УДК 517.98

А. В. Загороднюк, В. В. Кравців

# МУЛЬТИПЛІКАТИВНА ЗГОРТКА НА АЛГЕБРІ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

*У роботі введено та досліджено оператор мультиплікативної згортки на спектрі алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на нескінченній $\ell_1$-сумі копій банахового простору $\mathbb{C}^s$. Окремо досліджено випадок алгебри блочно-симетричних функцій на просторі $\mathbb{C}^2$ та дію мультиплікативної згортки на її спектрі.*

**Вступ.** Алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі $X$ є стандартним об'єктом нелінійного функціонального аналізу і вивчались у [2, 4, 16, 17] та інших публікаціях. У роботах [1, 3, 5, 6–8, 10, 15] було досліджено спектр алгебр симетричних (інваріантних) аналітичних функцій на просторах $\ell_p$, $1 \le p \le \infty$, $L_\infty$ та $L_\infty[0,+\infty) \bigcap L_1[0,+\infty)$ відносно природних груп ізометричних відображень цих просторів. У статтях [11–13] розглянуто аналітичні функції на $\ell_p$-сумах скінченновимірних просторів («блоків»), які є симетричними відносно перестановки цих блоків (блочно-симетричними).

Зокрема, в [13] описано алгебраїчний базис блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathbb{C}^n \otimes \ell_p = \oplus_{\ell_p} \mathbb{C}^n$. У цій роботі досліджено аналог симетричної мультиплікативної згортки (див. [6]) для випадку блочно-симетричних поліномів.

Зауважимо, що блочно-симетричні поліноми використовуються в комбінаториці та мають застосування у квантовій механіці, де їх також називають симетричними поліномами Макмахона (MacMahon symmetric polynomials), діагональними поліномами або мультисиметричними поліномами (див. [9, 14]).

**1. Попередні відомості.** Нехай $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^s$ – нескінченна $\ell_1$-сума копій банахового простору $\mathbb{C}^s$. Тоді кожен елемент з $\overline{x} \in \mathcal{X}_\infty^s$ може бути зображений у вигляді послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in \mathbb{C}^s$, з нормою $\|\overline{x}\| = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^s \left| x_k^i \right|$.

Поліном $P$ на просторі $\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^s$ називається блочно-симетричним (або векторно-симетричним), якщо

$$P\left( \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{pmatrix}_1, \ldots, \begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^s \end{pmatrix}_m, \ldots \right) = P\left( \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{pmatrix}_{\sigma(1)}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^s \end{pmatrix}_{\sigma(m)}, \ldots \right)$$

для будь-якої підстановки $\sigma \in \mathcal{G}$, де $\mathcal{G}$ – група підстановок на множині $\mathbb{N}$, а $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^s)^\top \in \mathbb{C}^s$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на $\mathcal{X}_\infty^s$.

У роботі [11] було доведено, що алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$

утворюють поліноми

$$H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1,x^2,\ldots,x^s)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^1)^{k_1}(x_i^2)^{k_2}\ldots(x_i^s)^{k_s},$$

$$k_1+k_2+\ldots+k_s=n.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу і $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ − спектр цієї алгебри.

**2. Мультиплікативна згортка.** У роботі [6] було введено означення мультиплікативного зсуву для елементів простору $\ell_1$. Аналогічно дамо означення мультиплікативного зсуву для елементів простору $\mathcal{X}_\infty^s$.

***Означення*** **1.** Нехай $(x^1,x^2,\ldots,x^s),(y^1,y^2,\ldots,y^s)\in\mathcal{X}_\infty^s$. Введемо мультиплікативний зсув елементів $(x^1,x^2,\ldots,x^s)$ і $(y^1,y^2,\ldots,y^s)$ як вектор, який складається з елементів $(x_i^1y_j^1,x_i^2y_j^2,\ldots,x_i^sy_j^s)^\top$, занумерованих у довільному порядку, $i,j\in\mathbb{N}$, і позначимо $(x^1,x^2,\ldots,x^s)\lozenge(y^1,y^2,\ldots,y^s)$.

**Твердження 1.** *Для будь-яких* $\tilde{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^s)$, $\tilde{y}=(y^1,y^2,\ldots,y^s)\in\mathcal{X}_\infty^s$ *маємо*

***1°)*** $\tilde{x}\lozenge\tilde{y}\in\mathcal{X}_\infty^s$ *і* $\|\tilde{x}\lozenge\tilde{y}\|\le\|\tilde{x}\|\cdot\|\tilde{y}\|$;

***2°)*** $H_n^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})=H_n^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x})H_n^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{y})$;

***3°)*** *Якщо* $P$ − $n$*-однорідний поліном на* $\mathcal{X}_\infty^s$ *і* $\tilde{y}$ − *фіксований елемент з* $\mathcal{X}_\infty^s$, *то функція* $\tilde{x}\mapsto P(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})$ *є* $n$*-однорідним поліномом.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$\|\tilde{x}\lozenge\tilde{y}\|=\sum_{i,j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}\left|x_i^ky_j^k\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}\left|x_i^k\right|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}\left|y_j^k\right|=$$

$$=\left\|(x^1,x^2,\ldots,x^s)\right\|\cdot\left\|(y^1,y^2,\ldots,y^s)\right\|=\|\tilde{x}\|\cdot\|\tilde{y}\|.$$

Крім того,

$$H_n^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})=\sum_{i,j=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{s}(x_i^my_j^m)^{k_m}=\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{s}(x_i^m)^{k_m}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{s}(y_j^m)^{k_m}.$$

Умова ***3°)*** випливає з рівності $\lambda(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})=(\lambda\tilde{x}\lozenge\tilde{y})$. Твердження доведено. ♦

Нехай $\tilde{y}\in\mathcal{X}_\infty^s$. Відображення $\tilde{x}\in\mathcal{X}_\infty^s\xrightarrow{\pi_{\tilde{y}}}(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})\in\mathcal{X}_\infty^s$ є лінійним і неперервним, що випливає з твердження 1. Якщо $f\in H_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$, то $f\circ\pi_{\tilde{y}}\in H_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$, тому що $f\circ\pi_{\tilde{y}}$ є аналітичною і обмеженою на обмежених множинах і $f(\sigma(\tilde{x})\lozenge\tilde{y})=f(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})$ для будь-якої перестановки $\sigma\in\mathcal{G}$. Оператор $M_{\tilde{y}}=f\circ\pi_{\tilde{y}}$ будемо називати *мультиплікативним згортковим оператором.* Очевидно, що $M_{\tilde{y}}=M_{\sigma(\tilde{y})}$ для будь-якої перестановки $\sigma\in\mathcal{G}$ і $M_{\tilde{y}}(H_n^{k_1,\ldots,k_s})=H_n^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{y})\cdot H_n^{k_1,\ldots,k_s}$.

Крім того, очевидно що

$$\pi_{\tilde{y}+\tilde{z}}(\tilde{x})=(\tilde{x}\lozenge(\tilde{y}+\tilde{z}))=(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})+(\tilde{x}\lozenge\tilde{z})=\pi_{\tilde{y}}(\tilde{x})+\pi_{\tilde{z}}(\tilde{x});$$

$$\pi_{\lambda\tilde{y}}(\tilde{x})=(\tilde{x}\lozenge\lambda\tilde{y})=\lambda(\tilde{x}\lozenge\tilde{y})=\lambda\pi_{\tilde{y}}(\tilde{x}).$$

**Твердження 2.** *Для кожного* $\tilde{y} \in \mathcal{X}_\infty^s$ *мультиплікативний згортковий оператор* $M_{\tilde{y}}$ *є неперервним гомоморфізмом алгебри* $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ *в себе.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\tilde{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^s)$, $\tilde{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^s) \in \mathcal{X}_\infty^s$ і $f(\tilde{x}) = f(x^1, x^2, \ldots, x^s) \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$. Покажемо, що $f(\tilde{x} \lozenge \tilde{y}) \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$. Оскільки кожна функція $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ рівномірно наближається поліномами $P_n \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$, то

$$f(\tilde{x} \lozenge \tilde{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tilde{x} \lozenge \tilde{y}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_n\big(H^{1,0,\ldots,0}(\tilde{x} \lozenge \tilde{y}), \ldots, H^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(\tilde{x} \lozenge \tilde{y}), \ldots\big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_n\big(H^{1,0,\ldots,0}(\tilde{x}) \cdot H^{1,0,\ldots,0}(\tilde{y}), \ldots$$

$$\ldots, H^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(\tilde{x}) \cdot H^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(\tilde{y}), \ldots\big) \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s).$$

Те, що $M_{\tilde{y}}$ є гомоморфізмом, випливає з таких рівностей:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad M_{\lambda\tilde{y}}(P_n) = P_n \circ \pi_{\lambda\tilde{y}} = P_n \circ \lambda\pi_{\tilde{y}} = \lambda^n P_n \circ \pi_{\tilde{y}} = \lambda^n M_{\tilde{y}}(P_n);$$

$$M_{\tilde{y}+\tilde{z}}(P_n) = P_n \circ \pi_{\tilde{y}+\tilde{z}} = P_n \circ (\pi_{\tilde{y}} + \pi_{\tilde{z}}) =$$

$$= P_n \circ \pi_{\tilde{y}} + P_n \circ \pi_{\tilde{z}} = M_{\tilde{y}}(P_n) + M_{\tilde{z}}(P_n).$$

Неперервність оператора $M_{\tilde{y}}$ випливає з нерівності

$$\left\| M_{\tilde{y}}(P_n) \right\| = \left\| P_n \circ \pi_{\tilde{y}} \right\| \le \|P_n\| \cdot \|y\|^n.$$

Отже, $M_{\tilde{y}}$ є неперервним гомоморфізмом на $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$. Твердження доведено. ♦

У роботі [12] було введено поняття радіус-функції $R(\varphi)$ комплексного гомоморфізму $\varphi \in \mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ як інфімуму всіх $r$ таких, що $\varphi$ є неперервним на $A_{uvs}(rB_{\mathcal{X}_\infty^s})$, де $A_{uvs}(rB_{\mathcal{X}_\infty^s})$ − алгебра всіх рівномірно неперервних блочно-симетричних аналітичних функцій на кулі $rB_{\mathcal{X}_\infty^s} \subset \mathcal{X}_\infty^s$ радіуса $r$, і доведено, що $R(\varphi)$ можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}},$$

де $\varphi_n$ − звуження функціонала $\varphi$ на підпростір $n$-однорідних блочно-симетричних поліномів.

**Твердження 3.** *Для всіх* $\theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ *і для будь-якого* $\tilde{y} \in \mathcal{X}_\infty^s$ *радіус-функцію неперервного гомоморфізму* $\theta \circ M_{\tilde{y}}$ *можна оцінити як*

$$R(\theta \circ M_{\tilde{y}}) \le R(\theta) \cdot \|\tilde{y}\|. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Проведемо аналогічні міркування, як і в роботі [6]. Нехай $\tilde{y} \in \mathcal{X}_\infty^s$. Позначимо через $(\theta \circ M_{\tilde{y}})_n$ (відповідно $\theta_n$) звуження $\theta \circ M_{\tilde{y}}$

(відповідно $\theta$) на підпростір $n$-однорідних блочно-симетричних поліномів. Маємо:

$$\left\|(\theta\circ M_{\tilde{y}})_n\right\| = \sup_{\|f\|\le 1}\left|\theta_n\left(\frac{M_{\tilde{y}}(f_n)}{\|\tilde{y}\|^n}\right)\right|\cdot\|\tilde{y}\|^n \le \|\theta_n\|\cdot\|\tilde{y}\|^n.$$

Отже,

$$R(\theta\circ M_{\tilde{y}}) \le \limsup_{n\to\infty}(\|\theta_n\|\cdot\|\tilde{y}\|^n)^{\frac{1}{n}} = R(\theta)\cdot\|\tilde{y}\|.$$

Твердження доведено. ♦

Мультиплікативну згортку на $\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ введемо аналогічно, як і в [6].

***Означення* 2.** Для довільних функцій $f\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ і $\theta\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ мультиплікативну згортку визначимо формулою

$$(\theta\Diamond f)(\tilde{x}) = \theta[M_{\tilde{x}}(f)] \text{ для кожного } \tilde{x}\in\mathcal{X}_\infty^s.$$

***Означення* 3.** Для довільних $\phi,\theta\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)'$ мультиплікативну згортку визначимо формулою

$$(\phi\Diamond\theta)(f) = \phi(\theta\Diamond f) \text{ для кожного } f\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s).$$

**Твердження 4.** *Якщо* $\phi,\theta\in\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$, *то* $\phi\Diamond\theta\in\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$.

Д о в е д е н н я. З мультиплікативності $M_{\tilde{y}}$ випливає, що $\phi\Diamond\theta$ є характером.

Те, що $\phi\Diamond\theta\in\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$, випливає з (1), тобто з нерівності

$$R(\phi\Diamond\theta)\le R(\phi)\cdot R(\theta).$$

Отже, $\phi\Diamond\theta\in\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$. Твердження доведено. ♦

**Теорема 1.** *Для довільних* $\phi,\theta\in\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ *мультиплікативна згортка є комутативною, асоціативною і для неї виконується рівність*

$$(\phi\Diamond\theta)(H^{k_1,\ldots,k_s}) = \phi(H^{k_1,\ldots,k_s})\cdot\theta(H^{k_1,\ldots,k_s}). \tag{2}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки кожна функція $f\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ рівномірно наближається на обмежених множинах блочно-симетричними поліномами, які можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів $H^{k_1,\ldots,k_s}$, то асоціативність і комутативність мультиплікативної згортки достатньо перевірити для поліномів $H^{k_1,\ldots,k_s}$.

Спочатку перевіримо рівність (2). Справді,

$$(\theta\Diamond H^{k_1,\ldots,k_s})(\tilde{x}) = \theta(M_{\tilde{x}}(H^{k_1,\ldots,k_s})) = \theta(H^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x})\cdot H^{k_1,\ldots,k_s}) =$$
$$= H^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x})\cdot\theta(H^{k_1,\ldots,k_s}).$$

Тому

$$(\phi\Diamond\theta)(H^{k_1,\ldots,k_s}) = \phi(\theta\Diamond H^{k_1,\ldots,k_s}) = \phi(H^{k_1,\ldots,k_s}(\tilde{x})\cdot\theta(H^{k_1,\ldots,k_s})) =$$
$$= \phi(H^{k_1,\ldots,k_s})\cdot\theta(H^{k_1,\ldots,k_s}).$$

З останньої рівності випливає асоціативність і комутативність мультиплікативної згортки на поліномах $H^{k_1,\ldots,k_s}$, і отже, для довільної функції $f\in\mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$. Теорему доведено. ♦

У роботі [12] для елементів $\tilde{x},\tilde{y}\in\mathcal{X}_\infty^s$ було введено симетричний зсув

$\tilde{x} \cdot \tilde{y}$ за формулою

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \left( \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \vdots \\ y_1^s \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \\ \vdots \\ y_i^s \end{pmatrix}, \ldots \right)$$

і показано, що $\tilde{x} \cdot \tilde{y} \in \mathcal{X}_\infty^s$.

У роботі [12] для довільних $\phi, \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ і $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ симетричну згортку $\phi \star \theta$ було означено як

$$(\phi \star \theta)(f) = \phi(\theta \star f) = \phi\big(\tilde{y} \mapsto \theta(\mathcal{T}_{\tilde{y}}^s(f))\big),$$

де $\mathcal{T}_{\tilde{y}}^s(f)(\tilde{x}) = f(\tilde{x} \cdot \tilde{y})$.

**Твердження 5.** *Для будь-яких* $\varphi, \phi, \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ *виконується рівність*

$$\theta \lozenge (\varphi \star \phi) = (\theta \lozenge \varphi) \star (\theta \lozenge \phi).$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи рівність (2) і теорему 3 [12], отримаємо

$$\begin{aligned}
\big((\theta \lozenge \varphi) \star (\theta \lozenge \phi)\big)(H^{k_1,\ldots,k_s}) &= (\theta \lozenge \varphi)(H^{k_1,\ldots,k_s}) + (\theta \lozenge \phi)(H^{k_1,\ldots,k_s}) = \\
&= \theta(H^{k_1,\ldots,k_s}) \cdot \varphi(H^{k_1,\ldots,k_s}) + \theta(H^{k_1,\ldots,k_s}) \cdot \phi(H^{k_1,\ldots,k_s}) = \\
&= \theta(H^{k_1,\ldots,k_s}) \cdot \big(\varphi(H^{k_1,\ldots,k_s}) + \phi(H^{k_1,\ldots,k_s})\big) = \\
&= \theta(H^{k_1,\ldots,k_s}) \cdot (\varphi \star \phi)(H^{k_1,\ldots,k_s}) = \\
&= \big(\theta \lozenge (\varphi \star \phi)\big)(H^{k_1,\ldots,k_s}).
\end{aligned}$$

Твердження доведено. ♦

**3. Випадок простору** $\mathcal{X}_\infty^2 = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^2$**.** Інший алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ утворюють поліноми

$$R^{k_1,k_2}(x^1, x^2) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_{k_1} \\ j_1 < \ldots < j_{k_2} \\ i_k \neq j_l}}^{\infty} x_{i_1}^1 \ldots x_{i_{k_1}}^1 x_{j_1}^2 \ldots x_{j_{k_2}}^2,$$

де $k_1$, $k_2$ – кількість $x_{i_k}^1$, $x_{j_\ell}^2$ відповідно [12].

Нехай $\mathbb{C}\{t_1, t_2\}$ – простір усіх степеневих рядів над $\mathbb{C}^2$. У роботі [12] було розглянуто відображення

$$\mathcal{R}(\varphi)(t_1, t_2) = \sum_{\substack{n=0 \\ k_1 + k_2 = n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2}),$$

$$\mathcal{H}(\varphi)(t_1, t_2) = \sum_{\substack{n=1 \\ k_1 + k_2 = n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \varphi(H^{k_1,k_2}),$$

що діють з $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ у $\mathbb{C}\{t_1, t_2\}$. Зокрема, було доведено, що множина $\{R(\varphi)(t_1, t_2) : \varphi \in \mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)\}$ є множиною функцій експоненціального типу.

Зауважимо, що для будь-яких $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ і вектора $(a^1, a^2) = \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right)$

$$\left( \delta_{(a^1,a^2)} \lozenge \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} R^{k_1,k_2} \right)(x^1, x^2) =$$

$$= M_{(x^1,x^2)} \left( \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} R^{k_1,k_2} \right)(a^1, a^2) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} R^{k_1,k_2} \left( (x^1, x^2) \lozenge (a^1, a^2) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} R^{k_1,k_2} \left( \begin{pmatrix} x_1^1 a_1 \\ x_1^2 a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^1 a_1 \\ x_2^2 a_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_i^1 a_1 \\ x_i^2 a_2 \end{pmatrix}, \dots \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} a_1^{k_1} a_2^{k_2} R^{k_1,k_2} (x^1, x^2) .$$

Тому

$$\mathcal{R}\left( \varphi \lozenge \delta_{(a^1,a^2)} \right) = \varphi \left( \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} a_1^{k_1} a_2^{k_2} R^{k_1,k_2} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2}) .$$

З теореми 3 [12] випливає, що

$$\delta_{(a^1,a^2)} \star \delta_{(b^1,b^2)} = \delta_{\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right)} .$$

Використовуючи твердження 5 і теорему 4 [12], отримаємо

$$\mathcal{R}\left( \varphi \lozenge \delta_{\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right)} \right)(t_1, t_2) =$$

$$= \mathcal{R}\left( \left( \varphi \lozenge \delta_{(a^1,a^2)} \right) \star \left( \varphi \lozenge \delta_{(b^1,b^2)} \right) \right)(t_1, t_2) =$$

$$= \mathcal{R}\left( \varphi \lozenge \delta_{(a^1,a^2)} \right)(t_1, t_2) \cdot \mathcal{R}\left( \varphi \lozenge \delta_{(b^1,b^2)} \right)(t_1, t_2) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2}) \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2}) .$$

Більш загально можна записати так:

$$\mathcal{R}\left(\varphi \lozenge \delta_{\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ldots\right)}\right)(t_1, t_2) =$$

$$= \prod_{\ell=1}^{m} \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} (x_\ell^1)^{k_1} (x_\ell^2)^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2}).$$

Оскільки послідовність $\left(\delta_{\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ldots\right)}\right)_m$ поточково збігається до $\delta_{\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\ldots\right)}$ у $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)$, то послідовність $\left(\varphi \lozenge \delta_{\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ldots\right)}\right)_m$ поточково збігається до $\varphi \lozenge \delta_{\left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\ldots\right)}$.

Тому

$$\mathcal{R}\left(\varphi \lozenge \delta_{(x^1,x^2)}\right)(t_1, t_2) = \prod_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ k_1+k_2=n}}^{\infty} t_1^{k_1} t_2^{k_2} (x_\ell^1)^{k_1} (x_\ell^2)^{k_2} \varphi(R^{k_1,k_2})$$

для будь-якого $(x^1, x^2) = \left(\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \end{pmatrix},\ldots\right) \in \mathcal{X}_\infty^2$.

У роботі [12] було побудовано сім'ю $\left(\phi_{(k,\ell)} : (k,\ell) \in \mathbb{C}^2\right)$ з елементів множини $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ таку, що $\phi_{(k,\ell)}(H^{1,0}) = k$, $\phi_{(k,\ell)}(H^{0,1}) = \ell$ і $\forall k_1, k_2 > 1$ $\phi_{(k,\ell)}(H^{k_1,k_2}) = 0$. Також було показано, що $\mathcal{R}(\phi_{(k,\ell)})(t_1, t_2) = e^{kt_1+\ell t_2}$.

Легко бачити, що

$$(\phi_{(k,\ell)} \lozenge \varphi)(H^{1,0}) = k\varphi(H^{1,0}),$$

$$(\phi_{(k,\ell)} \lozenge \varphi)(H^{0,1}) = \ell\varphi(H^{0,1}),$$

$$(\phi_{(k,\ell)} \lozenge \varphi)(H^{k_1,k_2}) = 0 \qquad \forall k_1, k_2 > 1,$$

$$\mathcal{R}(\phi_{(k,\ell)} \lozenge \varphi)(t_1, t_2) = e^{k\varphi(H^{1,0})t_1 + \ell\varphi(H^{0,1})t_2}.$$

Таким чином, мультиплікативна згортка з функціоналами $\phi_{(k,\ell)}$ діє як зсув на елементах $\mathcal{R}(\phi_{(k,\ell)})(t_1,t_2)$.


1. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on $\ell_p$ // Bull. London Math. Soc. – 2003. – **35**, No. 1. – P. 55–64. – https://doi.org/10.1112/S0024609302001431
2. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **1991**, No. 415. – P. 51–93. https://doi.org/10.1515/crll.1991.415.51
3. *Aron R. M., Falcó J., Maestre M.* Separation theorems for group invariant polynomials // J. Geom. Anal. – 2018. – **28**, No. 1. – P. 393–404. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9825-0

4. *Aron R. M., Galindo P., Garcia D., Maestre M.* Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – **348**, No. 2. – P. 543–559. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01553-X
5. *Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I.* Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. London Math. Soc. – 2016. – **48**, No. 5. – P. 779–796. – https://doi.org/10.1112/blms/bdw043
6. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. – 2014. – **27**, No. 2. – P. 575–585. – https://doi.org/10.1007/s13163-013-0128-0
7. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**, No. 1. – P. 125–142. – https://doi.org/10.1017/S0013091509001655
8. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395**, No. 2. – P. 569–577. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.087
9. *Diaz R., Pariguan E.* Quantum product of symmetric functions // Int. J. Math. Math. Sci. – 2015. – **2015**, Article ID 476926. – 13 p. https://doi.org/10.1155/2015/476926
10. *Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* The algebra of symmetric analytic functions on $L_\infty$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 2017. – **147**, No. 4. – P. 743–761. – https://doi.org/10.1017/S0308210516000287
11. *Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V.* On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Мат. студії. – 2012. – **37**, No. 1. – P. 109–112.
12. *Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V.* Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // Карпат. мат. публ. – 2016. – **8**, No. 2. – P. 263–271. – https://doi.org/10.15330/cmp.8.2.263-271
13. *Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // J. Funct. Spaces. – 2017. – **2017**, Article ID 4947925. – 8 p. – https://doi.org/10.1155/2017/4947925
14. *Rosas M. H.* Specializations of MacMahon symmetric functions and the polynomial algebra // Discrete Math. – 2002. – **246**, No. 1-3. – P. 285–293. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00263-1
15. *Vasylyshyn T. V.* Metric on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex $L_\infty$ // Карпат. мат. публ. – 2017. – **9**, No. 2. – P. 198–201. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.2.198-201
16. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemp. Math. – 2007. – **435**. – P. 381–394.
17. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006 – **134**, No. 9. – P. 2559–2569.

## МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СВЕРТКА НА АЛГЕБРЕ БЛОЧНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*В работе введен и исследован оператор мультипликативной свертки на спектре алгебры блочно-симметрических аналитических функций ограниченного типа на бесконечной $\ell_1$-сумме копий банахового пространства $\mathbb{C}^s$. В частности, исследован случай алгебры блочно-симметрических функций на пространстве $\mathbb{C}^2$ и действие мультипликативной свертки на её спектре.*

## A MULTIPLICATIVE CONVOLUTION ON THE ALGEBRA OF BLOCK-SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS

*In this paper a multiplicative convolution operator on the spectrum of the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type on the infinite $\ell_1$-sum of copies of Banach space $\mathbb{C}^s$ is introduced and investigated. In particular, the algebra of block-symmetric functions on the space $\mathbb{C}^2$ and an action of a multiplicative convolution operator on its spectrum are studied.*

Прикарпатський нац. ун-т
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ
Одержано
02.05.17