
f2 = Cos[t]^3;
F1 = LaplaceTransform[f1, t, q];
F2 = LaplaceTransform[f2, t, q];
F1 = F1/.q -> p - q;
F = F1 * F2

$$\frac{q(7+q^2)}{(1+(p-q)^2)(9+10q^2+q^4)}$$

R1 = Residue[F, {q, p - I}];
R2 = Residue[F, {q, p + I}];
-FullSimplify[R1 + R2]

$$\frac{10+p^2}{64+20p^2+p^4}.$$


```

Оскільки показники зростання функцій  $\sin t$  і  $\cos^3 t$  дорівнюють нулю, то інтегрування можна проводити по будь-якій вертикальній прямій, що ле-

жить у правій півплощині. Знак мінус в останньому рядку вводу означає, що відповідний контур інтегрування береться проти руху годинникової стрілки. Зауважимо, що корені многочлена  $q^4 + 10q^2 + 9$  є уявними ( $q = \pm 3i$ ,  $q = \pm i$ ), тобто лежать лівише прямої інтегрування.

У Maple маємо таку послідовність команд:

```
> with(inttrans):
> f1:=sin(t):
> f2 := (cos(t))^3 :
> F1:=laplace(f1, t, q):
> F2:=laplace(f2, t, q):
> F1:=subs(q=p-q, F1):
> F:=F1*F2;
```

$$F := \frac{q(7 + q^2)}{((p - q)^2 + 1)(q^2 + 1)(q^2 + 9)}$$

```
> R1:=residue(F, q=p-I):
> R2:=residue(F, q=p+I):
> simplify(factor(-(R1+R2)));
```

$$\frac{p^2 + 10}{(p^2 + 16)(4 + p^2)}.$$

Отже,

$$\sin t \cos^3 t \rightarrow \frac{p^2 + 10}{(p^2 + 16)(4 + p^2)}. \quad \blacktriangleright$$

Покажемо тепер, як у системах комп'ютерної математики можна знайти оригінал за відомим зображенням.

**Приклад 7.8.** *Знайти оригінал за відомим зображенням*

$$\frac{p^2 + 1}{(p + 1)^2(p - 1)}.$$

**Розв'язання.** Аналітичний метод знаходження цього оригінала описаний у §4.3.

У системі Maple шуканий оригінал знаходимо за допомогою наступних команд:



> **with(inttrans):**

> **invlaplace((p^2 + 1)/((p + 1)^2 \* (p - 1)), p, t);**

$$t \sinh(t) - \coth(t)(-1 + t).$$

Бачимо, що результат виводиться через гіперболічні функції ( $\sinh(t)$  – це гіперболічний синус  $\text{sh } t$ , а  $\cosh(t)$  – гіперболічний косинус  $\text{ch } t$ ).

Розв'язання цієї задачі в Mathematica здійснюється за допомогою оператора **InverseLaplaceTransform**. Отже,

**f = InverseLaplaceTransform[(p^2 + 1)/((p + 1)^2 \* (p - 1)), p, t]**

$$\frac{1}{2}e^{-t} (1 + e^{2t} - 2t).$$

Тепер шуканий оригінал знайдений у зручнішому вигляді.

Процес відшукування оригінала за відомим зображенням в Mathcad реалізуємо за допомогою команди **invlaplace** з панелі інструментів Symbolic:

$$\frac{p^2 + 1}{(p + 1)^2 \cdot (p - 1)} \text{invlaplace, } p \rightarrow (-t) \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^t.$$

Отже,

$$\frac{p^2 + 1}{(p + 1)^2(p - 1)} \rightarrow \frac{e^{-t}}{2} (1 + e^{2t} - 2t). \quad \blacktriangleright$$

Оригінали за відомим зображення можна шукати також, використовуючи теореми розвинення (§ 4.3). Покажемо, як цей метод може бути реалізований у системах комп'ютерної математики Maple та Mathematica.

**Приклад 7.9.** *Знайти оригінал за відомим зображенням*

$$\frac{1}{(p + 1)^3(p^2 + 4p - 5)^2}.$$

**Розв'язання.** Спочатку в Maple знаходимо полюси функції  $F(p)$  :

> **F(p) := 1/((p + 1)^3 \* (p^2 + 4 \* p - 5)^2);**

$$F(p) := \frac{1}{(p + 1)^3(p^2 + 4p - 5)^2}$$

> **S:=solve(1/F(p), p);**

$$S := [-1, -1, -1, 1, -5, 1, -5].$$

Далі знаходимо лишки функції  $e^{pt}F(p)$  у полюсах  $p_{1,2,3} = -1$ ,  $p_{4,5} = 1$ ,  $p_{6,7} = -5$ :

> **A:=residue(exp(p\*t)\*F(p), p=S[1]):**

> **B:=residue(exp(p\*t)\*F(p), p=S[4]):**

> **C:=residue(exp(p\*t)\*F(p), p=S[5]):**

> **simplify(A+B+C);**

$$\frac{1}{128}e^{(-t)t^2} + \frac{7}{1024}e^{(-t)} + \frac{1}{128}te^{(-t)} + \frac{1}{288}te^t - \frac{11}{1728}e^t - \frac{1}{2304}e^{(-5t)t} - \frac{13}{27648}e^{(-5t)}.$$

Такий самий результат, тільки записаний у дещо іншому вигляді, одержуємо, використовуючи команду **invlaplace**:

> **invlaplace(F(p), p, t);**

$$\frac{1}{1024}e^{(-t)}(8t + 7 + 8t^2) - \frac{1}{27648}e^{(-5t)}(13 + 12t) + \frac{1}{1728}e^t(6t - 11).$$

Отже,

$$\frac{1}{(p+1)^3(p^2+4p-5)^2} \rightarrow \frac{1}{1024}e^{-t}(8t^2+8t+7) - \frac{1}{27648}e^{-5t}(12t+13) + \frac{1}{1728}e^t(6t-11). \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 7.10.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$\frac{p^2 + 3p + 7}{(p^3 + 2p^2 + 4p + 7)^3(p^2 + p + 3)^2}.$$

**Розв'язання.** Задачу розв'яжемо за допомогою пакету Mathematica:

**P = p^2 + 3 \* p + 7;**

**Q = Product[(p - p[i])^3, {i, 1, 3}]\***

**Product[(p - p[i])^2, {i, 4, 5}];**

**W = Sum[Residue[P/Q \* Exp[p \* t], {p, p[i]}], {i, 1, 5}];**

**S = NSolve[p^3 + 2 \* p^2 + 4 \* p + 7, p];**

**SS = NSolve[p^2 + p + 3, p];**

**S1 = Table[Replace[p, Part[Flatten[S], i]], {i, 1, 3}];**

**SS1 = Table[Replace[p, Part[Flatten[SS], i]], {i, 1, 2}];**

$R = \text{Table}[p[i] \rightarrow S1[[i]], \{i, 1, 3\}];$

$RR = \text{Table}[p[i + 3] \rightarrow SS1[[i]], \{i, 1, 2\}];$

$R1 = \text{Union}[R, RR];$

$f = W/.R1;$

$f = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[f]]$

$$e^{-2.43318t} \left( (0.0022909 + 2.61386 \times 10^{-19}i) e^{0.566815t} + \right. \\ (0.00173473 + 2.48262 \times 10^{-21}i) e^{0.566815t}t + \\ (0.000336234 - 8.2742 \times 10^{-21}i) e^{0.566815t}t^2 + e^{1.93318t} \\ \left. ((-0.046875 + 0.i) - (0.00852273 + 0.i)t) \text{Cos}[1.65831t] - \right. \\ (0.00127673 + 0.i) e^{2.36637t} \left( (-5.59554 - 1.51424 \times 10^{-15}i) + t \right) \\ \left. \left( (6.2408 - 1.20321 \times 10^{-15}i) + t \right) \text{Cos}[1.93549t] + \right. \\ (0.0428283 + 0.i) e^{1.93318t} \text{Sin}[1.65831t] + \\ (0.00942223 + 0.i) e^{1.93318t}t \text{Sin}[1.65831t] - \\ (0.0411233 + 0.i) e^{2.36637t} \text{Sin}[1.93549t] + \\ (0.0182154 - 7.58942 \times 10^{-19}i) e^{2.36637t}t \text{Sin}[1.93549t] - \\ \left. (0.00113343 + 0.i) e^{2.36637t}t^2 \text{Sin}[1.93549t] \right).$$

У цьому випадку за допомогою команди **InverseLaplaceTransform** знайти оригінал не вдасться. ►

## § 7.2. Розв'язування прикладних задач операційного числення засобами математичних пакетів Mathematica, Maple та Mathcad

У цьому параграфі покажемо, як, використовуючи системи комп'ютерної математики, можна розв'язувати деякі прикладні задачі операційного числення.

**Приклад 7.11.** Обчислити невластний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt.$$

**Розв'язання.** У системі Maple алгоритм розв'язування реалізується за допомогою наступних команд:

> **with(inttrans):**

> **f := int((1 - cos(x \* t))/t^2, t = 0..infinity) :**

> **F:=laplace(f, x, p);**

$$F := \frac{\pi}{2p^2}$$

> **invlaplace(F, p, x);**

$$\frac{x\pi}{2}.$$

Той самий невласний інтеграл засобами Mathcad знаходимо таким чином:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x \cdot t)}{t^2} dt \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{s^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{s^2} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t.$$

Нагадаємо, що команди **■ laplace, ■** → та **■ invlaplace, ■** → потрібно вибрати з панелі інструментів Symbolic.

У системі Mathematica заданий інтеграл знаходимо за допомогою команд

$$f = \int_0^{\infty} (1 - \text{Cos}[x * t]) / (t^2) dt;$$

$$F = \text{LaplaceTransform}[f, x, p]$$

$$\frac{\pi}{2p^2}$$

$$\text{InverseLaplaceTransform}[F, p, x]$$

$$\frac{\pi x}{2}.$$

Отже,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt = \frac{\pi x}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Методи розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами розглядались у §5.2. Використовуючи системи комп'ютерної математики, наведемо приклади розв'язування таких рівнянь.

**Приклад 7.12.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

**Розв'язання.** У системі Maple розв'язок заданої задачі Коші можна знайти за допомогою команди **dsolve**, вказавши при цьому метод розв'язування:

```
> A1:=(D@@2)(x)(t)+2*D(x)(t)+5*x(t)=sin(t):
> A2:=x(0)=0,D(x)(0)=1:
> dsolve({A1,A2}, x(t), method=laplace);
```

$$x(t) = -\frac{1}{10} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t) + \frac{1}{20} e^{(-t)} (2 \cos(2t) + 9 \sin(2t)).$$

Однак, в результаті отримали розв'язок без явного застосування перетворення Лапласа. Для того, щоб "побачити" роботу команди **dsolve**, потрібно ввести перед оператором **dsolve** команди:

```
> trace(dsolve):
> printlevel:=n:
```

де  $n$  – ціле число від 1 до 1000. Якщо  $n$  змінюється від 1 до 5, то на екран виводиться інформація про цю команду, якщо від 6 до 10, то виводиться інформація про вкладену команду першого рівня і т.д. Команда **printlevel:=1000** виводить інформацію про роботу всіх вкладених команд. По замовчуванню **printlevel:=1**, тобто на екран з'являється результат тільки безпосередньо введеної команди, у даному випадку команди **dsolve**.

Цю саму задачу у Maple можна розв'язати також за допомогою пакету **inttrans**:

```
> with(inttrans):
> f:=(D@@2)(x)(t)+2*D(x)(t)+5*x(t)=sin(t):
> F:=laplace(f, t, p):
> F1:=subs({x(0)=0, D(x)(0)=1, laplace(x(t), t, p)=X(p)}, F);
```

$$F1 := p^2 X(p) - 1 + 2pX(p) + 5X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

> **X(p):=solve(F1, X(p));**

$$X(p) := \frac{p^2 + 2}{p^4 + 6p^2 + 2p^3 + 2p + 5}$$

> **x(t):=invlaplace(X(p), p, t);**

$$x(t) := -\frac{1}{10} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t) + \frac{1}{20} e^{(-t)} (2 \cos(2t) + 9 \sin(2t)).$$

Задану задачу Коші, використовуючи методи операційного числення, розв'яжемо у системі Mathematica:

**x[0] = 0;**

**x'[0] = 1;**

**l = x''[t] + 2 \* x'[t] + 5 \* x[t] - Sin[t];**

**L = LaplaceTransform[l, t, p]**

**-1 -  $\frac{1}{1+p^2}$  + 5LaplaceTransform[x[t], t, p] +**

**2pLaplaceTransform[x[t], t, p] + p<sup>2</sup>LaplaceTransform[x[t], t, p]**

**L = L/.LaplaceTransform[x[t], t, p] → X**

**-1 -  $\frac{1}{1+p^2}$  + 5X + 2pX + p<sup>2</sup>X**

**G = Solve[L==0, X]**

**{ { X →  $\frac{2+p^2}{(1+p^2)(5+2p+p^2)}$  } }**

**x = FullSimplify[InverseLaplaceTransform[Replace[X, G[[1]]], p, t]]**

**$\frac{1}{20} (-2\text{Cos}[t] + 4\text{Sin}[t] + e^{-t}(2\text{Cos}[2t] + 9\text{Sin}[2t]))$ .**

Отже, шуканим розв'язком є

$$x(t) = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{20} e^{-t} (2 \cos 2t + 9 \sin 2t). \quad \blacktriangleright$$

Надалі, розв'язуючи задачі методами операційного числення, використовуватимемо тільки системи Maple та Mathematica, оскільки в Mathcad зручніше знаходити числові розв'язки, а оператори символічного обчислення не завжди дають потрібний результат.

За допомогою математичних пакетів Maple та Mathematica можна знаходити розв'язки лінійних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, права частина яких є кусково-неперервною функцією.

**Приклад 7.13.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''(t) + 9x(t) = f(t),$$

який задовольняє початкові умови  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ , де

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{якщо } 1 \leq t < 2, \\ 3 - t, & \text{якщо } 2 \leq t < 3, \\ 0, & \text{якщо } t \geq 3. \end{cases}$$

**Розв'язання.** У системі Maple потрібного результату досягаємо після такої послідовності команд:

> **with(inttrans):**

> **f:=(D@@2)(x)(t)+9\*x(t)=(t-1)\*(Heaviside(t-1)-**

**Heaviside(t-2))+(3-t)\*(Heaviside(t-2)-Heaviside(t-3)):**

> **F:=laplace(f, t, p);**

$$F := p^2 \text{laplace}(x(t), t, p) - D(x)(0) - px(0) + 9 \text{laplace}(x(t), t, p) = \frac{e^{(-p)} - 2e^{(-2p)} + e^{(-3p)}}{p^2}$$

> **F1:=subs({x(0)=0, D(x)(0)=1, laplace(x(t), t, p)=X(p)}, F);**

$$F1(p) := p^2 X(p) - 1 + 9X(p) = \frac{e^{(-p)} - 2e^{(-2p)} + e^{(-3p)}}{p^2}$$

> **X(p):=solve(F1, X(p));**

$$X(p) := \frac{p^2 + e^{(-p)} - 2e^{(-2p)} + e^{(-3p)}}{p^2(p^2 + 9)}$$

> **x(t):=invlaplace(X(p), p, t);**

$$x(t) := \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{27} \text{Heaviside}(t-1)(3t-3-\sin(3t-3)) - \frac{2}{27} \text{Heaviside}(t-2)(3t-6-\sin(3t-6)) + \frac{1}{27} \text{Heaviside}(t-3)(3t-9-\sin(3t-9)).$$

Як бачимо, розв'язок рівняння в системі Maple записується за допомогою функції Гевісайда.

Аналогічно ця задача розв'язується і у пакеті Mathematica, але замість функції Гевісайда **Heaviside** використовуємо оператор **UnitStep**:

$$a = \text{UnitStep}[t - 1];$$

$$b = \text{UnitStep}[t - 2];$$

$$c = \text{UnitStep}[t - 3];$$

$$l = x''[t] + 9 * x[t] - (t - 1) * (a - b) - (3 - t) * (b - c);$$

$$L = \text{LaplaceTransform}[l, t, p]$$

$$\frac{3e^{-3p}}{p} - \frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}(1+p)}{p^2} + \frac{2e^{-2p}(1+2p)}{p^2} - \frac{e^{-3p}(1+3p)}{p^2} +$$

$$9\text{LaplaceTransform}[x[t], t, p] + p^2\text{LaplaceTransform}[x[t], t, p] - px[0] - x'[0]$$

$$L = L/.{x[0] \to 0, x'[0] \to 1};$$

$$L = L/.(\text{LaplaceTransform}[x[t], t, p]) \to X$$

$$-1 + \frac{3e^{-3p}}{p} - \frac{4e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}(1+p)}{p^2} + \frac{2e^{-2p}(1+2p)}{p^2} - \frac{e^{-3p}(1+3p)}{p^2} + 9X + p^2X$$

$$G = \text{Solve}[L == 0, X]$$

$$\left\{ \left\{ X \rightarrow \frac{e^{-3p}(1-2e^p+e^{2p}+e^{3p}p^2)}{p^2(9+p^2)} \right\} \right\}$$

$$x = \text{FullSimplify}[\text{InverseLaplaceTransform}[\text{Replace}[X, G[[1]]], p, t]]$$

$$\frac{1}{27}(9\text{Sin}[3t] + (-9 + 3t + \text{Sin}[9 - 3t])\text{UnitStep}[-3 + t] -$$

$$2(-6 + 3t + \text{Sin}[6 - 3t])\text{UnitStep}[-2 + t] +$$

$$(-3 + 3t + \text{Sin}[3 - 3t])\text{UnitStep}[-1 + t]).$$

Отже, розв'язком заданої задачі Коші є

$$x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{27} \theta(t-1) (3t-3 - \sin(3t-3)) -$$

$$-\frac{2}{27} \theta(t-2) (3t-6 - \sin(3t-6)) + \frac{1}{27} \theta(t-3) (3t-9 - \sin(3t-9)),$$

де  $\theta(t-t_0)$  – узагальнена функція Гевісайда. ►

Система комп'ютерної математики Maple дає можливість, використовуючи теореми операційного числення, розв'язувати диференціальні рівняння із степеневими коефіцієнтами (див. п. 5.2.5).

**Приклад 7.14.** Знайти розв'язок рівняння  $tx''(t) + (t-1)x'(t) + x(t) = t^2$ , який задовольняє умову  $x(0) = 0$ .



**Розв'язання.** У системі Maple маємо таку послідовність команд:

> **with(inttrans):**

> **f := t \* (D@@2)(x)(t) + (t - 1) \* D(x)(t) + x(t) = t^2 :**

> **F:=laplace(f, t, p);**

$$F := -3p \operatorname{laplace}(x(t), t, p) - p^2 \left( \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{laplace}(x(t), t, p) \right) + 2x(0) -$$

$$p \left( \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{laplace}(x(t), t, p) \right) = \frac{2}{p^3}$$

> **F1:=subs({x(0)=0, laplace(x(t), t, p)=y(p)}, F);**

$$F1(p) := -3py(p) - p^2 \left( \frac{d}{dp} y(p) \right) - p \left( \frac{d}{dp} y(p) \right) = \frac{2}{p^3}$$

> **Y(p):=dsolve(F1, y(p));**

> **Y:=rhs(Y(p));**

$$Y := \frac{\frac{2}{3p^3} + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} + \_C1}{(p + 1)^3}$$

> **x(t):=invlaplace(Y, p, t);**

$$x(t) := \frac{1}{6} t^2 (2 + e^{-t} (-2 + 3\_C1)). \quad \blacktriangleright$$

Зауважимо, що в системі Mathematica рівняння з прикладу 7.14 розв'язати не можна, бо функція **LaplaceTransform** не перетворює вирази виду  $t^n x^{(n)}(t)$ . У цьому випадку маємо

$$l = t * x''[t] + (t - 1) * x'[t] + x[t];$$

$$L = \operatorname{LaplaceTransform}[l, t, p]$$

$$\operatorname{LaplaceTransform}[x[t], t, p] - p \operatorname{LaplaceTransform}[x[t], t, p] +$$

$$\operatorname{LaplaceTransform}[tx'[t], t, p] + \operatorname{LaplaceTransform}[tx''[t], t, p] + x[0].$$

Як бачимо, система повертає вирази без змін.

Системи комп'ютерної математики Mathematica і Maple дозволяють розв'язувати деякі типи систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

**Приклад 7.15.** Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + \cos t, \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + \sin t, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови  $x(0) = -2$ ,  $y(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Засобами системи Mathematica знайдемо спочатку систему операторних рівнянь та розв'яжемо її, а потім знайдемо оригінали розв'язку цієї системи:

$$A = \{\{2, 4\}, \{-1, -2\}\};$$

$$f = \{\text{Cos}[t], \text{Sin}[t]\};$$

$$a = \{-2, 1\}; n = 2;$$

$$T = \text{Table}[y[i]'[t] - \text{Sum}[A[[i, j]] * y[j][t], \{j, 1, n\}] - f[[i]], \{i, 1, n\}];$$

$$T1 = \text{Table}[\text{LaplaceTransform}[T[[i]], t, p], \{i, 1, n\}];$$

$$b = \text{Table}[y[i][0] \rightarrow a[[i]], \{i, 1, n\}];$$

$$T1 = T1/.b$$

$$\left\{ 2 - \frac{p}{1+p^2} - 2\text{LaplaceTransform}[y[1][t], t, p] + p\text{LaplaceTransform}[y[1][t], t, p] - 4\text{LaplaceTransform}[y[2][t], t, p], -1 - \frac{1}{1+p^2} + \text{LaplaceTransform}[y[1][t], t, p] + 2\text{LaplaceTransform}[y[2][t], t, p] + p\text{LaplaceTransform}[y[2][t], t, p] \right\}$$

$$c = \text{Array}[d, n];$$

$$x = \text{Table}[\text{LaplaceTransform}[y[i][t], t, p] \rightarrow c[[i]], \{i, 1, n\}];$$

$$T1 = T1/.x;$$

$$T2 = \text{Table}[T1[[i]] == 0, \{i, 1, n\}];$$

$$R = \text{Solve}[T2, c]$$

$$\left\{ \left\{ d[1] \rightarrow -\frac{-4-p^2+2p^3}{p^2(1+p^2)}, d[2] \rightarrow -\frac{2-p-p^3}{p^2(1+p^2)} \right\} \right\}$$

$$X = c/.R[[1]];$$

$$x = \text{FullSimplify}[\text{Table}[\text{InverseLaplace Transform}[X[[i]], p, t], \{i, 1, n\}]]$$

$$\{4t - 2\text{Cos}[t] - 3\text{Sin}[t], 1 - 2t + 2\text{Sin}[t]\}.$$

Використовуючи систему Maple, одержуємо:

> with(inttrans):

> A:={D(x)(t)-2\*x(t)-4\*y(t)-cos(t)=0,

$D(y)(t) + x(t) + 2*y(t) - \sin(t) = 0$ };

>  $B := \text{laplace}(A, t, p)$ ;

>  $B1 := \text{subs}(\{x(0) = -2, y(0) = 1\}, B)$ ;

>  $B2 := \text{subs}(\{\text{laplace}(x(t), t, p) = X(p), \text{laplace}(y(t), t, p) = Y(p)\}, B1)$ ;

$$B2 := \{pX(p) + 2 - 2X(p) - 4Y(p) - \frac{p}{p^2 + 1} = 0,$$

$$pY(p) - 1 + X(p) + 2Y(p) - \frac{1}{p^2 + 1} = 0\}$$

>  $L := \text{solve}(B2, \{X(p), Y(p)\})$ ;

$$L := \left\{ Y(p) = \frac{-2 + p + p^3}{p^2(p^2 + 1)}, X(p) = -\frac{2p^3 - p^2 - 4}{p^2(p^2 + 1)} \right\}$$

>  $l := \text{invlaplace}(L, p, t)$ ;

>  $x(t) := \text{rhs}(l[2])$ ;

$$x(t) := 4t - 2 \cos(t) - 3 \sin(t)$$

>  $y(t) := \text{rhs}(l[1])$ ;

$$y(t) := -2t + 2 \sin(t) + 1.$$

Отже, розв'язком заданої задачі Коші є

$$x(t) = 4t - 2 \cos t - 3 \sin t, \quad y(t) = 1 - 2t + 2 \sin t. \quad \blacktriangleright$$

Системи символної математики дозволяють також розв'язувати операційними методами інтегральні рівняння типу згортки (§ 5.6).

**Приклад 7.16.** Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$f(t) = t + 2 \int_0^t ((t - \tau) - \sin(t - \tau)) f(\tau) d\tau.$$

**Розв'язання.** Оскільки перетворення Лапласа згідно з теоремою 3.3 переводить згортку оригіналів

$$k(t) * f(t) = \int_0^t ((t - \tau) - \sin(t - \tau)) f(\tau) d\tau$$

у добуток зображень, алгоритм розв'язування цього рівняння в системі Mathematica може бути таким:

$$k = t - \text{Sin}[t];$$

$$\varphi = t;$$

$$K = \text{LaplaceTransform}[k, t, p];$$

$$\Psi = \text{FullSimplify}[K/(1 - 2 * K)]$$

$$\frac{1}{-2+p^2+p^4}$$

$$\Phi = \text{LaplaceTransform}[\varphi, t, p];$$

$$F = \Phi + 2 * \Psi * \Phi$$

$$\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^2(-2+p^2+p^4)}$$

$$f = \text{FullSimplify}[\text{InverseLaplaceTransform}[F, p, t]]$$

$$\frac{1}{6} (\sqrt{2}\text{Sin}[\sqrt{2}t] + 4\text{Sinh}[t]).$$

Деяко простіше задане рівняння можна розв'язати засобами Maple. Це досягається такою послідовністю команд:

> with(inttrans):

> K:=laplace(t-sin(t), t, p);

$$K := \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$$

> F:=laplace(t,t,p);

$$F := \frac{1}{p^2}$$

> X(p):=solve(X-F-2\*K\*X, X);

$$X(p) := \frac{p^2 + 1}{p^4 + p^2 - 2}$$

> invlaplace(X(p), p, t);

$$\frac{1}{6}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \frac{2}{3}\sinh(t).$$

Отже, розв'язком заданого інтегрального рівняння другого роду є функція

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2}t + \frac{2}{3} \text{sh } t. \quad \blacktriangleright$$

У системі Maple за допомогою пакету лінійної алгебри **linalg** можна реалізувати алгоритм розв'язування системи інтегральних рівнянь другого роду типів згортки.

**Приклад 7.17.** Знайти розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} x(t) + \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau = (1 + t) \sin t, \\ y(t) + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau)d\tau = \cos t + \sin t. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Для зручності позначимо

$$f_1(t) = (1 + t) \sin t, \quad f_2(t) = \cos t + \sin t,$$

$$k_{11}(t) = \cos t, \quad k_{12}(t) = \sin t, \quad k_{21}(t) = \sin t, \quad k_{22}(t) = \cos t.$$

Тоді послідовність команд у Maple може бути такою:

```
> with(inttrans):
> with(linalg):
> k[1,1]:=cos(t):
> k[1,2]:=sin(t):
> k[2,1]:=sin(t):
> k[2,2]:=cos(t):
> K:=matrix(2,2,[[laplace(k[1,1], t, p), laplace(k[1,2], t, p)],
[laplace(k[2,1], t, p), laplace(k[2,2], t, p)]]);
> E:=diag(1,1):
> K1:=inverse(K+E):
> f[1]:=sin(t)*(1+t):
> f[2]:=sin(t)+cos(t):
> F:=vector(2, [laplace(f[1], t, p),laplace(f[2], t, p)]):
> X0:=simplify(evalm(K1.F)):
> X:=invlaplace(X0[1], p, t);
```

$$X := \sin(t)$$

>  $Y := \text{invlaplace}(X0[2], p, t);$

$$Y := \cos(t).$$

Отже,  $x(t) = \sin t$ ,  $y(t) = \cos t$  – розв'язок заданої системи. ►

У § 5.5 показано застосування методів операційного числення до розв'язування рівнянь з частинними похідними гіперболічного та параболічного типу. Покажемо, як ці методи реалізувати у системах комп'ютерної математики.

**Приклад 7.18.** Знайти розв'язок хвильового рівняння

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x, t)|_{t=0} = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

та крайові умови  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ .

**Розв'язання.** У системі Mathematica послідовність команд для знаходження розв'язку задачі може бути такою:

$L1 = a^2 * D[u[x, t], \{x, 2\}] - D[u[x, t], \{t, 2\}];$

$L2 = \text{LaplaceTransform}[L1, t, p];$

$L3 = L2 /. \{\text{LaplaceTransform}[u[x, t], t, p] \rightarrow U[x, p],$

$\text{LaplaceTransform}[D[u[x, t], \{x, 2\}], t, p] \rightarrow$

$D[U[x, p], \{x, 2\}], u[x, 0] \rightarrow \text{Sin}[n * \text{Pi} * x/l],$

$(D[u[x, t], t]/.t \rightarrow 0) \rightarrow \text{Sin}[k * \text{Pi} * x/l]\}$

$\text{Sin}[\frac{k\pi x}{l}] + p \text{Sin}[\frac{n\pi x}{l}] - p^2 U[x, p] + a^2 U^{(2,0)}[x, p]$

$L4 = \text{LaplaceTransform}[L3, x, q]$

$-p^2 \text{LaplaceTransform}[U[x, p], x, q] + \frac{\sqrt{\frac{k^2}{l^2}} l^2 \pi \text{Sign}[k]}{k^2 \pi^2 \text{Sign}[l] + l^2 q^2 \text{Sign}[l]} + \frac{l^2 \sqrt{\frac{n^2}{l^2}} p \pi \text{Sign}[n]}{n^2 \pi^2 \text{Sign}[l] + l^2 q^2 \text{Sign}[l]} +$   
 $a^2 (q^2 \text{LaplaceTransform}[U[x, p], x, q] - q U[0, p] - U^{(1,0)}[0, p])$

$L4 = \text{FullSimplify}[L4, \text{Element}[n, \text{Integers}] \&\& \text{Element}[k, \text{Integers}] \&\& l > 0];$

$L5 = L4 /. \text{LaplaceTransform}[U[x, p], x, q] \rightarrow Y;$

$L5 = L5 /. (D[U[x, p], x]/.x \rightarrow 0) \rightarrow T;$

```

R = Solve[L5 == 0, Y];
U1 = Replace[Y, R[[1]]];
U2 = InverseLaplaceTransform[U1, q, x];
U2 = Simplify[U2];
U3 = U2/.x -> 0;
U4 = U2/.x -> l;
U4 = FullSimplify[U4, Element[n, Integers]&&Element[k, Integers]&&l > 0];
R1 = Solve[{U3 == 0, U4 == 0}, {U[0, p], T}];
U2 = U2/.R1[[1]];
U2 = Simplify[U2];
U = InverseLaplaceTransform[U2, p, t]

$$\frac{l \sin\left[\frac{ak\pi t}{l}\right] \sin\left[\frac{k\pi x}{l}\right]}{ak\pi} + \cos\left[\frac{an\pi t}{l}\right] \sin\left[\frac{n\pi x}{l}\right].$$


```

У цьому алгоритмі двічі застосовано операційне числення – за змінною  $t$  та за змінною  $x$ . У другому випадку невідомі  $U[0, p]$  та  $U^{(1,0)}[0, p]$  знаходили з крайових умов. Остаточний результат отриманий з використанням оберненого перетворення Лапласа.

Розв'яжемо цю задачу засобами Maple:

```

> with(inttrans):
> assume(n::integer):
> assume(l>0):
> assume(k::integer):
> l1 := a^2 * diff(u(x, t), x$2) - diff(u(x, t), t$2) :
> L1:=laplace(l1,t,p):
> L2:=subs({laplace(u(x,t), t, p)=U(x),
D[2](u)(x,0)=sin(k*Pi*x/l), u(x,0)=sin(n*Pi*x/l)}, L1);

```

$$L2 := a^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} U(x) \right) - p^2 U(x) + \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + p \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

```

> dsolve({L2, U(0)=0, U(l)=0}, U(x)):

```

>  $U(x,p) := \text{rhs}(\%);$

$$U(x,p) := \frac{((p^2 l^2 + n^2 \pi^2 a^2) \sin\left(\frac{k \pi x}{l}\right) + \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) p(p^2 l^2 + k^2 \pi^2 a^2)) l^2}{(p^2 l^2 + k^2 \pi^2 a^2)(p^2 l^2 + n^2 \pi^2 a^2)}$$

>  $U(x,t) := \text{simplify}(\text{invlaplace}(U(x,p), p, t));$

$$U(x,t) := \frac{\sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{tn \pi a}{l}\right) k \pi a + \sin\left(\frac{k \pi x}{l}\right) l \sin\left(\frac{tk \pi a}{l}\right)}{\pi k a}.$$

Таким чином, розв'язком заданої задачі є

$$u(x,t) = \frac{l}{ak\pi} \sin \frac{ak\pi t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} + \cos \frac{an\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad \blacktriangleright$$

За допомогою систем комп'ютерної математики можна розв'язувати різниці рівняння з використанням дискретного перетворення Лапласа (§ 6.3).

**Приклад 7.19.** Знайти розв'язок різницевого рівняння

$$f_{n+2} - 4f_n = 4^n,$$

якщо  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ .

**Розв'язання.** Оскільки у системах комп'ютерної математики Maple і Mathematica немає спеціального оператора для дискретного перетворення Лапласа, то алгоритм розв'язування такого виду рівнянь буде дещо складнішим.

У Maple маємо:

>  $\text{assume}(n::\text{integer});$

>  $f(n+k) := \text{simplify}(\text{exp}(k*p) * (F(p) - \text{sum}(\text{exp}(-m*p) * f(m), m=0..k-1))):$

>  $R := \text{subs}(\{k=2\}, f(n+k)):$

>  $K := \text{simplify}(R);$

$$K := e^{(2p)}(F(p) - f(0) - e^{(-p)}f(1))$$

>  $F(p) := \text{simplify}(\text{solve}(K - 4 * F(p) = \text{sum}(\text{exp}(-n * p) * 4^n, n=0..infinity), F(p))):$



> **F1(p):=simplify(subs({f(0)=0, f(1)=1}, F(p)));**

$$F1(p) := -\frac{e^p(-3 + e^p)}{-e^{(3p)} + 4e^{(2p)} + 4e^p - 16}$$

> **F2(p):= simplify(subs({exp(p) = t, exp(3 \* p) = t^3, exp(2 \* p) = t^2}, F1(p))):**

> **sol:=solve(denom(F2(p)), t):**

> **sol1:= [solve(exp(p)=sol[1], p), solve(exp(p)=sol[2], p), solve(exp(p)=sol[3], p)];**

$$sol1 := [\ln(2) + \pi I, \ln(2), \ln(4)]$$

> **A:=limit(F1(p)\*(exp(p)-exp(sol1[1]))\*exp((n-1)\*p), p=sol1[1]):**

> **B:=limit(F1(p)\*(exp(p)-exp(sol1[2]))\*exp((n-1)\*p), p=sol1[2]):**

> **C:=limit(F1(p)\*(exp(p)-exp(sol1[3]))\*exp((n-1)\*p), p=sol1[3]):**

> **f(n):=simplify(A+B+C, factor);**

$$f(n) := -\frac{5}{24}(-1)^n 2^n + \frac{1}{8}2^n + \frac{1}{12}4^n.$$

Зауважимо, що у Maple за допомогою команди **rsolve** процес розв'язування різницевих рівнянь можна зробити набагато простішим. Тоді послідовність команд може бути такою:

> **eq:= f(n + 2) - 4 \* f(n) - 4^n:**

> **f(n):=rsolve({eq, f(0)=0, f(1)=1}, f);**

$$f(n) := -\frac{5(-2)^n}{24} + \frac{2^n}{8} + \frac{4^n}{12}. \quad \blacktriangleright$$

Для закріплення матеріалу цього розділу пропонуємо читачам, застосовуючи системи комп'ютерної математики, розв'язати вправи 5.1-5.12 та 6.4.

# ДОДАТКИ

## Додаток 1. Операційне числення в прикладних фізичних задачах

Одним з найважливіших практичних застосувань перетворення Лапласа є його використання для розв'язування різноманітних фізичних задач. Операційне числення дозволяє спростити процедуру відшукування розв'язку математичної моделі фізичної задачі за рахунок переходу до більш простих алгебраїчних рівнянь.

Розв'яжемо за допомогою операційного числення декілька фізичних задач теорії коливання.

**Задача 8.1 (гармонічні коливання).** Тягар маси  $m$  підвішений на вертикальній пружині, довжини  $l$ . Тягар відтягнули донизу і потім відпустили. Знайти закон руху тягара, не враховуючи масу пружини і опір середовища (повітря).

**Розв'язання.** Відомо ([12], § 18, с. 178), що математичною моделлю цієї задачі є задача Коші

$$x''(t) + k^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

де  $k^2 = c/m$ ,  $c$  – жорсткість пружини,  $x_0$  і  $v_0$  – початкове положення тягара і його початкова швидкість (у момент часу  $t = 0$ ).

Застосовуючи перетворення Лапласа до звичайного диференціального рівняння, отримуємо операторне рівняння

$$(p^2 X(p) - (x_0 p + v_0)) + k^2 X(p) = 0,$$

звідки знаходимо зображення

$$X(p) = \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2} = x_0 \frac{p}{p^2 + k^2} + v_0 \frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Здійснюючи перехід до оригіналів, одержуємо формулу, яка виражає закон руху тягаря:

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$$

або

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha),$$

де  $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2}$ ,  $\alpha = \arctg(x_0 k/v_0)$ . Зокрема, якщо  $v_0 = 0$ , то  $x(t) = x_0 \cos kt$ . ►

**Задача 8.2 (затухаючі коливання).** Знайти закон руху тягаря із задачі 8.1, але з врахуванням опору середовища.

**Розв'язання.** Ця задача зводиться до відшукування розв'язку звичайного диференціального рівняння

$$x''(t) + 2nx'(t) + k^2 x(t) = 0,$$

який задовольняє початкові умови  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v_0$ , де  $2n = \mu/m$ ,  $\mu$  – деякий коефіцієнт, який характеризує опір середовища (див. [12], § 18, с. 179).

З операторного рівняння

$$(p^2 X(p) - (x_0 p + v_0)) + 2n(pX(p) - x_0) + k^2 X(p) = 0$$

знаходимо зображення

$$X(p) = \frac{x_0 p + v_0 + 2nx_0}{p^2 + 2np + k^2} = x_0 \frac{p}{p^2 + 2np + k^2} + (v_0 + 2nx_0) \frac{1}{p^2 + 2np + k^2}.$$

Якщо припустити, що  $k^2 - n^2 > 0$  і позначити  $\gamma = \sqrt{k^2 - n^2}$ , то

$$x(t) = x_0 e^{-nt} \left( \cos \gamma t - \frac{n}{\gamma} \sin \gamma t \right) + \frac{v_0 + 2nx_0}{\gamma} e^{-nt} \sin \gamma t =$$

$$= e^{-nt} \left( x_0 \cos \gamma t + \frac{v_0 + nx_0}{\gamma} \sin \gamma t \right).$$

Цей розв'язок можна записати у вигляді

$$x(t) = Ae^{-nt} \sin(\gamma t + \alpha),$$

де  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2/\gamma^2}$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0\gamma}{v_0 + nx_0}$ .

Якщо  $k^2 - n^2 < 0$  і  $\psi = \sqrt{n^2 - k^2}$ , то

$$x(t) = e^{-nt} \left( x_0 \operatorname{ch} \psi t + \frac{v_0 + nx_0}{\psi} \operatorname{sh} \psi t \right).$$

І, нарешті, якщо  $k^2 - n^2 = 0$ , то з операторного рівняння

$$\begin{aligned} X(p) &= x_0 \frac{p}{(p+n)^2} + (v_0 + 2nx_0) \frac{1}{(p+n)^2} = \\ &= \frac{x_0}{p+n} + \frac{v_0 + nx_0}{(p+n)^2}, \end{aligned}$$

здійснюючи перехід до оригіналів, одержуємо розв'язок

$$x(t) = x_0 e^{-nt} + (v_0 + nx_0) t e^{-nt} = e^{-nt} (x_0 + (v_0 + nx_0)t). \quad \blacktriangleright$$

**Задача 8.3 (вимушені коливання без врахування опору середовища).** Нехай за умов задачі 8.1 до тягаря прикладена періодична збудувальна сила  $q \sin \omega t$ , де  $q$  і  $\omega$  – деякі сталі. Знайти закон руху тягаря, нехтуючи масою пружини і опором середовища.

**Розв'язання.** У цьому випадку потрібно знайти розв'язок задачі Коші

$$x''(t) + k^2 x(t) = q \sin \omega t, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

З операторного рівняння

$$(p^2 X(p) - (x_0 p + v_0)) + k^2 X(p) = \frac{q\omega}{p^2 + \omega^2}$$

знаходимо

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)(p^2 + \omega^2)} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2}.$$

Якщо  $\omega \neq k$  (нерезонансний випадок), то у просторі оригіналів маємо

$$x(t) = \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \left( \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{1}{k} \sin kt \right) + x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt =$$

$$= \frac{q}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left( v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \right) \sin kt.$$

Цей розв'язок можна записати також у вигляді

$$x(t) = \frac{q}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(kt + \alpha),$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left( v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 k (k^2 - \omega^2)}{v_0 (k^2 - \omega^2) - q\omega}.$$

Якщо  $\omega = k$  (резонансний випадок), то з операторного рівняння

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2}$$

одержуємо

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left( v_0 + \frac{q}{2k} \right) \sin kt$$

або

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + A \sin(kt + \alpha),$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left( v_0 + \frac{q}{2k} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{2x_0 k^2}{q + 2kv_0}. \quad \blacktriangleright$$

**Задача 8.4.** У контурі, до якого послідовно під'єднані резистор з опором  $R$ , котушка індуктивності  $L$  та конденсатор ємності  $C$ , діє електро рушійна сила  $E(t)$ . Знайти струм  $i(t)$ , якщо у початковий момент часу струм і заряд конденсатора дорівнювали нулю.

**Розв'язання.** Диференціальне рівняння для струму має вигляд, аналогічний до рівняння вільних механічних коливань з урахуванням опору середовища (задача 8.2):

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = 0,$$

з початковими умовами  $i(0) = 0$ ,  $i'(0) = E/L$ .

З операторного рівняння

$$\left( p^2 I(p) - \frac{E}{L} \right) + \frac{R}{L} p I(p) + \frac{1}{LC} I(p) = 0$$

знаходимо зображення  $I(p)$  :

$$I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + 2\delta p + \frac{1}{LC}},$$

де позначено  $2\delta = R/L$ .

Розглянемо три випадки, пов'язані зі знаком дискримінанта квадратного тричлена у знаменнику останньої формули.

Нехай  $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \varphi^2 > 0$ . Тоді для струму  $i(t)$  одержуємо формулу

$$i(t) = \frac{E}{\varphi L} e^{-\delta t} \sin \varphi t,$$

яка визначає затухаючі електричні коливання ( $e^{-\delta t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ).

Нехай  $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = -\beta^2 < 0$ . Тоді

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \beta t.$$

У цьому випадку струм  $i(t)$  неперіодичний, жодних електричних коливань у контурі не буде.

Нехай  $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0$ . Тоді операторне рівняння має вигляд

$$I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(p + \delta)^2}$$

і, отже,

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t},$$

тобто і у цьому випадку струм неперіодичний. ►

**Задача 8.5.** З корабля маси  $M$ , який рухається із швидкістю  $u_0$ , вистрілюється снаряд маси  $m$  з відносною швидкістю  $U$ . Корабель у момент пострілу рухається за інерцією назад. Знайти наступну швидкість корабля, вважаючи, що сила опору води прямо пропорційна шуканій швидкості.

**Розв'язання.** За законом збереження інерції

$$(M + m)u_0 = M u_1 + m(u_0 - U),$$

де  $u_1$  – початкова швидкість корабля після взаємодії із снарядом. Звідси

$$u_1 = \frac{M u_0 + m U}{M}.$$

Тоді за законом Ньютона  $F = m \frac{du}{dt}$  і за умовою задачі  $-ku = m \frac{du}{dt}$ . Отже, одержуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0$$

з початковою умовою  $u_1 = \frac{Mu_0 + mU}{M}$ .

Застосувавши перетворення Лапласа, отримуємо операторне рівняння

$$pU(p) + \frac{k}{m}U(p) = \frac{M_0 + mU}{M},$$

звідки

$$U(p) = \frac{Mu_0 + mU}{M} \cdot \frac{1}{p + \frac{k}{m}}.$$

З таблиці зображень отримуємо швидкість корабля після пострілу:

$$u(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{Mu_0 + mU}{M}. \quad \blacktriangleright$$

## Вправи для самостійного виконання

**Вправа 8.1.** Математичний маятник довжини  $l$  виведений зі стану рівноваги малими відхиленнями точки підвісу в горизонтальному напрямі. Показати, що якщо точку підвісу перемістити на відстань  $a$ , то відхилення маятника становитиме  $a(1 - \cos nt)$ , де  $n^2 = \frac{g}{l}$ ,  $g$  – стала тяжіння.

**Вправа 8.2.** Частинку підкинули вертикально вгору із швидкістю  $v_0$ . На неї діє сила тяжіння і сила опору  $2kvt$ , де  $v$  – швидкість частинки. Показати, що у момент часу  $t$  вона знаходиться на відстані  $-\frac{gt}{2k} + \frac{g + 2kv_0}{4k^2}(1 - e^{-2kt})$  від початкового положення.

**Вправа 8.3.** Матеріальна точка маси  $m$  рухається прямолінійно, відштовхуючись від початку координат  $O$  із силою  $F$ , прямо пропорційною відстані ( $F = 4mx$ ). На точку діє опір середовища  $R = 3tv$ , де  $v$  – швидкість точки. У початковий момент часу відстань від початку відліку дорівнює 1, а швидкість дорівнює нулю. Знайти закон руху точки.

**Вправа 8.4.** *Нерухомий центр  $O$  притягує точку маси  $m$  із силою  $F = \mu r$ , де  $r$  – відстань точки від цього центру і  $\mu$  – деякий коефіцієнт. У початковий момент  $r = a$  і швидкість  $v = 0$ . Через який час точка досягне центру  $O$ ?*

**Вправа 8.5.** *Човну надали початкової швидкості  $v_0 = 6$  м/с. Через 69 с після початку руху ця швидкість зменшується вдвічі. Знайти закон руху човна, якщо сила опору води прямо пропорційна швидкості човна.*

**Вправа 8.6.** *Снаряд вилітає з гармати із швидкістю  $v_0$  м/с під кутом  $45^\circ$  до горизонту. Знайти, нехтуючи опором повітря, найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд і його місце падіння.*

**Вправа 8.7.** *Однорідний ланцюг маси  $m$  і довжини  $l$  лежить на гладкому горизонтальному столі так, що половина його звисає зі стола. Визначити рух ланцюга під час його сковзування із стола та знайти час сковзування.*

**Вправа 8.8.** *До контура, що складається із послідовно під'єднаних котушки індуктивності  $L$  і конденсатора ємності  $C$ , прикладена електрорушійна сила  $E \sin nt$  з резонансною частотою. Показати, що сила струму у контурі визначається формулою  $\frac{E}{2L} \cdot t \sin nt$ , де  $n^2 = \frac{1}{LC}$ .*

**Вправа 8.9.** *До резистора з опором  $R$ , що має індуктивність  $L$ , прикладена електрорушійна сила  $E \sin(\omega t + \alpha)$ . Початкова сила струму дорівнює нулю. Показати, що сила струму визначається формулою*

$$E \left( \sin(\gamma - \alpha) e^{-\frac{Rt}{L}} + \sin(\omega t + \alpha + \gamma) \right) (R^2 + L^2 \omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

де  $\gamma = \arctg \frac{\omega L}{R}$ .

**Вправа 8.10.** *У контурі, що складається із послідовно під'єднаних котушки індуктивності  $L$ , резистора опору  $R$  та конденсатора ємності  $C$ , діє електрорушійна сила  $E$ . Початковий заряд і сила струму дорівнюють*



нулю. Показати, що сила струму  $i(t)$  в момент часу  $t$  визначається формулою

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin nt, & \text{якщо } n^2 > 0, \\ \frac{E}{nL} t e^{-\mu t}, & \text{якщо } n^2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0 \text{ і } \mu = \frac{R}{2L}.$$

## Додаток 2. Таблиця властивостей оригіналів і зображень

| №з/п | Оригінал $f(t)$  | Зображення $F(p)$   | Коментар                                       |
|------|--|---|--|
| 1    | $f(t)$   | $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$                     | Перетворення Лапласа (формула (1.3))           |
| 2    | $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t)$<br>$\alpha_i = \text{const}, (i = 1, \dots, n)$ | $\sum_{k=1}^n \alpha_k F_k(p)$                                | Властивість лінійності оригіналу (теорема 2.1) |
| 3    | $f(\alpha t), \alpha = \text{const} > 0$                                       | $\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$             | Подібність оригіналу (теорема 2.2)             |
| 4    | $f(t - t_0), 0 < t_0 < t$  | $e^{-pt_0} F(p)$  | Загаювання оригіналу (теорема 2.3)             |
| 5    | $f(t + t_0)$   | $e^{pt_0} \left( F(p) - \int_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt \right)$ | Випередження оригіналу (теорема 2.4)           |

| №з/п | Оригінал $f(t)$  | Зображення $F(p)$   | Коментар  |
|------|--|---|---|
| 6    | $e^{-p_0 t} f(t), p_0 > 0$   | $F(p + p_0)$  | Зміщення зображення (теорема 2.5)               |
| 7    | $f(t) = f(t + T),$<br>$T$ - період                                     | $\frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$                        | Зображення періодичного оригіналу (теорема 2.6) |
| 8    | $f^{(n)}(t)$   | $p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$<br>$- p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ | Диференціювання оригіналу (теорема 2.7)         |
| 9    | $(-1)^n t^n f(t)$  | $F^{(n)}(p)$  | Диференціювання зображення (теорема 2.8)        |
| 10   | $\int_0^t f(\tau) d\tau$   | $\frac{F(p)}{p}$  | Інтегрування оригіналу (теорема 2.9)            |
| 11   | $\frac{f(t)}{t}$   | $\int_p^{+\infty} F(p) dp$  | Інтегрування зображення (теорема 2.10)          |
| 12   | $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda)$                   | $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda)$                    | Граничний перехід за параметром (теорема 2.11)  |
| 13   | $\lim_{t \rightarrow +0} f(t),$<br>$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ | $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p),$<br>$\lim_{t \rightarrow 0} pF(p)$ | Граничні теореми (теореми 2.14 та 2.15)         |

| №з/п | Оригінал $f(t)$   | Зображення $F(p)$  | Коментар                                     |
|------|---|--|--|
| 14   | $\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda}$   | $\frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}$                    | Диференціювання за параметром (теорема 2.12) |
| 15   | $\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda$   | $\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda$                  | Інтегрування за параметром (теорема 2.13)    |
| 16   | $(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$                               | $F(p) \cdot \Phi(p)$   | Зображення згортки (теорема 3.3)             |
| 17   | $f_1(t) \cdot f_2(0) + (f_1 * f_2')(t),$<br>$f_1(0) \cdot f_2(t) + (f_1' * f_2)(t)$         | $pF_1(p)F_2(p)$  | Теорема Дюамеля (теорема 3.5)                |
| 18   | $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$<br>$p = s + i\sigma$ | $F(p)$   | Обернене перетворення Лапласа (теорема 4.1)  |
| 19   | $f_1(t) \cdot f_2(t)$   | $\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_1(q) F_2(p - q) dq$ | Теорема множення оригіналів (теорема 4.3)    |
| 20   | $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1}$                                     | $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$                         | Перша теорема розвинення (теорема 4.4)       |

| №з/п | Оригінал $f(t)$  | Зображення $F(p)$  | Коментар  |
|------|--|--|---|
| 21   | $f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$   | $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\sum_{l=0}^n a_l p^l}{\sum_{l=0}^m b_l p^l}, \quad n < m,$<br>$F_2(p_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m$  | Друга теорема розвинення<br>– випадок простих полюсів (теорема 4.5) |
| 22   | $f(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{\alpha_j} A_{lj} \frac{t^{\alpha_j-l}}{(\alpha_j-l)!} e^{p_j t},$<br>$A_{lj} = \frac{1}{(l-1)!} \times$<br>$\times \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} [(p-p_j)^{\alpha_j} F(p)]$ | $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\sum_{l=0}^n a_l p^l}{\sum_{l=0}^m b_l p^l}, \quad n < m,$<br>$F_2(p) = b_m \sum_{l=1}^k (p-p_l)^{\alpha_l},$<br>$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = m$ | Друга теорема розвинення<br>– випадок кратних полюсів (теорема 4.6) |

### Додаток 3. Таблиця зображень основних функцій

| №з/п | Оригінал $f(t)$                | Зображення $F(p)$                   |
|------|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1    | $\delta(t)$ – дельта-функція   | 1                                   |
| 2    | 1                              | $\frac{1}{p}$                       |
| 3    | $t^n, \quad n \in \mathbb{N}$  | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                |
| 4    | $t^\nu, \quad \nu > 0$         | $\frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}$ |
| 5    | $e^{at}$                       | $\frac{1}{p-a}$                     |
| 6    | $t^n e^{at}$                   | $\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$            |
| 7    | $\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$ | $\frac{1}{1+ap}$                    |
| 8    | $\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$     | $\frac{1}{p(p-a)}$                  |
| 9    | $\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$  | $\frac{1}{(p-a)(p-b)}$              |

| №з/п | Оригінал $f(t)$                   | Зображення $F(p)$                                      |
|------|-----------------------------------|--|
| 10   | $\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$ | $\frac{p}{(p - a)(p - b)}$                             |
| 11   | $(1 + at)e^{at}$                  | $\frac{p}{(p - a)^2}$                                  |
| 12   | $\sin at$                         | $\frac{a}{p^2 + a^2}$                                  |
| 13   | $\cos at$                         | $\frac{p}{p^2 + a^2}$                                  |
| 14   | $\sin(t - \alpha), \alpha > 0$    | $\frac{e^{-\alpha p}}{p^2 + 1}$                        |
| 15   | $\cos(t - \alpha), \alpha > 0$    | $\frac{pe^{-\alpha p}}{p^2 + 1}$                       |
| 16   | $e^{bt} \sin at$                  | $\frac{a}{(p - b)^2 + a^2}$                            |
| 17   | $e^{bt} \cos at$                  | $\frac{p - b}{(p - b)^2 + a^2}$                        |
| 18   | $\text{sh } at$                   | $\frac{a}{p^2 - a^2}$                                  |
| 19   | $\text{ch } at$                   | $\frac{p}{p^2 - a^2}$                                  |
| 20   | $e^{bt} \text{sh } at$            | $\frac{a}{(p - b)^2 - a^2}$                            |
| 21   | $e^{bt} \text{ch } at$            | $\frac{p - b}{(p - b)^2 - a^2}$                        |
| 22   | $t \sin at$                       | $\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$                            |
| 23   | $t \cos at$                       | $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$                      |
| 24   | $t \text{sh } at$                 | $\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$                            |
| 25   | $t \text{ch } at$                 | $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$                      |
| 26   | $t^n \sin at$                     | $\frac{n! \text{Im}(p + ia)^{n+1}}{(p^2 + a^2)^{n+1}}$ |
| 27   | $t^n \cos at$                     | $\frac{n! \text{Re}(p + ia)^{n+1}}{(p^2 + a^2)^{n+1}}$ |

| $\text{№з/п}$ | <i>Оригінал</i> $f(t)$  | <i>Зображення</i> $F(p)$   |
|---------------|---|--|
| 28            | $t^n e^{at} \sin bt$  | $\frac{n!}{2i} \left( \frac{1}{(p-a-ib)^{n+1}} - \frac{1}{(p-a+ib)^{n+1}} \right)$ |
| 29            | $t^n e^{at} \cos bt$  | $\frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(p-a-ib)^{n+1}} + \frac{1}{(p-a+ib)^{n+1}} \right)$  |
| 30            | $e^{at} \sin(bt + \alpha)$  | $\frac{b \cos \alpha + (p-a) \sin \alpha}{(p-a)^2 + b^2}$                          |
| 31            | $e^{at} \cos(bt + \alpha)$  | $\frac{(p-a) \cos \alpha - b \sin \alpha}{(p-a)^2 + b^2}$                          |
| 32            | $\sin at - at \cos at$  | $\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$   |
| 33            | $\sin at + at \cos at$  | $\frac{2ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$  |
| 34            | $at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at$                    | $\frac{2a^3}{(p^2 - a^2)^2}$   |
| 35            | $\operatorname{sh} at + at \operatorname{ch} at$                    | $\frac{2ap^2}{(p^2 - a^2)^2}$  |
| 36            | $\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$                           | $\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$  |
| 37            | $\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$                               | $\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$   |
| 38            | $\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$                           | $\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$   |
| 39            | $\frac{b \operatorname{sh} at - a \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$ | $\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$  |
| 40            | $\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$     | $\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$   |
| 41            | $\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$   |
| 42            | $t - \frac{1}{a} \sin at$   | $\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$   |
| 43            | $\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$                              | $\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$   |
| 44            | $\sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t$  | $\frac{a^2 p}{p^4 + a^4}$  |
| 45            | $\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t$  | $\frac{p^3}{p^4 + a^4}$  |

| №з/п | Оригінал $f(t)$  | Зображення $F(p)$                                |
|------|--|--|
| 46   | $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at - \sin at)$                | $\frac{a^3}{p^4 - a^4}$                          |
| 47   | $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at - \cos at)$                | $\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$                        |
| 48   | $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + \sin at)$                | $\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$                         |
| 49   | $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at + \cos at)$                | $\frac{p^3}{p^4 - a^4}$                          |
| 50   | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$                                     | $\frac{1}{\sqrt{p}}$                             |
| 51   | $\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$                               | $\frac{1}{\sqrt{p+a}}$                           |
| 52   | $\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$             | $\frac{1}{\sqrt{p+a} + \sqrt{p+b}}$              |
| 53   | $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$                                      | $\frac{1}{p\sqrt{p}}$                            |
| 54   | $\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$                       | $\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{\sqrt{p}}$              |
| 55   | $\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$                       | $\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p\sqrt{p}}$             |
| 56   | $\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}, \quad a > 0$      | $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$                |
| 57   | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$                   | $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$ |
| 58   | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}$                   | $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$ |
| 59   | $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}, \quad a > 0$ | $e^{-a\sqrt{p}}$                                 |
| 60   | $\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$                                | $\ln \frac{p+a}{p+b}$                            |
| 61   | $\frac{2}{t}(\cos bt - \cos at)$                             | $\ln \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}$                |
| 62   | $\frac{1}{t} \sin at$  | $\operatorname{ctg} \frac{a}{p}$                 |

**Додаток 4. Таблиця властивостей дискретних оригіналів та зображень**

| №з/п | Оригінал $f_n, n \in \mathbb{N}$  | Зображення $F^*(p)$   | Коментар                                       |
|------|---|---|--|
| 1    | $f_n$   | $F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f_n$                    | Дискретне перетворення Лапласа (формула (6.1)) |
| 2    | $f_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j f_{jn}$  | $F^*(p) = \sum_{j=1}^k \alpha_j F_j^*(p)$                     | Властивість лінійності (теорема 6.3)           |
| 3    | $f_{n+k}$   | $e^{kp} \left( F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} f_m \right)$ | Властивість випередження (теорема 6.5)         |
| 4    | $f_{n-k}$   | $e^{-kp} F^*(p)$  | Властивість загаювання (теорема 6.4)           |
| 5    | $e^{p_0 n} f_n,$<br>$p_0$ – комплексне число                                  | $F^*(p - p_0)$  | Зміщення зображення (теорема 6.6)              |
| 6    | $(-1)^k n^k f_n$  | $\frac{d^k F^*(p)}{dp^k}$                                     | Диференціювання зображення (теорема 6.7)       |
| 7    | $f_0 = 0,$<br>$\frac{f_n}{n},$<br>$\lim_{n \rightarrow +0} \frac{f_n}{n} = 0$ | $\int_p^{+\infty} F^*(p) dp$                                  | Інтегрування зображення (теорема 6.8)          |



| №з/п | Оригінал $f_n, n \in \mathbb{N}$                            | Зображення $F^*(p)$  | Коментар   |
|------|---|--|--|
| 8    | $\sum_{m=0}^n f_{n-m} \varphi_m$                            | $F^*(p) \cdot \Phi^*(p)$                                   | Множення зображень (теорема 6.9)                           |
| 9    | $f_n$   | $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np} dp$ | Обернене до дискретного перетворення Лапласа (формула 6.5) |
| 10   | $f_n = \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} F^*(p) e^{(n-1)p}$ | $F^*(p)$   | Формула для знаходження оригіналу (формула 6.18)           |

Додаток 5. Таблиця зображень основних дискретних оригіналів

| №з/п | Оригінал $f_n$ | Зображення $F^*(p)$                |
|------|----------------|------------------------------------|
| 1    | $\theta_n$     | $\frac{e^p}{e^p - 1}$              |
| 2    | $(-1)^n$       | $\frac{e^p}{e^p + 1}$              |
| 3    | $n$            | $\frac{e^p}{(e^p - 1)^2}$          |
| 4    | $n^2$          | $\frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}$ |
| 5    | $na^{n-1}$     | $\frac{e^p}{(e^p - a)^2}$          |
| 6    | $C_n^k$        | $\frac{e^p}{(e^p - 1)^{k+1}}$      |
| 7    | $C_n^k a^n$    | $\frac{a^k e^p}{(e^p - a)^{k+1}}$  |
| 8    | $a^n$          | $\frac{e^p}{e^p - a}$              |
| 9    | $(n + 1)a^n$   | $\frac{e^{2p}}{(e^p - a)^2}$       |

| $\text{№з}/n$ | Оригінал $f_n$                          | Зображення $F^*(p)$   |
|---------------|---|---|
| 10            | $\frac{1}{n}$ , якщо $f_0 = 0$          | $\ln \frac{1}{e^p - 1}$   |
| 11            | $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , якщо $f_0 = 0$ | $\ln \frac{e^p + 1}{e^p}$   |
| 12            | $\frac{n(n-1)}{2}$                      | $\frac{e^p}{(e^p - 1)^3}$   |
| 13            | $\sin n\alpha$                          | $\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$                         |
| 14            | $\cos n\alpha$                          | $\frac{e^p(e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$                  |
| 15            | $b^n \sin n\alpha$                      | $\frac{be^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2be^p \cos \alpha + b^2}$                     |
| 16            | $b^n \cos n\alpha$                      | $\frac{e^p(e^p - b \cos \alpha)}{e^{2p} - 2be^p \cos \alpha + b^2}$             |
| 17            | $\text{sh } n\alpha$                    | $\frac{e^p \text{sh } \alpha}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } \alpha + 1}$             |
| 18            | $\text{ch } n\alpha$                    | $\frac{e^p(e^p - \text{ch } \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } \alpha + 1}$      |
| 19            | $b^n \text{sh } n\alpha$                | $\frac{be^p \text{sh } \alpha}{e^{2p} - 2be^p \text{ch } \alpha + b^2}$         |
| 20            | $b^n \text{ch } n\alpha$                | $\frac{e^p(e^p - b \text{ch } \alpha)}{e^{2p} - 2be^p \text{ch } \alpha + b^2}$ |

# Показчик

Абсциса збіжності ряду, 128

Асоціативність згортки, 52

Гама-функція, 17

Диференціювання

– за параметром, 43

– зображення, 36, 135

– оригіналу, 34

Дистрибутивність згортки, 54

Задача

– основна початкова, 105

Згорання функцій, 51

Згортка

– неперервних функцій, 51

– ґратчастих функцій, 137

Зображення

$D$ -перетворення, 126

–  $\delta$ -функції, 16

– експоненти, 15

– згортки, 57, 138

– періодичного оригіналу, 32

– степеневі функції, 17

– узагальнене, 17

– узагальненої функції Гевісайда, 15

– функції Гевісайда, 15

– функції-оригіналу, 12

Інтеграл

– Дюамеля, 64

– Лапласа, 12

– Мелліна, 70

Інтегрування

– за параметром, 44

– зображення, 40, 136

– оригіналу, 38

Комутативність згортки, 52

Множення

– зображень, 58, 138

– зображень узагальнене, 60

Множина

– початкова, 105

Модуль згортки, 54

Обвідні ґратчастих функцій, 126

Оператор диференціювання, зовнішній, 117

Оригінал, 9

– дискретний, 126

– узагальнений, 17

– періодичний, 32

Перетворення Лапласа

– дискретне ( $D$ -перетворення), 126

– неперервне, 12

– обернене, 70

– обернене для ґратчастої функції, 130

Перетворення Лорана ( $Z$ -перетворення), 129

Показник зростання функції, 10, 128

Простір

– оригіналів, 10

– зображень, 12

Рівність Парсеваля, 84

Рівняння

– диференціальне із загалюванням, 104

– інтегро-диференціальне, 116

- операторне, 115, 145
- різницеве,  $k$ -го порядку, 141
- різницеве, лінійне, 142
- різницеве, неоднорідне, 142
- різницеве, однорідне, 142

#### Різниця

- $k$ -го порядку, 142
- першого порядку, 142

#### Рух

- вільний, 95
- залежний, 95

#### Теорема

- Бореля, 57
- випередження оригінала, 29, 133
- гранична, 45, 46
- Дюамеля, 63
- Ефроса, 60
- єдиності оригінала, 70
- загаювання оригіналу, 26, 132
- зміщення зображення, 31, 134
- лінійності оригіналу, 23, 131
- подібності оригіналу, 25
- про граничний перехід за параметром, 42
- про множення оригіналів, 71
- про неперервність згортки, 54
- про обернення інтеграла Лапласа, 67
- розвинення, друга, 74, 76
- розвинення, перша, 72
- розвинення, третя, 78

#### Формула

- Рімана-Мелліна, 70

#### Функція

- Гевісайда, 10
- Гевісайда, узагальнена, 10
- ґратчаста, 126
- Дірака ( $\delta$ -функція), 16
- експоненціального типу, 10

- імпульсна, 16, 93
- Лапласа, 63
- необмеженого зростання, 11
- обвідна, 126
- одинична (ґратчаста), 127
- оригінал, 9
- початкова, 105

Abs, 153

abs, 153

Arg, 153

arg, 153

argument, 153

Array, 170

assume, 154, 175, 176

collect, 158, 159

complex, 154

ComplexExpand, 163

Conjugate, 153

conjugate, 153

denom, 177

diag, 173

diff, 158–159, 175

dsolve, 165, 169, 175

Element, 174

evalm, 173

factor, 160, 177

Flatten, 162

FullSimplify, 157, 159, 166, 168, 170, 172, 174–175

Heaviside, 156, 167–168

Im, 152, 153

infinity, 154, 164, 176

Int, 157

int, 154, 156–157, 164  
integer, 175–176  
Integers, 174–175  
Integrate, 157  
inttrans, 153–154, 156, 158, 160–161, 164–165,  
167, 169–170, 172–173, 175  
inverse, 173  
InverseLaplaceTransform, 161, 163–164, 166,  
168, 170, 172, 175  
invlaplace, 161–162, 164, 166–167, 169,  
171–174, 176  
laplace, 154–155, 159–160, 164–165, 167, 169,  
171–173, 175  
LaplaceTransform, 155, 159, 164, 166, 168–170,  
172, 174  
limit, 177  
linalg, 173  
matrix, 173  
NSolve, 162  
Part, 162  
printlevel, 165  
Product, 162  
Re, 152–154  
real, 154  
Replace, 162, 168, 175  
Residue, 159, 162  
residue, 160, 162  
rhs, 169, 171, 175  
rsolve, 177  
Simplify, 163, 175  
simplify, 158, 160, 162, 173, 176–177  
Solve, 166, 168, 170, 173, 175  
solve, 161, 166–167, 171–172, 177  
subs, 159–160, 165, 167, 169, 171, 175–177  
Sum, 162, 170  
sum, 176  
Table, 162–163, 170  
trace, 165  
Union, 163  
UnitStep, 168  
vector, 173

## Бібліографічний покажчик

**БЕССЕЛЬ Фрідріх Вільгельм** (Bessel Friedrich Wilhelm; 1784 – 1846) – німецький астроном і математик. Основні праці присвячені теорії диференціальних рівнянь і небесній механіці. У математиці його ім'я носять циліндричні функції першого роду (функції Бесселя) і диференціальне рівняння, яке вони задовольняють (рівняння Бесселя).

**БОРЕЛЬ Фелікс Едуард Жюстен Еміль** (Borel Felix Edouard Justin Emile; 1871 – 1956) – французький математик, член Паризької Академії наук. Засновник декількох розділів сучасного математичного аналізу (розбіжні ряди, міра множини, діофантові наближення). Низка робіт присвячена питанням математичної фізики і теорії ймовірностей.

**БРОМВІЧ Томас Джон** (Thomas John Bromwich; 1875 – 1929) – англійський математик, професор Кембріджу. Обґрунтовуючи операційне числення, виходив з теорії аналітичних функцій і теорії інтеграла Фур'є. Одержав залежність між оригіналом та його зображенням у вигляді контурного інтеграла у комплексній площині.

**ВАН ДЕР ПОЛЬ Балтазар** (van der Pol Balthasar; 1889 – 1959) – голландський фізик і математик. Основні математичні роботи стосуються теорії коливань. Вивів рівняння, яке описує автоколивання у ламповому генераторі (рівняння Ван дер Поля). Займався побудовою операційного числення на основі прямого і оберненого перетворення Лапласа.

**ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЕНКО Михайло Єгорович** (1825 – 1912) – український математик. Навчався у Київському університеті, а також у Парижі, де слухав лекції О. Коші і Ж. Ліувілля. Професор Київського університету. Основні роботи присвячені теорії лінійних диференціальних рівнянь і операційним методам. Автор першої на російській мові монографії з операційного числення та його застосувань до розв'язування диференціальних рівнянь (1862 р.).

**ВЕЙЄРШТРАСС Карл Теодор Вільгельм** (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm; 1815 – 1897) – німецький математик, професор Берлінського університету. Основні дослідження стосуються математичного аналізу, теорії функцій, варіаційного числення, лінійної алгебри. Розробив систему логічного обґрунтування математичного аналізу на основі створеної ним теорії дійсних чисел.

**ГЕВІСАЙД Олівер** (Heaviside Oliver; 1850 – 1925) – англійський фізик і інженер, член Лондонського королівського товариства. Засновник (1892) методу операційного (символьного) числення, який дозволяє достатньо просто розв'язувати багато складних задач механіки, електротехніки, автоматики тощо. Створив теорію передачі сигналів на великі відстані.

**ДІРАК Поль Адрієн Моріс** (Dirac Paul Adrien Maurice; 1902-1984) – англійський фізик-теоретик, член Лондонського королівського товариства, професор Кембриджу. Лауреат Нобелівської премії. Один із творців квантової механіки. З його ім'ям пов'язані такі математичні поняття, як дельта-функція Дірака, матриця Дірака, релятивістське хвильове рівняння Дірака.

**ДЮАМЕЛЬ Жан Марі Констан** (Duhamel Jean Marie Constant; 1797 – 1872) – французький математик, член Паризької Академії наук. Основні праці з математичної фізики, зокрема, з теорії коливань, теорії рядів і теорії пружності. Сформулював принцип – аналог методу варіації довільних сталих (принцип Дюамеля). Створив загальний метод дослідження вимушених коливань.

**ЕЙЛЕР Леонард** (Euler Leonhard; 1707 – 1783) – видатний математик, механік, фізик, астроном. За походженням швейцарець. Автор майже 850 наукових праць з математичного аналізу, диференціальної геометрії, наближених методів обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики та ін. Створив як самостійну дисципліну теорію звичайних диференціальних рівнянь і заклав основи теорії рівнянь з частинними похідними.

**КАРСОН Джон Реншо** (Carson John Renshaw; 1886 – 1940) – американський математик та інженер. Відомий своїми працями з теорії функцій комплексної змінної (перетворення Карсона) і операційного числення. Довів, що операційні методи О. Гевісайда можна повністю обґрунтувати на основі перетворення Лапласа.

**КІРХГОФ Густав Роберт** (Kirchhoff Gustav Robert; 1824 – 1887) – німецький фізик. Основні праці з оптики, електродинаміки і механіки. Розв'язав задачу про розподіл електричних струмів у розгалужених електричних колах (правила Кірхгофа). Займався також питаннями деформації, рівноваги і руху пружних тіл, течії рідин.

**КОШІ Огюстен Луї** (Cauchy Augustin Louis; 1789 – 1857) – французький математик. Опублікував понад 800 праць з теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної механіки, математичної фізики. Дав чітке означення неперервної функції, основних понять теорії збіжних рядів (ознака Коші, критерій Коші), розвинув основи теорії аналітичних функцій. У теорії диференціальних рівнянь довів основну теорему існування розв'язку початкової задачі (задачі Коші). Розробив методи інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку.

**ЛАГРАНЖ Жозеф Луї** (Lagrange Joseph Louis; 1736 – 1813) – французький математик і механік. Найбільш важливі праці відносяться до варіаційного числення і механіки. Йому належать також видатні дослідження з різних питань математичного аналізу (формула залишкового члена ряду Тейлора, формула скінченних приростів – формула Лагранжа, теорія умов-



них екстремумів – метод множників Лагранжа) і диференціальних рівнянь (теорія особливих розв'язків, метод варіації довільних сталих для лінійного рівняння  $n$ -го порядку) та ін.

**ЛАПЛАС П'єр Сімон** (Laplace Pierre Simon; 1749 – 1827) – французький математик, фізик і астроном. Основні праці присвячені дослідженню рівнянь з частинними похідними, теорії ймовірностей, небесній механіці. Фундаментальними є його роботи з диференціальних рівнянь (рівняння Лапласа). Для розробки створеної ним математичної теорії ймовірностей широко використовував перетворення, яке носить його ім'я (перетворення Лапласа).

**ЛЕВІ Поль П'єр** (Paul Pierre Levy; 1886 – 1971) – французький математик. Член Паризької Академії наук, президент Французького математичного товариства. Основні напрями досліджень – теорія ймовірностей, функціональний аналіз, теорія функцій, диференціальні рівняння.

**ЛЕЙБНІЦ Готфрід Вільгельм** (Leibniz Gottfried Wilhelm; 1646 – 1716) – німецький математик, фізик, філософ. Один із засновників диференціального та інтегрального числень, їхніх понять і символіки. Йому належать терміни "диференціал", "диференціальне числення", "диференціальне рівняння", "функція", "координати" та ін. У фізиці відкрив закон збереження енергії, висловив ідею про перетворення одних видів енергії в інші.

**ЛІУВІЛЛЬ Жозеф** (Liouville Joseph; 1809 – 1882) – французький математик. Автор важливих праць з комплексного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (формула Остроградського-Ліувілля). Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Один з розробників теорії крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (задача Штурма-Ліувілля). Розробив символічний метод інтегрування диференціальних рівнянь.

**ЛОРАН П'єр Альфонс** (Laurent Pierre Alfonse; 1813 – 1854) – французький математик, за професією військовий інженер. Автор теореми про розвинення у ряд аналітичної у круговому кільці функції (ряд Лорана).

**МЕЛЛІН Роберт Хильмар** (Mellin Robert Hjalmar; 1854 – 1933) – фінський математик. Професор Політехнічної школи в Гельсінкі. Основні праці стосуються диференціальних та інтегральних рівнянь. У математичній фізиці і теорії функцій широко застосовується інтегральне перетворення Мелліна.

**МІКУСИНЬСКИЙ Ян** (Mikusinski Jan; 1913 – 1987) – польський математик, член Польської Академії наук. Народився у місті Станіславів (тепер – Івано-Франківськ). Основні роботи присвячені операційному численню, диференціальним рівнянням, алгебрі. Створив операційне числення без використання перетворення Лапласа алгебраїчним шляхом, в якому роль множення відіграє згортка.

**НЬЮТОН Ісаак** (Newton Isaac; 1643 – 1727) – англійський фізик, математик, механік, астроном. Заклав теоретичні основи механіки і астрономії, відкрив закон всесвітнього тяжіння, разом із Лейбніцем вважається творцем диференціального та інтегрального числень. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розвиненням їх розв'язків у степеневі ряди.

**ПАРСЕВАЛЬ Марк Антуан** (Parseval Marc Antoin; 1755 – 1836) – французький математик. Основні праці стосуються теорії диференціальних рівнянь, теорії функції дійсної змінної і функціонального аналізу. Встановив співвідношення між функцією та її коефіцієнтами Фур'є (формула Парсеваля).

**РІМАН Георг Фрідріх Бернхард** (Riemann Georg Friedrich Bernhard; 1826 – 1866) – німецький математик, професор Геттінгенського університету. Заклав основи геометричного напрямку в теорії аналітичних функцій. Досліджував розвинення функцій у тригонометричні ряди, у зв'язку з цим сформулював необхідні і достатні умови інтегровності (інтеграл Рімана).

**ТЕЙЛОР Брук** (Taylor Brook; 1685 – 1731) – англійський математик, член Лондонського королівського товариства. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни.

**ФУР'Є Жан Батист Жозеф** (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768 – 1830) – французький математик і фізик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями.

## Рекомендована література

### *Основна література*

1. *Араманович И.Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. *Волков И.К.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / И.К. Волков, А.Н. Канатников. – М.: Изд-во МГУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 228 с.
3. *Говорухин В.* Компьютер в математическом исследовании / В. Говорухин, В. Цибулин. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
4. *Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків.* – Львів: Афіша, 2002. – 203 с.
5. *Краснов М.Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1971. – 256 с.
6. *Кристаллинский Р.Е.* Преобразования Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики / Р.Е. Кристаллинский, В.Р. Кристаллинский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 216 с.
7. *Мартыненко В.С.* Операционное исчисление / В.С. Мартыненко. – К.: Вища школа, 1973. – 268 с.

8. *Свешников А.Г.* Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.
9. *Функції комплексної змінної. Перетворення Фур'є та Лапласа* / Під заг. ред. П.І. Каленюка, Л.О. Новікова. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львівська політехніка", 1999. – 270 с.
10. *Эйдерман В.Я.* Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В.Я. Эйдерман. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

### *Додаткова література*

11. *Гурский Д.А.* Вычисления в Mathcad 12 / Д.А. Гурский, Е.С. Турбина. – СПб.: Питер, 2006. – 544 с.
12. *Гутер Р.С.* Дифференциальные уравнения / Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М.: Высш. школа, 1976. – 304 с.
13. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования / Г. Дёч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
14. *Диткин В.А.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
15. *Диференціальні рівняння* / І.І. Ляшко, О.К. Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
16. *Дьяконов В.П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
17. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч. I. – 495 с.
18. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1993. – Ч. II. – 375 с.
19. *Микусинский Я.* Операторное исчисление / Я. Микусинский. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. – 366 с.

20. *Пантелеев А.В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.
21. *Штокало И.З.* Операционное исчисление (обобщения и приложения) / И.З. Штокало. – К.: Наукова думка, 1972. – 303 с.
22. *Schiff J.L.* The Laplace Transform. Theory and Applications / Schiff J.L. – New-York: Springer, 1999. – 235 p.