

ЯВНИЙ ВИГЛЯД ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗ'В'ЯЗКУ ОДНОГО ПСЕВДО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Г. С. Бігун¹, М. М. Осипчук²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача

79060, Львів, вул. Наукова, 3-б

e-mail: freischunhalupa@yandex.ru

²Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;

76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;

e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Розглянуто псевдо-диференціальне рівняння виду $u'_t = \mathbf{A}u + (a, \mathbf{B})u$, де a – вектор в \mathbb{R}^d , \mathbf{B} – псевдо-диференціальний оператор з символом $(i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$, $\mathbf{A} = c \operatorname{div}(\mathbf{B})$ зі сталими $c > 0$, $\alpha \in (1, 2]$. Побудовано фундаментальний розв'язок цього рівняння у вигляді оберненого перетворення Фур'є. Досліджено деякі його властивості.

Ключові слова: псевдо-диференціальний оператор, фундаментальний розв'язок, стійкий випадковий процес.

Вступ.

Означимо клас F_γ дійснозначних функцій $\varphi(x)$, заданих на скінченновимірному евклідовому просторі \mathbb{R}^d у вигляді перетворення Фур'є

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

де (\cdot, \cdot) означає скалярний добуток в \mathbb{R}^d , та таких, що $|\lambda|^\gamma \Phi(\lambda)$ абсолютно інтегровна на \mathbb{R}^d .

Для деякого фіксованого $\alpha \in (1, 2]$ позначимо через \mathbf{B} оператор, що діє на функції з $F_{\alpha-1}$ за правилом

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} i|\lambda|^{\alpha-2} \lambda e^{i(x,\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

Зауважимо, що при $\alpha = 2$ цей оператор є градієнтом, який будемо позначати символом ∇ .

Нехай $\mathbf{A} = c \operatorname{div}(\mathbf{B})$, де $c > 0$ деяка стала, а div – оператор дивергенції. Легко бачити, що для функцій $\varphi \in F_\alpha$ має місце рівність

$$\mathbf{A}\varphi(x) = -c \int_{\mathbb{R}^d} |\lambda|^\alpha e^{i(x,\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Для достатньо гладких і обмежених разом зі своїми похідними функцій $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ дії операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} можуть бути представлені у

вигляді

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \frac{c}{\kappa} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), y)}{|y|^{d+\alpha}} dy,$$

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \frac{1}{\alpha\kappa} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x)}{|y|^{d+\alpha}} y dy,$$

$$\text{де } \kappa = -\frac{2\pi^{(d-1)/2}\Gamma(2-\alpha)\Gamma((\alpha+1)/2)\cos(\pi\alpha/2)}{\alpha(\alpha-1)\Gamma((d+\alpha)/2)}.$$

Оператор \mathbf{A} є твірним оператором симетричного α -стійкого випадкового процесу, що є марківським процесом в \mathbb{R}^d зі щільністю ймовірності переходу ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda \quad (4)$$

Якщо $\alpha = 2$ і $c = \frac{1}{2}$, то такий процес є вінеровим.

В роботі [2] побудовано функцію $(G(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, що є фундаментальним розв'язком псевдо-диференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}_x u(t, x) + (a(x), \mathbf{B}_x) u(t, x), \quad (5)$$

де функція $(a(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ неперервна і обмежена, а індекс x у операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} означає їх дію на функцію кількох змінних за змінною x . Серед його властивостей слід відзначити виконання рівності Колмогорова-Чепмена ($s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$G(s+t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} G(s, x, z) G(t, z, y) dz \quad (6)$$

та правильну при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ рівність

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, y) dy = 1. \quad (7)$$

Відкритим залишалось питання про невід'ємність функції $G(t, x, y)$, що означало б існування марківського процесу в \mathbb{R}^d зі щільністю ймовірності переходу $G(t, x, y)$. Дане повідомлення дає деяку відповідь на це питання.

Нижче ми побудуємо в явному вигляді фундаментальний розв'язок рівняння (5) у випадку сталої функції a , покажемо, що в цій ситуації функція $G(t, x, y)$ не є невід'ємною при $\alpha \neq 2$.

1. Побудова фундаментального розв'язку

Як і в [2] розглянемо функцію $(G(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, яка задається рівністю

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) V(\tau, z, y) dz, \quad (8)$$

де $a \in \mathbb{R}^d$ довільний (відмінний від нульового) сталий вектор, а функція $(V(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ є сумою ряду

$$V(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, x, y), \quad (9)$$

де $(\hat{a}$ – орт вектора a)

$$V_0(t, x, y) = (\mathbf{B}_x g(t, x, y), \hat{a}), \quad (10)$$

а при $k \geq 1$

$$V_k(t, x, y) = |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V_{k-1}(\tau, z, y) dz \quad (11)$$

В [2] доведено, що мають місце оцінки

$$|V_0(t, x, y)| \leq \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}}, \quad (12)$$

$$|V_k(t, x, y)| \leq M \frac{N^k}{k!} \frac{t^{k/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}} \prod_{n=1}^{k-1} \left(1 + \frac{n}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{n}{\alpha}\right) \right), \quad (13)$$

де N і M деякі додатні сталі, і ряд (9) збігається локально рівномірно по $t > 0$ та рівномірно по $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Крім того, функція (8) є фундаментальним розв'язком рівняння (5) і виконуються рівності (6), (7).

Далі нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. Нехай $\varphi \in F_{\alpha-1}$. Тоді для функції $f(x, y) = \varphi(x - y)$ має місце рівність $\mathbf{B}_x f(x, y) = -\mathbf{B}_y f(x, y)$.

Доведення. Розглянемо при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_x(y) = f(x, y)$ та при фіксованому $y \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_y(x) = f(x, y)$.

Зауважимо, що ці функції належать до класу $F_{\alpha-1}$. Дійсно,

$$f_x(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(y, \lambda)} \Phi(-\lambda) e^{-i(x, \lambda)} d\lambda$$

і при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ функція $|\lambda|^{\alpha-1} |\Phi(-\lambda) e^{-i(x, \lambda)}| = |\lambda|^{\alpha-1} |\Phi(-\lambda)|$ інтегровна на \mathbb{R}^d . Аналогічно для функції $f_y(x)$.

Тоді за означенням оператора \mathbf{B} матимемо

$$\mathbf{B}_x f(x, y) = \mathbf{B}_x f_y(x) = \int_{\mathbb{R}^d} i |\lambda|^{\alpha-2} \lambda e^{i(x-y, \lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda,$$

$$\mathbf{B}_y f(x, y) = \mathbf{B}_y f_x(y) = \int_{\mathbb{R}^d} i |\lambda|^{\alpha-2} \lambda e^{i(y-x, \lambda)} \Phi(-\lambda) d\lambda.$$

Зробивши заміну змінної $\lambda = -\mu$ в інтегралі другої рівності, одержимо твердження лема.

Зауваження. Функція $g(t, x, y)$ як функція від (x, y) при

фіксованому $t > 0$ задовольняє умову лема 1. Крім того, $g(t, x, y) = g_t(x - y)$, причому $g_t \in F_{k(\alpha-1)}$ з довільним $k \in \mathbf{N}$.

Лема 2. Нехай $\varphi \in F_{m(\alpha-1)}$ з деяким $m \in \mathbf{N}$. Тоді для функції $f(x, y) = \varphi(x - y)$ мають місце рівності

$$(\mathbf{B}_x^a)^k (\mathbf{B}_y^a)^l f(x, y) = (\mathbf{B}_y^a)^l (\mathbf{B}_x^a)^k f(x, y) = (-1)^l (\mathbf{B}_x^a)^{k+l} f(x, y),$$

де оператор $\mathbf{B}^a = (a, \mathbf{B})$ з деяким ненульовим вектором $a \in \mathbf{R}^d$, $k \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$, $k + l \leq m$.

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbf{R}^d$ і розглянемо функцію

$$f(x, y) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(y, \lambda)} \Phi(-\lambda) e^{-i(x, \lambda)} d\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } (\mathbf{B}_y^a)^l f(x, y) &= \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda, a))^l e^{i(y-x, \lambda)} \Phi(-\lambda) d\lambda = \\ &= (-1)^l \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda, a))^l e^{i(x, \lambda)} \Phi(\lambda) e^{-i(y, \lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Зафіксувавши тепер } y \in \mathbf{R}^d, \text{ одержимо } (\mathbf{B}_x^a)^k (\mathbf{B}_y^a)^l f(x, y) &= \\ = (-1)^l \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda, a))^k (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda, a))^l e^{i(y-x, \lambda)} \Phi(-\lambda) d\lambda &= \\ = (-1)^l \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda, a))^{k+l} e^{i(x-y, \lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda = (-1)^l (\mathbf{B}_x^a)^{k+l} f(x, y). \end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо такий же вираз і для $(\mathbf{B}_y^a)^l (\mathbf{B}_x^a)^k f(x, y)$.

Зауваження. До функції $g(t, x, y)$ можна застосовувати оператор \mathbf{B}^a по кожній із змінних x та y довільну скінченну кількість раз в будь-якому порядку.

Основний результат цього пункту міститься в наступному твердженні.

Теорема. Фундаментальний розв'язок рівняння (5) зі сталою функцією $a(x) = a \in \mathbf{R}^d$ має вигляд

$$G(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \exp\{i(|\lambda|^{\alpha-2} ta + x - y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda.$$

Доведення. Скористаємось зображеннями (8) і (9) і спочатку доведемо, за індукцією, що для всіх $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$, $y \in \mathbf{R}^d$ має місце рівність

$$V_k(t, x, y) = (-1)^{k+1} |a|^k \frac{t^k}{k!} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(t, x, y). \quad (14)$$

При $k = 0$ рівність (14) правильна (див. також (10)). Нехай вона правильна при деякому $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Тоді, враховуючи (11), маємо

$$V_{k+1}(t, x, y) = |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V_k(\tau, z, y) dz.$$

Нерівності (12) і (13) дозволяють стверджувати, що інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau, x, z) V_k(\tau, z, y) dz \quad (15)$$

збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Таким чином, маємо рівність

$$V_{k+1}(t, x, y) = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{B}_x^{\hat{a}} g(t-\tau, x, z) (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, z, y) dz.$$

Далі для зручності введемо позначення $\Delta^u \varphi(x) = \varphi(x+u) - \varphi(x)$, $\Xi^u \varphi(x) = |\varphi(x+u)| + |\varphi(x)|$. Тоді можемо записати ($K = 1/(\kappa\alpha)$)

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, z, y) &= K^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, \hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \Delta_y^{u_j} g(\tau, z, y) du_1 \dots du_{k+1}, \\ \mathbf{B}_x^{\hat{a}} g(t-\tau, x, z) &= K \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, \hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \Delta_x^{u_0} g(t-\tau, x, z) du_0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t, x, y) &= K^{k+2} \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, \hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \Delta_x^{u_0} g(t-\tau, x, z) du_0 \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, \hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \Delta_y^{u_j} g(\tau, z, y) du_1 \dots du_{k+1} \end{aligned} \quad (16)$$

Підінтегральна функція в останній формулі може бути оцінена зверху за абсолютною величиною виразом

$$\tau^k \frac{1}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \Xi_x^u \frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \Xi_y^{u_j} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+\alpha-1}}$$

Інтеграл від нього за (τ, z) по $(0, t) \times \mathbb{R}^d$ не перевищує (див. [1, лема 5])

$$t^{k+2+1/\alpha} \frac{const}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{C \in C(k+1, j)} \left(t^{1/\alpha} + \left| y + \sum_{l \in C} u_l - x - u_0 \right| \right)^{-d-\alpha+1}, \quad (17)$$

де $C(k+1, j)$ множина комбінацій з $k+1$ перших натуральних чисел по

j . Така функція інтегровна за $(u_0, u_1, \dots, u_{k+1})$ по $D_\varepsilon = \prod_{j=0}^{k+1} \{|u_j| \geq \varepsilon\}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Збіжність інтеграла (15) дозволяє перейти в інтегралі (17) по D_ε до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Причому, ми можемо попередньо змінити потрібним чином порядок інтегрування.

Отже, в інтегралі з рівності (16) можна змінити порядок інтегрування і, враховуючи лінійність різницевих операторів Δ^u , одержати рівність

$$V_{k+1}(t, x, y) = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \mathbf{B}_x^{\hat{a}} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, z) g(\tau, z, y) dz =$$

$$= \frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \mathbf{B}_x^{\hat{a}} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(t, x, y).$$

З врахуванням твердженнь лем 1 і 2 маємо

$$V_{k+1}(t, x, y) = (-1)^{k+2} \frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+2} g(t, x, y).$$

Цим і завершується доведення рівностей (14). Крім того, з леми 1 маємо, що при всіх $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ та $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$, $y \in \mathbf{R}^d$

$$V_k(t, x, y) = \frac{(|a|t)^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^{k+1} g(t, x, y).$$

$$\text{Тоді } V(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|a|t)^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^{k+1} g(t, x, y) \text{ і}$$

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= g(t, x, y) + \\ &+ |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^d} g(t-\tau, x, z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|a|\tau)^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, x, y) dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Ряд в рівності (18) збігається рівномірно по $z \in \mathbf{R}^d$ і локально рівномірно по $\tau > 0$. Тому можливе почленне інтегрування цього ряду, після чого другий доданок правої частини рівності (18) прийме вигляд

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbf{R}^d} g(t-\tau, x, z) (\mathbf{B}_z^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, z, y) dz = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbf{R}^d} g(t-\tau, x, z) (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, z, y) dz, \end{aligned}$$

де враховано твердження леми 1.

Аналогічні до наведених вище викладки дозволяють винести оператор $(\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1}$ з-під інтеграла по z і одержати

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= g(t, x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(t, x, y) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^k g(t, x, y). \end{aligned} \quad (19)$$

Врахувавши рівність (4), можемо записати

$$(\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^k g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda$$

Отже,

$$G(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda \quad (20)$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k$ збігається локально рівномірно по λ на \mathbf{R}^d . Тому для кожного $r > 0$ і $U_r = \{\lambda \in \mathbf{R}^d : |\lambda| \leq r\}$

$$\int_{U_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{U_r} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda \quad (21)$$

Оскільки $\left| \frac{1}{k!} \int_{U_r} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda \right| \leq$

$$\leq \frac{(t|a|)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} (|\lambda|^{k(\alpha-1)} \exp\{-ct|\lambda|^{\alpha}\}) d\lambda = R_k,$$

а останній інтеграл можна легко обчислити і одержати

$$R_k = \frac{(t|a|)^k}{k!} \frac{S_d}{\alpha} (ct)^{-\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right),$$

де S_d – площа d -вимірної одиничної сфери, то ряд в правій частині рівності (21) збігається рівномірно по r на $(0, +\infty)$, бо

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \frac{|a|t}{k+1} (ct)^{1/\alpha-1} \frac{\Gamma\left(\frac{d+(k+1)(\alpha-1)}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Перейшовши в рівності (21) до границі при $r \rightarrow +\infty$, з врахуванням (20), одержимо

$$G(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\alpha-2} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(|\lambda|^{\alpha-2} ta + x - y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda.$$

Теорема доведена.

2. Невід'ємність фундаментального розв'язку

Явна формула для фундаментального розв'язку псевдо-диференціального рівняння (5) зі сталою функцією $a(x) = a \in \mathbb{R}^d$ дозволяє дослідити його невід'ємність.

Розглянемо випадок $d = 1$. Задавши деякі конкретні значення $c > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, можемо побудувати графіки функцій $G(t, x, y)$, як функцій від y при різних значеннях $\alpha \in (1, 2]$. На рисунку 1 зображено такі графіки одержані з допомогою Wolfram Mathematica 8. Ми взяли $c = 1/2$, $t = 2$, $x = 0$, $a = 1$.

Видно, що функція $G(t, x, y)$ приймає від'ємні значення при $\alpha \in (1, 2)$ і тільки при $\alpha = 2$ маємо $G(t, x, y) > 0$. Останній випадок відповідає вінеровому процесу зі сталим переносом.

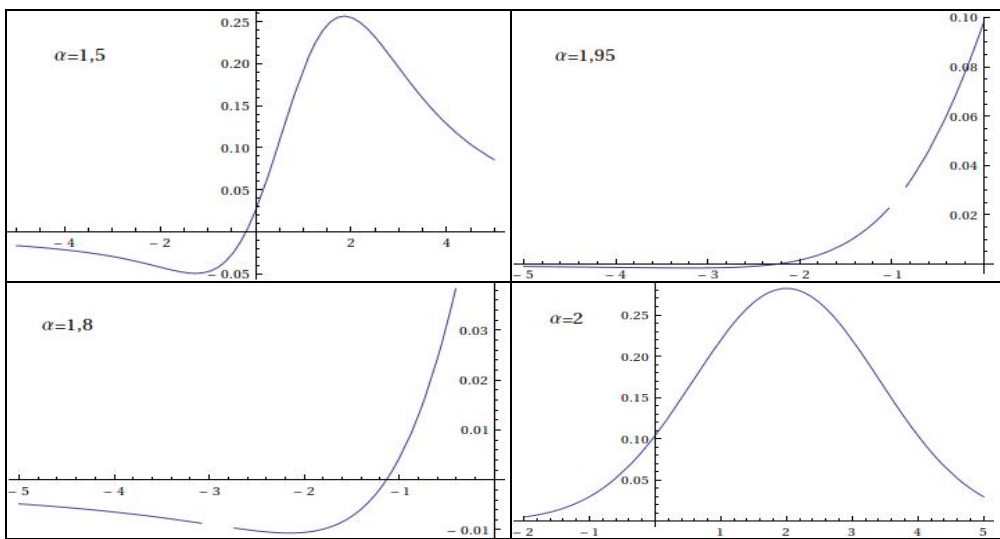


Рис. 1: Графіки функції $G(t, x, y)$ при фіксованих (t, x) .

Література

1. Кочубей А. Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Известия АН СССР, 1988, **52** (5), 909–934.
2. Osypchuk M.M. On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations // Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1).

THE EXPLICIT FORM OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF ONE PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

G. S. Bigun¹, M. M. Osypchuk²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine*

79060, Lviv, Naukova St., 3-b

e-mail: freischunhaluna@yandex.ru

²*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*

76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenka str., 57;

e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

We consider pseudo-differential equation of the form $u'_t = \mathbf{A}u + (a, \mathbf{B})u$ where a is a vector in \mathbf{R}^d , \mathbf{B} is a pseudo-differential operator with symbol $(i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^d}$ and $c > 0$, $\alpha \in (1, 2]$ are fixed constants. The fundamental solution of this equation is constructed in the form of inverse Fourier transform. Some of its properties investigated.

Keywords: *pseudo-differential operator, fundamental solution, stable stochastic process.*