УДК 517.91

Р. М. Таци́й, В. В. Мазуренко

ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ

R. M. Tatsij, V. V. Masurenko. *Discrete-continuous boundary problems for quasi-differential equations of the odd order*, Matematychni Studii, **16** (2001) 71–85.

For quasi-differential equations of any odd order, the theorem of existence and uniqueness of the solution of a problem with initial conditions is proved. Spectral properties of the solutions of a problem on eigenvalues and the structure of the generalized Green's function are obtained.

Р. М. Таций, В. В. Мазуренко. *Дискретно-непрерывные граничные задачи для квазидифференциальных уравнений нечетного порядка* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №1. – С.71–85.

Для квазидифференциальных уравнений произвольного нечетного порядка доказана теорема о существовании и единственности решения начальной задачи, получены спектральные свойства задачи на собственные значения и структура обобщенной функции Грина.

Вступ. В задачах прикладного характеру, як правило, трапляються диференціальні вирази, які містять доданки вигляду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$. При недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі вирази вже не можна звести (з допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх називають в літературі *квазідиференціальними* (КДВ).

Мабуть, першим, хто почав досліджувати КДВ, був Д. Шин [1, 2]. Йому й належить ідея введення квазіпохідних, яка дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів. Пізніше дослідження в цьому напрямку проводились багатьма авторами (див. [3, 4] і бібліографію там). Слід зауважити, що отримані результати стосувались переважною мірою КДВ, коефіцієнти яких є або неперервними функціями, або, в гіршому випадку, — інтегровними за Лебегом. Проте, теорія прикладних задач [5–7] вимагає більш загальних постановок, які б враховували природну єдність дискретного і неперервного.

У даній роботі маємо справу з лінійними квазідиференціальними рівняннями (КДР) довільного (скінченного) непарного порядку, в яких коефіцієнти (і праві частини) є узагальненими функціями. Характерною особливістю таких рівнянь є той факт, що при їх описі присутні в тому чи іншому вигляді добутки розривних функцій на узагальнені похідні від функцій обмеженої варіації [8, 9].

Достатньо детальний огляд диференціальних рівнянь, що містять узагальнені функції в коефіцієнтах, проведений в [10]. До нього слід віднести також роботи І. Каца,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34B05, 34B27, 34L05.

М. Крейна і Ф. Гантмахера (див. доповнення в [11], [12]), в яких детально вивчались крайові задачі (задачі на власні значення) для звичайних диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків, що описують відповідно вільні коливання струни і балки з дискретно-неперервним розподілом маси. Ці дослідження проводились без застосування теорії узагальнених функцій, у зв'язку з чим методи дослідження цих задач не вдалося застосувати до рівнянь багаточленного класу. Пізніше результати в цьому напрямку були отримані в роботах [9, 13–19].

1. Позначення. Нехай I — відкритий інтервал дійсної осі. Простір локально абсолютно неперервних на I функцій позначаємо $AC(I)$, простір сумовних за Лебегом на I функцій — $L(I)$, простір неперервних праворуч на I функцій локально обмеженої варіації — $BV_{loc}^{+}(I)$, простір $l \times k$ матриць-функцій, визначених на I, — $\mathcal{L}(I^{l\times k})$. Під $\Delta f(x) = f(x) - f(x-0)$ розуміємо стрибок функції $f \in BV_{loc}^{+}(I)$ в точці $x \in I$, під $\|A\|$ — норму матриці $A \in \mathcal{L}\left(I^{l\times k}\right)$, що визначається як сума модулів усіх її елементів a_{ij} $\|A\| = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} \mid a_{ij} \mid$, під $V_a^b A(x)$ — повну варіацію матриці $A \in \mathcal{L}(I^{l\times k})$ на $[a,b]$, що дорівнює сумі повних варіацій усіх її елементів $a_{ij}(x)$ $V_a^b A(x) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} V_a^b a_{ij}(x)$.

Розглянемо КДВ порядку $m = 2n+1$

$$l[y] \equiv l_{2n+1}[y] - \lambda a(x) y, \tag{1}$$

де $(n = 0, 1, ...)$;

$$l_{2n+1}[y] \equiv (-1)^n \Big(i b_{n+1,n}(x)\big(b_{n,n+1}(x) y^{(n)}\big)'\Big)^{(n)} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s}\left(b_{rs}(x) y^{(n-r)}\right)^{(n-s)}, \tag{2}$$

тут i — уявна одиниця, λ — скалярний (комплексний) параметр, а диференціювання розуміємо (всюди далі також) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Вважаемо, що коефіцієнти $a(x), b_{rs}(x)$ $\forall r,s$ КДВ (1) є комплекснозначними функціями дійсної змінної $x \in I$, і задовольняють наступні умови:

(A) $b_{n+1,n}^{-1}, b_{n,n+1}^{-1}$ — локально обмежені і вимірні за Лебегом на I функції;

(B) $b_{r0}, b_{0s} \in L(I), r,s = \overline{0,n}$;

(C) b_{rs}, a — міри на I (див. [20, с. 160]), тобто $b_{rs} = \beta'_{rs}$, $a = \alpha'$, $\beta_{rs}, \alpha \in BV_{loc}^{+}(I)$, $r,s = \overline{1,n}$.

Квазіпохідними функції $y(x)$, що відповідають КДВ (1), називаємо функції $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0, 2n+1}$, які визначаються рівностями

$$\begin{aligned}
&y^{[k]} = y^{(k)}, k = \overline{0,n-1}; \quad y^{[n]} = -i b_{n,n+1}(x) y^{(n)};\\
&y^{[n+1]} = -b_{n+1,n}(x)\left(y^{[n]}\right)' + \sum_{r=0}^{n} b_{r0}(x) y^{(n-r)};\\
&y^{[n+k+1]} = -\left(y^{[n+k]}\right)' + \sum_{r=0}^{n} b_{rk}(x) y^{(n-r)}, k = \overline{1,n}; \ \left(l_{2n+1}[y] \equiv y^{[2n+1]}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, з допомогою квазіпохідних (3) КДВ (1) можна записати у вигляді

$$l[y] \equiv y^{[2n+1]} - \lambda a(x) y. \tag{1'}$$

2. Початкова задача. Розглянемо тепер наступну початкову задачу ("задачу Коші") з початковими значеннями в точці $x_0 \in I$:

$$l[y] = 0, \tag{4}$$

$$y^{[k]}(x_0) = y_0^{[k]},\ k = \overline{0,2n}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Існує єдиний розв'язок*[1] $y(x)$ *початкової задачі (4),(5) такий, що* $(\forall k = \overline{0,n}) : y^{[k]} \in AC(I)$, а $(\forall \nu = \overline{1,n}) : y^{[n+\nu]} \in BV^{+}_{loc}(I)$ *і в точках* $x_s \in I$ *розривів функцій* $\alpha(x)$, $\beta_{rs}(x)$, $r,s = \overline{1,n}$ *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\begin{aligned} \Delta y^{[n+\nu]}(x_s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\beta_{n-k,\nu}(x_s) y^{[k]}(x_s),\ \nu = \overline{1,n-1}; \\ \Delta y^{[2n]}(x_s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\beta_{n-k,n}(x_s) y^{(k)}(x_s) - \lambda\cdot\Delta\alpha(x_s) y(x_s). \end{aligned} \tag{6}$$

Доведення. Зведемо КДР (4) з допомогою квазіпохідних (3) до коректної в сенсі теорії узагальнених функцій (див. [13]) диференціальної системи першого порядку. З формул (3), (1′), (4) безпосередньо випливає, що виконуються узагальнені рівності

$$\begin{aligned} &\left(y^{[k-1]}\right)' = y^{(k)}, k = \overline{1,n-1}; \quad \left(y^{[n-1]}\right)' = ib^{-1}_{n,n+1}(x) y^{[n]}; \\ &\left(y^{[n]}\right)' = -b^{-1}_{n+1,n}(x) y^{[n+1]} + ib^{-1}_{n+1,n}(x) b_{00}(x) b^{-1}_{n,n+1}(x) y^{[n]} + \sum_{r=1}^{n} b^{-1}_{n+1,n}(x) b_{r0}(x) y^{[n-r]}; \\ &\left(y^{[n+k]}\right)' = -y^{[n+k+1]} + ib_{0k}(x) b^{-1}_{n,n+1}(x) y^{[n]} + \sum_{r=1}^{n} b_{rk}(x) y^{[n-r]}, k = \overline{1,n-1}; \\ &\left(y^{[2n]}\right)' = ib_{0n}(x) b^{-1}_{n,n+1}(x) y^{[n]} + \sum_{r=1}^{n} b_{rn}(x) y^{[n-r]} - \lambda a(x) y. \end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи останні, введемо вектори

$$Y(x) = \mathrm{col}(y(x), y^{[1]}(x), \dots, y^{[2n]}(x)), \tag{8}$$

$$Y_0 = \mathrm{col}(y_0, y_0^{[1]}, \dots, y_0^{[2n]}),$$

а також матрицю $C' \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ $\left(C \in BV^{+}_{loc}(I)\right)$ наступної структури:

$$C'(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{i}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{b_{n0}}{b_{n+1,n}} & \frac{b_{n-1,0}}{b_{n+1,n}} & \dots & \frac{b_{10}}{b_{n+1,n}} & \frac{ib_{00}}{b_{n+1,n} b_{n,n+1}} & -\frac{1}{b_{n+1,n}} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & b_{n-1,1} & \dots & b_{11} & \frac{ib_{01}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n,n-1} & b_{n-1,n-1} & \dots & b_{1,n-1} & \frac{ib_{0,n-1}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ b_{nn} - \lambda a & b_{n-1,n} & \dots & b_{1n} & \frac{ib_{0n}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $b_{i,j} = b_{i,j}(x)$ — функції x. Тепер задачу (4), (5) можна записати у вигляді

$$Y'(x) = C'(x,\lambda)\cdot Y(x), \tag{9}$$

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{10}$$

[1] Для збереження послідовності викладок означення розв'язку задачі (4), (5) подано безпосередньо в доведенні теореми.

Будемо вважати, що функція $Y \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times 1})$ належить до допустимого класу $\mathcal{D}_k$, якщо $Y \in BV^+_{loc}(I)$ і $(\forall x \in I)$ $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$ [9, с.7].

Означення 1. Під розв'язком задачі (9), (10) розуміємо функцію $Y \in \mathcal{D}_k$, яка задовольняє (в сенсі теорії узагальнених функцій) рівняння (9) і початкову умову (10). Тоді розв'язком задачі (4), (5) називатимемо першу координату $y(x)$ вектор-розв'язку $Y(x)$ задачі (9), (10).

Доведемо, насамперед, що система (9) коректна. Справді, оскільки коефіцієнти КДР (4) задовольняють умови (A)–(C), то

$$\Delta C(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Delta\beta_{n1}(x) & \Delta\beta_{n-1,1}(x) & \dots & \Delta\beta_{11}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta\beta_{n,n-1}(x) & \Delta\beta_{n-1,n-1}(x) & \dots & \Delta\beta_{1,n-1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Delta\beta_{nn}(x) - \lambda\Delta\alpha(x) & \Delta\beta_{n-1,n}(x) & \dots & \Delta\beta_{1n}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Звідси беспосередньо переконуємось, що $(\forall x \in I) : [\Delta C(x,\lambda)]^2 = 0$. Але тоді задача (9), (10) рівносильна до інтегрального рівняння

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{12}$$

з класичним матричним інтегралом (насправді, набором скалярних інтегралів [11, с. 492]) типу Рімана-Стільтьєса, звідки негайно випливає існування та єдиність її розв'язку $Y \in BV^+_{loc}(I)$ [11]. Більше того, на підставі означення 1 справедливе також існування та єдиність розв'язку початкової задачі (4), (5).

Відомо [11], що умова стрибка розв'язку інтегрального рівняння (12) має вигляд

$$\Delta Y(x_s) = \Delta C(x_s) \cdot Y(x_s). \tag{13}$$

Але тоді на основі структури матриці стрибків (11) можна зробити висновок, що $(\forall k{=}\overline{0,n}) : \Delta y^{[k]}(x_s){=}0$, тобто розв'язок $y(x)$ і його квазіпохідні до n-го порядку включно принаймні неперервні. Більше цього, оскільки з (12) випливають рівності

$$y^{[k]}(x) = y_0^{[k]} + \int_{x_0}^{x} y^{[k+1]}(t)dt, k = \overline{0, n-2}; \quad y^{[n-1]}(x) = y_0^{[n-1]} + i\int_{x_0}^{x} b^{-1}_{n,n+1}(t)y^{[n]}(t)dt;$$

$$y^{[n]}(x) = y_0^{[n]} - \int_{x_0}^{x} \frac{y^{[n+1]}(t)}{b_{n+1,n}(t)}dt + i\int_{x_0}^{x} \frac{b_{00}(t)y^{[n]}(t)}{b_{n+1,n}(t)b_{n,n+1}(t)}dt + \sum_{r=1}^{n}\int_{x_0}^{x} \frac{b_{r0}(t)y^{[n-r]}(t)}{b_{n+1,n}(t)}dt,$$

де інтеграли розуміються в сенсі Лебега, то $(\forall k{=}\overline{0,n}) : y^{[k]} \in AC(I)$. Крім цього, $Y \in BV^+_{loc}(I)$, отже $(\forall \nu{=}\overline{1,n}) : y^{[n+\nu]} \in BV^+_{loc}(I)$. Рівності (6) отримуються безпосередньо з (13) і структури матриці (11).

Теорему доведено. □

Розглянемо лінійну диференціальну систему

$$Z'(x) = -\left(C'(x,\lambda)\right)^* \cdot Z(x), \tag{14}$$

що спряжена (див. [16], с. 8) до системи (9). Використовуючи конкретний вигляд матриці $C'(x)$ приходимо до наступного означення.

Означення 2. Спряженим до (4) називаємо КДР

$$\begin{gathered} l^*[z] \equiv (-1)^n \left(i\overline{b_{n,n+1}}(x) \left(\overline{b_{n+1,n}}(x) z^{(n)} \right)' \right)^n + \\ + \sum_{s=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \left(\overline{b_{rs}}(x) z^{(n-s)} \right)^{(n-r)} - \overline{\lambda} \cdot \overline{a}(x) z = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

де $\overline{a}$ означає число комплексно спряжене до числа a.

Означення 3. Під розв'язком КДР (15) розуміємо останню координату $z(x)$ вектора $Z(x) = \operatorname{col}\left(z^{\{2n\}}(x), \ldots, z^{\{1\}}(x), z(x)\right)$ диференціальної системи (14), що задовольняє це рівняння в сенсі теорії узагальнених функцій.

Означення 4. Квазіпохідними виразу $l^*_{2n+1}[z]$ (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (15)) називаємо функції $z^{\{k\}}(x)$ $k = \overline{0, 2n+1}$, які визначаються рівностями

$$\begin{aligned} & z^{\{k\}} = z^{(k)}, k = \overline{0, n-1}; \quad z^{\{n\}} = \overline{b_{n+1,n}}(x) z^{(n)}; \\ & z^{\{n+1\}} = -i\overline{b_{n,n+1}}(x) \left(z^{\{n\}} \right)' - \sum_{s=0}^{n} \overline{b_{0s}}(x) z^{(n-s)}; \\ & z^{\{n+k+1\}} = -\left(z^{\{n+k\}} \right)' - \sum_{s=0}^{n} \overline{b_{ks}}(x) z^{(n-s)}, k = \overline{1, n}; \quad \left(l^*_{2n+1}[z] \equiv -z^{\{2n+1\}} \right). \end{aligned}$$

При цьому, очевидно, $l^*[z] \equiv l^*_{2n+1}[z] - \overline{\lambda} \cdot \overline{a}(x) z$.

Розглянемо початкову задачу

$$l^*[z] = 0, \tag{16}$$

$$z^{\{k\}}(x_0) = z_0^{\{k\}}, \ k = \overline{0, 2n}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Існує єдиний розв'язок $z(x)$ початкової задачі (16), (17) такий, що $(\forall \nu = \overline{0, n}) : z^{\{\nu\}} \in AC(I)$, а $(\forall k = \overline{1, n}) : z^{\{n+k\}} \in BV^+_{loc}(I)$ і в точках $x_s \in I$ розривів функцій $\overline{\alpha}(x)$, $\overline{\beta_{rs}}(x)$, $r, s = \overline{1, n}$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\begin{aligned} \Delta z^{\{n+k\}}(x_s) &= -\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta \overline{\beta_{k,n-\nu}}(x_s) z^{\{\nu\}}(x_s), \ k = \overline{1, n-1}; \\ \Delta z^{\{2n\}}(x_s) &= -\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta \overline{\beta_{n,n-\nu}}(x_s) z^{\{\nu\}}(x_s) + \overline{\lambda} \cdot \Delta \overline{\alpha}(x_s) z(x_s). \end{aligned}$$

Доведення цієї теореми проводиться за аналогією до доведення теореми 1.

Зауваження 1. На основі отриманих результатів можна будувати лінійну теорію КДР (4) і (16) подібно до того, як це робиться в [16].

Означення 5. Матрицю-функцію $\mathcal{Y}(x, s, \lambda)$, яка за змінною x є розв'язком (в сенсі означення 1) системи (9) і задовольняє початкову умову $\mathcal{Y}(s, s, \lambda) = E, \ s \in I$, називаємо еволюційним оператором (матрицею Коші) цієї системи, що відповідає КДР (4).

Зауважимо також, що структуру еволюційного оператора (в загальному випадку) отримано в [16], властивості оператора наведено в [9].

Встановимо одну додаткову властивість (її використаємо нижче), в основу доведення якої покладено відповідність цього оператора конкретному КДР (4).

Лема. *Еволюційний оператор $\mathcal{Y}(x,s,\lambda)$, що відповідає КДР (4) є цілою функцією параметру λ і має по λ порядок зростання ρ, що не перевищує $\frac{1}{2n+1}$.*

Доведення. Доведення першої частини леми можна знайти, наприклад, в [19]. Тому встановимо лише справедливість оцінки $\rho \le \frac{1}{2n+1}$.

Наслідуючи [21, с. 481], систему (9) запишемо у вигляді

$$Y_\lambda' = D'(x,\lambda)\cdot Y_\lambda, \tag{18}$$

де $Y_\lambda \in BV_{loc}^{+}(I)$ і $D' \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ $\left(D \in BV_{loc}^{+}(I)\right)$ визначаються рівностями

$$Y_\lambda = \operatorname{col}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2n+1}} y^{[1]}, \lambda^{-\frac{2}{2n+1}} y^{[2]}, \dots, \lambda^{-\frac{2n}{2n+1}} y^{[2n]}\right),$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{\frac{1}{2n+1}} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{i\lambda^{\frac{1}{2n+1}}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^{-\frac{n}{2n+1}} b_{n0}}{b_{n+1,n}} & \frac{\lambda^{-\frac{n-1}{2n+1}} b_{n-1,0}}{b_{n+1,n}} & \dots & \frac{\lambda^{-\frac{1}{2n+1}} b_{10}}{b_{n+1,n}} & \frac{ib_{00}}{b_{n+1,n} b_{n,n+1}} & -\frac{\lambda^{\frac{1}{2n+1}}}{b_{n+1,n}} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda^{-\frac{n+1}{2n+1}} b_{n1} & \lambda^{-\frac{n}{2n+1}} b_{n-1,1} & \dots & \lambda^{-\frac{2}{2n+1}} b_{11} & \frac{\lambda^{-\frac{1}{2n+1}} ib_{01}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{-\frac{2n-1}{2n+1}} b_{n,n-1} & \lambda^{-\frac{2n-2}{2n+1}} b_{n-1,n-1} & \dots & \lambda^{-\frac{n}{2n+1}} b_{1,n-1} & \frac{\lambda^{-\frac{n-1}{2n+1}} ib_{0,n-1}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & -\lambda^{\frac{1}{2n+1}} \\ \lambda^{-\frac{2n}{2n+1}} b_{n,n} - \lambda^{\frac{1}{2n+1}} a & \lambda^{-\frac{2n-1}{2n+1}} b_{n-1,n} & \dots & \lambda^{-\frac{n+1}{2n+1}} b_{1,n} & \frac{\lambda^{-\frac{n}{2n+1}} ib_{0n}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Еволюційний оператор $\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ системи (18), очевидно, задовольняє інтегральне рівняння

$$\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda) = E + \int_s^x d_t D(t,\lambda) \mathcal{Y}_\lambda(t,s,\lambda). \tag{20}$$

Переходячи до норм в (20) і застосовуючи узагальнену лему Гронуолла-Беллмана [22], отримуємо наступну оцінку

$$\|\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)\| \le (2n+1)\cdot \exp\left\{V_s^x D(t,\lambda)\right\} \le (2n+1)\cdot \exp\left\{V_a^b D(x,\lambda)\right\}. \tag{21}$$

З (19) на підставі означення повної варіації (див. п. 1) маємо при $|\lambda| \to \infty$

$$V_a^b D(x,\lambda) \le c_1 \cdot |\lambda|^{\frac{1}{2n+1}} + o\left(|\lambda|^{\frac{1}{2n+1}}\right)$$

і оцінка (21) набуває вигляду

$$\|\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)\| \le c_2 \cdot \exp\left\{c_1 \cdot |\lambda|^{\frac{1}{2n+1}} + o\left(|\lambda|^{\frac{1}{2n+1}}\right)\right\},$$

де $c_i = \text{const} > 0,\ i = 1,2.$

Отже, для довільного $\epsilon > 0$ існує $c(\epsilon)$ таке, що при $|\lambda| \to \infty$

$$\|\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)\| \le \exp\left\{c(\epsilon)\cdot |\lambda|^{\frac{1}{2n+1}+\epsilon}\right\}.$$

Це, фактично, означає, що порядок (див. [23]) цілої функції $\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ не перевищує $\frac{1}{2n+1}$.

Еволюційні оператори $\mathcal{Y}(x,s,\lambda)$ і $\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ пов'язані формулою

$$\mathcal{Y}(x,s,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{\frac{1}{2n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{\frac{2}{2n+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{\frac{2n}{2n+1}} \end{pmatrix}\cdot\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)\equiv T(\lambda)\cdot\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda).$$

Функція $T\in\mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ є многочлен відносно λ, тому її порядок дорівнює нулю. Отже, порядок цілої функції $\mathcal{Y}(x,s,\lambda)$

$$\rho\leq\max\left(0,\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1},$$

що й завершує доведення леми. □

3. Задача на власні значення. Розглянемо тепер задачу на власні значення

$$l_{2n+1}[y]-\lambda a(x)y=0,\ x\in[a,b]\subset I, \tag{22}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1}p_{k\nu}y^{[\nu-1]}(a)=\sum_{\nu=1}^{2n+1}q_{k\nu}y^{[\nu-1]}(b),\ k=\overline{1,2n+1}, \tag{23}$$

де $p_{k\nu}$, $q_{k\nu}$, $k,\nu=\overline{1,2n+1}$ — деякі (комплексні) числа, при цьому такі, що

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}p_{kj}\overline{p_{\nu,2n-j+2}}-ip_{k,n+1}\overline{p_{\nu,n+1}}-\sum_{j=1}^{n}p_{k,2n-j+2}\overline{p_{\nu j}}=\\ =\sum_{j=1}^{n}q_{kj}\overline{q_{\nu,2n-j+2}}-iq_{k,n+1}\overline{q_{\nu,n+1}}-\sum_{j=1}^{n}q_{k,2n-j+2}\overline{q_{\nu j}}.\end{aligned} \tag{24}$$

Вважаємо, що коефіцієнти КДР (22) задовольняють умови (A)–(C) (див. п. 1) і дві додаткові умови:

(D) $(\forall r,s): b_{rs}(x)=\overline{b_{sr}}(x)$;

(C) $\alpha(x)$ — неспадна на I функція (тобто $a(x)$ — додатна міра).

3.1. Постановка еквівалентної задачі. Переформулюємо задачу (22), (23) у вигляді задачі на власні значення для деякої коректної диференціальної системи першого порядку з мірами (*узагальнена схема Аткінсона* [15]).

Для цього з допомогою вектора (8) і сталих матриць $P=(p_{k\nu})_{k,\nu=1}^{2n+1}$, $Q=(q_{k\nu})_{k,\nu=1}^{2n+1}$ задачу (22), (23) приводимо до вигляду

$$Y'(x)=(B_1'(x)+\lambda A_1'(x))\cdot Y(x), \tag{25}$$

$$P\cdot Y(a)=Q\cdot Y(b), \tag{26}$$

де $B_1', A_1' \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ $\big(B_1, A_1 \in BV_{loc}^{+}(I)\big)$

$$B_1'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{i}{b_{n,n+1}(x)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{b_{n0}(x)}{b_{n+1,n}(x)} & \frac{b_{n-1,0}(x)}{b_{n+1,n}(x)} & \dots & \frac{b_{10}(x)}{b_{n+1,n}(x)} & \frac{ib_{00}(x)}{b_{n+1,n}(x)b_{n,n+1}(x)} & -\frac{1}{b_{n+1,n}(x)} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1}(x) & b_{n-1,1}(x) & \dots & b_{11}(x) & \frac{ib_{01}(x)}{b_{n,n+1}(x)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n,n-1}(x) & b_{n-1,n-1}(x) & \dots & b_{1,n-1}(x) & \frac{ib_{0,n-1}(x)}{b_{n,n+1}(x)} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ b_{nn}(x) & b_{n-1,n}(x) & \dots & b_{1n}(x) & \frac{ib_{0n}(x)}{b_{n,n+1}(x)} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Умову (24) в матричному вигляді запишемо

$$PJ^{-1}P^{*} = QJ^{-1}Q^{*} \tag{27}$$

(* означає ермітове спряження) зі сталою й неособливою косоермітовою матрицею $J \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача (25), (26) в свою чергу рівносильна до наступної задачі

$$J\cdot Y'(x) = (B'(x) + \lambda A'(x))\cdot Y(x), \tag{28}$$

$$Y(a) = Mv,\ Y(b) = Nv, \tag{29}$$

з ермітовими за умови (D) матрицями $B', A' \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ $\big(B, A \in BV_{loc}^{+}(I)\big)$ $(b_{i,j} = b_{i,j}(x))$

$$B'(x)=\begin{pmatrix} -b_{nn} & -b_{n-1,n} & \dots & -b_{1n} & -\frac{ib_{0n}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{n,n-1} & -b_{n-1,n-1} & \dots & -b_{1,n-1} & -\frac{ib_{0,n-1}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n-1,1} & \dots & -b_{11} & -\frac{ib_{01}}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{ib_{n0}}{b_{n+1,n}} & \frac{ib_{n-1,0}}{b_{n+1,n}} & \dots & \frac{ib_{10}}{b_{n+1,n}} & -\frac{b_{00}}{b_{n+1,n}b_{n,n+1}} & -\frac{i}{b_{n+1,n}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{i}{b_{n,n+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$A'(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

і сталими матрицями $M, N \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times(2n+1)})$ такими, що

$$M^*JM = N^*JN, \tag{32}$$

при цьому з рівностей $Mv{=}Nv{=}0$ ($v \in \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times 1})$ — деякий сталий і ненульовий вектор) випливає $v \equiv 0$.

Зауважимо, що матриці M і N конструктивно будуються за відомими матрицями P, Q за формулами $M = -J^{-1}P^*$, $N = -J^{-1}Q^*$. Звідси на підставі (27) випливає, зокрема, справедливість рівності (32).

Залишилось довести, що система (28) є коректною, тобто, що виконується умова $(\forall x \in [a,b])$:$\{J^{-1}[\Delta B(x) + \lambda\Delta A(x)]\}^2 = 0$. Справедливість останньої встановлюється безпосередньою перевіркою (див. також доведення теореми 1).

Отже, приходимо до наступного висновку: задача на власні значення (22), (23) за умов (A)–(E) та (24) еквівалентна задачі на власні значення (28)–(32). Зв'язок між розв'язками цих задач очевидний (див. також означення 1).

Припустимо тепер додатково, що для довільного нетривіального розв'язку $Y(x)$ системи (28) виконується умова додатної визначеності

$$\int_a^b Y^*(x)dA(x)Y(x) > 0. \tag{33}$$

Властивості задачі (28)–(32) при виконанні додаткової умови (33) отримано в роботі [15] (див. також [17]).

3.2. Основні результати. Всюди вважаємо, що виконуються умови (A)–(E) та (24).

Теорема 3. *Власні значення λ_k, $k = 0, 1, \dots$ задачі (22), (23) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки; при цьому для довільного $\epsilon > 0$*

$$\sum_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k|^{-\frac{1}{2n+1}-\epsilon} < \infty. \tag{34}$$

Власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні в тому сенсі, що

$$\int_a^b \overline{y}(x,\lambda_m)y(x,\lambda_n)d\alpha(x) = 0, \ \ \lambda_m{\neq}\lambda_n. \tag{35}$$

Доведення. На підставі сказаного в пункті 3.1 для доведення теореми (за винятком збіжності ряду (34)) досить переконатися в справедливості умов теорем 1 і 2 статті [17], тобто, по суті, в справедливості нерівності (33). Вона в нашому випадку легко встановлюється з використанням (8), (31) та умови (E).

Оскільки власні значення задачі (22), (23) є коренями рівняння

$$\det\left(P - Q\cdot\mathcal{Y}(x,s,\lambda)\right) = 0,$$

(Порівн. п. 4, ф-ла (46)) де $\mathcal{Y}(x,s,\lambda)$ — еволюційний оператор системи (28) (чи рівносильної до неї системи (25)), то збіжність ряду (34) випливає з леми. $\square$

Зауваження 2. Якщо власні функції задачі (22), (23) нормувати, $y_k(x) = y(x,\lambda_k)\times \times(\int_a^b |y(x,\lambda_k)|^2 d\alpha(x))^{-\frac{1}{2}}$, то співвідношення ортогональності (35) можна переписати у вигляді

$$\int\limits_a^b \overline{y_m}(x)y_n(x)d\alpha(x) = \delta_{mn}, \tag{36}$$

за умови, що $\lambda_m \neq \lambda_n$, коли $m \neq n$ (δ_{mn}— символ Кронекера).

Зауваження 3. У випадку кратних власних значень довільно вибрані власні функції, взагалі кажучи, не задовольняють співвідношення (36). Однак, їх можна вибрати такими з допомогою незначної модифікації процесу ортогоналізації з [11, с. 298]. Тому, співвідношення (36) можна вважати справедливими в загальному випадку.

Теорема 4. (про розвинення за власними функціями) *Нехай $p(x)$ є неперервною функцією обмеженої на $[a,b]$ варіації, а функція $\varphi(x)$ задовольняє неоднорідне КДР $l_{2n+1}[\varphi] = a(x)p(x)$ і крайові умови (23). Для довільного $\Lambda > 0$ позначимо*

$$\varphi_\Lambda(x) = \varphi(x) - \sum_{|\lambda_k|\leq\Lambda} c_\nu y_\nu(x), \tag{37}$$

де коефіцієнти c_ν задаються формулою

$$c_\nu = \int\limits_a^b \overline{y_\nu}(x)\varphi(x)d\alpha(x). \tag{38}$$

Тоді ряд Фур'є $\varphi(x) \sim \sum_\nu c_\nu y_\nu(x)$, збігаючись на I абсолютно і рівномірно по x, наближає функцію $\varphi(x)$ в тому сенсі, що

$$\int\limits_a^b |\varphi_\Lambda(x)|^2 d\alpha(x) \leq \Lambda^{-2} \int\limits_a^b |p(x)|^2 d\alpha(x). \tag{39}$$

Доведення. Переконаємось в справедливості умов теореми 3 статті [17], тобто покажемо, що функція $\chi \in BV^+_{loc}(I)$, яка в нашому випадку має вигляд $\chi(x) = \mathrm{col}(p(x), \underbrace{0,\ldots,0}_{2n})$, інтегровна з квадратом в тому сенсі, що $\int_a^b \chi^*(x)dA(x)\chi(x) < \infty$.

Для цього досить довести, що $(\forall x \in [a,b])$: $\Delta A(x)\cdot\Delta\chi(x) = 0$. Остання умова, очевидно, виконується внаслідок припущень стосовно $p(x)$. Тому, твердження теореми випливає з теореми 3 статті [17]. $\square$

Зауваження 4. Очевидно, що ліва частина (39) прямує до нуля, коли $\Lambda \to \infty$. Це є певним аналогом збіжності в середньому квадратичному. При цьому з нерівності (39) при $\Lambda \to \infty$ на підставі (36)–(38) одержуємо аналог рівності Парсеваля

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = \int_a^b |\varphi(x)|^2 d\alpha(x).$$

4. Неоднорідна задача і структура узагальненої функції Гріна. Розглянемо крайову задачу для неоднорідного КДР

$$l_{2n+1}[y] - \lambda a(x) y = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} f_j^{(j+1)}(x), \; x \in [a,b] \subset I \tag{40}$$

з крайовими умовами (23), де $f_j {\in} BV_{loc}^{+}(I)$ $\forall j = \overline{0,n}$, а $f_j^{(j+1)}(x)$ — її $(j+1)$-ша узагальнена похідна.

Теорема 5. *Для вибраних вище матриць J, M і N крайова задача (40), (23) рівносильна до неоднорідної задачі*

$$J{\cdot}Y'(x) = (B'(x) + \lambda A'(x)){\cdot}Y(x) + F'(x), \tag{41}$$

з крайовими умовами (29), де права частина $F' {\in} \mathcal{L}(I^{(2n+1)\times 1})$ $\big(F {\in} BV_{loc}^{+}(I)\big)$ має вигляд

$$F'(x) = \operatorname{col}\Bigg(-f_0'(x), f_1'(x), \ldots, f_{n-1}'(x), -b_{n+1,n}^{-1} f_n'(x), \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}\Bigg).$$

Доведення. Для рівняння (40) квазіпохідні введемо за допомогою рівностей:

$$\begin{aligned} &y^{[k]} = y^{(k)}, \; k = \overline{0, n-1}; \; y^{[n]} = -i b_{n,n+1}(x) y^{(n)}; \\ &y^{[n+1]} = -b_{n+1,n}(x) \left(y^{[n]}\right)' + \sum_{r=0}^{n} b_{r0}(x) y^{(n-r)} + f_n'(x); \\ &y^{[n+k+1]} = -\left(y^{[n+k]}\right)' + \sum_{r=0}^{n} b_{rk}(x) y^{(n-r)} + f_{n-k}'(x), \; k = \overline{1,n}; \end{aligned} \tag{42}$$

Зауважимо, що останні відрізняються від квазіпохідних (3), і збігаються з ними лише у випадку $f_j'(x) \equiv 0$, $j = \overline{0,n}$.

Процедура зведення задачі (40), (23) до задачі (41), (29) з допомогою квазіпохідних (42) подібна до наведеної вище, і ми її не подаємо. Відзначимо лише той істотний факт, що матриці $B'(x)$ і $A'(x)$ залишаються такими ж, як і у випадку однорідного КДР (22), тобто визначаються рівностями (30) і (31) відповідно.

Коректність [14] отриманої таким чином системи випливає із структур матриць ΔA, ΔB і ΔF. $\square$

Теорема 6. *Якщо λ не є власним значенням задачі (22), (23), то неоднорідна задача (40), (23) має єдиний розв'язок $y(x)$, який є абсолютно неперервною на I функцією разом зі своїми квазіпохідними $y^{[k]}(x)$ до $(n-1)$-го порядку включно; квазіпохідні $y^{[n+\nu]}(x)$*

$\nu = \overline{0, n}$ — *неперервні праворуч функції обмеженої на I варіації, стрибки яких визначаються формулами*

$$\Delta y^{[n]}(x_s) = b^{-1}_{n+1,n}(x_s)\Delta f_n(x_s);$$
$$\Delta y^{[n+\nu]}(x_s) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\beta_{n-k,\nu}(x_s)y^{[k]}(x_s) + \Delta f_{n-\nu}(x_s), \quad \nu = \overline{1, n-1};$$
$$\Delta y^{[2n]}(x_s) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\beta_{n-k,n}(x_s)y^{[k]}(x_s) - \lambda\cdot\Delta\alpha(x_s)y(x_s) + \Delta f_0(x_s);$$

цей розв'язок можна подати у вигляді

$$y(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \frac{\partial^j G(x,s,\lambda)}{\partial s^j} df_j(s) + \int_a^b \overline{b_{n+1,n}}(s)\frac{\partial^n G(x,s,\lambda)}{\partial s^n} b^{-1}_{n+1,n}(s) df_n(s). \tag{43}$$

Зауваження 5. У випадку, коли функція $b_{n+1,n}(x)$ (а отже й функція $b_{n,n+1}(x)$) є дійснозначною, формула (43) набуває вигляду

$$y(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b \frac{\partial^j G(x,s,\lambda)}{\partial s^j} df_j(s).$$

Доведення. Побудуємо розв'язок КДР

$$(\forall j = \overline{0, n}) : \ l_{2n+1}[y] - \lambda a(x) y = (-1)^{j+1} f_j^{(j+1)}(x) \tag{44}$$

за крайових умов (23) і просумуємо.

Нехай $K(x,s,\lambda)$ — "функція Коші" КДР (22) (див. [16]). Тоді функція

$$y_j(x,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{2n} K^{\{m\}}(x,a,\lambda)\cdot c_m^j + \int\limits_a^x K^{\{j\}}(x,s,\lambda) df_j(s), & j = \overline{0, n-1}, \\ \sum\limits_{m=0}^{2n} K^{\{m\}}(x,a,\lambda)\cdot c_m^n + \int\limits_a^x K^{\{n\}}(x,s,\lambda) b^{-1}_{n+1,n}(s) df_n(s), & j = n. \end{cases}$$

є загальним розв'язком неоднорідного КДР (44) і містить $2n+1$ невідомих сталих. Для їх знаходження необхідно задовольнити крайові умови (23). Це приводить до системи $2n+1$ алгебраїчних рівнянь ($k = \overline{1, 2n+1}$):

для довільного $j = \overline{0, n-1}$

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} p_{k\nu}\left(\sum_{m=0}^{2n} K^{\{m\}[\nu-1]}(a,a,\lambda)\cdot c_m^j\right) =$$
$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu}\left(\sum_{m=0}^{2n} K^{\{m\}[\nu-1]}(b,a,\lambda)\cdot c_m^j + \int_a^b K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda) df_j(s)\right),$$

для $j = n$

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} p_{k\nu}\left(\sum_{m=0}^{2n} K^{\{m\}[\nu-1]}(a,a,\lambda)\cdot c_m^n\right) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu}\left(\sum_{m=0}^{2n} K^{\{m\}[\nu-1]}(b,a,\lambda)\cdot c_m^n + \int_a^b \frac{K^{\{n\}[\nu-1]}(b,s,\lambda)}{b_{n+1,n}(s)} df_n(s)\right)$$

або на підставі означення "функції Коші" до системи

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(p_{k,2n-m+1}-\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu} K^{\{m\}[\nu-1]}(b,a,\lambda)\right) c_m^j=\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu} \int_a^b K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda) df_j(s),$$

$$j=\overline{0,n-1}; \qquad (45)$$

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(p_{k,2n-m+1}-\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu} K^{\{m\}[\nu-1]}(b,a,\lambda)\right] c_m^n=\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu} \int_a^b \frac{K^{\{n\}[\nu-1]}(b,s,\lambda)}{b_{n+1,n}(s)} df_n(s).$$

Оскільки λ не є власним значенням задачі (22), (23), то визначник цієї системи

$$\Delta(\lambda)=\det\left|p_{k,2n-m+1}-\sum_{\nu=1}^{2n+1} q_{k\nu} K^{\{m\}[\nu-1]}(b,a,\lambda)\right|,\ m=\overline{0,2n},\ k=\overline{1,2n+1} \qquad (46)$$

відмінний від нуля. У такому випадку сталі c_m можуть бути визначені з системи (45) однозначно.

Через $\gamma_{k\nu}(\lambda)$, $k,\nu=\overline{1,2n+1}$, позначимо елементи матриці, що обернена до матриці, елементами якої є коефіцієнти системи (45). Тоді для $m=\overline{0,2n}$

$$c_m^j=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1}\gamma_{m+1,k}(\lambda) q_{k\nu}\int\limits_a^b K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda) df_j(s), & j=\overline{0,n-1};\\ \sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1}\gamma_{m+1,k}(\lambda) q_{k\nu}\int\limits_a^b K^{\{n\}[\nu-1]}(b,s,\lambda) b_{n+1,n}^{-1}(s) df_n(s), & j=n.\end{cases}$$

Отже,

$$y_j(x,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1} K^{\{m\}}(x,a,\lambda)\gamma_{m+1,k}(\lambda) q_{k\nu}\int\limits_a^b K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda) df_j(s)+\\ +\int\limits_a^x K^{\{j\}}(x,s,\lambda) df_j(s), \quad j=\overline{0,n-1};\\ \sum\limits_{m=0}^{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1} K^{\{m\}}(x,a,\lambda)\gamma_{m+1,k}(\lambda) q_{k\nu}\int\limits_a^b \frac{K^{\{n\}[\nu-1]}(b,s,\lambda)}{b_{n+1,n}(s)} df_n(s)+\\ +\int\limits_a^x \frac{K^{\{n\}}(x,s,\lambda)}{b_{n+1,n}(s)} df_n(s), \qquad j=n.\end{cases}$$

Нехай $\gamma_{m+1,k}(\lambda)\cdot q_{k\nu}=\sigma_{m+1,\nu}^k(\lambda)$, $k,\nu=\overline{1,2n+1}$, $m=\overline{0,2n}$. Введемо позначення

$$G_j(x,s,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1}\sigma_{m+1,k}(\lambda) K^{\{m\}}(x,a,\lambda) K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda)+K^{\{j\}}(x,s,\lambda), & x>s\\ \sum\limits_{m=0}^{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{2n+1}\sigma_{m+1,k}(\lambda) K^{\{m\}}(x,a,\lambda) K^{\{j\}[\nu-1]}(b,s,\lambda), & x<s\end{cases},$$

$j=\overline{0,n}$.

Оскільки

$$K^{\{j\}}(x,s,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\partial^j K(x,s,\lambda)}{\partial s^j},\ j=\overline{0,n-1},\\ \overline{b_{n+1,n}}(x)\dfrac{\partial^n K(x,s,\lambda)}{\partial s^n},\end{cases}$$

то, очевидно

$$G_j(x,s,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial^j G(x,s,\lambda)}{\partial s^j}, \ j=\overline{0,n-1}, \\ \overline{b_{n+1,n}}(x)\dfrac{\partial^n G(x,s,\lambda)}{\partial s^n} \end{cases}$$

де $G(x,s,\lambda) \stackrel{def}{=} G_0(x,s,\lambda)$ — узагальненою функцією Гріна крайової задачі (22), (23). □

ЛІТЕРАТУРА

1. Шин Д. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка* // Матем. сборник. – 1940. – Т.7(49), №3. – С.479–532.
2. Шин Д. *О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве* // Матем. сборник. – 1943. – Т.13(55), №1. – С.39–70.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
4. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
5. Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я и др. – К.: Наукова думка, 1981. – 335 с.
6. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
7. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. – М.: Машиностроение, 1978. Т.1. – 352 с.
8. Antosik P., Ligeza J. *Products of measures and functions of finite variations* // Generalized functions and operational calcus: Proc. Conf. Varna, 1975. Sofia, 1979. – P.20–26.
9. Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних систем з мірами, – Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. Львів, 1994. – 37 с.
10. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
11. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
12. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.: ГТТИ, 1951. – 318 с.
13. Стасюк М. Ф., Таций Р. М. *Коректные дифференциальные системы с мерами* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1988. – №222. – С.89–90.
14. Стасюк М. Ф., Таций Р. М.*Однозначно определенные неоднородные уравнения с мерами* // 1 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тез. докл. – К., 1989. – С.53.
15. Таций Р. М., Кисилевич В. В.*Краевая задача для обобщенной дифференциальной системы.* – Львов, 1992. 37 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, №1047.
16. Тацій Р. М.*Узагальнені квазідиференціальні рівняння.* Препринт / АН України ІППММ: N2-94. – К., 1994. 54 с.
17. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В.*Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі* // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1996. – №229. – С.165–170.
18. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Кісілевич В.В.*Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР* // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №346. – С.120–124.
19. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В.*Про порядок зростання розв'язків звичайного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами як функцій параметра* // Вісн. НУ "Львівська політехніка". – 2000. – №411. – С.311–317.

20. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

21. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

22. Пахолок Б. Б. *Об одном неравенстве типа Гроноулла-Беллмана* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1989. – №232. – С.109–110.

23. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Надійшло 29.06.2000
Після переробки 6.02.2001