УДК 519.2

М. М. Осипчук (M. M. Osypchuk) (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ)

М. І. Портенко (M. I. Portenko) (Інститут математики НАН України, Київ)

ПРО ПОТЕНЦІАЛИ ПРОСТОГО ШАРУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ON SINGLE-LAYER POTENTIALS FOR A CLASS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

For a class of pseudo-differential equations connected with symmetric stable stochastic processes, a kind of single-layer potentials is considered. An operator analogous to that of the gradient in the classical potential theory is pointed out and an analogue of the classical theorem on the jump of the (co-)normal derivative of a single-layer potential is established. This result allows one to construct a solution to some initial-boundary value problem for a pseudo-differential equation of the kind.

В роботі побудовано потенціали простого шару для псевдо-диференціальних рівнянь пов'язаних із симетричними стійкими випадковими процесами. Виділено оператор, який є аналогом градієнта в класичній теорії, і доведена теорема, аналогічна класичній теоремі про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару. З допомогою цієї теореми побудовано розв'язки деяких початково-крайових задач для псевдо-диференціальних рівнянь згаданого класу.

В работе построены потенциалы простого слоя для псевдо-дифференциальных уравнений связанных с симметричными устойчивыми случайными процессами. Выделено оператор, который является аналогом градиента в классической теории, и доказана теорема, аналогичная классической теореме о скачке (ко-)нормальной производной потенциала простого слоя. С помощью этой теоремы построены решения некоторых начально-краевых задач для псевдо-дифференциальных уравнений упомянутого класса.

Вступ

Протягом останніх років псевдо-диференціальні рівняння стали об'єктом численних публікацій математиків найрізноманітніших спеціалізацій (див., наприклад, книгу [1] і наведений там список літератури по темі). Для авторів цієї статті, як математиків-ймовірнісників, найближчими є ті роботи (наприклад, тритомник [2]), які присвячені псевдо-диференціальним рівнянням параболічного типу, що відповідають певним класам випадкових процесів. Серед таких найпростішими є симетричні стійкі процеси. Їх роль у відповідній теорії потенціалу є такою ж, яку відіграє вінерів процес в класичній теорії.

Однією з найкрасивіших в класичній теорії є теорема про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару. Саме вона дає змогу будувати розв'язки початково-крайових задач типу задачі Неймана або третьої крайової задачі (див., наприклад, книги [3], [4]).

Метою цієї роботи є побудувати щось подібне для псевдо-диференціальних рівнянь, породжених багатовимірними симетричними стійкими процесами. Генератор таких процесів відіграє роль лапласіана в класичній теорії. Ми вказуємо оператор, чия роль в новій теорії подібна до ролі градієнта в класиці. Потім формулюється і доводиться аналог теореми про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару, а з його допомогою будуються розв'язки деяких початково-крайових задач для відповідних псевдо-диференціальних рівнянь.

Автори статті вдячні А. Н. Кочубею за чіткі роз'яснення деяких деталей отриманих ним результатів.

1. Багатовимірні симетричні стійкі процеси

1.1. **Оператор A.** Фіксуємо параметри $c > 0$, $\alpha \in (1, 2)$ та ціле число $d \geq 1$. Визначимо оператор $\mathbf{A}$ його символом: $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ (через $\mathbb{R}^d$ позначається d-вимірний евклідів простір). Це означає, що $\mathbf{A}$ діє на функцію $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, яка є перетворенням Фур'є деякої функції $(\Phi(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$, за правилом $\mathbf{A}\varphi(x) = -c \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha \exp\{i(x, \xi)\}\Phi(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, за умови, що інтеграл в цій формулі є добре визначеним. Інше зображення дії оператора $\mathbf{A}$ на функцію $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ дається наступною формулою $\mathbf{A}\varphi(x) = \dfrac{c}{\varkappa} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \dfrac{\varphi(x + y) - \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), y)}{|y|^{d+\alpha}}\, dy$,

$x \in \mathbb{R}^d$, в припущенні, що функція $\varphi(x)$ є достатньо гладенькою і обмеженою разом зі своїми похідними. В цій формулі стала $\varkappa = -\dfrac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(2-\alpha)\Gamma((\alpha+1)/2)\cos(\pi\alpha/2)}{\alpha(\alpha-1)\Gamma((d+\alpha)/2)}$ залежить лише від $\alpha \in (1,2)$ і розмірності простору d.

1.2. **Щільність ймовірності переходу.** Для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi. \tag{1}$$

Нескладною вправою є перевірка того, що функція g є неперервною за сукупністю змінних, а також задовольняє такі умови:

(1) $g(s+t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(s,x,z)g(t,z,y)\,dz$, $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$;

(2) $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\,dy \equiv 1$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$;

(3) $g(t,x,y) > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Отже, існує процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, для якого g є щільністю (відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$) ймовірності переходу. Більше того, цей процес можна вибрати так, щоб його траєкторії були неперервними справа і не мали розривів другого роду. Саме цей процес і зватиметься симетричним стійким процесом в $\mathbb{R}^d$ (з параметрами c та α).

1.3. **Задача Коші.** Для неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ з дійсними значеннями покладемо

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Легко перевіряється, що ця функція є розв'язком такої задачі Коші:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d; \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Будемо позначати через $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ банахів простір всіх обмежених неперервних функцій $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, для яких $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|$. Через $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ позначатиметься підпростір $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ складений з тих функцій $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, для яких при довільному $\varepsilon > 0$ множина $\{x \in \mathbb{R}^d : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$ є компактом в $\mathbb{R}^d$.

Неважко зрозуміти, що при всіх $t > 0$ функція $u(t,\cdot,\varphi)$, визначена інтегралом (2), є функцією з $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$, якщо такою є функція φ.

З принципу максимуму для рівняння (3) (див., наприклад, [1, лема 4.7]) випливає, що розв'язок задачі Коші (3) — (4) єдиний в класі $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

1.4. **Деякі властивості симетричних стійких розподілів.** Для цілих $d \geq 1$ та $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо $h_d(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{-i(x,\xi) - c|\xi|^\alpha\}\, d\xi$. Функція g, визначена формулою (1), виражається через h_d такою рівністю $g(t,x,y) = t^{-d/\alpha} h_d((y-x)t^{-1/\alpha})$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Наступне зображення функції h_d добре відоме (див., наприклад, [5])

$$h_d(x) = (2\pi)^{-d/2} |x|^{-d/2+1} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} J_{d/2-1}(\rho|x|)\, d\rho, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5}$$

де J_μ означає бессельову функцію, тобто, $J_\mu(z) = \dfrac{(z/2)^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} (1-u^2)^{\mu-1/2} \cos(zu)\, du$ при $\operatorname{Re}\mu > -1/2$ та $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cos z$.

Формула (5) має своїм наслідком наступне твердження, що характеризує поведінку h_d при великих $|x|$ (див. [5]):

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{d+\alpha} h_d(x) = \alpha\, c\, 2^{\alpha-1} \pi^{-d/2-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{6}$$

З цього твердження легко вивести існування такої сталої N, що $h_d(x) \leq N \dfrac{1}{(1+|x|)^{d+\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}^d$, звідки випливає така нерівність для функції g

$$g(t,x,y) \leq N \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}}, \tag{7}$$

що справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Цю нерівність, як і деякі більш загальні, включаючи нерівності для (дробових) похідних від g, можна знайти в [1]. Нижче ми матимемо нагоду скористатись подібними оцінками.

Наступне твердження виглядає майже очевидним для ймовірнісника, однак ми наведемо аналітичне доведення його.

Лема 1. *Нехай $d \geq 2$, ν — фіксований орт в $\mathbb{R}^d$, а $\tilde{x}$ — довільний вектор в $\mathbb{R}^d$ ортогональний до ν. Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}^1$ виконується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda\xi} h_d(\lambda\nu + \tilde{x})\, d\lambda = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-3}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-c(\xi^2+\rho^2)^{\alpha/2}\} \rho^{\frac{d-1}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\, d\rho. \tag{8}$$

Доведення. Позначимо інтеграл в лівій частині (8) через I. З формули (5) випливає рівність $I = \dfrac{2}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} \, d\rho \int\limits_0^{+\infty} J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2})(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi)\, d\lambda$, де $b = |\tilde{x}|$. Внутрішній інтеграл в цій формулі обчислюється (див. [6, гл. III, §16]), а саме

$$\int\limits_0^{+\infty} J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2})(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi)\, d\lambda =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } |\xi| > \rho \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho^{-\frac{d-2}{2}} J_{\frac{d-3}{2}} \left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\rho^2-\xi^2}}{b} \right)^{\frac{d-3}{2}}, \quad \text{якщо } |\xi| < \rho. \end{cases}$$

Тому $I = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} b^{-\frac{d-3}{2}} \int\limits_{|\xi|}^{+\infty} e^{-c\rho^\alpha} \rho\, J_{\frac{d-3}{2}} \left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2} \right) \left(\sqrt{\rho^2-\xi^2} \right)^{\frac{d-3}{2}} d\rho$. Зробивши тут підстановку $\rho' = \sqrt{\rho^2-\xi^2}$, прийдемо до формули (8). $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbb{L}$ *— підпростір* $\mathbb{R}^d$, $\dim \mathbb{L} = k$, $1 \le k < d$. *Для довільних* $\xi \in \mathbb{L}$ *та* $\tilde{x} \in \mathbb{L}^\perp$ *справджується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{L}} e^{i(x,\xi)} h_d(x+\tilde{x})\, dx = (2\pi)^{-\frac{d-k}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-k-2}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\frac{d-k}{2}} \exp\left\{ -c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2} \right\} J_{\frac{d-k-2}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\, d\rho.$$

Зокрема, якщо ν *— фіксований орт в* $\mathbb{R}^d$, $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0 \right\}$, *то для* $\xi \in S$ *та* $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *справедливим є таке співвідношення*

$$\int\limits_S e^{i(x,\xi)} h_d(x+\lambda\nu)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}} \cos(\rho\lambda)\, d\rho. \tag{9}$$

2. Потенціали простого шару.

2.1. **Поверхні класу $H^{1+\gamma}$.** Нехай задана деяка обмежена замкнена поверхня S, яка розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню — D та зовнішню — $\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$ (через $\bar{\Gamma}$ позначається замкнення множини $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$). Будемо припускати, що в кожній точці $x \in S$ існує дотична до S гіперплощина. Через $\nu(x)$ позначатиметься одиничний вектор зовнішньої нормалі до S в точці $x \in S$. Локальною системою координат в точці $x \in S$ зветься така ортогональна система координат $(y^1, y^2, \dots, y^d)$ з початком в точці x, що $y^d = (\nu(x), y)$. Припускатиметься, що існує таке $r_0 > 0$, що для будь-якої точки $x \in S$ частина поверхні $S_{r_0}(x) = S \cap B_{r_0}(x)$ (тут і далі через $B_\delta(z)$ позначається замкнена куля в

$\mathbb{R}^d$ радіуса $\delta > 0$ з центром в точці $z \in \mathbb{R}^d$) може бути заданою в локальній системі координат (з початком в точці x) рівнянням $y^d = F(y^1, y^2, \ldots, y^{d-1})$, де F — деяка однозначна функція. Нагадаємо (див., наприклад, [4, глава IV, §4]), що S зветься поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0,1)$, якщо для кожного $x \in S$ відповідна функція F в області $\sum_{k=1}^{d-1} (y^k)^2 \le r_0^2/4$ має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, які задовольняють в цій області умову Гельдера з показником γ і з константою, що не залежить від x. Надалі будемо припускати, що поверхня S є саме такою.

Елементарно доводиться, що для замкненої поверхні S класу $H^{1+\gamma}$ виконується нерівність $\int\limits_S \dfrac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \le \tilde{K}\ t^{-1-1/\alpha}$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою константою $\tilde{K} > 0$. Ця нерівність разом з (7) приводить до оцінки

$$\int\limits_S g(t,x,y)\, d\sigma_y \le K\ t^{-1/\alpha}, \tag{10}$$

що справедлива при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $K > 0$.

2.2. **Потенціал простого шару.** Нехай на множині $(0, +\infty) \times S$ задана неперервна функція v, яка задовольняє нерівність $|v(t,x)| \le C\ t^{-\beta}$ при всіх $(t,x) \in (0, +\infty) \times S$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$. Розглянемо функцію U змінних $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$, що визначається рівністю $U(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y$. Неважко бачити, що це неперервна функція по сукупності змінних в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, яка задовольняє таку нерівність $|U(t,x)| \le C\, K\, \dfrac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-1/\alpha)}{\Gamma(2-\beta-1/\alpha)}\, t^{1-\beta-1/\alpha}$, де K — стала з (10). Ця функція і зветься потенціалом простого шару (з густиною v “маси”, розподіленою по поверхні S).

Покажемо, що функція U задовольняє рівняння (3) в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. З цією метою оцінимо значення функції $\mathbf{A} g(t, \cdot, y)(x)$ (надалі це буде записуватися коротше $\mathbf{A}_x g(t,x,y)$) в області $t > 0$, $x \notin S$. Користуючись означенням оператора $\mathbf{A}$, можемо записати

$$\mathbf{A}_x g(t,x,y) = -\frac{c}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi =$$

$$= -\frac{c}{(2\pi)^d} t^{-(d+\alpha)/\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha \exp\left\{ i\left(\frac{x-y}{t^{1/\alpha}}, \xi\right) - c|\xi|^\alpha \right\}\, d\xi.$$

Згідно з лемою 4.2 в [1] існує така стала $N > 0$, що при $t > 0$, $x \notin S$ та $y \in S$

$$|\mathbf{A}_x g(t,x,y)| \le \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}} \le \frac{N}{(t^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}},$$

де через $d(x,S)$ позначено відстань від x до S. Тому

$$\int_0^t d\tau \int_S |\mathbf{A}_x g(t-\tau,x,y)||v(\tau,y)|\, d\sigma_y \le C\, N\, |S| \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^\beta((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}},$$

де $|S|$ означає площу поверхні S. Інтеграл в правій частині цієї нерівності скінченний при $t > 0$. Така ж нерівність виконується і у випадку, якщо замість $\mathbf{A}_x g(t-\tau,x,y)$ в лівій частині буде стояти $\dfrac{\partial g(t-\tau,x,y)}{\partial t}$, оскільки $g(t-\tau,x,y)$, як функція аргументів $(t,x) \in (\tau,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, задовольняє рівняння (3) при фіксованих $\tau > 0$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Залишається, отже, довести, що при фіксованих $x \notin S$ та $t > 0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_S g(\varepsilon,x,y)v(t,y)\, d\sigma_y = 0$. Але це випливає з нерівності (7): $\int\limits_S g(\varepsilon,x,y)|v(t,y)|\, d\sigma_y \le C\, N\, |S|\, t^{-\beta} \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}}$. Таким чином, $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{A}U$ в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$.

Цей результат кореспондується з відповідним класичним результатом: поза поверхнею-носієм потенціалу простого шару він є розв'язком відповідного параболічного рівняння (див. [4, гл. V]).

2.3. **Оператор B.** Позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, символом якого є векторна функція $(2ic|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ (тут i — уявна одиниця). Це означає, що дія оператора $\mathbf{B}$ на функцію $\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, визначається рівністю $\mathbf{B}\varphi(x) = 2ic \int\limits_{\mathbb{R}^d} \xi|\xi|^{\alpha-2} e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, в припущенні, що цей інтеграл є добре визначеним.

Інша формула для результату дії оператора $\mathbf{B}$ на досить гладеньку функцію $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$: $\mathbf{B}\psi(x) = \dfrac{2c}{\alpha\varkappa} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \dfrac{\psi(x+y)-\psi(x)}{|y|^{d+\alpha}}\, y\, dy$, $x \in \mathbb{R}^d$, де $\varkappa$ — стала, визначена вище (див. п. 1.1).

Оператор $\mathbf{B}$ буде відігравати роль, подібну до ролі градієнта в класичній теорії. Зауважимо, що $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{div}\,\mathbf{B}$.

Для фіксованого орта $\nu \in \mathbb{R}^d$ через $\mathbf{B}_\nu$ позначаємо оператор, що визначається символом $(2ic|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом оператора диференціювання в напрямку ν.

Позначимо через $g_\nu(t,x,y)$ результат дії оператора $\mathbf{B}_\nu$ на функцію g, як функцію середнього аргументу $g_\nu(t,x,y) = \mathbf{B}_\nu g(t,\cdot,y)(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. З формули (1) випливає рівність $g_\nu(t,x,y) = \dfrac{2ic}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu)\, d\xi$, що справджується при

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Інтегрування частинами тут приводить до формули

$$g_\nu(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\,\frac{(y-x,\nu)}{t}\,g(t,x,y). \tag{11}$$

Ця формула цілком подібна до похідної в напрямку ν щільності ймовірності переходу вінерового процесу (ця остання отримується з формули (1), якщо там покласти $\alpha = 2$ та $c = 1/2$).

Нехай тепер S, як і вище, є заданою обмеженою замкненою поверхнею в $\mathbb{R}^d$, що належить класу $H^{1+\gamma}$. Фіксуємо точку $x_0 \in S$ і покажемо, що при $0 < \tau < t$ існує інтеграл $\int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y$, де v — функція на $(0,+\infty)\times S$, яка задовольняє умови п. 2.2. Позначивши цей інтеграл через I і врахувавши (11), можемо записати

$$I = \frac{2}{\alpha(t-\tau)}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = I' + I'',$$

де I' відповідає інтегралу по $S_{r_0/2}(x_0)$, а I'' — по $S \setminus S_{r_0/2}(x_0)$.

Для $y \in S_{r_0/2}(x_0)$, використовуючи локальну систему координат (див. п. 2.1), будемо мати $|(y,\nu(x_0))| \le const\,|y|^{1+\gamma}$ (тут $const$ не залежить від x_0). Оцінка (7) дозволяє тепер твердити, що $|I'| \le const\,\tau^{-\beta}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)}\frac{|y|^{1+\gamma}\,d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y|)^{d+\alpha}} \le const\,\tau^{-\beta}(t-\tau)^{-1+\gamma/\alpha}$.

Далі, існують додатне число δ_0 і скінченна кількість точок x_1, x_2,..., x_{m_0} на поверхні S, таких, що $S \setminus S_{r_0/2}(x_0) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m_0} S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому $\inf\limits_{y\in S_{r_0/2}(x_k)}|y-x_0| \ge \delta_0$ при всіх $k = 1,2,\ldots,m_0$. Але тоді $|I''| \le const\,\tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha}+\delta_0)^{-d-\alpha}$.

З нерівностей для I' та I'' випливає таке твердження.

Лема 2. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d \backslash S$ на дві відкриті підмножини, а $(v(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція, що задовольняє умову $|v(t,x)| \le C\,t^{-\beta}$, $t > 0$, $x \in S$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$, то для будь-якого $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при $(t,x) \in (0,T]\times S$ справджується оцінка*

$$\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le C_T\,t^{-\beta+\gamma/\alpha}. \tag{12}$$

Інтеграл в лівій частині (12) зветься прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x \in S$, на потенціал простого шару. Лема 2 в класичній теорії звучить так: пряме значення (ко-)нормальної похідної простого шару існує.

Зауваження 1. *Міркування, подібні до тих, що доводять лему 1 §3 глави I книги* [4], *дозволяють твердити, що ліва частина нерівності* (12) *є неперервною функцією аргументів* $(t,x) \in (0,+\infty) \times S$.

2.4. **Основний результат.** Нехай поверхня S та функція v на $(0,+\infty)\times S$ задовольняють умови леми 2. Знову фіксуємо точку $x_0 \in S$ і для $t>0$ та $x \notin S$ розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y. \tag{13}$$

Його існування випливає з міркувань аналогічних наведеним в п. 2.2, а саме,

$$\left|\int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le \frac{2}{\alpha}\,N\,C\,\tau^{-\beta}\int\limits_S \frac{|y-x|\,d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \frac{2}{\alpha}\,N\,C\,\tau^{-\beta}\int\limits_S \frac{d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \frac{2}{\alpha}\,N\,C\,|S|\,\tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha}+d(x,S))^{-d-\alpha+1},$$

звідки $\displaystyle\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S |g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)|\,d\sigma_y \le \frac{2}{\alpha}\,N\,C\,|S|\int\limits_0^t \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha}+d(x,S))^{-d-\alpha+1}\,d\tau$, і права частина тут скінченна при $t>0$.

Інтеграл (13) є результатом застосування оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$, $x_0 \in S$, до потенціала простого шару $U(t,x) = \displaystyle\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y$ в точці $(t,x) \in (0,+\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$. Позначимо інтеграл (13) через $U_{\nu(x_0)}(t,x)$. Нашим завданням тепер буде дослідити поведінку функції $U_{\nu(x_0)}(t,x)$ при $x \to x_0$. Як і в класиці, функція $U_{\nu(x_0)}$ при переході через поверхню робить стрибок. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* S *— замкнена обмежена поверхня в* $\mathbb{R}^d$ *класу* $H^{1+\gamma}$, *що розділяє множину* $\mathbb{R}^d\setminus S$ *на дві відкриті підмножини, а* $(v(t,x))_{t>0,x\in S}$ *— неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову* $|v(t,x)| \le C\,t^{-\beta}$ *з деякими сталими* $C>0$ *та* $\beta<1$, *то при фіксованих* $t>0$ *та* $x_0 \in S$ *справджується співвідношення*

$$\lim_{x\to x_0\pm}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = \mp v(t,x_0) + \int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{14}$$

де $x \to x_0+$ *(відповідно* x_0-*) означає, що* x *наближається до* x_0 *вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі* K *в* $\mathbb{R}^d$ *з вершиною в точці* x_0, *такому, що (див. позначення в п. 2.1)* $K \subset (\mathbb{R}^d\setminus\bar{D})\cup\{x_0\}$ *(відповідно* $K \subset D\cup\{x_0\}$*).*

Доведення. Доведення цієї теореми багато в чому повторює доведення класичного результату, хоча є і певні відмінності; ми, тому, наведемо короткий його виклад. Зокрема, досить розглянути лише випадок, коли x наближається до x_0 вздовж нормалі $\nu(x_0)$, тобто, $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$, де $\delta \in \mathbb{R}^1$ і $\delta \to 0$. Тоді

$$U_{\nu(x_0)}(t,x) = \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y -$$

$$-\frac{2}{\alpha}\,\delta\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = J_1 + J_2.$$

Позначимо інтеграл в лівій частині (12) через $V(t,x)$, $t>0$, $x \in S$. Доданок J_1 в попередній формулі можна записати так:

$$J_1 = V(t,x_0) + \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))v(\tau,y)(g(t-\tau,x,y)-g(t-\tau,x_0,y))\,d\sigma_y =$$

$$= V(t,x_0) + J_1'.$$

Доведемо, що $\lim\limits_{\delta\to 0} J_1' = 0$. Як видно з доведення леми 2 (див. оцінки для I' та I'')

$$\left|\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le \frac{const}{(t-\rho)^\beta}\rho^{\frac{\gamma}{\alpha}},$$

і праву частину тут можна зробити як завгодно малою вибором досить малого $\rho > 0$ ($t > 0$ — фіксоване).

Покажемо, що так само малим буде і інтеграл

$$\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad x = x_0+\delta\nu(x_0),$$

який ми подамо як суму двох доданків: перший з них відповідає внутрішньому інтегралові по $S_{r_0/2}(x_0)$, а другий — по $S\setminus S_{r_0/2}(x_0)$. Позначимо ці доданки через Q_1 та Q_2 відповідно. Можемо записати $|Q_1| \le const\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|^{1+\gamma}\,d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}$.

Позначимо через $\tilde{y}$ ортогональну проекцію $y \in S_{r_0/2}(x_0)$ на площину, дотичну до S в точці x_0. Очевидно, $|y-x| \ge |\tilde{y}-x_0|$. З іншого боку, виконується нерівність $0 < const_1 \le \frac{|y-z|}{|\tilde{y}-z|} \le const_2$ для $y \in S_{r_0/2}(x_0)$ та $z = x_0+\zeta\nu(x_0)$ при $\zeta \in [-|\delta|,|\delta|]$ (це доведено в

§1 глави V книги [4]). Тому, переходячи до локальних координат з початком в точці x_0, будемо мати нерівності (через Δ_{x_0} позначено деяку область в $\mathbb{R}^{d-1}$)

$$|Q_1| \leq const \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{\Delta_{x_0}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma}\, d\tilde{y}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{const}{(t-\rho)^\beta} \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma}\, d\tilde{y}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} = \frac{const}{(t-\rho)^\beta} \rho^{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Таким чином, Q_1 стає малим, коли $\rho \to 0+$. Доданок Q_2 оцінюється величиною, що також стає малою, коли $\rho \to 0+$, з допомогою міркувань, подібних до тих, що використані при доведенні леми 2 (див. оцінки для I'').

Тепер зафіксуємо таке $\rho > 0$, щоб сума $|Q_1| + |Q_2|$ була досить малою, і розглянемо інтеграл $\frac{2}{\alpha} \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S (y - x_0, \nu(x_0)) v(\tau, y)(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y))\, d\sigma_y$. Позначивши цей інтеграл через Q_3, зауважимо, що функція $g(t-\tau, x, y)$ рівномірно неперервна на множинах $(\tau, x, y) \in [0, t-\rho] \times K_1 \times K_2$, де K_1 та K_2 — довільні компакти в $\mathbb{R}^d$. Тому $\lim\limits_{\delta \to 0} Q_3 = 0$ (нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$). Цим завершується доведення співвідношення: $\lim\limits_{\delta \to 0} J_1' = 0$. Отже,

$$\lim_{\delta \to 0} J_1 = V(t, x_0). \tag{15}$$

Залишається дослідити поведінку J_2 при $\delta \to 0$. Покладемо $J_2 = \sum\limits_{k=1}^{4} J_2^{(k)}$, де

$$J_2^{(1)} = -\frac{2\delta}{\alpha} v(t, x_0) \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(2)} = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)(v(t, x_0) - v(\tau, y))\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(3)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(4)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S \setminus S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y.$$

Для оцінки $J_2^{(4)}$ при фіксованому $\varepsilon > 0$ використаємо міркування, подібні до тих, що доводять лему 2 (див. оцінювання там величини I''), а саме, існують такі точки $x_k \in$

$S\setminus S_\varepsilon(x_0)$, $k=1,2,\ldots,l_0$, та таке число $p_0>0$, що $S\setminus S_\varepsilon(x_0)\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{l_0}S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому $\inf\limits_{|\zeta|\le|\delta|}\inf\limits_{y\in S_{r_0/2}(x_k)}|y-x_0-\zeta\nu(x_0)|\ge p_0$ при всіх $k=1,2,\ldots,l_0$ (числа l_0 та p_0 залежать від ε). Тому для фіксованого $\varepsilon>0$ маємо $|J_2^{(4)}|\le\dfrac{2}{\alpha}\,l_0\,N\,C\,|\delta|\displaystyle\int\limits_0^t\tau^{-\delta}((t-\tau)^{1/\alpha}+p_0)^{-d-\alpha}\,d\tau\to0$, коли $\delta\to0$.

Далі, при фіксованому $\rho>0$, маємо оцінку $|J_2^{(3)}|\le\dfrac{2}{\alpha(1-\beta)}\,N\,C\,|S|\,\rho^{-\frac{d+\alpha}{\alpha}}|\delta|\to0$, коли $\delta\to0$.

Якщо тепер довести, що існує $\lim\limits_{\delta\to0}J_2^{(1)}$ при фіксованих $\rho>0$ та $\varepsilon>0$, то звідси буде випливати, що $\overline{\lim\limits_{\delta\to0}}|J_2^{(2)}|$ може бути зроблена як завгодно малою вибором ρ та ε внаслідок того, що функція v неперервна в точці (t,x_0).

Позначимо через Π_{x_0} гіперплощину в $\mathbb{R}^d$, дотичну до S в точці x_0 і обчислимо границю інтеграла $R=\dfrac{2\delta}{\alpha}\displaystyle\int\limits_{t-\rho}^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{\Pi_{x_0}}g(t-\tau,x_0+\delta\nu(x_0),y)\,d\sigma_y$, коли $\delta\to0$. Використовуючи формулу (9), можемо записати $R=\dfrac{2\delta}{\pi\alpha}\displaystyle\int\limits_{t-\rho}^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_0^{+\infty}e^{-c(t-\tau)r^\alpha}\cos(r\delta)\,dr$. Інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі приводить до виразу $R=\dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int\limits_{t-\rho}^t d\tau\int\limits_0^{+\infty}e^{-c(t-\tau)r^\alpha}r^\alpha\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr$. Так звана друга теорема про середнє значення в інтегральному численні дозволяє тут змінити порядок інтегрування (див., наприклад, [6]). Тому $R=\operatorname{sign}\delta-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}e^{-c\rho r^\alpha}\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr$, звідки $\lim\limits_{\delta\to0\pm}R=\pm1$.

Тепер неважко зрозуміти, що $\lim\limits_{\delta\to0\pm}J_2^{(1)}=\mp v(t,x_0)+R_1(\varepsilon,\rho)$, де $R_1(\varepsilon,\rho)$ стає як завгодно малим, якщо $\varepsilon>0$ та $\rho>0$ вибрані досить малими. Цим завершується доведення факту $\lim\limits_{\delta\to0\pm}J_2=\mp v(t,x_0)$, який разом з (15) і завершує доведення теореми 1. $\square$

Зауваження 2. *Нехай $\nu\in\mathbb{R}^d$ — фіксований орт, а $S=\{x\in\mathbb{R}^d:(x,\nu)=0\}$ — гіперплощина в $\mathbb{R}^d$, ортогональна до ν. Формально теорема 1 не може бути застосована до гіперплощини, однак доведення подібного твердження в цьому випадку значно спрощується (див. [7]). Більше того, в цьому випадку в правій частині формули (14) буде відсутній другий доданок, оскільки $g_\nu(t-\tau,x_0,y)=\dfrac{(y-x_0,\nu)}{t-\tau}\,g(t-\tau,x_0,y)=0$ при $y\in S$,*

$x_0 \in S$. Отже, аналог теореми 1 для гіперплощини S звучить так

$$\lim_{x\to x_0\pm} \int_0^t d\tau \int_S g_\nu(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = \mp v(t,x_0).$$

3. Початково-крайова задача

3.1. **Постановка задачі.** Нехай задана поверхня S в $\mathbb{R}^d$, яка задовольняє умови теореми 1, і нехай задані неперервні функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ та $(q(x))_{x\in S}$ з дійсними значеннями, причому φ припускається обмеженою. Нагадаємо: $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$; так само $\|q\| = \max\limits_{x\in S} |q(x)|$.

Задача полягає в побудові такої неперервної функції $(u(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка

(1) задовольняє рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}u$ в області $(t,x) \in (0,+\infty)\times(\mathbb{R}^d \setminus S)$;

(2) задовольняє початкову умову $u(0+,x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$;

(3) задовольняє граничну умову $(1+q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x+) - (1-q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x-) = 0$ при всіх $t>0$, $x\in S$ (тут $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x\pm)$ — недотичні границі функції $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,z)$, коли $z\to x\pm$, див. теорему 1).

3.2. **Розв'язок.** Покладемо для $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{16}$$

де $(v(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ — невідома функція. Нашим завданням тепер буде побудувати функцію v так, щоб для u виконувались умови (1) — (3)

З теореми 1 випливає рівність (для $t>0$ та $x\in S$)

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x\pm) = \int_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy \mp q(x)v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{17}$$

якщо тільки функція v неперервна при $(t,x)\in(0,+\infty)\times S$.

Поклавши $v(t,x) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x+) + \mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x-))$, $t>0$, $x\in S$, дістанемо інтегральне рівняння для функції v:

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int_0^t d\tau \int_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{18}$$

де $t > 0$, $x \in S$. Це рівняння розв'язується методом послідовних наближень, а саме, покладемо $v_0(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in S$, а для $n \geq 1$

$$v_n(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v_{n-1}(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t > 0,\ x \in S.$$

Для v_0 справедлива оцінка $|v_0(t,x)| \leq L\,\|\varphi\|\,t^{-1+1/\alpha}$, $t > 0$, $x \in S$, де стала L визначається рівністю $L = \dfrac{2}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |z|h_d(z)\,dz$ (цей інтеграл обчислюється, але для нас зараз його точне значення неважливе). Фіксуємо тепер довільне $T \in (0,+\infty)$ і зауважимо, що з доведення леми 2 випливає така нерівність $\int\limits_S |g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)|\,d\sigma_y \leq K_T\,(t-\tau)^{-1+\frac{\gamma}{\alpha}}$, справедлива при всіх $(t,x) \in (0,T] \times S$ з деякою сталою $K_T > 0$. Тепер індукцією по n дістаємо оцінки

$$|v_n(t,x)| \leq L\,\Gamma(1/\alpha)\|\varphi\|\,(K_T\|q\|\Gamma(\gamma/\alpha))^n\,\frac{t^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1+n\gamma}{\alpha}\right)}, \tag{19}$$

справедливі при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$ та $n = 0,1,\ldots$. Очевидно, ряд

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t,x) \tag{20}$$

збігається і є неперервною функцією аргументів $(t,x) \in (0,T] \times S$, яка задовольняє рівняння (18), а також умову $|v(t,x)| \leq N_T\,t^{-1+1/\alpha}$, $t \in (0,T]$, $x \in S$, де $N_T > 0$ — деяка стала, що, можливо, залежить від T.

Підставляючи побудовану функцію v у формулу (16), дістаємо функцію u, яка задовольняє умову (1), що випливає з результатів п. 1.3 та п. 2.2. З (17) та (18) випливають рівності $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x\pm) = (1 \mp q(x))v(t,x)$, $t > 0$, $x \in S$, які мають своїм наслідком факт, що функція u задовольняє умову (3). Щоб довести, що функція u задовольняє також умову (2), треба показати, що другий доданок в правій частині (16) прямує до нуля, коли $t \to 0+$, при кожному $x \in \mathbb{R}^d$. Це буде випливати з такого твердження.

Лема 3. *Нехай $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $t_0 > 0$, що при $\tau \in (0,t_0)$ виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy\right| \leq \varepsilon\,\tau^{-1+1/\alpha}, \quad x \in S. \tag{21}$$

Доведення. Зауважимо, що $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\,dy = 0$ при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy.$$

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо $r > 0$ так, щоб $\sup\limits_{x\in S}\sup\limits_{y\in B_r(x)} |\varphi(y)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2L}$, де L — стала з нерівності для v_0. Тоді $\left|\int\limits_{B_r(x)} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}\tau^{-1+1/\alpha}$ при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Інтеграл по $\mathbb{R}^d \setminus B_r(x)$ при фіксованому $r > 0$ оцінимо так

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_r(x)} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\right| \le \frac{4}{\alpha}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_r(x)} |y-x| g(\tau,x,y)\,dy \le$$

$$\le \frac{4}{\alpha}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1}r^{-\beta_0}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |y-x|^{1+\beta_0} g(\tau,x,y)\,dy \le \frac{4}{\alpha r^{\beta_0}}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1+(1+\beta_0)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |z|^{1+\beta_0} h_d(z)\,dz,$$

де $\beta_0 \in (0,\alpha-1)$, так що останній інтеграл скінченний. Звідси видно, що при $\tau \in (0,t_0)$ цей вираз буде меншим, ніж $\frac{\varepsilon}{2}\,\tau^{-1+1/\alpha}$, якщо тільки t_0 вибране досить малим. Лему доведено. □

Тепер можемо сформулювати основне твердження третього розділу.

Теорема 2. *Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє умови теореми 1, $(q(x))_{x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, а $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то початково-крайова задача (1) — (3) має такий розв'язок, який зображається формулою* (16) *з функцією v, визначеною з допомогою ряду* (20).

Доведення. Нехай задано $\varepsilon > 0$ і нехай t_0 вибрано так, що виконується (21). Тоді з оцінок (19) випливає, що сума ряду (20) буде задовольняти нерівність $|v(\tau,x)| \le \varepsilon\,\tilde{N}_T\,\tau^{-1+1/\alpha}$ при $\tau \in (0,t_0)$, $x \in S$, де $\tilde{N}_T$ — деяка стала. Тепер, враховуючи нерівність (10), дістаємо таку оцінку для другого доданку в правій частині (16)

$$\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le \varepsilon\,\tilde{N}_T\|q\|\,K\int\limits_0^t \tau^{-1+1/\alpha}(t-\tau)^{-1/\alpha}\,d\tau =$$

$$= \varepsilon\,\tilde{N}_T\|q\|\,K\,\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha),$$

якщо тільки $t \in (0,t_0)$. Цим завершується доведення теореми 2. □

3.3. **Випадок гіперплощини.** Як вже зазначалось, гіперплощина $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\}$, де $\nu \in \mathbb{R}^d$ — фіксований орт, не підпадає під дію теорем 1 та 2, однак відповідні міркування можуть бути проведені і для неї (див. [7]). Більше того, розв'язок u задачі (1) — (3) для гіперплощини S може бути зображений такою формулою $u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, де функція G визначається явно рівністю

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)g_\nu(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \notin S$ (у випадку гіперплощини вимагаємо додатково, щоб q була обмеженою функцією). Неважко вивести з теореми 1 (точніше, з її аналога для гіперплощини), що $G(t,x,y\pm) = (1 \pm q(x))g(t,x,y)$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Та обставина, що функція G задається тут явною формулою, є наслідком спрощеного варіанту теореми 1 у випадку гіперплощини (див. зауваження в п. 2.4). Одновимірний випадок розглянутий в роботі [8].

Література

[1] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Operator Theory Advances and Applications, vol. 152, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. – 387 p.

[2] *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes. In 3 vol., London: Imperial College Press, Vol. I: Fourier analysis and semigroups., – 2001. – 493 p; Vol. II: Generators and their potential theory. – 2002. – 453 p.; Vol. III: Markov Processes and Applications. – 2005. – 474 p.

[3] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Москва, Наука, 1967. – 736 с.

[4] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа, Москва, Мир, 1968. – 424 с.

[5] *Blumenthal R. M. and Getoor R. K.* Some theorems on stable processes, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 93, number 2, May, 1960, pp. 263–273.

[6] *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье, Москва, Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 360 с.

[7] *Osypchuk M. M., Portenko M. I.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process. Theory of stochastic processes, vol. 19(35) no. 2, 2014. (в друці)

[8] *Льобус Й.-У., Портенко М. І.* Про один клас збурень стійкого процесу. Теорія ймовірностей і математична статистика, № 52, 1995, сс. 102–111.