УДК 519.21

М. М. Осипчук (M. M. Osypchuk)
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна, e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua
М. І. Портенко (M. I. Portenko)
Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601, Україна, e-mail: portenko@imath.kiev.ua

Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння

A symmetric α-stable stochastic process and the third initial-boundary value problem for the corresponding pseudo-differential equation

Розглядається псевдодиференціальне рівняння параболічного типу з оператором дробового диференціювання по просторовій змінній, що є генератором симетричного α-стійкого випадкового процесу в багатовимірному евклідовому просторі. Область, на границі якої задаються крайові умови, обмежується замкненою досить гладкою поверхнею. Крайова умова, що в роботі зветься третьою, прирівнює до нуля деяку лінійну комбінацію граничних значень (зсередини та зовні області) в кожній точці поверхні результату дії на невідому функцію певного псевдодиференціального оператора за просторовою змінною — аналога нормальної похідної в класиці — та граничних значень цієї ж функції в тій же точці.
Ключові слова: симетричний стійкий процес, оператор дробового диференціювання, псевдодиференціальне рівняння, початково-крайова задача, фундаментальний розв'язок

Рассматривается псевдодифференциальное уравнение параболического типа с оператором дробного дифференцирования по пространственной переменной, являющийся генератором симметричного α-устойчивого случайного процесса в многомерном евклидовом пространстве. Область, на границе которой задаются краевые условия, ограничивается замкнутой достаточно гладкой поверхностью. Краевое условие, что в работе называется третьим, приравнивает к нулю некоторую линейную комбинацию предельных значений (изнутри и снаружи области) в каждой точке поверхности результата действия на неизвестную функцию определенного псевдодифференциального оператора по пространственной переменной — аналога нормальной производной в классике — и предельных значений этой же функции в той же точке.
Ключевые слова: симметричный устойчивый процесс, оператор дробного дифференцирования, псевдодифференциальное уравнение, начально-краевая задача, фундаментальное решение

A pseudo-differential equation of parabolic type generated by a multidimensional symmetric α-stable process is considered with an initial condition and some boundary condition posed on the values of an unknown function at the points of the boundary of a given domain. The latter condition is quite similar to that of the so-called third (or mixed) boundary value problem in the theory of differential equations with the difference that a traditional (co-)normal derivative is replaced in our problem with some pseudo-differential operator. Another peculiarity of the problem considered is the two-sided character of the boundary condition that is a consequence of the fact that in the case of α being between 1 and 2 the corresponding process reaches the boundary making infinitely many visits to both the interior and the exterior regions with respect to the boundary.
Keywords: symmetric stable process, the operator of fractional differentiation, pseudo-differential equation, initial boundary value problems, fundamental solution

1. Вступ

Крайові чи початково-крайові задачі посідають важливе місце в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для диференціальних рівнянь параболічного та еліптичного типу узагальнені розв'язки згаданих задач мають явні ймовірнісні представлення (див., наприклад, [2, с. 4–7]). Ми розглядатимемо псевдодиференціальне рівняння параболічного типу виду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

де $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний ($d\ge 2$) евклідів простір, а оператор $\mathbf{A}$ визначається своїм символом $(-c|\lambda|^\alpha)_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$ з деякими фіксованими параметрами $c>0$ та $\alpha\in(1,2)$. Одновимірну ситуацію ($d=1$) ми розглядати не будемо, оскільки результати, які нас тут цікавитимуть, є частковими випадками відповідних тверджень одержаних в [7]. Граничний випадок $\alpha=2$ (і тому $\mathbf{A}=c\cdot\Delta$ з оператором Лапласа Δ) добре вивчений і тут не розглядатиметься.

Оператор $\mathbf{A}$ є генератором симетричного (чи краще — ротаційно інваріантного) α-стійкого процесу. Це — процес Маркова в $\mathbb{R}^d$ (позначимо його через $(x_0(t))_{t\ge 0}$) зі щільністю ймовірності переходу (відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$), що задається рівністю

$$g_0(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\{i(x-y,\xi)-ct|\xi|^\alpha\}\,d\xi, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d.$$

Функція $(g_0(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (1).

Позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, чий символ є $\mathbb{R}^d$-значною функцією $(2ci|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$. Неважко зрозуміти, що між операторами $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ є досить простий зв'язок: $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{div}(\mathbf{B})$, де $\mathbf{div}$ — оператор дивергенції. Таким чином, $\mathbf{B}$ є деяким аналогом градієнта в класичній (при $\alpha=2$) теорії. Для фіксованого орта $\nu\in\mathbb{R}^d$ через $\mathbf{B}_\nu$ позначатимемо оператор, що визначається символом $(2ci|\lambda|^{\alpha-2}(\lambda,\nu))_{\lambda\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом оператора диференціювання в напрямку ν.

Нехай задана деяка обмежена замкнена поверхня S, яка розділяє множину $\mathbb{R}^d\setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D та зовнішню $\mathbb{R}^d\setminus\overline{D}$ ($\overline{D}$ означає замкнення множини D в $\mathbb{R}^d$). Будемо припускати, що в кожній точці $x\in S$ існує дотична до S гіперплощина. Через $\nu(x)$ позначатиметься одиничний вектор зовнішньої нормалі до S в точці $x\in S$.

Нехай $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ — банахів простір неперервних обмежених дійснозначних заданих на $\mathbb{R}^d$ функцій з рівномірною нормою $\|\cdot\|$. Задавши на S деякі неперервні дійснозначні функції $(q(x))_{x\in S}$ та $(r(x))_{x\in S}$ (друга з них вважатиметься невід'ємною), а також, зафіксувавши деяку функцію $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, розглянемо задачу (далі — основна задача) побудови неперервної функції $(U(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє:

(i) псевдодиференціальне рівняння: $\dfrac{\partial U(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}U(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S;$

(ii) початкову умову: $U(0+,x,\varphi)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d;$

(iii) граничну умову: при $t>0$, $x\in S$

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)U(t,x,\varphi).$$

В умові (iii) під записом $f(x+)$ (відповідно $f(x-)$) розуміємо границю функції $(f(y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ в точці $x\in S$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K}\subset(\mathbb{R}^d\setminus\overline{D})\cup\{x\}$

(відповідно $\mathcal{K} \subset D \cup \{x\}$). Таку задачу ми називаємо третьою початково-крайовою задачею для псевдодиференціального рівняння (1). При $r(x) \equiv 0$ вона стає другою початково-крайовою задачею, її розв'язок побудовано в [6]. В цій роботі ми цікавимось фундаментальними розв'язками згаданих задач.

Як і в класичній теорії, сформульовану задачу ми будемо розв'язувати з використанням потенціалів простого шару (див. [6]) та теореми про стрибок нормальної, в нашому випадку, дробової похідної останніх. В наступному пункті будуть сформульовані ця теорема та деякі інші потрібні нам результати. Основні твердження цієї роботи наведені в пункті 3. Там ми побудуємо фундаментальний розв'язок задачі (i) — (iii). При цьому розглянемо окремо випадок $q(x) \equiv 0$, це — так звана симетрична початково-крайова задача, та випадок $r(x) \equiv 0$ — друга початково-крайова задача.

Задача (i) — (iii) у випадку, коли S є гіперплощиною, розглядалася в [7]. Там, звичайно, є свої особливості та складнощі.

Якщо $\alpha = 2$ (та $c = \frac{1}{2}$), то $(x_0(t))_{t\geq 0}$ є вінеровим процесом. Деякі результати стосовно сформульованої задачі в цьому випадку можна знайти, зокрема, в книгах [2, 3] чи статті [1].

2. Допоміжні результати

2.1. **Поверхня класу $H^{1+\gamma}$ та потенціал простого шару.** З кожною точкою $x \in S$ пов'яжемо локальну ортогональну систему координат $(y^1, y^2, \ldots, y^d)$ з початком в цій точці і таку, що $y^d = (\nu(x), y)$ для $y \in \mathbb{R}^d$. Далі припустимо існування такої сталої $r_0 > 0$, що для кожної точки $x \in S$ частина поверхні S: $S_r(x) = S \cap B_r(x)$ ($B_r(x)$ — куля в $\mathbb{R}^d$ радіуса r з центром в точці x) при $r = r_0$ може бути задана в локальній системі координат з початком в точці x рівнянням $y^d = F_x(y^1, \ldots, y^{d-1})$, з деякою однозначною функцією $(F_x(y))_{y\in D_x}$ ($D_x \subset \mathbb{R}^{d-1}$). Поверхня S зветься поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0,1)$, якщо для кожної точки $x \in S$ відповідна функція F_x в області, локальні координати точок якої задовольняють нерівність $\sum_{k=1}^{d-1}(y^k)^2 \leq r_0^2/4$, має частинні похідні $\dfrac{\partial F_x}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, які задовольняють в цій області умову Гельдера з показником γ і константою, що не залежить від x (див., наприклад, [9, Гл. III, §8]).

Нехай наша поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деякою константою $\gamma \in (0,1)$. З властивостей поверхні класу $H^{1+\gamma}$ ми регулярно будемо використовувати те, що існують додатне число δ_0 та натуральне число m такі, що для кожної точки $x \in S$ існує скінченний набір точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ на поверхні S, для яких має місце співвідношення $S \setminus S_{r_0/2}(x) \subset \bigcup_{k=1}^{l} S_{r_0/2}(x_k)$ з деяким $l \leq m$ і при цьому $\min\limits_{1\leq k\leq l} \inf\limits_{y\in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x| \geq \delta_0$.

Для зручності подальших формулювань будемо говорити, що функція $(v(t,x))_{t>0,x\in S}$ належить до класу $\mathbb{U}$, якщо вона неперервна та існує стала $\beta < 1$ така, що для кожного $T > 0$ при всіх $(t,x) \in (0,T] \times S$ має місце нерівність $|v(t,x)| \leq C_T t^{-\beta}$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Далі всі сталі, що залежать від T і вигляд яких для нас не має значення (навіть, якщо вони різні), будуть позначатися саме через C_T.

Потенціалом простого шару називається, задана при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, функція

$$V_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y \tag{2}$$

за умови, що відповідні інтеграли збігаються. Внутрішній інтеграл в правій частині рівності (2) є поверхневим інтегралом першого роду по поверхні S за змінною y. Нагадаємо деякі потрібні нам далі властивості функції V_0 в припущенні, що поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$, а функція v — до класу $\mathbb{U}$ (див. [6]).

По перше, функція $(V_0(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ неперервна на всій області визначення та для кожного $T>0$ задовольняє нерівність $|V_0(t,x)|\le C_T t^{1-\beta-1/\alpha}$ в області $(t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d$.

По друге, в області $(t,x)\in(0,+\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$ виконується рівність $\dfrac{\partial V_0(t,x)}{\partial t}=\mathbf{A}V_0(t,\cdot)(x)$.

І по третє, при фіксованих $t>0$, $x\in S$ має місце співвідношення

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}V_0(t,\cdot)(x\pm)=\mp v(t,x)+\int_0^t d\tau\int_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{3}$$

де $g_0^{\nu(x)}(t,x,y)=\mathbf{B}_{\nu(x)}g_0(t,\cdot,y)(x)$. Інтеграл в правій частині (3) зветься прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$ на потенціал простого шару V_0 в точці $x\in S$ при фіксованому $t>0$. Його існування, як і справедливість формули (3), доведено в [6]. Саме ж співвідношення (3) будемо далі називати твердженням теореми про стрибок.

2.2. **Рівняння збурення.** Для заданої неперервної невід'ємної функції $(r(x))_{x\in S}$ розглянемо функцію $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, що є розв'язком рівняння

$$g(t,x,y)=g_0(t,x,y)-\int_0^t d\tau\int_S g_0(t-\tau,x,z)g(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{4}$$

Для початку зауважимо, що рівняння (4) може бути розв'язане методом послідовних наближень. А саме, шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$g(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g_k(t,x,y), \tag{5}$$

де при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ та $k=1,2,\ldots$

$$g_k(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_S g_0(t-\tau,x,z)g_{k-1}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{6}$$

Для оцінювання членів ряду в (5) скористаємось відомою (див. [4, Гл. IV], а також [8]) нерівністю

$$g_0(t,x,y)\le N\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d \tag{7}$$

з деякою сталою $N>0$ та доведемо наступну пару тверджень, які регулярно будемо використовувати протягом всієї статті.

Лема 1. *Для кожних $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $\theta>-1$ має місце нерівність*

$$\int_S\frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\theta}}\le C\cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \tag{8}$$

з деякою сталою $C>0$.

Доведення. Позначивши через I інтеграл в лівій частині нерівності (8), при $t\ge 1$, очевидно, можна записати (оскільки $d\ge 2$) $I\le|S|\cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(d+\theta)}\le|S|\cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$, де $|S|$ — площа поверхні S.

Якщо ж $0<t<1$ і $\rho(x,S)=\inf\limits_{y\in S}|y-x|\ge\rho_0$ з деякою сталою $\rho_0>0$, то $I\le|S|\cdot\rho_0^{-d-\theta}<|S|\cdot\rho_0^{-d-\theta}t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$. Виберемо тепер $\rho_0>0$ досить малим і розглянемо випадок $x\in\mathbb{R}^d$ з $\rho(x,S)<\rho_0$. Нехай $\tilde{x}\in S$ задовольняє рівність $\rho(x,S)=|x-\tilde{x}|$. Позначимо через $\tilde{y}$

проекцію точки $y \in S$ на гіперплощину дотичну до S в точці $\tilde{x}$. Розіб'ємо поверхню S на дві частини: $S_{r_0/2}(\tilde{x})$ та $S \setminus S_{r_0/2}(\tilde{x})$. Враховуючи властивості поверхні S (див. п. 2.1), можемо записати

$$I \leq \int_{S_{r_0/2}(\tilde{x})} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |\tilde{y} - \tilde{x}|)^{d+\theta}} + \sum_{k=1}^{l} \int_{S_{r_0/2}(x_k)} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}|)^{d+\theta}} = I' + I''.$$

Для I' справджується нерівність

$$I' \leq const \int_0^{r_0/2} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(t^{1/\alpha} + \xi)^{d+\theta}} = const \int_0^{\frac{r_0}{2} t^{-1/\alpha}} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(1 + \xi)^{d+\theta}} \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \leq const \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

де $const$ означає деяку додатну сталу, значення якої для нас неважливе.

Вибравши тепер $\rho_0 < \delta_0$ (число δ_0 означено в пункті 2.1), матимемо $|y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}| > \delta_0 - \rho_0 > 0$ і тому

$$I'' \leq m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} < m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}.$$

Цим і завершується доведення леми. □

Зауважимо, що стала в нерівності (8) залежить тільки від d, θ і поверхні S.

В наступній лемі доводиться нерівність, подібна до тих, що розглядалися А. Н. Кочубеєм (див. [4, Гл. IV]). Ми використаємо запропонований там метод доведення.

Лема 2. *Для кожних $k > -1$, $l > -1$, $\varkappa > k - \alpha + 1$, $\lambda > l - \alpha + 1$ і для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність*

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \int_S \frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+k}} \frac{\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y - z|)^{d+l}}\, d\sigma_z \leq \\ &\leq K \cdot \left(B\left(1 + \frac{1}{\alpha}(\varkappa - k - 1), 1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} + \right. \\ &\left. + B\left(1 + \frac{1}{\alpha}(\lambda - l - 1), 1 + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+k}} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

з деякою сталою $K > 0$, що залежить тільки від d, l, k та поверхні S, де $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Доведення. Розіб'ємо множину інтегрування в лівій частині нерівності, що доводиться, на частини ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ фіксовані):

$$\Pi_1 = \{(\tau, z) : \tau \in (0, t/2]\,, z \in S\}\,, \quad \Pi_2 = \{(\tau, z) : \tau \in (t/2, t]\,, z \in S\}\,,$$

а їх в свою чергу — на частини:

$$\Pi_{11} = \left\{(\tau, z) \in \Pi_1 : (t-\tau)^{1/\alpha} + |z - x| \leq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|)\right\}, \quad \Pi_{12} = \Pi_1 \setminus \Pi_{11};$$

$$\Pi_{21} = \left\{(\tau, z) \in \Pi_2 : \tau^{1/\alpha} + |y - z| \leq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|)\right\}, \quad \Pi_{22} = \Pi_2 \setminus \Pi_{21}.$$

Скориставшись очевидними нерівностями $(u - v)^\rho \geq u^\rho - v^\rho$ при $0 < v < \frac{u}{2}$, $0 < \rho < 1$ та $|y - x| \leq |y - z| + |z - x|$, можемо записати:

$$\tau^{1/\alpha} + |y - z| \geq t^{1/\alpha} - (t-\tau)^{1/\alpha} + |y - x| - |z - x| \geq \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \text{ при } (\tau, z) \in \Pi_{11};$$

$$(t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\geq t^{1/\alpha}-\tau^{1/\alpha}+|y-x|-|y-z|\geq\frac{1}{2}(t^{1/\alpha}+|y-x|)\ \text{при}\ (\tau,z)\in\Pi_{21}.$$

Крім того, очевидно, що

$$(t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|>\frac{1}{2}(t^{1/\alpha}+|y-x|)\ \text{при}\ (\tau,z)\in\Pi_{12};$$

$$\tau^{1/\alpha}+|y-z|>\frac{1}{2}(t^{1/\alpha}+|y-x|)\ \text{при}\ (\tau,z)\in\Pi_{22}.$$

Тому для лівої частини нерівності (9) (позначимо її через I) виконується

$$\begin{aligned}I\leq&\frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+l}}\int_{\Pi_{11}\cup\Pi_{22}}\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+k}}\,d\tau d\sigma_z+\\&+\frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+k}}\int_{\Pi_{12}\cup\Pi_{21}}\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+l}}\,d\tau d\sigma_z\leq\\\leq&\frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+l}}\int_0^t d\tau\int_S\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+k}}\,d\sigma_z+\\&+\frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+k}}\int_0^t d\tau\int_S\frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+l}}\,d\sigma_z.\end{aligned}$$

Нерівність (8) дозволяє тепер записати

$$\begin{aligned}I\leq K\Bigg(&\frac{1}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+l}}\int_0^t(t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1)}\tau^{\lambda/\alpha}\,d\tau+\\&+\frac{1}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+k}}\int_0^t(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}\tau^{\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1)}\,d\tau\Bigg)=\\=K\Bigg(&B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1),1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+l}}\\&+B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1),1+\frac{\varkappa}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+k}}\Bigg),\end{aligned}$$

де K — деяка додатна стала, що залежить тільки від d, l, k та поверхні S. $\square$

Займемось тепер оцінюванням членів ряду з рівності (5). Із співвідношень (6) та нерівності (7) одержуємо, що

$$0<g_k(t,x,y)\leq N\|r\|\int_0^t d\tau\int_S\frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha}}\,g_{k-1}(t-\tau,z,y)\,d\sigma_z$$

при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ та $k=1,2,\ldots$, де $\|r\|=\sup\limits_{x\in S}r(x)$.

Індукцією по k з допомогою Леми 2 доводимо, що при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ та $k=0,1,2,\ldots$ має місце нерівність

$$g_k(t,x,y)\leq R_k\frac{t^{1+k(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}},\tag{10}$$

де числова послідовність $\{R_k:k\geq 0\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (при $k\geq 1$)

$$R_k=R_{k-1}NK\|r\|\left(B(1-1/\alpha,2+(k-1)(1-1/\alpha))+B(2,k(1-1/\alpha))\right)$$

з $R_0=N$, де $N>0$ — стала з нерівності (7), а $K>0$ — з (9).

Таким чином, ряд в рівності (5) збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та рівномірно на множині $(t,x,y) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $T > 0$. Звідси робимо висновок, що його сума $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є неперервною функцією, яка задовольняє рівняння (4), причому для кожного $T > 0$ існує стала $C_T > 0$ така, що при всіх $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність

$$|g(t,x,y)| \leq C_T \, \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}}. \tag{11}$$

Зауваження. Функція $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє також і рівняння

$$g(t,x,y) = g_0(t,x,y) - \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z) g_0(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z. \tag{12}$$

Це стає зрозумілим, якщо довести, наприклад, за індукцією по k співвідношення

$$g_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}(t-\tau,x,z) g_0(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що розв'язки кожного з рівнянь (4) та (12) єдині в класі функцій, які задовольняють нерівність (11). Це випливає з того, що оцінка (10) при всіх $k \geq 1$ має місце для різниці кожних двох розв'язків кожного із згаданих рівнянь.

В наступному пункті ми встановимо, що функція $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова, який утворюється з процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$ обривом (з інтенсивністю $(r(x))_{x\in S}$) в точках поверхні S.

2.3. **Формула Фейнмана-Каца та апроксимаційна процедура.** При кожному $t > 0$ розглянемо функцію $(F_t(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, що задається рівністю

$$F_t(x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(\tau,x,y) r(y)\, d\sigma_y, \tag{13}$$

в якій функція $(r(x))_{x\in S}$ та ж, що і в попередньому пункті.

Функція (13) (як функція аргументів (t,x)) є потенціалом простого шару з невід'ємними значеннями. Зауважимо, що функція $(r(x))_{x\in S}$ належить до класу $\mathbb{U}$ зі сталими $\beta = 0$ та $C_T = \|r\|$. Тому, як нескладно бачити, при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ має місце нерівність $F_t(x) \leq K \cdot t^{1-1/\alpha}$ з деякою сталою $K > 0$. Крім того, з допомогою рівняння Колмогорова-Чепмена, яке задовольняє функція g_0, легко перевірити, що при $t > 0$, $s > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ виконується співвідношення $F_s(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g_0(s,x,y) F_t(y)\, dy = F_{s+t}(x)$. Це дозволяє стверджувати, що функція (13) є W-функцією, для якої виконується $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} F_t(x) \to 0$, $t \to 0+$. Звідси випливає існування W-функціонала $(\eta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$ з характеристикою (13) (див. [2, Теорема 6.6]). Тобто, при всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ виконується рівність $\mathbb{E}_x \eta_t = F_t(x)$, де $\mathbb{E}_x$ означає умовне математичне сподівання при умові $x_0(0) = x$.

Нашою метою в цьому пункті є показати, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ має місце співвідношення

$$\mathbb{E}_x \varphi(x_0(t)) e^{-\eta_t} = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y) \varphi(y)\, dy, \tag{14}$$

в якому $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ побудований в попередньому пункті розв'язок рівнянь (4) та (12).

Для початку апроксимуємо функціонал η_t деякими простішими функціоналами від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$. Для кожних $h>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$ покладемо $v_h(x)=\int_S g_0(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y$. При фіксованому $h>0$ ця функція є неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}^d$. Визначимо (для фіксованого $h>0$) адитивний функціонал $(\eta_t^{(h)})_{t\geq 0}$ від процесу $(x_0(t))_{t\geq 0}$ з допомогою співвідношення $\eta_t^{(h)}=\int_0^t v_h(x_0(\tau))\,d\tau$. Це — W-функціонал з характеристикою

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g_0(\tau,x,y)v_h(y)\,dy=\int_0^t d\tau\int_S g_0(\tau+h,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Після нескладних перетворень одержуємо, що

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}-\mathbb{E}_x\eta_t=\int_t^{t+h} d\tau\int_S g_0(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y-\int_0^h d\tau\int_S g_0(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

З нерівності (7) та твердження Леми 1 при $\theta=\alpha$ випливає, що для кожного $T>0$ при всіх $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $h>0$ має місце нерівність

$$|\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}-\mathbb{E}_x\eta_t|\leq C_T\frac{\alpha}{\alpha-1}\left((t+h)^{1-1/\alpha}-t^{1-1/\alpha}+h^{1-1/\alpha}\right),$$

де $C_T>0$ — деяка стала. Теорема 6.4 з [2] дозволяє стверджувати, що $\eta_t^{(h)}\to\eta_t$ при $h\to 0+$ в середньому квадратичному при кожному $t>0$. Звідси одержуємо, що для кожної $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ між функціями ($t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$) $u^{(h)}(t,x,\varphi)=\mathbb{E}_x\varphi(x_0(t))e^{-\eta_t^{(h)}}$ та $u(t,x,\varphi)=\mathbb{E}_x\varphi(x_0(t))e^{-\eta_t}$ має місце співвідношення $\lim\limits_{h\to 0+}u^{(h)}(t,x,\varphi)=u(t,x,\varphi)$ в сенсі поточкової збіжності.

При кожному $h>0$ функція $(u^{(h)}(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$u^{(h)}(t,x,\varphi))=u_0(t,x,\varphi))-\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau,x,y)u^{(h)}(\tau,y,\varphi))v_h(y)\,dy,\tag{15}$$

в якому

$$u_0(t,x,\varphi))=\int_{\mathbb{R}^d} g_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy.\tag{16}$$

Перейдемо тепер до границі при $h\to 0+$ в рівнянні (15). Зробити це нам допоможе доведена нижче лема.

Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0,x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T>0$ $\sup\limits_{0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)|<+\infty$, розглянемо її перетворення

$$\psi_h(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ h>0.$$

Лема 3. *Для даних чисел $\varepsilon>0$, $L>0$ та $T>0$ існує таке число $\delta>0$, що нерівність*

$$|\psi_h(t',x')-\psi_h(t,x)|<\varepsilon$$

виконується при всіх $h>0$, $t'\in(0,T]$, $t\in(0,T]$, $x'\in\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0,x\in\mathbb{R}^d}$ з властивістю $\sup\limits_{0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)|<L$, якщо тільки $|t'-t|+|x'-x|<\delta$.

Доведення. Розглянемо при $0<t<t'\leq T$ та $x'\in\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$ різницю $\psi_h(t',x')-\psi_h(t,x)$, подавши її у вигляді суми двох доданків

$$I_1=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\left[g_0(t'-\tau,x',y)-g_0(t-\tau,x,y)\right]\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy,$$

$$I_2 = \int_t^{t'} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g_0(t'-\tau, x', y)\psi(\tau, y) v_h(y)\, dy.$$

Оскільки з нерівностей (7) та (8) при $\theta = \alpha$ випливає оцінка

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_0(t,x,y) v_h(y)\, dy = \int_S g_0(h+t,x,z) r(z)\, d\sigma_z \leq \|r\| C (t+h)^{-1/\alpha} \leq \|r\| C t^{-1/\alpha}$$

з деякою сталою $C > 0$, то $|I_2| \leq const(t'-t)^{1-1/\alpha}$. Це означає, що I_2 може бути зроблений як завгодно малим, якщо тільки малим вибрати $t'-t$.

Візьмемо тепер деяке число $\rho \in (0,t)$ і подамо I_1 у вигляді суми двох інтегралів від тієї ж підінтегральної функції: перший, I_1', по $(\tau, y) \in (0, t-\rho) \times \mathbb{R}^d$, а другий, I_1'', по $(\tau, y) \in (t-\rho, t) \times \mathbb{R}^d$.

Враховуючи доведену вище нерівність, запишемо

$$|I_1''| \leq L \int_{t-\rho}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g_0(t'-\tau, x', y) v_h(y)\, dy + L \int_{t-\rho}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau, x, y) v_h(y)\, dy \leq$$

$$\leq L\|r\| C \int_{t-\rho}^t \left[(t'-\tau)^{-1/\alpha} + (t-\tau)^{-1/\alpha} \right] d\tau =$$

$$= L\|r\| C \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[(t'-t+\rho)^{1-1/\alpha} - (t'-t)^{1-1/\alpha} + \rho^{1-1/\alpha} \right].$$

Це дозволяє вибрати ρ таким, щоб I_1'' стало малим рівномірно відносно $t \in (0;T]$, $t' \in (0;T]$ $(t < t')$, $x \in \mathbb{R}^d$, $x' \in \mathbb{R}^d$.

Якщо врахувати, що функція g_0 рівномірно неперервна на множині $[\rho, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $\rho > 0$, то для доведення того, що I_1' можна зробити малим при достатньо малих $t'-t$ та $|x'-x|$, досить довести, що $\sup\limits_{h>0} \int_{\mathbb{R}^d} v_h(y)\, dy < +\infty$. Але, оскільки $\int_{\mathbb{R}^d} v_h(y)\, dy = \int_S r(z)\, d\sigma_z \leq \|r\| |S| < +\infty$, то лема доведена. □

З властивостей функції g_0, як фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1), випливає рівність

$$\lim_{h \to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_h(x)\, dx = \int_S \varphi(x) r(x)\, d\sigma, \tag{17}$$

справедлива для будь-якої $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Твердження Леми 3 дозволяє вибрати послідовність $h_n \to 0+$, $n \to \infty$ таку, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(h_n)}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi)$ локально рівномірно по $t \geq 0$ та рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$.

З рівності (17), використовуючи твердження Леми 3, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g_0(t-\tau, x, y) u^{(h_n)}(\tau, y, \varphi) v_{h_n}(y)\, dy = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau, x, y) u(\tau, y, \varphi) r(y)\, d\sigma_y.$$

Перехід до границі в (15) по послідовності h_n при $n \to \infty$ приводить нас до наступного рівняння для функції u

$$u(t,x,\varphi) = u_0(t,x,\varphi) - \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau, x, y) u(\tau, y, \varphi) r(y)\, d\sigma_y. \tag{18}$$

Це ж рівняння одержиться, якщо домножити обидві частини рівняння (4) на $\varphi(y)$ та проінтегрувати їх по $y \in \mathbb{R}^d$. Оскільки обмежений розв'язок рівняння (18) єдиний, то

$$u(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy \tag{19}$$

і рівність (14) доведена.

3. Початково-крайові задачі

3.1. **Симетрична задача.** В цьому пункті розглядатимемо задачу (i) — (iii) в частковому випадку, коли $q(x) \equiv 0$. Тоді умова (iii) матиме вигляд

$$\text{(iii')}\ \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)U(t,x,\varphi), \quad t>0,\ x \in S.$$

Теорема 1. *Побудована вище функція $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі (i), (ii), (iii').*

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ і доведемо, що функція (19), яка є розв'язком рівняння (18), задовольняє умови задачі (i), (ii), (iii').

У пункті 1 вже згадувалось, що функція g_0 є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1). Тому функція $(u_0(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю (16), задовольняє рівняння з умови (i) в області $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ та початкову умову (ii) із заданою функцією φ.

Нескладно зрозуміти, що функція $Q(t,x,\varphi) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y$, визначена для $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$, є потенціалом простого шару. З його властивостей (див. п. 2.1) маємо, що функція $(Q(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ при кожній $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умову (i) та при всіх $t>0$, $x\in S$ рівність

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}Q(t,\cdot,\varphi)(x\pm) = \mp r(x)u(t,x,\varphi) + \int_0^t d\tau \int_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y.$$

Звідси одержуємо, що функція $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, визначена рівністю (19), задовольняє умову (iii'). Завершує доведення очевидна тотожність $Q(0+,x,\varphi)\equiv 0$. □

3.2. **Несиметрична задача.** Розглянемо загальний випадок, тобто, на відміну від попереднього пункту, $q(x) \not\equiv 0$.

3.2.1. *Фундаментальний розв'язок другої початково-крайової задачі.* Припустимо в цьому пункті, що $r(x)\equiv 0$ і крайова умова, сформульованої в пункті 1 основної задачі, виглядає так

$$\text{(iii'')}\ \frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}U(t,\cdot,\varphi)(x-) = 0, \quad t>0,\ x\in S.$$

Зауваження. Задача (i), (ii), (iii'') розглядалась нами в [6], де і побудовано її розв'язок. Тут ми будуємо *фундаментальний розв'язок* цієї задачі.

Задамо функцію $(G_0(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$G_0(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \tag{20}$$

з деякою невідомою функцією $(V(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$.

Нашою метою в цьому пункті є побудова такої функції V, щоб для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$U_0(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d \tag{21}$$

задовольняла умови (i), (ii), (iii''). Це і означатиме, що функція G_0 є фундаментальним розв'язком другої початково-крайової задачі (i), (ii), (iii''). Очевидно, що для виконання умов (i), (ii) досить, щоб при кожній $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$v(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} V(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in S \tag{22}$$

належала до класу $\mathbb{U}$. Це випливатиме з властивостей функції g_0 та потенціалу простого шару $\int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z)v(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z$, які були сформульовані в пунктах 1 та 2.1, відповідно.

Теорема про стрибок (див. п. 2.1) приводить нас до висновку, що умова (iii'') буде виконуватись, якщо функція V задовольнятиме рівняння ($t>0$, $x\in S$, $y\in\mathbb{R}^d$)

$$V(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z. \tag{23}$$

Спочатку оцінимо функцію $(g_0^{\nu(x)}(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$, для якої має місце представлення (див., наприклад, [5])

$$g_0^{\nu(x)}(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\frac{(y-x,\nu(x))}{t}g_0(t,x,y), \quad t>0,\ x\in S,\ y\in\mathbb{R}^d \tag{24}$$

Враховуючи оцінку (7) та властивості поверхні S (див. п. 2.1), одержуємо при $t>0$, $x\in S$, $y\in S$ оцінку

$$|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{C}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \tag{25}$$

з деякою сталою $C>0$. Якщо ж $t>0$, $x\in S$, $y\in\mathbb{R}^d\setminus S$, то можемо записати, що

$$|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{C}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}}, \tag{26}$$

де $\rho(y,S) = \inf_{x\in S}|y-x|$, $C>0$ — деяка стала.

Далі, розв'язуватимемо рівняння (23) при $t>0$, $x\in S$, $y\in S$ методом послідовних наближень. Покладемо при $t>0$, $x\in S$, $y\in S$ нульове наближення $V_0(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y)$ та для $k\ge 1$

$$V_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S g_0^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)V_{k-1}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z.$$

Індукцією по k, використовуючи твердження Леми 2, доводимо, що при всіх $t>0$, $x\in S$, $y\in S$ та $k\ge 0$ виконуються нерівності

$$|V_k(t,x,y)| \le R_k \frac{t^{k\gamma/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \tag{27}$$

де числова послідовність $\{R_k : k\ge 0\}$ визначається співвідношеннями $R_0 = C$ та при $k\ge 1$ $R_k = C\left(\frac{\alpha}{k\gamma} + B\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 1+(k-1)\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right)R_{k-1}$, в яких $C>0$ – деяка стала.

Одержані оцінки функцій $(V_k(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in S}$ приводять до того, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,y)$ збігається абсолютно при $(t,x,y)\in(0,+\infty)\times S\times\mathbb{R}^d$ та рівномірно по $(x,y)\in S\times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $(V(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in S}$ є неперервним розв'язком рівняння (23) і для кожного $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$, $y \in S$ виконується нерівність

$$|V(t,x,y)| \le C_T \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}. \tag{28}$$

Крім того, функція V задовольняє рівняння ($t > 0$, $x \in S$, $y \in S$)

$$V(t,x,y) = g_0^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S V(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z. \tag{29}$$

Останнє випливає із співвідношень ($t > 0$, $x \in S$, $y \in S$)

$$V_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S V_{k-1}(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z, \quad k \ge 1,$$

які легко доводяться з допомогою індукції по k та нерівностей (25) і (27).

Співвідношення (29) продовжує функцію V на множину $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times \mathbb{R}^d$. Міняючи порядок інтегрування з врахуванням оцінок (25) та (28), легко доводимо, що побудована функція $(V(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (23). Оцінки (26) та (28) разом з нерівністю (8) дозволяють записати

$$|V(t,x,y)| \le C_T \frac{1}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}} \tag{30}$$

при $t \in (0,T]$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Враховуючи нерівність (7) та співвідношення (24), можемо записати оцінку

$$|g_0^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{2N}{\alpha} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}, \quad t > 0,\ x \in S,\ y \in \mathbb{R}^d.$$

Тому, домноживши обидві частини співвідношення (29) на $\varphi(y)$ та проінтегрувавши його по $y \in \mathbb{R}^d$ (тут враховуємо нерівність (30)), для функції $(v(t,x,y))_{t>0,x\in S}$, заданої рівністю (22), одержуємо, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, при кожному $T > 0$ виконується нерівність $|v(t,x,\varphi)| \le C_T t^{-1+1/\alpha}$, $t \in (0,T]$, $x \in S$ з деякою сталою $C_T > 0$. Отже, функція $(v(t,x,y))_{t>0,x\in S}$ належить до класу $\mathbb{U}$.

Сформулюємо тепер одержаний основний результат цього пункту у вигляді теореми.

Теорема 2. *Функція $(G_0(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю (20), де $(V(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (23), є фундаментальним розв'язком задачі (i), (ii), (iii'').*

Зауважимо, що для функції G_0 можна запропонувати деяке інше зображення. А саме, покладемо для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$

$$\tilde{V}(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z) V(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z.$$

Використовуючи зображення $V(\tau,z,y)$ при $\tau > 0$, $z \in S$, $y \in S$ у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(\tau,z,y)$, легко дістати, що $\tilde{V}$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{V}(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{V}(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Як наслідок, маємо наступне, дуальне до (20), зображення функції G_0 ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$)

$$G_0(t,x,y) = g_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{V}(t-\tau,x,z) g_0^{\nu(z)}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z.$$

Звідси легко дістати формули $G_0(t,x,y\pm) = (1 \pm q(y))\tilde{V}(t,x,y)$, справедливі при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Тому цілком природно покласти для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$

$$G_0(t,x,y) = \frac{1}{2}[G_0(t,x,y+) + G_0(t,x,y-)] = \tilde{V}(t,x,y).$$

Зауважимо, що з рівності (20) при $t > 0$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d$ випливають співвідношення $\mathbf{B}_{\nu(x)} G_0(t,\cdot,y)(x\pm) = (1 \mp q(x))V(t,x,y)$.

3.2.2. *Фундаментальний розв'язок основної задачі.* В цьому пункті відмовимось від додаткових обмежень щодо функцій r і q. Тобто, розглянемо сформульовану у вступі основну задачу (i) — (iii). Фундаментальний розв'язок цієї задачі будуватимемо як спільний розв'язок пари рівнянь ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$G(t,x,y) = G_0(t,x,y) - \int_0^t d\tau \int_S G_0(t-\tau,x,z) G(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{31}$$

$$G(t,x,y) = G_0(t,x,y) - \int_0^t d\tau \int_S G(t-\tau,x,z) G_0(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{32}$$

в яких функція $(G_0(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ — та ж, що і в попередньому пункті.

Зауважимо, що рівняння (31), (32) досить розв'язувати на множині $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times S$. Тоді співвідношення (32) продовжить одержаний розв'язок на множину $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times \mathbb{R}^d$, а (31) — на множину $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

Розв'язок рівнянь (31), (32) шукаємо у вигляді суми ряду

$$G(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k G_k(t,x,y), \tag{33}$$

де при $k \geq 1$

$$G_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S G_0(t-\tau,x,z) G_{k-1}(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z = \int_0^t d\tau \int_S G_{k-1}(t-\tau,x,z) G_0(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z$$

Зауваження. Справедливість другої рівності доводиться індукцією по k з допомогою доведених нижче оцінок.

Співвідношення (20), нерівності (7), (28) та твердження Леми 2 приводять нас до оцінки

$$|G_0(t,x,y)| \leq C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

яка правильна при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

З допомогою індукції по k встановлюємо справедливість нерівностей для кожних $k \geq 0$, $T > 0$

$$|G_k(t,x,y)| \leq R_k \frac{t^{(k+1)(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}, \quad t \in (0,T],\ x \in S,\ y \in S, \tag{34}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ задається співвідношеннями $R_0 = C_T$ та при $k \geq 1$ $R_k = K\left(B\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1+k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right) + B\left(2-\frac{1}{\alpha}, k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) R_{k-1}$, в яких $C_T > 0$, $K > 0$ — деякі сталі (перша можливо залежить від T).

З оцінок (34) випливає, що ряд у співвідношенні (33) збігається абсолютно при $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times S$ та рівномірно по $(x,y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $(G(t,x,y))_{t>0, x\in S, y\in S}$ задовольняє рівняння (31), (32) на множині $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times S \times S$. Крім того, має місце оцінка

$$|G(t,x,y)| \leq C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \tag{35}$$

при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$. Рівності (31), (32) продовжують функцію G на множину $(t,x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ зі збереженням справедливості нерівності (35). Тут знову нам стала в нагоді Лема 2.

Для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}_d)$ покладемо

$$U(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{36}$$

З рівняння (31) випливає співвідношення

$$U(t,x,\varphi) = U_0(t,x,\varphi) - \int_0^t d\tau \int_S G_0(t-\tau,x,z)U(\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{37}$$

де $U_0(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G_0(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Функція U_0 задовольняє умови (i), (ii) та умову (iii) з функцією $r(x) \equiv 0$.

Для інтегралу в правій частині (37) (позначимо його через $(W(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$) має місце представлення $W(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g_0(t-\tau,x,z)w(\tau,z,\varphi)\,d\sigma_z$, в якому

$$w(t,x,\varphi) = r(x)U(t,x,\varphi) - q(x)\int_0^t d\tau \int_S V(\tau,x,z)U(t-\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z,$$

де функція V визначена в пункті 3.2.1

Лема 4. *Функція $(w(t,x,\varphi))_{t>0,x\in S}$ при кожній $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ належить до класу $\mathbb{U}$.*

Доведення. Дійсно, з допомогою рівності (36) та безпосередніх обчислень приходимо до нерівності $|U(t,x,\varphi)| \leq \|\varphi\| C_T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}}\,dy \leq C_T$, а вже звідси випливає, що $|r(x)U(t,x,\varphi)| \leq C_T\|r\|$, та внаслідок Леми 1 при $\theta = \alpha - 1 - \gamma$

$$\left|q(x)\int_0^t d\tau \int_S V(\tau,x,z)U(t-\tau,z,\varphi)\ r(z)\,d\sigma_z\right| \leq$$

$$\|q\|\|r\|C_T \int_0^t d\tau \int_S \frac{d\sigma_z}{(\tau^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}} \leq C_T t^{\gamma/\alpha}$$

при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$ для кожного $T > 0$ з деякими сталими $C_T > 0$. Неперервність функції w на $(0,+\infty) \times S$ очевидна. $\square$

Нескладні викладки з використанням співвідношення (23) та теореми про стрибок приводять до рівності $\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}W(t,\cdot)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}W(t,\cdot)(x-) = -r(x)U(t,x,\varphi)$, $t > 0$, $x \in S$.

Таким чином, функція $(U(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, задана співвідношенням (36), задовольняє умову (iii). Потенціал простого шару W задовольняє умову (i) та нульову початкову умову. Отже, ми одержали наступне твердження.

Теорема 3. *Функція* $(G(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, *задана рівністю* (33), *є фундаментальним розв'язком задачі (i) — (iii).*

Література

[1] O. V. Aryasova and M. I. Portenko, *One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution.* Theory of Stochastic Process, **11(27)** (2005), no. 3-4, 14-28.

[2] Dynkin E. B. *Markov Processes* Fizmatgiz, Moscow, 1963; English transl., Vols I, II, Academic Press, New-York and Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[3] I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *The Theory of Stochastic Processes*, vol. 2, Nauka, Moskow, 1975; English transl., Springer-Verlag, 1979.

[4] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-differential Equations of Parabolic Type*, Operator Theory Advances and Applications, vol. 152, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. – 387 p.

[5] Osypchuk, M. M. *On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations.* Carpathian Mathematical Publications, **7** no. 1, (2015). 101–107. doi:10.15330/cmp.7.1.101-107

[6] Осипчук М. М., Портенко М. І. *Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь*, Український математичний журнал, т. 67, № 11, 2015, с. 1512-1524; Англ. переклад: Osypchuk M. M., Portenko M. I. *On simple-layer potentials for one class of pseudo-differential equations.* Ukrainian Mathematical Journal, **67**, no. 11, (2016), 1704-1720.

[7] Osypchuk M. M., Portenko M. I. *On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process.* Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, (2017). doi: 10.1007/s11868-017-0210-3

[8] Osypchuk M. M., Portenko M. I. *One type of singular perturbations of a multidimensional stable process.* Theory of stochastic processes, vol. 19(35) no. 2, 2014. pp. 42-51.

[9] Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа*, Москва, Мир, 1968. – 424 с.