Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

А. Д. Пілько

Дослідження операцій

Методичні вказівки до проведення практичних та лабораторних занять з дисципліни «Дослідження операцій» для студентів другого курсу денної форми навчання спеціальностей «Менеджмент організацій» та «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

Івано-Франківськ
Видавець Супрун В. П.
2012

УДК 330.45
ББК 22.18-я73
П 32

Рецензенти:
Казмерчук А.І. **к**анд. фіз.-мат. наук, доцент
Баран Р. Я. канд. екон. наук, доцент

Рекомендовано до друку ухвалою Вченої ради економічного факультету Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника, протокол № 9 від 25 травня 2011 року.

Пілько А.Д.
П 32 Дослідження операцій: методичні вказівки до проведення практичних та лабораторних занять з дисципліни «Дослідження операцій» [для студентів другого курсу денної форми навчання спеціальностей «Менеджмент організацій» та «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»] / Пілько А.Д. ; Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. – Івано-Франківськ : Супрун В. П., 2012. – 65 с. – 100 пр.

Видання містить приклади завдань та зразки їх розв'язку з розділів дослідження операцій, вивчення яких передбачено університетською програмою. Завдання лабораторних робіт ілюструється наскрізними прикладами побудови та дослідження моделей дослідження операцій.

Для контролю і самоконтролю рівня знань студентів наведено перелік питань та завдань для самостійної роботи. Розраховано для студентів економічних спеціальностей, а також всіх тих, хто цікавиться економіко-математичним моделюванням та дослідженням операцій.

УДК 330.45
ББК 22.18-я73

Зміст

ЦІЛІ ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ, ЇЇ МІСЦЕ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Дослідження операцій відіграє винятково важливу роль у підготовці висококваліфікованих фахівців економічного профілю. Використання методів та моделей дослідження операцій в процесі управління організаційними системами різного рівня складності та ієрархії дозволяє суттєво підвищити ефективність роботи як окремих структурних підрозділів підприємства, так і цілих організаційних систем. Іншими словами, менеджер в своє розпорядження отримує надійні інструменти та методики, котрі забезпечують отримання найвищих економічних та соціальних ефектів в конкретних виробничих умовах. Предметом вивчення дисципліни є методологія та інструментарій побудови математичних моделей і розв'язування детермінованих оптимізаційних задач.

Прикладами можливих економічних задач, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання запропонованої дисципліни, є наступні:

- отримання максимального доходу або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових або сукупних витратах;
- забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових витратах;
- досягнення максимально короткого терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних).

Сучасний менеджер повинен не тільки вміти вирішувати складні економічні задачі, але й вміти проводити їх математичну постановку, тобто за змістовною постановкою задачі складати її математичну модель, знати методи її розв'язання, аналізувати можливості практичного застосування отриманих з допомогою моделі знань та приймати відповідні управлінські рішення.

Мета викладання дисципліни полягає в формуванні у студентів знань, умінь і навичок з:

а) використання існуючих методик та можливостей дослідження операцій в процесі проведення аналізу ефективності функціонування керованих систем;

б) оцінки існуючих напрацювань в сфері економіко-математичного моделювання окремих аспектів діяльності господарських систем та розробки нових математичних моделей відповідно до поставлених цілей та наявних ресурсів;

в) розробки науковообгрунтованих програм роботи господарських систем.

Завдання вивчення дисципліни

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

– знати базові теоретико-методологічні підходи до побудови математичних моделей операцій та проведення їх аналізу для оптимізації як окремих напрямів діяльності підприємства, так і підвищення загальної ефективності роботи цілих господарських систем;

– вміти відповідно до поставлених практичних завдань своєчасно застосовувати наявні в них знання, уміння і навички з розв'язку побудованих задач дослідження операцій та проводити оцінку перспектив їхнього практичного втілення.

Мета проведення практичних і лабораторних занять полягає формуванні навиків з використання студентами можливостей економіко-математичного моделювання в процесі проведення постановки та аналізу задачі дослідження операцій.

Завдання проведення практичних і лабораторних занять

В результаті проведення практичних (семінарських) занять студенти повинні:

– знати можливості та передумови застосування та специфіку різних класів задач дослідження операцій;

– вміти на належному рівні застосовувати здобуті знання, уміння і навички в проведенні:

1. якісних досліджень взаємозв'язків з метою пошуку чинників, які обумовлюють закономірності перебігу процесів, вибору множини параметрів стану та управління;
2. побудови математичної моделі досліджуваної операції;
3. розв'язку сформульованої задачі дослідження операцій;
4. оцінки результатів розрахунків стосовно досліджуваних операцій управління об'єктом або процесом.

ПРАКТИКУМ

Заняття 1. Предмет, методи та завдання курсу «Дослідження операцій». Побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей

Питання для розгляду:

1. Основні поняття дисципліни. Методи та завдання курсу.
2. Математичне моделювання в теорії дослідження операцій. Методика проведення дослідження операцій.
3. Поняття економіко-математичної моделі. Основні види економіко-математичних моделей та задачі, які вирішуються з їх допомогою.
4. Економічна і математична постановка задачі математичного програмування. Основні економічні задачі, які розв'язуються з допомогою методів математичного програмування.

Основні поняття та терміни

Операція, дослідження операцій, математична модель, оптимізаційна модель, математичне програмування, цільова функція, система обмежень

Задача 1. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в таблиці.

Вид продукції	Норма витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум.од.
	Робочого часу, люд.-год	Листового заліза, м²	Скла, м²	
Морозильна камера	8	3	3	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	50	--

Записати економіко-математичну модель визначення виробничої програми, виконання якої забезпечить отримання максимального доходу від реалізації продукції.

Задача 2. Фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 30 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 6 га посівних площ. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведено в таблиці.

Показник	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів (в розрахунку на 1 га)	6	30	350
Затрати праці механізаторів, людино-змін (з розрахунку на 1 га)	3	9	100
Урожайність, т/га	5	48	--
Прибуток, тис. грн./т	1,1	2	--

Записати економіко-математичну модель визначення плану розподілу посівних площ між двома культурами, за якого фермер отримає максимальні прибутки.

Задача 3. Продукція чотирьох видів A, B, C, D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведена в таблиці.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції, год			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	1	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн. для верстаті 1 і 15 грн. – для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 – 380 машино-годин. Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D складає відповідно

75, 70, 60 і 45 грн. Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Задача 4. Для виготовлення трьох видів виробів A, B, C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу на фрезерному обладнанні складають для виробу A – 3, B – 6, C – 5 верстато-годин відповідно; на токарному обладнанні для виробу A – 2, B – 7, C – 3 верстато-годин; на зварювальному обладнанні для виробу A – 6, B – 5, C – 7 верстато-годин; на шліфувальному обладнанні для виробу A – 5, B – 8, C – 6 верстато-годин. Загальний фонд робочого часу фрезерного обладнання складе 130 од, токарного, – 220 од, зварювального, – 210 од, шліфувального, – 260 од. Прибуток від реалізації одного виробу A складе 9 грн, B - 12 грн, C - 11 грн.

Записати модель визначення кількості виробів кожного виду, яку слід виготовити підприємству, щоб прибуток від реалізації був максимальний.

Задача 5. Кредитний аналітик розглядає 10 клопотань про надання кредитів юридичним особам. Для кожного з проектів є розраховані величини економічних ефектів від їхньої реалізації (*Eff*) та необхідна сума залучених коштів*(MD)*,тис. грн:

Eff	1,2	1,3	1	0,8	0,9	0,6	1,3	1,7	2,1	1,5
MD	95	91	45	24	110	25	15	45	90	35

Кредитний портфель банку може складати не більше 250 тис.грн. Побудувати модель максимізації економічного ефекту кредитного портфелю при заданому обмеженні.

Задача 6. За заданих вихідних умов функціонування підприємства визначити виробничу програму, яка максимізує величину прибутку. Загальний обсяг ресурсів: трудових — 1600 ум. од., матеріальних — 1000 ум. од.

Види проду-кції	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Попит на продукцію		Прибуток з одиниці продукції, ум. од.
	трудові ум.од.	матері-альні, ум.од.	нижня межа	верхня межа	
1	2,4	0,8	10	80	12
2	2,8	2,0	0	100	16
3	2,6	1,8	40	400	20

Задача 7. Для заключення договорів підприємець повинен побувати в 4 містах: A, B, C, D, відстані між якими в км вказано в таблиці (жодне з трьох міста не знаходяться на одній прямій з іншими)

	A	B	C	D
A	-	630	570	140
B	630	-	390	1050
C	570	390	-	45
D	140	1050	45	-

Підприємець, виїхавши з міста А, повинен відвідати всі міста, побувавши в кожному з них один і тільки один раз і повернутися в А. Необхідно визначити таку послідовність об'їзду міст, при якій довжина маршруту буде найменшою.

Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Основні етапи розвитку дослідження операцій як напряму науки.

2. Предмет, об’єкт та методи дослідження операцій.

3. Основні завдання дисципліни.

4. Структура оптимізаційної економіко-математичної моделі.

5. Основні етапи побудови оптимізаційної економіко-математичної моделі.

6. З якою метою проводиться дослідження операцій в організаційних, економіко-виробничих системах?

7. Структура економетричної моделі та характеристика її складових. З якою метою до економетричної моделі включають випадкову складову?

8. Поняття та види економіко-математичних моделей. Завдання, які вирішуються з допомогою економіко-математичних моделей різних видів.

9. Показати необхідність переходу вивчення виробничих то соціально-економічних явищ і процесів від вербальних економіко-математичних моделей до їх кількісного аналізу.

Задача 1. Підприємство може виготовляти чотири види продукції: П1, П2, П3, П4. Норми витрат ресурсів і прибуток від одиниці кожного виду ресурсу наведені в таблиці.

Показники	Продукція				Ресурси
	П1	П2	П3	П4	
Трудові ресурси, людино-зміни	2,5	2,5	2	1,5	100
Напівфабрикати, кг	4	10	4	6	260
Обладнання, станко-зміни	8	7	4	10	370
Прибуток від од. продукції	40	50	100	80	

Записати математичну модель випуску продукції, який максимізує прибутки якщо:

1. кількість одиниць третьої продукції повинна бути в з рази більшою кількості одиниць першої продукції;

2. першої продукції слід випускати не менше 25 одиниць, третьої – не більше 30, а другої і четвертої – у співвідношенні 1:3.

Задача 2. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 грн. на місяць. Хвилина радіо реклами коштує фірмі 5 грн., а телереклами – 90 грн. Фірма має намір використовувати радіо рекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіо реклами. Записати модель знаходження розподілу коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяги збуту продукції фірми будуть найбільшими.

Задача 3. Клієнт доручив брокеру біржі розмістити 100 000 дол. США на фондовому ринку, сформувати портфель цінних паперів щоб отримати максимально можливі відсотки від вкладеного капіталу. Вибір обмежений чотирма можливими об´єктами інвестицій – акції A, B, C і D, які дозволяють отримати відповідно 6, 8, 10 і 9% річних від вкладеної суми. При цьому клієнт доручив не менше половини інвестицій вкласти в акції А і В. З метою забезпечення ліквідності не менше 25% загальної суми капіталу потрібно розмістити в акції D. Враховуючи прогнози на фондовому ринку, в акції С можна вкладати не більше 20% капіталу. Визначити оптимальну з точки зору максимізації річних прибутків структуру інвестиційного портфеля (побудувати модель).

Задача 4. З вокзалу м.Київ щодня відправляються швидкі та пасажирські поїзди.

Тип вагона		Багаж-ний	Пошто-вий	Плац-карт	Купей-ний	СВ
К-сть вагонів в поїзді	швидкий	1	1	8	4	1
	Пасажир-ський	1	0	5	6	3
Пасажиромісткість, чол.				58	40	32
Парк вагонів		10	8	80	70	30

Побудувати математичну модель, за допомогою якої розрахувується максимально можлива кількість пасажирів, яку можна відправити з вокзалу.

Задача 5. Є наступні техніко-економічні показники виробництва:

Показники	Види продукції			Запаси
	А	В	С	
Собівартість в-цтва од. продукції, грн.	22	26	35	
Прибуток від реалізації од.продукції, грн.	5	7	8	
Питомі витрати ресурсів, од. Р1	5	3	--	250
Р2	1	--	3	280
Р3	2	5	2	390

Обов'язковим є виготовлення 1 од. продукції А, 3 од. продукції В, 2 од. продукції С. Побудувати математичну модель визначення виробничої програми максимізації доходу від реалізації продукції підприємства.

Заняття 2. Побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей. Графічний метод розв'язку задачі лінійного програмування.

1. Математична та економічна постановка задачі лінійного програмування.
2. Задача оптимального планування виробництва.
3. Задача про дієту (про склад суміші).
4. Транспортна задача.
5. Задача оптимального розподілу виробничих потужностей.
6. Задача про призначення.
7. Задача комівояжера.
8. Задача оптимального розподілу капіталовкладень.
9. Форми запису задачі лінійного програмування.
10. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
11. Графічний метод розв'язку задачі лінійного програмування.
12. Властивості розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом.
13. Альтернативний оптимум та його графічне тлумачення.

Основні поняття та терміни

Лінійне програмування, математична і економічна постановка ЗЛП, цільова функція, система обмежень, пряма, півплощина, многокутник розв'язків, вектор-градієнт.

Задача 1. Підприємство має деякі запаси сировини (тис.т) і час роботи обладнання (верстато-годин) і може виготовляти продукцію двома різними технологічними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один день і загальний ресурс при кожному способі задані в таблиці (у грош.од). При першому способі виробництва підприємство випускає за один день 3 тис. виробів , при другому - 5 тис. виробів .

Виробничий ресурс	Витрати ресурсів за 1 день при роботі		Загальний ресурс
	1-а технологія	2-а технологія	
Сировина	1,5	1,7	150
Обладнання	0,5	0,9	70

Скільки днів повинне працювати підприємство по кожному з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції? (записати економіко-математичну модель та розв'язати її графічним методом).

Задача 2. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць – А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в таблиці.

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А – 50 грн., а моделі В – 30 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попит на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень. Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, за яких прибуток фірми буде максимальним.

Задача 3. Розв'язати графічним методом:

$$L = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 5; \ x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 4. Розв'язати графічним методом:

$$L = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5. Розв'язати графічним методом:

$$L = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ -3x_1 - 10x_2 \geq 30, \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 \leq 7; \ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 6. Для поліпшення фінансового стану фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоспроможної продукції, для чого в одному з цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19 м кв. площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 тис. грош. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду коштує 1 тис. грош.од., 2-го вигляду – 3 тис. грош.од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 грош.од., а одного комплекту обладнання 2-го вигляду – на 4грош. од. Знаючи, що для установки одного комплекту обладнання 1-го вигляду вимагається 2 м кв. площі, а для обладнання 2-го вигляду – 1 м кв. площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Які задачі лінійного програмування можна розв'язати графічним методом?
2. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
3. Суть алгоритму графічного методу розв'язку задач лінійного програмування.
4. Геометричний зміст розв'язків нерівностей, рівнянь та їх систем.
5. Яким чином можна побудувати вектор-градієнт?

6. Розв'язати графічним методом:

$$L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 \le 18, \\ x_1 + 7x_2 \ge 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ x_1 \le 10, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. Розв'язати графічним методом:

$$L = -4x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -x_1 + 10x_2 \ge 10, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ x_1 \le 7;\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. Розв'язати графічним методом:

$$L = -x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ -8x_1 + 3x_2 \ge 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \le 9;\ x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. Туристична фірма за сезон обслуговує в середньому 7500 туристів, маючи в своєму розпорядженні флотилію з двох типів суден, характеристики яких наведено в таблиці.

Показники	Корабель 1	Корабель 2	Ресурс
Пасажиромісткість, чол.	2000	1000	
Пальне, т	12000	7000	60000
Екіпаж, чол..	250	100	700

Дохід від експлуатації корабля типу “1” – 5 млн грн., типу “2” – 2 млн грн. Побудувати ЕММ визначення оптимальної з точки зору максимізації доходу кількості кораблів кожного типу, яку слід експлуатувати і визначити цю кількість.

Заняття 3,4. Симплексний метод розв'язку задачі лінійного програмування. Метод штучного базису

Питання для розгляду:

1. Канонічна форма задачі лінійного програмування.
2. Правила зведення задачі лінійного програмування до канонічної форми.
3. Суть алгоритму симплексного методу.
4. Початковий опорний план.
5. Перехід від одного опорного плану до іншого.
6. Критерій оптимальності опорного плану.
7. Метод штучного базису.
8. Властивості розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Основні поняття та терміни

Лінійне програмування, канонічна форма ЗЛП, допоміжні змінні, фіктивні змінні, симплекс-таблиця, розв'язковий елемент, правило чотирикутника, опорний план, індексна стрічка, симплекс-перетворення, метод штучного базису.

Задача 1. Кондитерська фабрика для виготовлення трьох видів карамелі А, В і С використовує 3 види основної сировини: цукор, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1т карамелі кожного виду наведені в таблиці. В ній же вказані обсяги сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1т карамелі			Загальні запаси сировини, т
	А	В	С	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	--	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	200	250	300	

Побудувати оптимізаційну модель і визначити такий план виробництва карамелі, який би забезпечував максимальний прибуток від її реалізації.

Задача 2. Конкуренція змушує торгівельні підприємства займатися ще й випуском та реалізацією продукції власного виробництва, наприклад салатів, піцци тощо. Норми витрат на виробництво різних видів піцци, запаси ресурсів та вартість готової продукції наведені в таблиці.

Продукти	Норми витрат на виготовлення 100 шт. піцци			Запаси продуктів, кг
	асорті	грибна	салямі	
Гриби	6	7	2	40
Ковбаса	5	2	8	36
Тісто	10	8	6	50
Ціна за 100шт.,грн.	1000	800	700	

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать підприємству отримання максимально можливого доходу (побудувати економіко-математичну модель і розв'язати її симплекс-методом).

Задача 3. Фірма виготовляє і продає столи, шкафи і стільці з деревини хвойних і широколистих порід. Витрати кожного виду деревини в кубометрах на одиницю виробу, запаси деревини та ціна реалізації одиниці виробу наведені в таблиці.

Виріб	Витрати сировини, м³		Ціна виробу, грн.
	хвойні	широколисті	
Стіл	0,15	0,2	500
Шкаф	0,3	0,1	800
Стілець	--	0,1	100
Запаси деревини, м³	80	40	

Визначити оптимальну кількість продукції кожного виду, яку необхідно виготовляти і продавати для отримання максимального доходу.

Задача 4. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$L = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Задача 6. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \ge 1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Задача 7. Взуттєва фабрика може виготовляти три види взуття: чоловіче, жіноче і дитяче. На кожну пару чоловічого, жіночого і дитячого взуття відповідно необхідно клею 20, 20 і 10 г, шкіри 4, 2 і 1 дм². Вартість однієї пари чоловічого, жіночого та дитячого взуття складає 350, 400 і 200 грн. Запаси клею складають 3 т, шкіри – 4000 м². Розглянути наступні 2 операції: в першій операції всі наявні ресурси використовуються повністю, а в другій остання вимога не є обов'язковою. В обох операціях мета полягає в виборі такого плану виробництва взуття, при якому вартість виготовленої продукції буде максимальною. Знайти оптимальні стратегії в обох операціях і порівняти отримані операції.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Основні етапи побудови оптимізаційної економіко-математичної моделі.

2. З якою метою проводиться дослідження операцій в організаційних, економіко-виробничих системах?

3. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

4. Які є форми запису задачі лінійного програмування?

5. Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?

6. Основні аналітичні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.

7. Для розв'язування яких математичних задач застосовують симплексний метод?

8. Суть алгоритму симплексного методу.

9. Умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.

10. Як обирати розв'язковий стовпець і розв'язковий рядок в симплекс-таблиці?

11. Суть методу штучного базису.

12. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$L = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq -2, \\ &-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ &x_3 \leq -5, \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

13. Розв'язати задачу лінійного програмування методом штучного базису:

$$L = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ &-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

14. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$L = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10, \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ &x_2 \leq 3, \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Заняття 5. Транспортна задача

Питання для розгляду:

1. Економічна та математична постановка транспортної задачі.
2. Поняття закритої (збалансованої) та відкритої (незбалансованої) транспортної задачі.
3. Методи побудови опорного плану транспортної задачі.
4. Випадок виродженості опорного плану транспортної задачі.
5. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі.
6. Транспортна задача з додатковими умовами.

Основні поняття та терміни

Транспортна задача, план перевезень, матриця тарифів, метод потенціалів, метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості, невироджений план, оптимальний план.

Задача 1. Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують три види сировини. Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 110, 70, 180 і 120 од. Сировина зосереджена в трьох місцях її отримання, а запаси відповідно дорівнюють 100, 130, 160 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого пункту її отримання. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею C

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість транспортних витрат буде мінімальною.

Задача 2. На чотирьох складах компанії «Елітбуд» є цемент марки «400» в кількості відповідно 200, 150, 80 і 120 т. Цей цемент повинен бути доставлений на три бетонних заводи, відповідно в кількості 280, 90 і 180 т.:
1) побудувати математичну модель задачі;
2) сформувати базове рішення, використовуючи метод північно-західного кута, визначити сукупні транспортні витрати за початкового плану перевезень;
3) сформувати базове рішення, використовуючи метод найменшої вартості, визначити сукупні транспортні витрати за такого плану перевезень продукції;

4) на основі плану перевезень, який забезпечує отримання менших транспортних витрат побудувати схему перевезення продукції за поліпшеним планом;
5) визначити план перевезення продукції, який забезпечує отримання мінімальної вартості транспортних витрат;
6) обґрунтувати отримані результати.

Вартість перевезення 1 т цементу зі складів до бетонних заводів, гр.од.

склад, *i*	завод, *j*		
1	1	5	3
2	6	8	9
3	2	7	4
4	4	1	11

Задача 3. П’ять учасників будівництва траси отримують пісок з двох кар’єрів. Обсяг виробництва піску в кар’єрах відповідно 160 і 220 м³. на добу. Добова потреба в піску учасників будівництва доріг 50, 50, 80, 100 і 100 м³. Відстань перевезень піску (в км) представлена в таблиці:

j / i		1	2	3	4	5
		50	50	80	100	100
1	160	5	7	4	3	2
2	220	6	9	10	1	3

1) встановити тип задачі;
2) скласти табличну схему задачі;
3) скласти математичну модель задачі;
4) здійснити базове вирішення задачі;
5) скласти вантажообіг поліпшеного плану;
6) скласти план перевезень піску, що забезпечує найменший вантажообіг;
7) обґрунтувати отримані результати.

Задача 4. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (40; 30; 20)$

$b_j = (15; 25; 15; 35)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (100; 60; 40)$

$b_j = (60; 60; 20; 40; 20)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 5 & 17 \\ 10 & 14 & 2 & 8 & 18 \\ 18 & 8 & 6 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (400; 200; 300)$

$b_j = (250; 250; 500)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 7. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (10; 20; 15)$

$b_j = (15; 10; 5; 20)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 8. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (100; 100; 80; 120)$

$b_j = (60; 140; 140; 60)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 9. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (50; 36; 24; 30)$

$b_j = (30; 50; 36; 24)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задача 10. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (6; 14; 14; 6)$

$b_j = (10; 10; 8; 12)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Правила зведення відкритої транспортної задачі до закритого типу.
2. Критерій оптимальності опорного плану поставок.
3. Що таке опорний план транспортної задачі? Методи визначення початкового опорного плану.
4. Скільки елементів повинно бути в опорному плані? За якої умови транспортна задача називається виродженою?
5. Суть методу потенціалів розв'язування транспортної задачі.
6. За яких умов наявний план перевезення буде оптимальним?

7. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (35; 30; 25; 40)$

$b_j = (30; 40; 35)$ $c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 7 & 5 & 14 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

8. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (30; 25; 20; 35)$

$b_j = (25; 35; 30)$ $\qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 8 & 5 & 12 \\ 1 & 8 & 11 \\ 7 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

9. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (15; 10; 5; 20)$

$b_j = (10; 20; 15)$ $\qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

10. Розв'язати транспортну задачу:

$a_i = (25; 20; 15; 30)$

$b_j = (20; 30; 25)$ $\qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 13 \\ 2 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

Лабораторна робота №1

«Побудова та розв'язок моделі оптимізації інвестиційного процесу»

Теоретичний матеріал

В загальному випадку, задача лінійного програмування може бути записана наступним чином:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to extr \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ \{\le; =; \ge\} \ b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ \{\le; =; \ge\} \ b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \ \{\le; =; \ge\} \ b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ \{\le; =; \ge\} \ b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots x_n \ge 0 . \qquad (3)$$

Математична модель лінійної оптимізаційної задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів.

Розв'язати задачу лінійного програмування - означає знайти такі значення змінних x_1, x_2, …, x_n, які задовольняють умови (2) і (3), і при яких цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Допустимим планом такої задачі називається такий план, при якому справедливою буде система обмежень (2) і (3). Оптимальним планом називається такий план, при якому цільова функція набуде свого екстремального значення.

Задачу (1)—(3) можна легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2) всі b_i (i = 1, 2, …, m) є невід’ємними, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від’ємне, то, помноживши i-те обмеження на (– 1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$, то останню завжди можна записати у вигляді рівності, увівши допоміжну змінну y_{n+1}: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}\,x_n+x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводять до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну змінну y_{n+2}, тобто: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - \text{н}_{n+2} = b_k$ ($x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$).

Якщо в задачі лінійного програмування є більше двох невідомих, то таку задачу рекомендується розв'язувати прямим симплекс-методом.

Симплекс-метод — це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв’язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п’яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність на основі оцінок елементів індексної стрічки Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв’язкового елемента та розрахунком елементів нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Далі ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

В результаті застосування симплекс-методу для розв’язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в індексному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв’язковий елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному (розв'язковому) стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $\Delta_j \ (j=\overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Завдання лабораторної роботи

Грошові кошти підприємства можуть використовуватись для фінансування трьох проектів. Проект А гарантує отримання через рік прибутку в розмірі 0,04N грн. на кожну вкладену гривню. Проект В гарантує отримання прибутку в розмірі 0,08N грн. на кожну вкладену гривню, але через два роки. Проект С передбачає отримання прибутку в розмірі 0,1N грн. на кожну вкладену гривню, але через три роки. При цьому передбачається, що увесь дохід, отриманий від інвестування в будь-який проект в звітному періоді повинен бути реінвестований в один з трьох інвестиційних проектів. Визначити, як потрібно розпорядитись капіталом в сумі 5 млн грн., щоб максимізувати загальний дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестиційної діяльності (N – порядковий номер студента в журналі).

Зразок виконання роботи

Інвестиційна компанія вирішує задачу формування портфеля цінних паперів. Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для інвестування в три види цінних паперів: А, В і С. При інвестуванні в цінні папери А компанія отримає через рік прибуток в розмірі 0,5 грн. на кожну вкладену гривню. Інвестування в цінні папери В дає змогу отримати прибуток в розмірі 2 грн на кожну інвестовану гривню, але через два роки. При інвестуванні в цінні папери С компанія отримає прибуток 3 грн. на кожну вкладену гривню, але тільки через 3 роки від початку інвестицій. Визначити, як потрібно розпорядитися початковим капіталом в сумі 1000000 грн, щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через 3 роки після початку інвестування. При цьому передбачається, що увесь дохід, отриманий від інвестування в будь-який вид цінних паперів в звітному періоді повинен бути реінвестований в цінні папери заданих видів чи хоча б один з них.

Розв'язання. Позначимо через x_{ij} — суму інвестованих коштів у i-му році в проект j-й вид цінних паперів ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$). Складемо план руху коштів за 3 роки.

Рік	Показник	Вид цінного паперу		
		A	B	C
1	Доступні кошти на початок звітного періоду, млн. грн.	1		
	Інвестиція, млн. грн.	X_{11}	X_{12}	X_{13}

	Дохід на кінець звітного періоду, млн. грн.	$1{,}5x_{11}$	--	--
2	Доступні кошти на початок звітного періоду, млн. грн.	$1 – (x_{11} + x_{12}+ x_{13}) +1{,}5x_{11}$		
	Інвестиція, млн. грн.	X_{21}	X_{22}	--
	Дохід на кінець звітного періоду, млн. грн.	$1{,}5x_{21}$	$3x_{12}$	--
3	Доступні кошти на початок звітного періоду, млн. грн.	$1 – (x_{11} + x_{12}+ x_{13}) +1{,}5x_{11}– (x_{21} + x_{22}) +1{,}5x_{21} + 3x_{12}$		
	Інвестиція, млн. грн.	X_{31}	--	--
	Дохід на кінець звітного періоду, млн. грн	$1{,}5x_{31}$	$3x_{22}$	$4x_{13}$

Дана схема дає змогу записати математичну модель задачі знаходження оптимального з точки зору максимізації доходу плану інвестування в цінні папери.

Цільова функція задачі відображає максимізацію грошового доходу компанії після трьох років інвестиційної діяльності

$$L = 1{,}5x_{31} + 3x_{22} + 4x_{13} \to \max .$$

Обмеження моделі записуються згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 1$;
для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 1 - (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 1{,}5x_{11}$;
для 3-го року $x_{31} \le 1 - (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 1{,}5x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}5x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо наступну економіко-математичну модель:

$$L = 1{,}5x_{31} + 3x_{22} + 4x_{13} \to \max$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 1; \\ -1{,}5x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}5x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3}$

Дана задача є задачею лінійного програмування і її можна розв’язати симплекс-методом.

Для спрощення запису введемо наступні позначення: $x_{11} = x_1$; $x_{12} = x_2$; $x_{13} = x_3$; $x_{21} = x_4$; $x_{22} = x_5$; $x_{31} = x_6$.

Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою введення допоміжних змінних y_1, y_2, та y_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв’язок задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

$c_j^б$	$x_j^б$	c_j	0	0	4	0	3	1,5	0	0	0
		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
0	y_1	1	1	1	* 1 *	0	0	0	1	0	0
0	y_2	0	-1,5	0	0	1	1	0	0	1	0
0	y_3	0	0	-3	0	-1,5	0	1	0	0	1
	Δ_j	0	0	0	-4	0	-3	-1,5	0	0	0
4	x_3	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	y_2	0	-1,5	0	0	1	* 1 *	0	0	1	0
0	y_3	0	0	-3	0	-1,5	0	1	0	0	1
	Δ_j	4	4	4	0	0	-3	-1,5	4	0	0
4	x_3	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
3	x_5	0	-1,5	0	0	1	1	0	0	1	0
0	y_3	0	0	-3	0	-1,5	0	* 1 *	0	0	1
	Δ_j	4	-0,5	4	0	3	0	-1,5	4	3	0
4	x_3	1	* 1 *	1	1	0	0	0	1	0	0
3	x_5	0	-1,5	0	0	1	1	0	0	1	0
1,5	x_6	0	0	-3	0	-1,5	0	1	0	0	1
	Δ_j	4	-0,5	-0,5	0	0,75	0	0	4	3	1,5
0	x_1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
3	x_5	1,5	0	1,5	1,5	1	1	0	1,5	1	0
1,5	x_6	0	0	-3	0	-1,5	0	1	0	0	1
	Δ_j	4,5	0	0	0,5	0,75	0	0	4,5	3	1,5

Оптимальним є такий план:

$$X^* = (x_1 = 1;\ x_5 = 1{,}5).$$

За такого плану інвестування максимальний дохід підприємства складе $Z_{\max} = 4{,}5$ млн. грн.

Згідно з побудованою моделлю і проведеними розрахунками, підприємству необхідно інвестувати всю суму (1 млн грн) в цінні папери *A* в першому звітному періоді. На початок другого звітного періоду підприємство матиме 1,5 млн грн. Всі ці кошти слід інвестувати в цінні папери *B*. Відповідно, через три роки після початку інвестування дохід підприємства складе 4,5 млн грн.

Лабораторна робота №2

«Теорія двоїстості»

Теоретичний матеріал

Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою, так званою *двоїстою* задачею. Економічну інтерпретацію кожної з пари таких задач розглянемо на прикладі задачі визначення оптимальної виробничої програми.

Пряма задача: $\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (1)

за умов: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Необхідно визначити, яку кількість продукції кожного j-го виду x_j $(j = \overline{1,n})$ необхідно виготовляти, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомими є: наявні обсяги ресурсів — b_i $(i = \overline{1,m})$; норми витрат i-го виду ресурсу на виробництво одиниці j-го виду продукції — a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, а також c_j $(j = \overline{1,n})$ — ціни реалізації одиниці j-*ої* продукції.

Розглянемо тепер цю саму задачу з іншого погляду. Припустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів. Кожному ресурсу b_i $(i = \overline{1,m})$ поставимо у відповідність його оцінку y_i $(i = \overline{1,m})$. Умовно вважатимемо, що y_i — ціна одиниці i-го ресурсу.

На виготовлення одиниці j-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (1)—(3) m видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці i-го виду ресурсу дорівнює y_i $(i = \overline{1,m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці j-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m.$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих самих обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j, \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть провести операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, за яких їх продаж є доцільнішим, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m .$$

Отже, в результаті маємо *двоїсту задачу*:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \qquad (4)$$

$$\text{за умов:} \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + a_{3n} y_3 + \ldots + a_{mn} y_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1,2,..m). \qquad (6)$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного *і*-го виду ресурсу $y_i,\ i = \overline{1,m}$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин $y_i,\ i = \overline{1,m}$ — умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва.

Задача (4)—(6) є двоїстою або спряженою до задачі (1)—(3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних точок зору.

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв”язок, який випливає з таких теорем:

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто max Z = min F, і навпаки. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план $X_{опт}$, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі $Y_{опт}$ визначається із співвідношення $Y_{опт} = \bar{c}_{баз} \times D^{-1}$, де $\bar{c}_{баз}$ - вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D^{-1} - матриця, обернена до матриці *D*, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких взято з початкового опорного плану задачі.

Економічний зміст першої теореми двоїстості: підприємству байдуже, виробляти продукцію по оптимальному плану $X_{опт}$ і отримувати максимальний прибуток чи продати ресурси по оптимальних цінах $Y_{опт.}$

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *і*-обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний *і*-компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо *і*-компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості: відповідна додатна оцінка показує зростання величини доходів підприємства, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, за статусом можна умовно поділити на *дефіцитні* та *недефіцитні* залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i – ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є недефіцитним. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-ресурс використовується для оптимального плану повністю і називається *дефіцитним.*

Для визначення компонентів нового оптимального плану після одночасної зміни запасів декількох видів ресурсів використовують співвідношення $X_{опт} = D^{-1} \times B$, де $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \vdots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}$

D^{-1} - матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких взято з початкового опорного плану задачі.

Аналіз рентабельності продукції виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва j – виду продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), то виготовляти продукцію не вигідно, вона є *нерентабельна* і в оптимальному плані прямої задачі відповідне

$x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона є *рентабельною* і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Завдання лабораторної роботи

Деяке підприємство виробляє 4 види продукції A, B, C, D використовуючи для цього три види ресурсів. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, який дає підприємству найбільший дохід.

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1 2 3 Дохід від реалізації одиниці продукції	a_{11} a_{21} a_{32} c_1	a_{12} a_{22} a_{32} c_2	a_{13} a_{23} a_{33} c_3	a_{14} a_{24} a_{34} c_4	b_1 b_2 b_3

1. Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2. Записати оптимальні плани та значення цільових функцій прямої та двоїстої задач.

3. Визначити статус ресурсів прямої задачі. Який ресурс є найдефіцитнішим?

4.Якого значення набуде цільова функція прямої задачі у випадку збільшення (зменшення) запасу кожного окремо взятого ресурсу на 1 од.

5. Визначити оптимальний план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо одночасно запас першого ресурсу збільшити на *(30 - x)* од., другого – зменшити на *(30 - x)* од., третього – збільшити на *x* од., де *x* – номер варіанту.

6. Визначити рентабельність кожного виду продукції що виробляється на підприємстві.

7. Скільки одиниць і якого ресурсу можна продати за договірними цінами не порушуючи при цьому оптимальності виробничого плану?

Зразок виконання роботи

Нехай задано такі техніко-економічні показники виробництва продукції підприємством:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1 2 3 Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	2 0 1 5	3 2 1 10	0 3 1 15	1 1 1 9	50 350 100

1. Сформулюємо математичну модель прямої задачі лінійного програмування та двоїстої до неї:

Пряма задача:

$$Z = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 9x_4 \to \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 \le 50,$$
$$2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 350,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 100,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Двоїста задача:

$$F = 50y_1 + 350y_2 + 100y_3 \to \min$$

$$2y_1 + y_3 \ge 5,$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10,$$
$$3y_2 + y_3 \ge 15,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \ge 9,$$
$$y_i \ge 0, \quad y = \overline{1,3}$$

2. Знайдемо оптимальний план прямої задачі симплекс-методом, попередньо записавши її в канонічному вигляді.

$$Z = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \to \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 + y_1 = 50,$$
$$2x_2 + 3x_3 + x_4 + y_2 = 350,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_3 = 100,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}$$

$c_j^б$	$x_j^б$	c_j / b_i	5	10	15	9	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
0	y_1	50	2	3	0	1	1	0	0
0	y_2	350	0	2	3	1	0	1	0
0	y_3	100	1	1	* 1 *	1	0	0	1
	Δ_j	0	-5	-10	-15	-9	0	0	0
0	y_1	50	2	3	0	1	1	0	0
0	y_2	50	-3	-1	0	-2	0	1	-3
15	x_3	100	1	1	1	1	0	0	1
	Δ_j	1500	10	5	0	6	0	0	15

Таким чином, $Z_{\max} = 1500$

$$x_{\max} = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 100 \\ y_1 = 50 \\ y_2 = 50 \\ y_3 = 0 \end{pmatrix}$$

З економічної точки зору, максимально можливий дохід 1500 гр.од. підприємство може отримати в тому випадку, коли буде виготовляти 100 од. продукції третього виду при заданих ресурсних обмеженнях.

Згідно з першою теоремою двоїстості, можемо знайти оптимальний план двоїстої задачі: $Y_{опт} = \overline{c}_{баз} \times D^{-1} = (0 \quad 0 \quad 15)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 15)$

$F_{\min} = 100 \times 15 = 1500$.

3. Визначаємо статус ресурсів. Для цього підставляємо оптимальний план прямої задачі в систему обмежень цієї задачі:

$$\begin{aligned} &2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 0 \le 50, \quad && 0 \le 50, \\ &0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 0 \le 350, && 300 \le 350, \\ &1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 0 \le 100, && 100 \le 100. \end{aligned}$$

Як бачимо, перше і друге обмеження виконуються як строгі нерівності (перший ресурс взагалі не використовується в виробничому процесі при запасі 50 од., другого ресурсу використовується 300 од. при запасі 350 од.). Третій ресурс використовується повністю, тобто є дефіцитним.

До подібних висновків можна прийти, аналізуючи значення елементів вектора двоїстих оцінок: $Y_{opt} = (0 \quad 0 \quad 15)$. Перші дві доїсті оцінки є нульовими, тобто ресурси є в надлишку, третя двоїста оцінка є додатною, тобто відповідний ресурс є дефіцитним.

4. Визначимо, якого значення набуде цільова функція прямої задачі у випадку збільшення (зменшення) запасу кожного окремо взятого ресурсу на 1 од.

Згідно з третьою теоремою двоїстості, відповідна додатна двоїста оцінка показує зростання величини доходів підприємства, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю. Отже, виходячи з елементів вектора двоїстих оцінок, можна зробити висновок, що при окремому збільшенні (зменшенні) запасів першого і другого ресурсів при незмінності величини запасів решти ресурсів, величина доходів підприємства не зміниться (так як ці ресурси є в надлишку). Збільшення (зменшення) запасу третього ресурсу на 1од. при незмінних обсягах решти ресурсів призведе до зростання (скорочення) доходів підприємства на 15 гр.од.

5. Визначимо оптимальний план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо одночасно запас першого ресурсу збільшити на *(30 - x)* од., другого – зменшити на *(30 - x)* од., третього – збільшити на x од., де x – номер варіанту (приймемо x = 5).

Для визначення компонентів нового оптимального плану після одночасної зміни запасів декількох видів ресурсів використовують співвідношення $X_{опт} = D^{-1} \times B$, де $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \vdots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}$

D^{-1} - матриця, обернена до матриці *D*, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких взято з початкового опорного плану задачі.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50+25 \\ 350-25 \\ 100+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 325 \\ 105 \end{pmatrix} = (75 \quad 10 \quad 105)$$

Тобто, в даному оптимальному плані прямої задачі $y_1 = 75, \quad y_2 = 10, \quad x_3 = 105.$ Відповідно, новий дохід підприємства буде складати $Z_1 = 15 \cdot 105 = 1575$ гр.од.

6. Визначимо рентабельність кожного виду продукції що виробляється на підприємстві. Для цього підставимо оптимальний план двоїстої задачі в систему обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 0 + 15 \geq 5, & 15 \geq 5, \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 15 \geq 10, & 15 \geq 10, \\ 3 \cdot 0 + 15 \geq 15, & 15 \geq 15, \\ 0 + 0 + 15 \geq 9. & 15 \geq 9. \end{array}$$

Ліві частини кожної з нерівностей характеризують суми витрат, понесені підприємством на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Праві частини – дохід від реалізації одиниці продукції відповідного виду. Як бачимо, рентабельним є виробництво тільки третього виду продукції, що і підтверджується оптимальним планом прямої задачі.

7. Визначимо, скільки одиниць і якого виду ресурсу можна продати за договірними цінами не порушуючи при цьому оптимальності виробничого плану. Для цього в систему обмежень прямої задачі підставляємо оптимальний план прямої задачі:

$$2\cdot 0+3\cdot 0+0\cdot 100+1\cdot 0\le 50,\qquad 0\le 50,$$

$$0\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 100+1\cdot 0\le 350,\qquad 300\le 350,$$

$$1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 100+1\cdot 0\le 100,\qquad 100\le 100.$$

Ліві частини кожного з обмежень характеризують фактично витрачені обсяги ресурсів, праві частини – обсяги запасів на підприємстві. Як бачимо, не порушуючи оптимальності виробничого плану, можна продати 50 од. ресурсу першого виду (він взагалі не використовується в виробничому процесі) і 50 од. ресурсу другого виду по договірних цінах.

Завдання лабораторної роботи

В - 1

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	0	1	1	80
3	1	5	1	0	250
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	3	6	7	

В – 2

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	6	1	2	4	300
2	5	2	2	4	200
3	2	3	1	1	90
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	2	3	4	

В – 3

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	

1	3	2	1	2	200
2	3	1	3	4	500
3	1	1	1	3	400
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	27	10	15	28	

В – 4

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	3	300
2	1	0	2	1	70
3	1	2	1	0	340
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	8	3	2	1	

В – 5

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	0	2	1	180
2	0	1	3	2	250
3	4	2	0	4	800
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	9	6	4	7	

В – 6

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	2	2	1	300
2	3	0	2	2	600
3	1	4	0	1	200
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	3	2	5	4	

В – 7

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	2	1	0	550
2	2	2	1	2	340
3	1	1	2	4	450
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	2	5	4	

В – 8

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	5	1	3	0	700
2	4	2	1	1	400
3	3	1	4	2	250
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	5	7	12	15	

В – 9

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	1	0	4	450
2	5	4	4	2	725
3	1	3	3	1	500
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	10	11	17	

В – 10

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	5	4	0	1	150
2	3	2	2	3	250
3	1	0	2	1	350
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	10	8	7	5	

В – 11

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	1	1	2	300
2	0	4	0	3	450
3	5	3	1	1	500
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	15	4	8	7	

В – 12

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	2	3	0	250
2	4	5	0	1	700
3	1	1	1	0	300
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	14	9	8	30	

В – 13

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	3	1	2	500
2	1	2	2	1	400
3	0	0	2	1	350
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	10	7	8	5	

В – 14

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	4	0	0	1	200
2	5	2	2	3	700
3	2	1	1	1	400
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	25	5	4	10	

В – 15

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	150
2	3	4	0	2	100
3	0	3	4	1	400
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	10	15	20	14	

В – 16

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	0	1	1	80
2	1	5	1	0	250
3	2	1	1	1	280
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	3	6	7	

В – 17

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	

1	5	2	2	4	200
2	2	3	1	1	90
3	6	1	2	4	300
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	2	3	4	

В – 18

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	1	3	4	500
2	1	1	1	3	400
3	3	10	1	2	200
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	27	2	15	28	

В – 19

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	0	2	1	300
2	1	2	1	0	70
3	2	1	1	3	340
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	8	3	2	1	

В – 20

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	0	1	3	2	250
2	4	2	0	4	800
3	1	0	2	1	180
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	9	6	4	7	

В – 21

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	0	2	2	600
2	1	4	0	1	200
3	1	2	2	1	300
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	3	2	5	4	

В – 22

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	2	1	2	340
2	1	1	2	4	450
3	3	2	1	0	550
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	2	5	4	

В – 23

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	4	2	1	1	400
2	3	1	4	2	250
3	5	1	3	0	700
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	5	7	12	15	

В – 24

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	5	4	4	2	725
2	1	3	3	1	500
3	3	1	0	4	450
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	4	10	11	17	

В – 25

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	2	2	3	250
2	1	0	2	1	350
3	5	4	0	1	150
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	10	8	7	5	

В – 26

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	0	4	0	3	450
2	5	3	1	1	500
3	3	4	8	7	300
Дохід від реалізації одиниці продукції, гр.од.	15	1	1	2	

В – 27

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1					
2	4	5	0	1	700
3	1	1	1	0	300
Дохід від реалізації	2	2	3	2	250
одиниці продукції,	14	9	8	30	
гр.од.					

В – 28

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1					
2	1	2	2	1	400
3	0	0	2	1	500
Дохід від реалізації	1	3	1	2	350
одиниці продукції,	10	7	8	5	
гр.од.					

В – 29

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1					
2	5	2	2	3	700
3	2	1	1	1	400
Дохід від реалізації	4	0	0	1	200
одиниці продукції,	25	5	4	10	
гр.од.					

В – 30

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, од.				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1					
2	3	4	0	2	100
3	0	3	4	1	400
Дохід від реалізації	1	1	1	1	150
одиниці продукції,	10	15	20	14	
гр.од.					

Лабораторна робота №3

«Двохетапна транспортна задача»

Теоретичний матеріал

У класичній постановці транспортної задачі допускається, що вантаж транспортується безпосередньо від постачальників до споживачів. Проте на практиці досить часто виникають ситуації, коли продукція в деяких обсягах спочатку перевозиться до посередницьких фірм (гуртівень), а вже потім – до споживачів. В такому випадку процесс розв'язання задачі розділяють на два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до гуртових баз, а потім — від гуртових баз до споживачів. Така задача має назву двохетапної транспортної задачі. Треба відмітити, що в якості гуртівень можуть виступати прикордонні митні термінали, морські порти тощо (у випадку зовнішньоекономічної діяльності підприємства).

Нехай в m пунктах постачання A_1, A_2, …, A_m є відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції, яку необхідно перевезти до l гуртівень $D_1, D_2, ..., D_l$, місткості сховищ (складських приміщень) яких становлять $d_1, d_2, ..., d_l$, а потім доставити її споживачам $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, ..., b_n$. Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до гуртівні — c_{ik} та від посередників до споживачів — c_{kj}. Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами. Якщо обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника до k-ої фірми, позначити через x_{ik}, а обсяг вантажу, що перевозиться від k-ої фірми j-му споживачеві — через x_{kj}, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_{kj}$$

за умов:

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k,\ k = \overline{1,l};$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{kj} = b_j,\ j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le d_k,\ k = \overline{1,l};$$

$$x_{ik} \ge 0, x_{kj} \ge 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l}.$$

У випадку, коли загальний обсяг вантажу $\sum_{i=1}^{m} a_i$ дорівнює місткості всіх складів гуртових баз (проміжних пунктів споживання) $\sum_{k=1}^{l} d_k$, а також сумарній потребі всіх споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{l} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то така двохетапна транспортна задача може бути розв'язана як дві одноетапні. Треба відмітити, що така процедура є можливою за умови відсутності прямих поставок продукції від постачальників до споживачів. В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв'язування двохетапної транспортної задачі полягає у врахуванні місткостей посередників двічі — як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці, в рядках якої записують дані про постачальників, а також про посередницькі фірми, а в стовпцях — знову дані про посередників та споживачів. У клітинах, які розміщені на перетині рядків-постачальників та стовпців-споживачів, фіксують реальні затрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, ставлять нульові величини затрат. Решту клітин таблиці блокують, тобто вартості перевезень прирівнюють до деякого досить великого числа *M*. У процесі розв'язування задачі в цих клітинах не будуть передбачатися перевезення продукції, що відповідає умовам двохетапної транспортної задачі.

В процесі розв'язку двохетапної транспортної задачі можуть виникати такі ситуації:

1. Незбалансованість транспортної задачі ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$). У цьому разі необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши у такий спосіб задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів (гуртових баз) не дорівнює загальному обсягу продукції постачальників:

а) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{k=1}^{l} d_k$. В такому випадку потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що буде транспортуватись до нього, має дорівнювати невивезеній частині продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{k=1}^{l} d_k$ (од.);

б) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{k=1}^{l} d_k$. В такій ситуації немає потреби вводити фіктивного постачальника і, зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься.

3. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів:

а) $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{k=1}^{l} d_k$. В цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що транспортуватиметься від нього до споживача B_j, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів за обсягом не менш як $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{k=1}^{l} d_k$ (од.);

б) $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{k=1}^{l} d_k$ В такій ситуації немає потреби вводити фіктивного споживача і, зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься.

Зразок виконання роботи

На ринку є 2 виробники A_1, A_2 деякої однорідної продукції. За звітний період підприємства A_1 і A_2 виготовляють продукцію в обсягах відповідно 15 і 105 одиниць. Ця продукція відправляється на два гуртові бази D_1 і D_2, місткість складських приміщень складає відповідно 80 та 60 од., а потім — до трьох споживачів B_1, B_2, B_3, попит кожного з яких становить 45 од. Вартості перевезень одиниці продукції (в умовних одиницях) від виробників на гуртові бази, а потім — з гуртових баз до споживачів наведені в табл. 1 і табл. 2.

Таблиця 1

Виробник	Вартість перевезення одиниці продукції від виробника на гуртову базу, ум. од.	
	D_1	D_2
A_1	3	6
A_2	6	9

Таблиця 2

Гурто-ва база	Вартість перевезення одиниці продукції з гуртових баз до споживачів, ум. од.		
	B_1	B_2	B_3
D_1	4	7	10
D_2	10	13	16

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції від першого виробника до кожного споживача. Вартість транспортування одиниці продукції за маршрутом A_1B_1 складає 1 ум.од., A_1B_2 – 2 ум.од., A_1B_3 - 3 ум. од. Перевезення продукції з однієї гуртової бази на іншу є недопустимим. Додаткова умова: попит всіх трьох споживачів слід задовольнити повністю.

Сформулювати поставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) та визначити її оптимальний план. Результат оформити у вигляді схеми.

Розв'язання.

На першому етапі розв'язку задачі перевіряємо виконання умов балансів мас:

$\sum a_i = 120; \sum b_j = 135; \sum d_k = 140$. Пропозиція виробників є меншою за попит споживачів, тобто в задачу необхідно ввести фіктивного виробника A_3 з виробничою потужністю 15 одиниць продукції.

У поставленій задачі кожна гуртова база може бути розглянута як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення, тобто як постачальник, так і споживач.

Перевезення продукції безпосередньо від виробників до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також з однієї гуртової бази на іншу блокується введенням у відповідні клітини досить великих вартостей перевезення одиниці продукції — *M*.

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двохетапної задачі наведено нижче (табл. 3).

Таблиця 3

A_i, D_k	D_k, B_j					u_i
	$d_1 = 80$	$d_2 = 60$	$b_1 = 45$	$b_2 = 45$	$b_3 = 45$	
$a_1 = 15$	3	6	1 15	2	3	$u_1 = -9$
$a_2 = 105$	6 80	9 25	M	M	M	$u_2 = 9$
$a_3 = 15$	0	0 15	M	M	M	$u_3 = 0$
$d_1 = 80$	0	***M***	4 30	7 45	10 5	$u_4 = -6$
$d_2 = 60$	***M***	0 20	10	13	16 40	$u_5 = 0$
v_j	$v_1 = -3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 10$	$v_4 = 13$	$v_5 = 16$	

Зауважимо, що в клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає неповне використання ємностей сховищ у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Ця транспортна задача після введення фіктивного виробника вже є збалансованою, бо:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 15 + 105 + 15 = 135 \text{ од.},$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 45 + 45 + 45 = 135 \text{ од.},$$

Даний план перевезень є невиродженим, так як кількість заповнених клітинок таблиці є рівною величині (**m + n - 1),** де **m** – кількість постачальників (включаючи і гуртові бази), **n** – кількість споживачів, включаючи проміжних. Початковий опорний план транспортної задачі побудовано методом мінімальної вартості. Розрахуємо загальну вартість перевезень, що відповідає цьому плану:

$$Z_1 = 15 \cdot 1 + 80 \cdot 6 + 25 \cdot 9 + 15 \cdot 0 + 30 \cdot 4 + 45 \cdot 7 +$$
$$+ 5 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + 40 \cdot 16 = 1845 \text{ (ум. од.)}.$$

Перевіримо початковий опорний план на оптимальність за методом потенціалів. Значення потенціалів знаходимо з система рівнянь для заповнених клітинок. Розраховані таким чином значення потенціалів підставляємо в систему нерівностей для незаповнених клітинок. В правій частині містяться значення різниць для нерівностей, які не відповідають дійсності: (-2) і (-4):

$u_1 + v_3 = 1; \quad v_2 = 0, u_1 = -9;$

$u_2 + v_1 = 6; \quad v_1 = -3;$

$u_2 + v_2 = 9; \quad u_2 = 9;$

$u_3 + v_2 = 0; \quad u_3 = 0;$

$u_4 + v_3 = 4; \quad v_3 = 10;$

$u_4 + v_4 = 7; \quad v_4 = 13;$

$u_4 + v_5 = 10; \quad u_4 = -6;$

$u_5 + v_2 = 0; \quad u_5 = 0;$

$u_5 + v_5 = 16; \quad v_5 = 16.$

$u_1 + v_1 \le 3; \quad -12 \le 3;$

$u_1 + v_2 \le 6; \quad -9 \le 6;$

$u_1 + v_4 \le 2; \quad 4 \le 2; \ (-2)$

$u_1 + v_5 \le 3; \quad 7 \le 3; \ (-4)$

$u_3 + v_1 \le 0; \quad -3 \le 0;$

$u_4 + v_1 \le 0; \quad -9 \le 0;$

$u_5 + v_3 \le 10; \quad 10 \le 10;$

$u_5 + v_4 \le 13; \quad 13 \le 13.$

Треба відмітити, що на даному кроці і на всіх подальших кроках не перевіряється виконання умов нерівностей для тих клітинок, в яких вартість перевезення одиниці продукції – М гр.од.

Таблиця 4

	D1	D2	B1	B2	B3	
A1			15		*	$u_1 = -9$
A2	80	25				$u_2 = 9$
A3		15				$u_3 = 0$
D1			30	45	5	$u_4 = -6$
D2		20			40	$u_5 = 0$
	$v_1 = -3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 10$	$v_4 = 13$	$v_5 = 16$	

Цей опорний план задачі неоптимальний. Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку A_1B_3 згідно з побудованим циклом (табл. 5).

Таблиця 5

	D1	D2	B1	B2	B3	
A1			10		5	$u_1 = -13$
A2	80	25				$u_2 = 9$
A3		15				$u_3 = 0$
D1			35	45		$u_4 = -10$
D2		20	*		40	$u_5 = 0$
	$v_1 = -3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 14$	$v_4 = 17$	$v_5 = 16$	

Аналогічно, як на попередньому кроці перевіряємо знайдений опорний план на оптимальність за методом потенціалів. Значення потенціалів знаходимо з система рівнянь для заповнених клітинок. Розраховані таким чином значення потенціалів підставляємо в систему нерівностей для незаповнених клітинок. В правій частині містяться значення різниць для нерівностей, які не відповідають дійсності: (-2), (-4) і (-4):

$u_1+v_3=1;\quad v_2=0, v_3=14;$	$u_1+v_1\le 3;\quad -16\le 3;$
$u_1+v_5=3;\quad u_1=-13;$	$u_1+v_2\le 6;\quad -13\le 6;$
$u_2+v_1=6;\quad v_1=-3;$	$u_1+v_4\le 2;\quad 4\le 2;\ (-2)$
$u_2+v_2=9;\quad u_2=9;$	$u_3+v_1\le 0;\quad -3\le 0;$
$u_3+v_2=0;\quad u_3=0;$	$u_4+v_1\le 0;\quad -13\le 0;$
$u_4+v_3=4;\quad u_4=-10;$	$u_4+v_5\le 10;\quad 6\le 10;$
$u_4+v_4=7;\quad v_4=17;$	$u_5+v_3\le 10;\quad 14\le 10;\quad (-4)$
$u_5+v_2=0;\quad u_5=0;$	$u_5+v_4\le 13;\quad 17\le 13;\quad (-4)$
$u_5+v_5=16;\quad v_5=16.$	

Визначимо вартість перевезень згідно з другим опорним планом:

$$Z_2 = 1\cdot 10 + 3\cdot 5 + 6\cdot 80 + 9\cdot 25 + 0\cdot 15 +$$
$$+ 4\cdot 35 + 7\cdot 45 + 0\cdot 20 + 16\cdot 40 = 1825 \text{ (ум. од.).}$$

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має наступний вигляд (табл.6):

Таблиця 6

	D1	D2	B1	B2	B3	
A1					15	$u_1 = -13$
A2	80	25				$u_2 = 9$
A3		15				$u_3 = 0$
D1			35	45		$u_4 = -6$
D2		20	10		30	$u_5 = 0$
	$v_1 = -3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 10$	$v_4 = 13$	$v_5 = 16$	

Перевіряємо знайдений опорний план на оптимальність за методом потенціалів. Значення потенціалів знаходимо з система рівнянь для заповнених клітинок. Розраховані таким чином значення потенціалів підставляємо в систему нерівностей для незаповнених клітинок:

$u_1 + v_5 = 3; \quad u_5 = 0, u_1 = -13;$

$u_2 + v_1 = 6; \quad v_1 = -3;$

$u_2 + v_2 = 9; \quad u_2 = 9;$

$u_3 + v_2 = 0; \quad u_3 = 0;$

$u_4 + v_3 = 4; \quad u_4 = -6;$

$u_4 + v_4 = 7; \quad v_4 = 13;$

$u_5 + v_2 = 0; \quad v_2 = 0;$

$u_5 + v_3 = 10; \quad v_3 = 10;$

$u_5 + v_5 = 16; \quad v_5 = 16.$

$u_1 + v_1 \le 3; \quad -16 \le 3;$

$u_1 + v_2 \le 6; \quad -13 \le 6;$

$u_1 + v_3 \le 1; \quad -3 \le 1;$

$u_1 + v_4 \le 2; \quad 0 \le 2;$

$u_3 + v_1 \le 0; \quad -3 \le 0;$

$u_4 + v_1 \le 0; \quad -9 \le 0;$

$u_4 + v_5 \le 10; \quad 10 \le 10;$

$u_5 + v_4 \le 13; \quad 13 \le 13.$

Як бачимо, всі нерівності є справедливими, тобто отримано оптимальний план (табл. 6)

Мінімальна вартість перевезень згідно з оптимальним планом складає:

$$Z_{\min} = 3 \cdot 15 + 6 \cdot 80 + 9 \cdot 25 + 0 \cdot 15 + 4 \cdot 35 +$$
$$+7 \cdot 45 + 0 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 16 \cdot 30 = 1785 \text{ (ум. од.)}.$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезень продукції двохетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми (рис. 1):

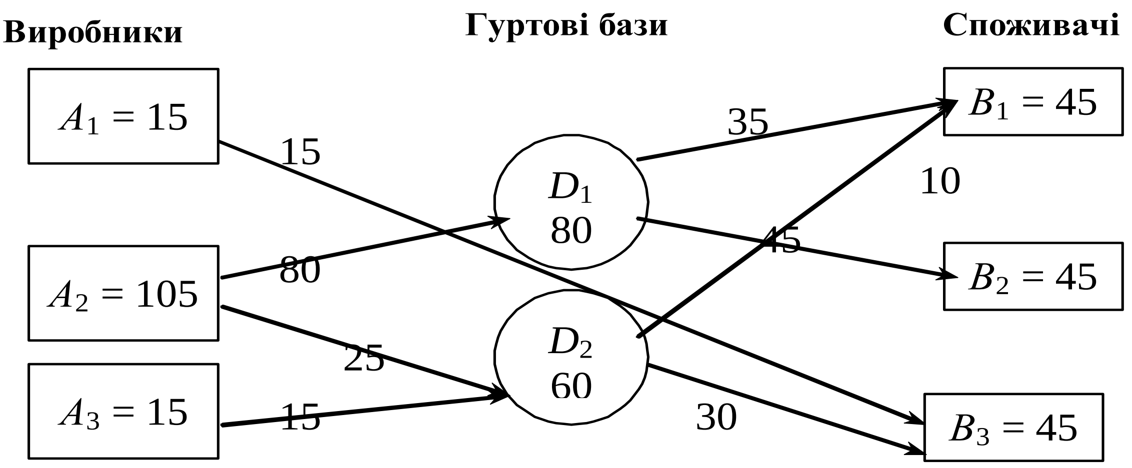

Рис. 1. Оптимальний план перевезень продукції

Завдання лабораторної роботи

Постачальники – філіали A_1, A_2, ..., A_m виробничого об''єднання виготовляють однорідну продукцію в обсягах a_1, a_2, ..., a_m за місяць. Ця продукція відправляється гуртовим базам D_1, D_2, ..., D_k, місткість складів котрих становить відповідно d_1, d_2, …, d_k, а потім – до споживачів B_1, B_2, ..., B_n, попит яких складає b_1, b_2, ..., b_n од. продукції на місяць. Вартість перевезення одиниці продукції (в ум. од.) від виробників на гуртові бази і з баз до споживачів наведена в таблицях. Крім того, за індивідуальними контрактами, можливі також безпосередні поставки продукції від A_i ($i = 1,m$) виробника до B_j ($j = 1,n$) споживача. Вартість перевезення одиниці продукції за маршрутом A_iB_j складає a_ib_j ум.од.

Перевезення продукції з однієї гуртової бази на іншу є неприпустимим.

Сформулювати аоставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну). Знайти такий план перевезення продукції щоб сукупні транспортні витрати були мінімальними.

Результат оформити у вигляді схеми.

1. a_i = (200; 150; 350; 200)
b_j = (400; 300; 100; 100)
d_r = (550; 400)
$A_1B_3 = 4$; $A_1B_4 = 3$

	D_1	D_2
A_1	4	1
A_2	3	6
A_3	2	2
A_4	1	3

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	5	4	1	3
D_2	3	7	2	5

В-2

1. $a_i = (450; 300; 800)$

$b_j = (300; 700; 500; 50)$

$d_r = (1000; 600)$

$A_1B_1 = 2$; $A_1B_2 = 4$;

$A_1B_3 = 3$; $A_1B_4 = 5$

	D_1	D_2
A_1	3	2
A_2	4	1
A_3	5	3

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	3	4	5	3
D_2	2	2	1	1

В-3

1. $a_i = (50; 40; 60)$

$b_j = (80; 30; 40)$

$d_r = (100; 50)$

$A_2B_1 = 4$

	D_1	D_2
A_1	5	1
A_2	1	3
A_3	3	5

	B_1	B_2	B_3
D_1	5	4	2
D_2	2	3	1

В-4

1. $a_i = (10; 15; 20)$

$b_j = (20; 20)$

$d_r = (35; 15)$

$A_1B_1 = 5$; $A_1B_2 = 3$

	D_1	D_2
A_1	3	4
A_2	1	2
A_3	3	5

	B_1	B_2
D_1	5	1
D_2	3	7

Умова: продукцію першого, другого і третього виробників вивезти повністю.

В-5

1. $a_i = (300; 200; 100)$

$b_j = (150; 50; 200; 200)$

$d_r = (350; 250)$

$A_2B_1 = 3$; $A_2B_2 = 4$

	D_1	D_2
A_1	5	4
A_2	1	3
A_3	2	3

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	3	4	7	3
D_2	5	2	1	2

В-6

1. $a_i = (75; 25; 150)$

$b_j = (50; 50; 50; 100)$

$d_r = (150; 150)$

$A_2B_3 = 4$; $A_2B_4 = 3$

	D_1	D_2
A_1	5	3
A_2	2	4
A_3	1	8

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	5	9	1	3
D_2	8	2	3	4

В-7

1. $a_i = (400; 900; 300)$

$b_j = (500; 500; 600)$

$d_r = (1000; 1000)$

$A_3B_1 = 1$; $A_3B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	3	1
A_2	2	4
A_3	5	3

	B_1	B_2	B_3
D_1	3	1	5
D_2	7	2	2

В-8

1. $a_i = (40; 50; 20)$
   $b_j = (30; 20)$
   $d_r = (50; 60)$
   $A_1B_1 = 4; A_1B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	7	3
A_2	1	5
A_3	4	2

	B_1	B_2
D_1	5	3
D_2	1	8

В-9

1. $a_i = (15; 75; 30; 25)$
   $b_j = (50; 75)$
   $d_r = (100; 50)$
   $A_1B_1 = 1; A_1B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	3	5
A_2	5	7
A_3	7	9
A_4	9	11

	B_1	B_2
D_1	4	6
D_2	6	8

В-10

1. $a_i = (15; 105)$
   $b_j = (45; 45; 45)$
   $d_r = (80; 60)$
   $A_1B_1 = 1; A_1B_2 = 2; A_1B_3 = 3$

	D_1	D_2
A_1	3	6
A_2	6	9

	B_1	B_2	B_3
D_1	4	7	10
D_2	10	13	16

Умова: попит всіх трьох споживачів задовольнити повністю.

В-11

1. $a_i = (35; 50; 10; 40)$
   $b_j = (40; 40)$
   $d_r = (75; 75)$
   $A_1B_1 = 2; A_2B_2 = 1$

	D_1	D_2
A_1	5	7
A_2	9	11
A_3	13	15
A_4	17	19

	B_1	B_2
D_1	3	4
D_2	11	3

Умова: продукцію третього і четвертого постачальників вивезти повністю.

В-12

1. $a_i = (75; 15; 40; 15)$
   $b_j = (45; 55)$
   $d_r = (75; 75)$
   $A_2B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	3	7
A_2	5	6
A_3	4	9
A_4	8	11

	B_1	B_2
D_1	3	7
D_2	9	12

Умова: продукцію першого і третього постачальників вивезти повністю.

В-13

1. $a_i = (15; 20; 25)$
$b_j = (20; 20)$
$d_r = (40; 40)$
$A_1B_1 = 1$

	D_1	D_2
A_1	3	7
A_2	11	8
A_3	5	2

	B_1	B_2
D_1	4	6
D_2	9	10

Умова: продукцію другого виробника вивезти повністю.

B-14

1. $a_i = (50; 50)$
$b_j = (25; 35; 75)$
$d_r = (100; 40)$
$A_1B_3 = 2$

	D_1	D_2
A_1	4	5
A_2	8	9

	B_1	B_2	B_3
D_1	3	6	7
D_2	11	3	4

Умова: попит другого і третього споживачів задовольнити повністю.

B-15

1. $a_i = (75; 105)$
$b_j = (45; 40; 50)$
$d_r = (105; 100)$
$A_2B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	4	8
A_2	8	12

	B_1	B_2	B_3
D_1	3	6	9
D_2	3	12	7

Умова: попит третього споживача задовольнити повністю.

B-16

1. $a_i = (20; 15; 35; 20)$
$b_j = (40; 30; 10; 10)$
$d_r = (55; 40)$
$A_1B_3 = 5$; $A_1B_4 = 4$

	D_1	D_2
A_1	5	2
A_2	4	7
A_3	3	3
A_4	2	4

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	6	5	2	4
D_2	4	8	3	6

B-17

1. $a_i = (45; 30; 80)$
$b_j = (30; 70; 50; 5)$
$d_r = (100; 60)$
$A_1B_1 = 4$; $A_1B_2 = 6$;
$A_1B_3 = 5$; $A_1B_4 = 7$

	D_1	D_2
A_1	5	4
A_2	6	3
A_3	7	5

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	5	6	7	5
D_2	4	4	3	3

B-18

1. $a_i = (25; 20; 30)$
$b_j = (40; 15; 20)$
$d_r = (50; 25)$

	D_1	D_2
A_1	5	1
A_2	1	3

	B_1	B_2	B_3
D_1	5	4	2
D_2	2	3	1

$A_2B_1 = 4$

A_3	3	5

В-19

1. $a_i = (20; 30; 40)$
   $b_j = (40; 40)$
   $d_r = (70; 30)$
   $A_1B_1 = 6$; $A_1B_2 = 4$

	D_1	D_2
A_1	4	5
A_2	2	3
A_3	4	6

	B_1	B_2
D_1	6	2
D_2	4	8

Умова: продукцію першого, другого і третього виробників вивезти повністю.

В-20

1. $a_i = (30; 20; 10)$
   $b_j = (15; 5; 20; 20)$
   $d_r = (35; 25)$
   $A_2B_1 = 4$; $A_2B_2 = 5$

	D_1	D_2
A_1	6	5
A_2	2	4
A_3	3	4

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	4	5	8	4
D_2	6	3	2	3

В-21

1. $a_i = (75; 25; 150)$
   $b_j = (50; 50; 50; 100)$
   $d_r = (150; 150)$
   $A_2B_3 = 6$; $A_2B_4 = 5$

	D_1	D_2
A_1	7	5
A_2	4	6
A_3	3	10

	B_1	B_2	B_3	B_4
D_1	7	11	3	5
D_2	10	4	5	6

В-22

1. $a_i = (40; 90; 30)$
   $b_j = (50; 50; 60)$
   $d_r = (100; 100)$
   $A_3B_1 = 6$; $A_3B_2 = 7$

	D_1	D_2
A_1	8	6
A_2	7	9
A_3	10	8

	B_1	B_2	B_3
D_1	8	6	10
D_2	12	7	7

В-23

1. $a_i = (80; 100; 40)$
   $b_j = (60; 40)$
   $d_r = (100; 120)$
   $A_1B_1 = 5$; $A_1B_2 = 3$

	D_1	D_2
A_1	8	4
A_2	2	6
A_3	5	3

	B_1	B_2
D_1	6	4
D_2	2	9

В-24

1. $a_i = (30; 150; 60; 50)$
   $b_j = (10; 150)$
   $d_r = (200; 100)$
   $A_1B_1 = 2; A_1B_2 = 3$

	D_1	D_2
A_1	4	6
A_2	6	8
A_3	8	10
A_4	10	12

	B_1	B_2
D_1	5	7
D_2	7	9

В-25

1. $a_i = (30; 210)$
   $b_j = (90; 90; 90)$
   $d_r = (160; 120)$
   $A_1B_1 = 2; A_1B_2 = 3; A_1B_3 = 4$

	D_1	D_2
A_1	4	7
A_2	7	10

	B_1	B_2	B_3
D_1	5	8	11
D_2	11	14	17

Умова: попит всіх трьох споживачів задовольнити повністю.

В-26

1. $a_i = (70; 100; 20; 80)$
   $b_j = (80; 80)$
   $d_r = (150; 150)$
   $A_1B_1 = 3; A_2B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	6	8
A_2	10	12
A_3	14	16
A_4	18	20

	B_1	B_2
D_1	4	5
D_2	12	4

Умова: продукцію третього і четвертого постачальників вивезти повністю.

В-27

1. $a_i = (150; 30; 80; 30)$
   $b_j = (90; 110)$
   $d_r = (150; 150)$
   $A_2B_2 = 2$

	D_1	D_2
A_1	3	7
A_2	5	6
A_3	4	9
A_4	8	11

	B_1	B_2
D_1	3	7
D_2	9	12

Умова: продукцію першого і третього постачальників вивезти повністю.

В-28

1. $a_i = (15; 20; 25)$
   $b_j = (20; 20)$
   $d_r = (40; 40)$
   $A_1B_1 = 4$

	D_1	D_2
A_1	6	10
A_2	14	11
A_3	8	5

	B_1	B_2
D_1	7	9
D_2	12	13

Умова: продукцію другого виробника вивезти повністю.

В-29

1. $a_i = (150; 150)$
$b_j = (75; 105; 225)$
$d_r = (300; 120)$
$A_1B_3 = 3$

	D_1	D_2
A_1	5	6
A_2	9	10

	B_1	B_2	B_3
D_1	4	7	8
D_2	12	4	5

Умова: попит другого і третього споживачів задовольнити повністю.

B-30

1. $a_i = (150; 210)$
$b_j = (90; 80; 100)$
$d_r = (210; 200)$
$A_2B_2 = 3$

	D_1	D_2
A_1	5	9
A_2	9	13

	B_1	B_2	B_3
D_1	4	7	10
D_2	4	13	8

Умова: попит третього споживача задовольнити повністю.

Лабораторна робота №4

«Моделювання конфліктних ситуацій. Теорія ігор»

Теоретичний матеріал

Теорія ігор – це розділ прикладної математики, який вивчає математичні моделі прийняття рішень в так званих конфліктних ситуаціях. Суть теорії ігор полягає у встановленні оптимальної стратегії поведінки в конфліктних ситуаціях.

Математична модель конфлікту називається грою, сторони у конфлікті — гравцями. Результат гри називається виграшем, програшем або нічиєю. Ходом називається вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій. Ходи бувають особисті та випадкові. Особистий хід — це свідомий вибір гравця, випадковий хід — вибір дії, що не залежить від його волі.

Стратегією гравця називається сукупність правил, що визначають вибір варіанту дій у кожному особистому ході. Оптимальною стратегією гравця називається така, що забезпечує йому максимальний виграш або мінімальний програш. Мета застосування математичного апарату теорії гри в вирішенні прикладних задач управління — оптимізація поведінки гравця в ситуації прийняття рішень, в якій поряд з необов'язковою наявністю випадкових є особисті (свідомі) ходи.

В даній лабораторній роботі буде розглядатися гра з двома гравцями, в якій виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають грою двох осіб з нульовою сумою. Подібні ситуації є типовими у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення в умовах конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Гру зручно відображати таблицею, що називається платіжною матрицею, або матрицею виграшів. Платіжна матриця має стільки стовпців, скільки стратегій у гравця B, і стільки рядків, скільки стратегій у гравця A. На перетині рядків і стовпців, що відповідають різним стратегіям, стоять виграші гравця A і, відповідно, програші гравця B.

Формалізація задачі теорії гри, тобто побудова платіжної матриці може бути важким і навіть нездійсненним завданням унаслідок незнання стратегій, величезної їх кількість, а також через складність оцінювання виграшу.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для обрання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію у наступному.

Нехай гравець А вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює min a_{ij}, тобто навіть тоді, якщо гравець В і знав би стратегію гравця А. Передбачаючи таку можливість, гравець А має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця А позначається A_{i_0} і має назву ***максимінної***, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається ***нижньою ціною гри***.

Гравець В, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця А. Стратегія гравця В позначається через B_{j_0} і називається ***мінімаксною***, а величина його програшу — ***верхньою ціною гри***, тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Зразок виконання роботи

Підприємства А і В реалізують 2 види продукції: п-ство А – a_1 і a_2; В – b_1 і b_2. Товари a_1 і b_1, a_2 і b_2 мають приблизно однакові техніко-економічні характеристики. Ціна на одиницю продукції a_1 складає 14 грн., b_1 – 17 грн., a_2 – 130 грн., b_2 – 145 грн. Ринок є насиченим цими товарами і розподілений так: a_1: b_1 = 6 : 5; a_2 : b_2 = 1 : 2. Щодня на ринку реалізується 120 од. товару a_1 і 100 од. товару b_1, а також 50 од. товару a_2 і 100 од. товару b_2. Від продажу од. продукції

a_1 п-ство отримує прибуток 3 грн., a_2 – 25 грн. П-ство А прагне збільшити свої прибутки. Для цього воно розглядає наступні можливості:

1. знизити ціну на виріб a_1 до 12 грн. В цьому випадку, якщо ціна на b_1 зросте або залишиться незмінною, товар b_1 буде витіснено з ринку;
2. підвищити ціну на виріб a_2 до 135 грн. У цьому випадку, якщо ціна на b_2 зросте або залишиться незмінною – фізичні обсяги товарообороту не зміняться. Якщо ж ціна на b_2 знизиться – частка товару a_2 на ринку складе 30%.

Проаналізувавши ситуацію, керівництво п-ства А дійшло висновку, що п-ство В може відповісти наступним чином:

1. ніяких заходів не вживати у відповідь.
2. знизити ціну на виріб b_2 до 105 грн. І звести частку ринку a_2 до 30% у випадку підвищення або незмінності цін на a_2.
3. Знизити ціну на товар b_1 до 15 грн. і у випадку зниження цін на a_1 – зберегти ситуацію на ринку. У випадку незмінності цін на a_1 – частка a_1 зменшиться на 10% від початкових обсягів фізичного товарообороту.

В разі потреби, кожне з підприємств може самостійно наповнити ринок товарами.

Завдання: побудувати платіжну матрицю і визначити оптимальні стратегії для обох гравців.

Розв'язання.

Для розв'язку задачі такого типу застосуємо теорію ігор. На першому етапі будуємо платіжну матрицю, на другому – шукаємо стратегії для кожного з гравців.

Розмірність платіжної матриці визначається кількістю стратегій кожного гравця. В нашому випадку розмірність матриці буде 2 × 3. Елементи матриці будемо розраховувати як виграш у новій ситуації порівняно зі старою, а саме:

Елемент матриці = новий прибуток – старий прибуток.

$$a_{11} = 1\cdot(120+100) - 3\cdot 120 = -140$$
$$a_{12} = 1\cdot(120+100) - 3\cdot 120 + 0{,}3\cdot(50+100)\cdot 25 - 25\cdot 50 = -265$$
$$a_{13} = 1\cdot 120 - 3\cdot 120 = -240$$
$$a_{21} = 30\cdot 50 - 25\cdot 50 = 250$$
$$a_{22} = 30\cdot 0{,}3\cdot(50+100) - 50\cdot 25 = 100$$
$$a_{23} = 30\cdot 50 - 25\cdot 50 + 0{,}9\cdot 3\cdot 120 - 3\cdot 120 = 214$$

Таким чином, отримано наступну платіжну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} -140 & -265 & -240 \\ 250 & 100 & 214 \end{bmatrix}$$

Шукаємо нижню і верхню ціну гри:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{265;\ 100\} = 100$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{250;\ 100;\ 214\} = 100$$

Як бачимо, нижня і верхня ціна гри є однаковими, тобто задачу теорії гри можна розв'язати в чистих стратегіях. Відповідно, для гравця *A* оптимальною буде друга стратегія, для гравця *B* – також друга.

Завдання лабораторної роботи

Підприємства А і В реалізують 2 види продукції: п-ство А – a_1 і a_2; В – b_1 і b_2. Товари a_1 і b_1, a_2 і b_2 мають приблизно однакові техніко-економічні характеристики. Ціна на одиницю продукції a_1 складає (20 + N) гр. од., b_1 – (25 + N) гр. од., a_2 – (50 + N) гр. од., b_2 – (53 + N) гр. од. Щодня на ринку реалізується 100N од. товару a_1 і 110N од. товару b_1, а також 150N од. товару a_2 і 180N од. товару b_2. Від продажу од. продукції a_1 п-ство отримує прибуток (N + 5) гр. од., a_2 – (N + 10) гр. од. П-ство А прагне збільшити свої прибутки. Для цього воно розглядає наступні можливості:

1. знизити ціну на виріб a_1 на (2N + 5)/3 гр.од. В цьому випадку, якщо ціна на b_1 зросте або залишиться незмінною, товар b_1 буде витіснено з ринку;

2. підвищити ціну на виріб a_2 на 0,4(N + 10) гр.од. У цьому випадку, якщо ціна на b_2 зросте або залишиться незмінною – фізичні обсяги товарообороту не зміняться. Якщо ж ціна на b_2 знизиться – частка товару a_2 на ринку складе 30%.

3. знизити ціну на виріб a_2 на 0,6(N + 5) і у випадку незмінності або підвищення цін на b_2 – скоротити частку ринку товару b_2 на 15% від її початкової величини.

Проаналізувавши ситуацію, керівництво п-ства А дійшло висновку, що п-ство В може відповісти наступним чином:

1. ніяких заходів не вживати у відповідь.
2. знизити ціну на виріб b_2 на 0,5(N + 10) гр. од. І звести частку ринку a_2 до 30% у випадку підвищення або незмінності цін на a_2. У випадку зниження ціни на a_2 на величину, не більшу планового прибутку (N + 10), обсяги товарообороту не зміняться.
3. Знизити ціну на товар b_1 на (N + 7)/3 гр. од. і у випадку зниження цін на a_1 – зберегти ситуацію на ринку. У випадку незмінності цін на a_1 – частка a_1 зменшиться на 15% від початкових обсягів фізичного товарообороту.

В разі потреби, кожне з підприємств може самостійно наповнити ринок товарами.

Завдання: побудувати платіжну матрицю і визначити оптимальні стратегії для обох гравців.

Питання підсумкового контролю

1. Поняття операції. Предмет та завдання дослідження операцій.
2. Основні етапи дослідження операцій.
3. Основні задачі управління, які розв'язуються методами математичного програмування.
4. Задача визначення оптимальної виробничої програми.
5. Задача оптимального розподілу виробничих потужностей.
6. Задача про призначення на посаду.
7. Задача комівояжера.
8. Задача оптимального розподілу капіталовкладень.
9. Економічна і математична постанока задачі лінійного програмування.
10. Канонічна форма запису задачі лінійного програмування.
11. Правила зведення задачі лінійного програмування до канонічного виду.
12. Основні етапи графічного розв'язку задачі лінійного програмування.
13. Графічне тлумачення задачі лінійного програмування.
14. Альтернативний оптимум та його графічне тлумачення.
15. Алгоритм прямого симплекс-методу.
16. Метод штучного базису.
17. Алгоритм двоїстого симплекс-методу.
18. Правила побудови двоїстої задачі.
19. Симетричні і несиметричні двоїсті задачі.
20. Теореми двоїстості та їх економічний зміст.
21. Взаємозв'язок між прямою і двоїстою задачами лінійного програмування.
22. Економічна інтерпретація прямої і двоїстої задач лінійного програмування.
23. Двоїсті оцінки та статус ресурсів в околі оптимального плану задачі лінійного програмування.
24. Оцінка рентабельності продукції та рівня дефіцитності ресурсів.
25. Економічна та математична постановка транспортної задачі.
26. Правила побудови першого опорного плану транспортної задачі.
27. Випадок виродженості опорного плану транспортної задачі.
28. Умови існування розв'язку транспортної задачі.
29. Метод потенціалів.
30. Двохетапна транспортна задача.
31. Постановка задачі параметричного програмування.
32. Визначення оптимального плану задачі параметричного програмування та кінців проміжку оптимальності.
33. Задача параметричного програмування з параметром в цільовій функції.

34. Цілочислове програмування. Приклади економічних задач цілочислового програмування.
35. Метод Гоморі.
36. Нелінійне програмування. Метод множників Лагранжа.
37. Задачі динамічного програмуваня. Принцип Беллмана.
38. Поняття про стохастичне програмування.
39. Поняття конфліктної ситуації. Предмет теорії ігор.
40. Значимість апарату теорії ігор в процесі моделювання окремих аспектів діяльності підприємства.
41. Поняття нижньої і верхньої ціни гри. Сідлова точка. Їх економічний зміст.
42. Пошук оптимальних рішень в чистих стратегіях.
43. Пошук оптимальних рішень в змішаних стратегіях.
44. Поняття гри з природою. Відмінності задач ігор з природою від класичних задач теорії ігор.
45. Критерії Вальда, Гурвіца, Севіджа, Байєса-Лапласа, домінуючого результату.
46. Модель прийняття рішень за допомогою побудови дерева рішень.
47. Економічна інтерпретація розв´язків класичної задачі теорії ігор та задачі гри з природою.
48. Поняття та мета управління матеріальними запасами.
49. Моделі управління матеріальними запасами.
50. Однопродуктова детермінована модель управління матеріальними запасами.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х томах М., Мир, 1972
2. Вентцель Е.С. Исследование операций М., «Высшая школа», 2001
3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування.- Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К., 2001
4. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій Київ, "Віпол", 2001
5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М. – 2001.
6. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007 – 256с.
7. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації. – Львів, 2003.
8. Кігель В.Р Математичні методи ринкової економіки - К., 2003
9. Кігель В.Р. Методи і моделі прийняття рішень в ринковій економіці - К., 2003
10. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике - М., ЮНИТИ, 2002
11. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и програмах. – М.1984.
12. Мамонов К.А., Економіко-математичне моделювання (модульний варіант). Навч. посібник для студентів галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво», напряму підготовки 6.030509 «Облік і аудит» //К.А. Мамонов, Б.Г. Скоков, С.Я. Політучий – Х.: ХНАМГ, 2010. –226 с.
13. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операцій в задачах и упражнениях. – М.1986
14. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003, - 452с.
15. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці - Харків, "Гриф", 2002
16. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели - М., 2002
17. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности - М., 2001