Федак І.В.

XV Івано-Франківський обласний турнір юних математиків

1. На участь в турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір у чотири тури так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум?

Розв'язання. Доведемо, що, дотримуючись таких вимог, турнір можна провести ***не лише в чотири, а й у п'ять турів***, причому кожна команда зустрінеться з кожною іншою рівно один раз. Для цього у кожному турі виділимо по чотири групи, позначені різними відтінками, а команди-учасниці занумеруємо числами від 1 до 16. Приклад розподілу команд у кожному турі по групах наведено в наступних таблицях:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

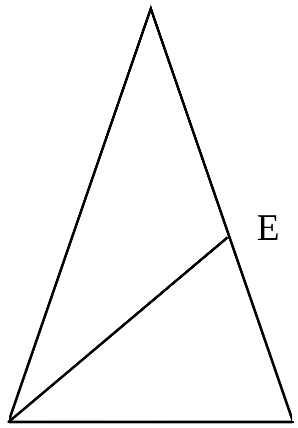
Звідси маємо такі розбиття команд на групи по чотири команди:

I тур - (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16);
II тур - (1, 5, 9, 13), (2, 6, 10, 14), (3, 7, 11, 15), (4, 8, 12, 16);
III тур - (2, 7, 12, 13), (4, 5, 10,15), (1, 8, 11, 14), (3, 6, 9, 16);
IV тур - (4, 7, 9, 14), (1, 6, 12, 15), (2, 5, 11, 16), (3, 8, 10, 13);
V тур - (2, 8, 9, 15), (3, 5, 12, 14), (4, 6, 11, 13), (1, 7, 10, 16).

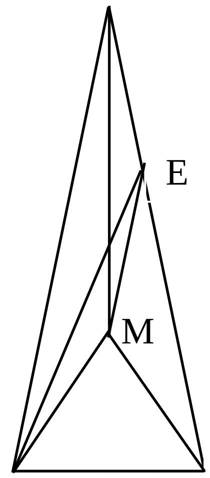
Відзначимо, що у перших двох турах ми формували групи по рядках та стовпчиках таблиці 4×4, а наступні три тури – за принципом так званих латинських квадратів, вибираючи різними способами в одну групу команди з різних рядків та різних стовпчиків такої таблиці.

2. Миколка стверджує, що може вибрати на бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, всі кути якого вимірюються цілим числом градусів, таку точку E, що $BE = AC$, і кут AEC також вимірюється цілим числом градусів. Доведіть, що такий трикутник існує. Чи знайдеться не подібний до нього рівнобедрений трикутник з такими ж властивостями?

Розв'язання. Трикутників з такими властивостями є принаймні два. Перший з них – трикутник з кутами 72°, 72° та 36°. Якщо AE – бісектриса цього трикутника (див. мал.1), то $BE = AE = AC$, і $\angle AEC = 72^{\circ}$.



Мал. 1

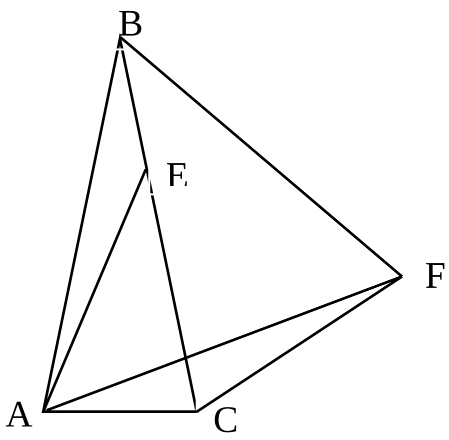


Мал. 2

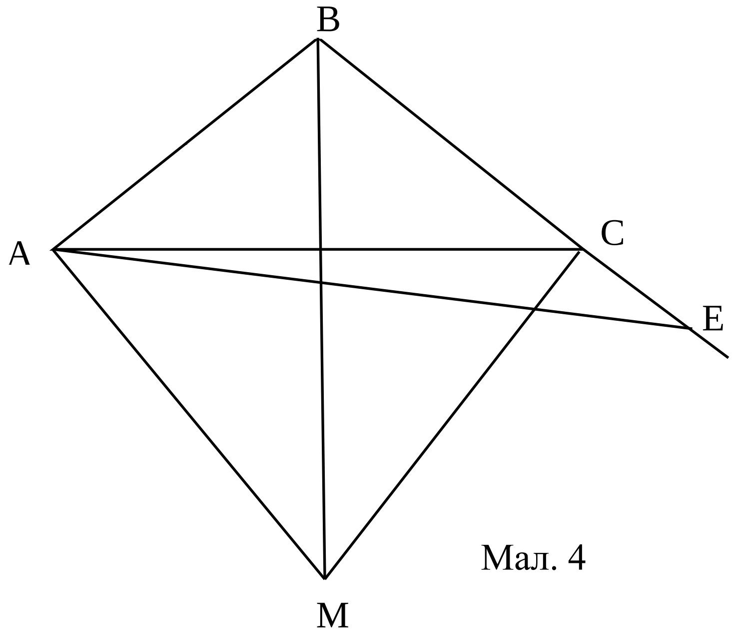
Трикутник з кутами 80°, 80° та 20° також задовольняє вказані властивості. Для цього виберемо всередині трикутника ABC точку M таку, що $AM = MC = AC$ (див. мал. 2). Тоді $\Delta ABE = \Delta BAM$ (за двома сторонами і кутом 20° між ними). Отже, $\angle BAE = \angle ABM = 10^{\circ}$. Тому $\angle AEC = \angle ABE + \angle BAE = 20^{\circ} + 10^{\circ} = 30^{\circ}$.

Зауважимо, що при доведенні можна було міркувати й інакше. Оскільки чотирикутник $ABEM$ виявився рівнобічною трапецією (рівні кути при основі AB та $AM = BE$), то $\angle MCE = \angle MEC = 20^{\circ}$. Тому $MA = MC = ME$. Отже, M – центр кола, описаного навколо трикутника ACE. Значить, $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AMC = 30^{\circ}$. Або, враховуючи, що $\angle AME = 160^{\circ}$, знайти $\angle AEC = \angle AEM + \angle CEM = 10^{\circ} + 20^{\circ} = 30^{\circ}$.

Будувати рівносторонній трикутник можна було й на стороні AB (див. мал. 3). Тоді $BC = BF$, $\angle CBF = 40^{\circ}$, тому $\angle BCF = 70^{\circ}$. Оскільки $\Delta BAE = \Delta AFC$ (за двома сторонами і кутом 20° між ними), то $\angle AEB = \angle ACF = 150^{\circ}$ та $\angle AEC = 30^{\circ}$.



Мал. 3



Мал. 4

Як ***узагальнення*** розглянемо випадок, коли точка E знаходиться на продовженні бічної сторони BC поза точку C у рівнобедреному трикутнику з кутами 100°, 40° та 40° (див. мал. 4). Виберемо точку M таку, що $AM = MC = AC$, і точки M та B знаходяться по різні сторони прямої AC. Тоді $\Delta ABE = \Delta BAM$ (за двома сторонами і кутом 100° між ними). Отже, $\angle AEC = \angle AEB = \angle BMA = 30^{\circ}$.

Зауважимо, що, покладаючи $\angle ABC = 2\beta$, $\angle AEC = \varphi$, і застосовуючи теорему синусів до трикутників BAE та AEC, ми отримаємо рівності $\dfrac{AB}{\sin\varphi} = \dfrac{BE}{\sin(\varphi - 2\beta)}$ та $\dfrac{AB}{\cos\beta} = \dfrac{AC}{\sin 2\beta}$ відповідно.

Оскільки $BE = AC$, то приходимо до тригонометричного рівняння

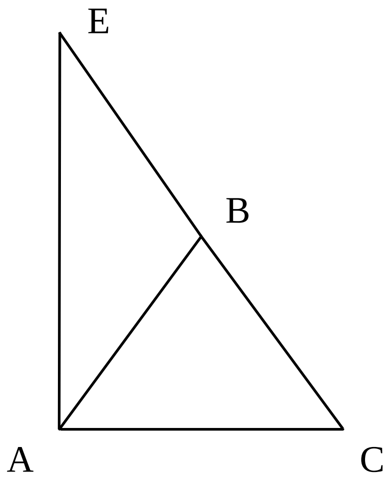
$$\sin 2\beta \cdot \sin\varphi = \cos\beta \cdot \sin(\varphi - 2\beta) \Leftrightarrow 2\sin\beta \cdot \sin\varphi = \sin(\varphi - 2\beta). \quad (*)$$

Нескладно переконатися, що його задовольняють пари кутів $2\beta = 36^{\circ}$, $\varphi = 72^{\circ}$ та $2\beta = 20^{\circ}$, $\varphi = 30^{\circ}$, які були знайдені нами вище.

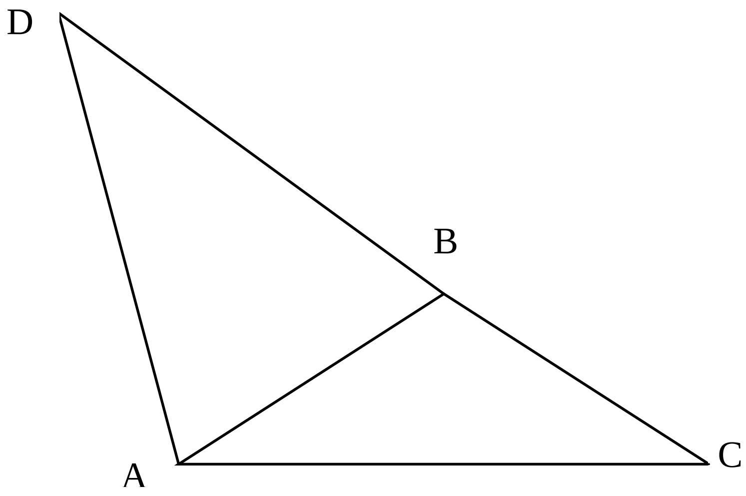
Для E на продовженні сторони BC поза точку C підійде й пара кутів $2\beta = 100^{\circ}$, $\varphi = 30^{\circ}$. (В рівняння (*) слід підставляти $\varphi = 150^{\circ}$).

Розглянемо також три випадки, коли $BE = AC$ для точки E на продовженні сторони BC поза точку B.

1). Для рівностороннього трикутника ABC (див. мал. 5) отримаємо $BE = AB = BC$. Тому кут CAE прямий, а $\angle AEC = 30^{\circ}$.



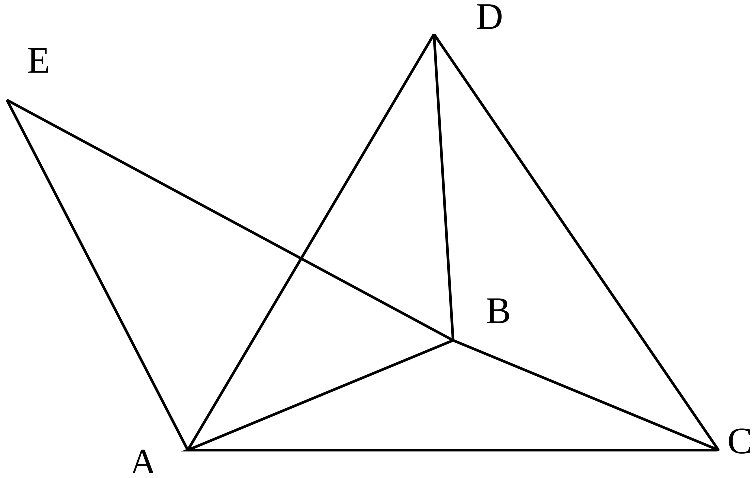
Мал. 5



Мал. 6

2). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 108^{\circ}$, на продовженні сторони BC поза точку B розглянемо точку D таку, що $\angle ADC = \angle ACD = 36^{\circ}$ (див. мал. 6). Оскільки при цьому $\angle ADB = \angle ABD = 72^{\circ}$, то $BD = AD = AC = BE$, тобто точка E збігається з точкою D. Отже, $\angle AEC = 36^{\circ}$.

3). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 140^{\circ}$, доведемо, що $\angle AEC = 30^{\circ}$. Справді, якщо $ADC -$ рівносторонній трикутник (див. мал. 7), то трикутники ABE та BAD рівні за двома сторонами і кутом 40° між ними. Тому $\angle AEC = \angle BDA = 30^{\circ}$.

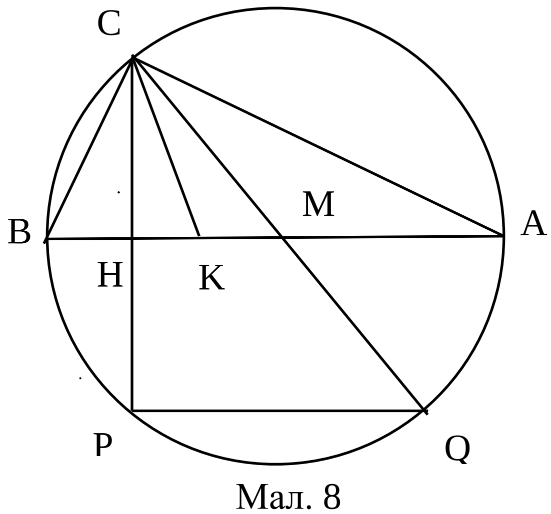


Мал. 7

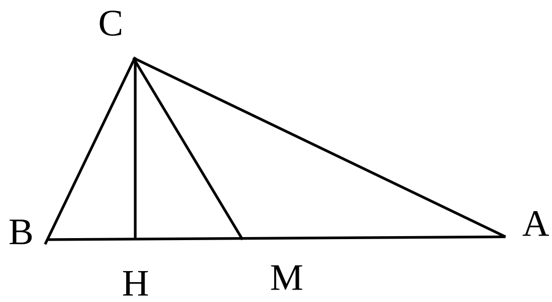
3. Висота CH, бісектриса CK та медіана CM трикутника ABC ділять кут C на чотири рівні частини. Знайдіть градусні міри всіх кутів такого трикутника.

Розв’язання. Розглянемо описане навколо трикутника ABC коло, і продовжимо висоту та медіану до перетину з цим колом у точках P та Q відповідно (див. мал. 8). З рівності кутів BCP та ACQ випливає, що $PQ \parallel AB$, і $\angle CPQ = 90^{\circ}$. Отже, CQ – діаметр, який проходить через точку M – середину хорди AB. Оскільки AB та CQ не є перпендикулярними, то таке можливе лише за умови, що AB також є діаметром цього кола. Тому $\angle ACB = 90^{\circ}$.

Якщо $\angle BAC < \angle ABC$, то з рівностей $\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{3}\angle HCA$ та $\angle HAC + \angle HCA = 90^{\circ}$ маємо $\angle BAC = 22{,}5^{\circ}$. Тоді $\angle ABC = 67{,}5^{\circ}$.



Мал. 8



Мал. 9

Розглядаючи в плані ***узагальнення*** аналогічну задачу, зауважимо, що прямокутним буде і трикутник ABC, в якому лише висота CH та медіана CM ділять кут C на три рівні частини (див. мал. 9). Справді, якщо при цьому CM буде бісектрисою кута C прямокутного трикутника HCA, то, враховуючи рівності $BH = MH$ та $BM = MA$, вона поділить катет HA у відношенні $HM : MA = 1:2$. Тому за властивістю бісектриси також $HC : CA = 1:2$, тобто $\angle HAC = 30^{\circ}$. Тоді й $\angle BAC = 30^{\circ}$ та $\angle BCA = 3\angle BAC = 90^{\circ}$, $\angle ABC = 60^{\circ}$.

4. Доведіть, що рівняння $x^2 - xy - y^2 = 20^2 + 20\cdot 19 - 19^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y, та вкажіть принаймні три пари взаємно простих натуральних чисел a та b, для яких розв'язки у натуральних числах x та y має рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$.

Розв'язання. Будемо розв'язувати ***загальнішу задачу***. А саме, доведемо, що для довільних натуральних чисел a та b рівняння $x^2 - xy - y^2 = a^2 + ab - b^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y.

Нескладно переконатися, що пара чисел $x_1 = a + b,\ y_1 = b$ задовольняє це рівняння. Справді,

$$(a+b)^2 - (a+b)b - b^2 = a^2 + ab - b^2.$$

Далі, з врахуванням тотожності

$$(2x+y)^2 - (2x+y)(x+y) - (x+y)^2 \equiv x^2 - xy - y^2$$

отримуємо, що разом з парою розв'язків (x_n, y_n) розв'язком буде також пара $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n + y_n, x_n + y_n)$, причому $x_{n+1} > x_n,\ y_{n+1} > y_n$.

Тому рівняння $x^2 - xy - y^2 = a^2 + ab - b^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y для довільних натуральних чисел a та b.

Розглянемо тепер рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$.

З наведених вище міркувань випливає, що для довільних натуральних чисел a та b його задовольняє пара дійсних чисел $x = \sqrt{a^2 + b^2},\ y = b$. Тому залишається підібрати такі взаємно прості натуральні числа a та b, для яких $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ буде натуральним числом. Наприклад, достатньо покласти $a = 4n,\ b = 4n^2 - 1,\ n \in \mathrm{N}$. Тоді для кожного натурального числа n отримаємо розв'язок $x = 4n^2 + 1,\ y = 4n^2 - 1$.

Перші три з таких пар мають вигляд: $a = 4, b = 3$; $a = 8, b = 15$; $a = 12, b = 35$.

5. Знайдіть принаймні три четвірки натуральних чисел таких, що добуток будь-яких двох чисел кожної з четвірок, збільшений на 1, є квадратом натурального числа. Чи існують такі 4 попарно різні додатні раціональні числа, жодне з яких не є натуральним числом, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа?

Розв'язання. Доведемо, ***загальніше твердження***: таких четвірок натуральних чисел є нескінченна кількість. Поклавши $a = n-1$, $b = n+1$, $c = 4n$, $d = 4n\left(4n^2-1\right)$, $n \geq 2$, отримуємо:

$$ab + 1 = (n-1)(n+1) + 1 = n^2,$$

$$ac + 1 = (n-1)\cdot 4n + 1 = (2n-1)^2,$$

$$bc + 1 = (n+1)\cdot 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

$$ad + 1 = (n-1)\cdot 4n\left(4n^2-1\right) + 1 = \left(4n^2-2n-1\right)^2,$$

$$bd + 1 = (n+1)\cdot 4n\left(4n^2-1\right) + 1 = \left(4n^2+2n-1\right)^2,$$

$$cd + 1 = 4n\cdot 4n\left(4n^2-1\right) + 1 = \left(8n^2-1\right)^2.$$

Зокрема, перші три такі четвірки мають вигляд:

$a = 1,\ b = 3,\ c = 8,\ d = 120$;

$a = 2,\ b = 4,\ c = 12,\ d = 420$;

$a = 3,\ b = 5,\ c = 16,\ d = 1008$.

Розглянемо тепер четвірки різних додатних раціональних чисел і доведемо, що їх ***також є нескінченна кількість***. Для цього, зокрема, достатньо у записаних вище формулах четвірок натуральних чисел покласти $n = k + \frac{1}{3}$, де k – довільне натуральне число. У результаті отримуємо такі четвірки шуканих раціональних чисел:

$$a = k - \frac{2}{3},\ b = k + \frac{4}{3},\ c = 4\left(k+\frac{1}{3}\right),\ d = 4\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(4\left(k+\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right),\ k \in \mathrm{N}.$$

Для $k = 1$ ця четвірка виглядає так: $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{7}{3},\ c = \frac{16}{3},\ d = \frac{880}{27}$.

Примітка. Можна вказати й нескінченну кількість п’ятірок попарно різних додатних раціональних чисел таких, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа. У загальному випадку п’яте число знаходимо у вигляді

$$x=\frac{4u+2v\left(w+1\right)}{\left(w-1\right)^2},$$

виразивши його через симетричні многочлени знайдених раніше чотирьох чисел:

$$u=abc+abd+acd+bcd=48n^3\left(3n^2-1\right),$$

$$v=a+b+c+d=2n\left(8n^2+1\right),$$

$$w=abcd=16n^2\left(n^2-1\right)\left(4n^2-1\right).$$

Зокрема, для $n=\frac{4}{3}$ отримуємо $x=\frac{6924400560}{97831^2}$. При цьому

$$ax+1=\left(\frac{326973}{293493}\right)^2,\ bx+1=\left(\frac{481197}{293493}\right)^2,$$

$$cx+1=\left(\frac{646923}{293493}\right)^2,\ dx+1=\left(\frac{4365279}{880479}\right)^2.$$

6. Для всіх натуральних чисел n доведіть таку подвійну нерівність:

$$n^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)<\frac{9}{8}n^2.$$

Розв’язання. Ліва частина цієї нерівності випливає з нерівності Коші між середніми арифметичним та геометричним:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\ge n\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}}\cdot n\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}}=n^2.$$

Для обґрунтування правої частини спочатку ***доведемо загальнішу нерівність***

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}\right)\le\frac{\left(a+b\right)^2}{4ab}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2,\quad (*)$$

в якій $a_k>0, x_k\in\left[a,b\right],\ 0<a<b$.

Для цього розглянемо функцію

$$f(x)=(a_1x+a_2x_2+...+a_nx_n)\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}\right)=a_1^2+Ax+\frac{B}{x}+AB,$$

де $A=a_1\left(\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}\right)>0,\ \ B=a_1(a_2x_2+...+a_nx_n)>0,\ \ x\in[a,b].$

Її похідна $f'(x)=A-\frac{B}{x^2}$ зростає на $[a,b]$. Тому функція $f(x)$ набуває найбільше значення на відрізку $[a,b]$, якщо $x=a$ або $x=b$. Отже, $f(x_1)\le\max\{f(a),f(b)\}$.

Тепер розглядаємо функції

$$g(x)=(a_1a+a_2x+a_3x_3+...+a_nx_n)\left(\frac{a_1}{a}+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x_3}+...+\frac{a_n}{x_n}\right),\ x\in[a,b],$$

та

$$g(x)=(a_1b+a_2x+a_3x_3+...+a_nx_n)\left(\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x_3}+...+\frac{a_n}{x_n}\right),\ x\in[a,b],$$

і так само встановлюємо, що $g(x_2)\le\max\{g(a),g(b)\}$.

Міркуючи аналогічно для інших змінних, ми отримаємо, що вираз $\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}\right)$ набуває найбільшого значення, якщо частина x_k дорівнює a, а решта змінних дорівнюють b.

Нехай $\sum_{x_k=a}a_k=C$, $\sum_{k=1}^{n}a_k=D$. Тоді для завершення доведення нерівності (*) достатньо показати, що

$$(Ca+(D-C)b)\left(\frac{C}{a}+\frac{D-C}{b}\right)\le\frac{(a+b)^2}{4ab}D^2.$$

Це справді так, бо остання нерівність рівносильна очевидній нерівності $(D-2C)^2(a-b)^2\ge0$.

Покладаючи $x_k=\frac{k+1}{k}$, ми отримаємо, що всі $x_k\in[a;b]=[1;2]$.

Тому для завершення доведення другої заданої в умові задачі нерівності достатньо буде вибрати всі $a_k = 1$, скористатися нерівністю (*) і врахувати, що для $n \ge 2$ не всі x_k дорівнюють 1 або 2.

Для $n = 1$ така строга нерівність є очевидною.

Зауважимо, що доведену нами нерівність (*) можна використати і для обґрунтування нерівності

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + k - 1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 - k}{k+1}\right) \le \frac{9}{8} n^4$$

заключного етапу XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

Для цього достатньо покласти $a_k = 2k - 1$ і скористатися рівністю $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$, яку можна отримати за формулою для обчислення суми елементів арифметичної прогресії.

Насправді, вказана нерівність також буде строгою.

7. В шаховій партії за ходу білих виникла наступна позиція. Білі: Кр a1, пп. b5, b6, e4, e5, g3; чорні: Кр g8, пп. b7, e6, g4. З яким результатом закінчиться ця партія за правильної гри обох суперників?

Розв'язання. За правильної гри обох суперників ця партія закінчиться внічию. Наводимо таблицю відповідності полів (їхні номери виділені жирним шрифтом), які повинен займати чорний король, якщо білий знаходиться на полі з тим самим номером.

				12	**4**	**6**	**9**
	♟			**1**	**3**	**5**	**8**
	♙			♟		**7**	**10**
12	♙	1		♙		**11**	**2**
4	3	4	3	♙	2	♟	
6	5	6	5	7		♙	
9	8	9	8	10	11	10	11
6	5	6	5	7	2	7	2

У початковій позиції чорний король уже стоїть на відповідному полі з номером 6. Далі, дотримуючись вказаної вище відповідності, він не допустить прориву білого короля ні з поля c5, ні з поля f4.

Аналогічно можна проаналізувати результат гри як за інших початкових позицій королів, так і у випадку першого ходу чорними.

Зокрема, при початковій позиції чорного короля на полі h8 білі здобудуть перемогу. Наводимо основний варіант її досягнення (в інших варіантах білі можуть зробити прорив ще швидше):

1. Крa1-a2!! Крh8-h7 2. Крa2-b2! Крh7-g7

3. Крb2-b3! Крg7-g8 4. Крb3-c3! Крg8-f8

5. Крc3-c4! Крf8-f7 6. Крc4-d4!

Відповідно, у заданій в умові задачі позиції за першого ходу чорних білі переможуть, якщо вони, наближаючись до одного з полів прориву c5 чи f4, весь час займатимуть такі поля, щоб чорний король своїм наступним ходом не зміг попасти на поле з цим же номером.

8. Розмістіть на шаховій дошці туру і найбільшу кількість коней так, щоб жодна фігура не била іншу.

Розв'язання. Спочатку розглянемо задачу про розміщення на шаховій дошці максимальної кількості коней так, щоб жоден з них не бив іншого.

Розіб'ємо цю дошку на 8 прямокутників розмірами 4×2. Будь-які два коні, поставлені в такому прямокутнику тримають під ударом різні поля цього прямокутника. Тому помістити у ньому більше чотирьох коней не вдасться. Отже, на всій дошці можна за вказаних вимог розмістити не більше 32 коней.

Як доведено в [А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 5. – М., Гостехиздат, 1954.], існують лише два варіанти такого розміщення: або всі коні стоять на чорних полях шахової дошки; або всі вони знаходяться на білих клітинках.

Обмежимося першим із них і доставимо на шахову дошку туру. При цьому доведеться зняти коней з тієї вертикалі та тієї горизонталі, де опинилася тура. У кожній з них стояли по 4 коні. Тому найменше коней, а саме 7, зможемо вилучити, якщо кінь стояв на їх перетині.

Приклад з розміщенням тури та 25 коней виглядає так: тура на полі a1, а коні – на всіх чорних клітинках вище першої горизонталі та лівої вертикалі. Зрозуміло, що він не єдиний.

Як узагальнення розглянемо аналогічну задачу про розміщення тури на максимальної кількості коней на дошках розмірами $n\times n$.

Якщо n – парне, то маємо два способи розміщення на ній $n^2/2$ коней. Після виставлення тури їх зменшиться принаймні на $n-1$.

Якщо $n>1$ – непарне, то спочатку максимальна кількість коней дорівнюватиме $\left(n^2+1\right)/2$ за умови, що всі вони стоятимуть на полях того кольору, що й кутова клітинка. Після виставлення тури ця кількість зменшиться принаймні на $n-2$. Рівно настільки, якщо, наприклад, туру поставити на поле b2.

9. Нехай m – натуральне число. Знайдіть усі пари додатних чисел a та b, для яких справедлива нерівність $\dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}\geq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Розв’язання. Розглянемо ***загальнішу нерівність***

$$\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}\geq\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}}.$$

Для додатних чисел a та b вона рівносильна нерівності

$$2\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k\geq\left(a^k+b^k\right)\left(a^m+b^m\right)^k.$$

Враховуючи формулу $x^k-y^k=\left(x-y\right)\sum\limits_{p=0}^{k-1}x^{k-1-p}y^p$, різницю між її лівою та правою частинами подамо у вигляді:

$$\left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k-b^k\left(a^m+b^m\right)^k\right]+\left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k-a^k\left(a^m+b^m\right)^k\right]=$$

$$=\left(a-b\right)a^m\sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p}b^p\left(a^m+b^m\right)^p-$$

$$-\left(a-b\right)b^m\sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p}a^p\left(a^m+b^m\right)^p=$$

$$=\sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p}\left(a^m+b^m\right)^p a^p b^p\left(a-b\right)\left(a^{m-p}-b^{m-p}\right).$$

Для $k=2m+1$ ця різниця матиме вигляд:

$$\sum_{p=0}^{2m}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2m-p}\left(a^m+b^m\right)^p a^p b^p\left(a-b\right)\left(a^{m-p}-b^{m-p}\right).$$

Її середній доданок, який відповідає $p=m$, дорівнює 0. Решту доданків згрупуємо у пари симетрично відносно нього і доведемо, що у кожній такій парі сума доданків є невід'ємною.

Справді, групуючи доданки, в яких $p=m-q$ та $p=m+q$, для кожного $q=\overline{1,m}$ отримаємо:

$$\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m+q}\left(a^m+b^m\right)^{m-q}a^{m-q}b^{m-q}\left(a-b\right)\left(a^q-b^q\right)+$$
$$+\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m-q}\left(a^m+b^m\right)^{m+q}a^{m+q}b^{m+q}\left(a-b\right)\left(a^{-q}-b^{-q}\right)=$$
$$=\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m-q}\left(a^m+b^m\right)^{m-q}a^{m-q}b^{m-q}\left(a-b\right)\left(a^q-b^q\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q\right].$$

Тому достатньо довести, що $\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q\geq 0$ для всіх пар додатних чисел a та b.

Це дійсно так, бо

$$\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^q-\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^q=$$
$$=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2-\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}=$$
$$=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2-\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}=$$
$$=\left(a-b\right)\left(a^{2m+1}-b^{2m+1}\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}.$$

Отже, для $k=2m+1$ задана нерівність є правильною для всіх пар додатних чисел a та b.

А оскільки за властивістю середніх для $k\leq 2m+1$ справджується нерівність $\sqrt[k]{\dfrac{a^k+b^k}{2}}\leq\sqrt[2m+1]{\dfrac{a^{2m+1}+b^{2m+1}}{2}}$, то вона є правильною для всіх натуральних $k\leq 2m+1$.

Зокрема, вона ***буде правильною і для*** $k = 2 < 3 \le 2m + 1$ для всіх натуральних чисел m, про що йшла мова в умові задачі

Зауважимо, що у загальному вигляді отриманий результат покращити не вдасться. Наприклад, для $m = 1$, $k = 4$ така нерівність не справджується для $a = 1$, $b = 2$:

$$2\left(1^2 + 2^2\right)^4 = 1250 < 1377 = \left(1^4 + 2^4\right)\left(1^1 + 2^1\right)^4.$$

10. У Лототроні міститься 36 занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає шість кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Чи може гравець купити 12 білетів і гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери?

Розв'язання. Доведемо, що достатньо буде купити ***лише 10 білетів.***

У перших шести з них виберемо номери 1 – 6, 7 – 12, 13 – 18, 19 – 24, 25 – 30 та 31 – 36 відповідно.

Якщо при цьому принаймні в одному з білетів вгадано не менше двох номерів, то бажаного результату досягнуто.

Якщо ж ні, то у кожному з цих шести білетів вгадано рівно по одному номеру. Тоді розглянемо перші два з них. Потрібні номери у них можуть знаходитися як у першій, так і в другій половині з шести номерів. Тому заповнимо ще 4 білети наступним чином: (1, 2, 3, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 10, 11, 12), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (4, 5, 6, 10, 11, 12).

При цьому принаймні в одному з десяти куплених білетів будуть вгадані щонайменше два номери.

Зауважимо, що при випаданні $2n$ із $4n^2$ кульок для вгадування принаймні раз двох номерів достатньо буде купити $2n + 4$ білети.

Справді, перші $2n$ квитків заповнюємо номерами $1...2n$, $(2n+1)...4n$, $4n^2 - 5...4n^2$ відповідно. А далі, за потреби, ще 4 білети, які заповнимо так:

$$\left(1...n, (2n+1)...3n\right),\ \left(1...n, (3n+1)...4n\right),$$
$$\left((n+1)...2n, (2n+1)...3n\right),\ \left((n+1)...2n, (3n+1)...4n\right).$$

11. Число 10 можна двома способами подати як суму двох простих чисел, перше з яких не більше від другого: $10 = 3 + 7$ та $10 = 5 + 5$. А чи існує натуральне число, яке таким чином можна представити не менше як десятьма способами?

Розв'язання. Спочатку ***доведемо таке загальне твердження:*** для кожного натурального числа m існує таке натуральне число N, яке можна подати як суму двох простих чисел не менше як m способами.

Доведення. Припустимо, що для деякого натурального числа m такого натурального числа N не існує.

Нехай $n > 1$ – деяке натуральне число. Розглянемо всі пари (p, q) простих чисел p, q, які не перевищують n. Кількість таких пар дорівнює $\left(\pi(n)\right)^2$, де функція $\pi(n)$ – кількість простих чисел, які не перевищують n.

Поділимо множину таких пар на класи – пара (p, q) належить класу k, якщо $p + q = k$. Оскільки $p \le n$ та $q \le n$, то $k \le 2n$. За зробленим нами на початку припущенням у кожному такому класі буде менше ніж m різних пар. Оскільки ж таких класів менше ніж $2n$, то кількість пар (p, q) менша ніж $2mn$, тобто $\left(\pi(n)\right)^2 < 2mn$.

Але, як відомо, $\pi(n) > \dfrac{n}{12\ln n}$. Тому для вказаного у припущенні числа m та всіх $n > 1$ мала би справджуватися нерівність

$$\left(\frac{n}{12\ln n}\right)^2 < 2mn \Leftrightarrow 288m\ln^2 n > n.$$

З розкладу $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ отримуємо, що $e^x > \dfrac{x^3}{6}$ для всіх $x \ge 0$. Підставляючи сюди $x = \ln n$, дістанемо $n > \dfrac{\ln^3 n}{6}$. Отже, для числа m та всіх $n > 1$ отримуємо нерівність

$$288m\ln^2 n > \frac{\ln^3 n}{6} \Leftrightarrow 1728m > \ln n.$$

Зрозуміло, що для жодного фіксованого m при достатньо великих n остання нерівність не буде правильною. Тому зроблене на початку доведення припущення було хибним. Отже, сформульоване нами твердження доведене.

Як ***приклад*** до питання, сформульованого безпосередньо в умові задачі, наведемо число 120, яке можна подати таким чином дванадцятьма способами:

$$120 = 7+113=11+109=13+107=17+103=19+101=$$
$$= 23+97=31+89=37+83=41+79=47+73=53+67=59+61.$$

Нижче наводимо також приклад числа, яке представляється сумою двох простих чисел аж ***106-ма способами***:

$$3600 = 7+3593=17+3583=19+3581=29+3571=41+3559=$$
$$=53+3547=59+3541=61+3539=67+3533=71+3529=73+3527=$$
$$=83+3517=89+3511=101+3499=109+3491=131+3469=$$
$$=137+3463=139+3461=151+3449=167+3433=193+3407=$$
$$=211+3389=227+3373=229+3371=239+3361=241+3359=$$
$$=271+3329=293+3307=347+3253=349+3251=379+3221=$$
$$=383+3217=397+3203=409+3191=419+3181=431+3169=$$
$$=433+3167=463+3137=491+3109=521+3079=563+3037=$$
$$=577+3023=599+3001=601+2999=631+2969=643+2957=$$
$$=647+2953=661+2939=673+2927=683+2917=691+2909=$$
$$=739+2861=743+2857=757+2843=797+2803=811+2789=$$
$$=823+2777=881+2719=887+2713=941+2659=953+2647=$$
$$=983+2617=991+2609=1009+2591=1021+2579=1049+2551=$$
$$=1061+2539=1069+2531=1097+2503=1123+2477=1153+2447=$$
$$=1163+2437=1201+2399=1229+2371=1249+2351=1259+2341=$$
$$=1289+2311=1307+2293=1319+2281=1327+2273=1361+2239=$$
$$=1439+2161=1447+2153=1459+2141=1471+2029=1487+2113=$$
$$=1489+2111=1511+2089=1531+2069=1571+2029=1583+2017=$$
$$=1601+1999=1607+1993=1613+1987=1621+1979=1627+1973=$$
$$=1667+1933=1669+1931=1693+1907=1699+1901=1721+1879=$$
$$=1723+1877=1733+1867=1753+1847=1777+1823=1789+1811.$$

Додатково доведемо й наступне ***загальне твердження*** до п. б) відповідної задачі Всеукраїнського етапу турніру: для кожного натурального числа n існує таке натуральне число N, яке можна подати як суму квадратів двох натуральних чисел не менше як n способами.

Нехай

$$N = \prod_{k=2}^{n+1} \left(k^2+1\right)^2,\ A_k = \frac{\sqrt{N}}{k^2+1}.$$

Тоді

$$N = \left(\left(k^2+1\right)A_k\right)^2 = \left(\left(k^2-1\right)A_k\right)^2 + \left(2kA_k\right)^2$$

для кожного натурального k від 2 до $n+1$.

12. Раціональне число $\frac{r}{s} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{35}{36^2}$ є сумою тридцяти п’яти дробів. Доведіть, що r ділиться на 37.

Розв’язання. Зразу будемо доводити ***загальніше твердження***: *для довільного непарного простого числа* $p = q^2+1$ *у раціональному числі* $\frac{r}{s} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{p-2}{\left(p-1\right)^2}$, *де* $\frac{r}{s}$ – *нескоротний дріб, чисельник* r *ділиться на* p.

Запишемо цю суму у вигляді

$$\frac{r}{s} = \frac{1-1}{1^2} + \frac{2-1}{2^2} + \frac{3-1}{3^2} + \frac{4-1}{4^2} + \ldots + \frac{\left(p-1\right)-1}{\left(p-1\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right).$$

Групуючи в перших дужках доданки по два симетрично відносно середини, отримуємо

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p-1} =$$

$$= p \cdot \left(\frac{1}{1\cdot\left(p-1\right)} + \frac{1}{2\cdot\left(p-2\right)} + \frac{1}{3\cdot\left(p-3\right)} + \ldots + \frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right).$$

Тому для раціонального числа $\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{\left(p-1\right)^2}$ достатньо довести, що m ділиться на p.

Розглянемо подвоєну таку суму $\frac{2m}{n}$, в якій кожен записаний доданок входить двічі, і згрупуємо в ній доданки по два так, щоб у першому доданку знаменник дорівнював $k^2, 1 \le k \le p-1$, а у другому – дорівнював квадрату остачі від ділення qk на p. Внаслідок простоти числа p таким чином будуть враховані всі доданки такої подвоєної суми.

Оскільки $k^2 + \left(qk\right)^2$ ділиться на p для всіх цілих чисел k, то у кожній такій парі після зведення до спільного знаменника чисельник буде ділитися на p. Тому $2m$, а з ним і m, діляться на p. Звідси маємо, що й r також ділиться на p.

Для $q = 6$, тобто $p = 37$, отримуємо як окремий випадок твердження пропонованої задачі.

Зауважимо, що вимога простоти числа $p = q^2 + 1$ є суттєвою. Бо, наприклад, для $q = 8$, тобто $p = 65$, отримуємо дріб

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + ... + \frac{63}{64^2} =$$

$$= \frac{79150046430224360850844958910960026528441760844195261}{25413727004476294175336659010085214676345183380992000},$$

чисельник якого не ділиться не те щоб на 65, а й на 5.

Проте відзначимо, що правильним буде й таке ***ще загальніше твердження***, яке наведемо тут без доведення: для довільного простого числа $p > 3$ чисельник r нескоротного дробу $\frac{r}{s} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + ... + \frac{p-2}{\left(p-1\right)^2}$ ділиться на p.

13. На площині довільним чином вибрали 4 різні точки. Доведіть, що їх можна позначити буквами A, B, C, D так, що для деякої точки M цієї площини правильною буде рівність $AM + BM = CM + DM$.

Розв'язання. Якщо не всі чотири вибрані точки лежать на одній прямій, то їх можна позначити буквами A, B, C, D так, щоб відрізки AC та BD не були паралельними. Нехай M – точка перетину серединних перпендикулярів до цих відрізків. Тоді $AM = CM$ та $BM = DM$. Додавши дві останні рівності, отримуємо потрібну рівність $AM + BM = CM + DM$.

Нехай тепер всі чотири вибрані точки лежать на одній прямій. Позначимо їх буквами A, B, C, D послідовно одна за одною (див. мал.10).

Мал. 10

Якщо при цьому M збігається з точкою A, то маємо $AM + BM < CM + DM$. А якщо M збігається з точкою D, то отримуємо нерівність $AM + BM > CM + DM$. Тому деякої точки M між A та D правильною буде рівність $AM + BM = CM + DM$.

Як ***узагальнення*** розглянемо аналогічну задачу з наборами $2n$ різних точок. Сочатку визначимо напрям, який не є паралельним жодній з прямих, що проходять через довільні пари цих точок. Далі проведемо пряму з цим напрямом, яка поділить вказані точки на дві рівні частини: $A_1, A_2, ..., A_n$ з однієї сторони та $B_1, B_2, ..., B_n$ – з іншої. Тоді у колі, всередині якого містяться всі ці точки, виберемо перпендикулярний до цієї прямої діаметр, і на ньому – дві діаметрально протилежні точки P та Q.

Якщо $\sum_{k=1}^{n} PA_k = \sum_{k=1}^{n} PB_k$, то беремо $M = P$.

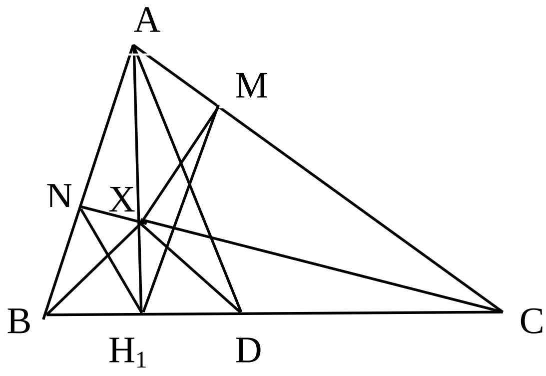
Якщо ні, то для конкретності вважаємо, що $\sum_{k=1}^{n} PA_k < \sum_{k=1}^{n} PB_k$, тобто $\sum_{k=1}^{n} \left(PA_k - PB_k \right) < 0$.

Тоді $\sum_{k=1}^{n} \left(QA_k - QB_k \right) > 0$ та $\sum_{k=1}^{n} QA_k > \sum_{k=1}^{n} QB_k$. Тому на кожній неперервній лінії, яка проходить через точки P та Q знайдеться точка M така, що $\sum_{k=1}^{n} MA_k = \sum_{k=1}^{n} MB_k$.

14. На висоті AH_1 гострокутного трикутника ABC з попарно різними сторонами вибрали деяку точку X, з якої на сторони AB та AC опустили перпендикуляри XN та XM відповідно. Виявилося, що H_1A – бісектриса кута MH_1N. Доведіть, що X – точка перетину висот трикутника ABC.

Розв'язання. У чотирикутниках BH_1XN та CH_1XM (див. мал. 11) пари протилежних кутів прямі. Тому навколо цих чотирикутників можна описати кола. Отже,

$\angle NBX = \angle NH_1X = \angle MH_1X = \angle MCX$.



Мал. 11

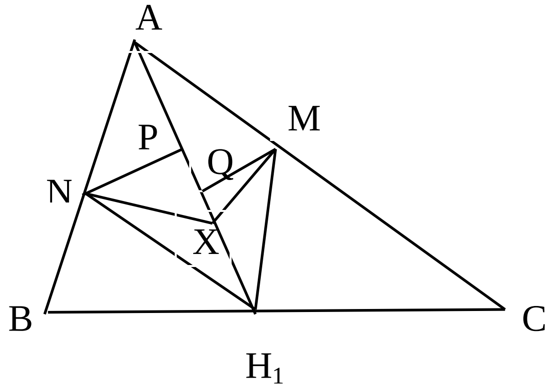
Нехай точка D симетрична до точки B відносно H_1. Тоді маємо, що $\angle ADX = \angle ABX = \angle ACX$, тобто точка X лежить на колі, описаному навколо трикутника ADC. Оскільки таке коло може перетинати висоту AH_1 лише в одній точці, то вона є й єдиною точкою на цій висоті, для якої $\angle ABX = \angle ACX$.

Вона збігається з точкою H перетину висот трикутника ABC, бо $\angle ABH = 90^{\circ} - \angle BAC = \angle ACH$.

Додатково розглянемо дві ***аналогічні задачі***:

1). Якщо точка X знаходиться ***на бісектрисі*** AH_1, то для будь-якого її розташування на ній H_1A буде бісектрисою кута MH_1N. Це випливає з рівності трикутників AMH_1 та ANH_1 за двома сторонами та кутом між ними при вершині A.

2). Якщо AH_1 – ***медіана***, X – ***точка перетину медіан*** трикутника ABC, то встановимо необхідні та достатні умови для того, щоб H_1A була бісектрисою кута MH_1N.



Мал. 12

Опустимо з точок N та M перпендикуляри NP та MQ на цю медіану (див. мал. 12).

Нехай $H_1A = 3m$, $\angle NAX = \alpha$, $\angle MAX = \beta \neq \alpha$. Тоді

$$AX = 2m,\ AN = 2m\cos\alpha,\ NP = 2m\cos\alpha\sin\alpha = m\sin 2\alpha,$$

$$AP = 2m\cos^2\alpha,\ H_1P = m\left(3 - 2\cos^2\alpha\right) = m\left(2 - \cos 2\alpha\right),$$

$$\mathrm{tg}\angle NH_1A = \frac{NP}{H_1P} = \frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha}.$$

Аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{tg}\angle MH_1A = \frac{MQ}{H_1Q} = \frac{\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}.$$

Якщо H_1A – бісектриса кута MH_1N, то маємо рівність

$$\frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}.$$

Виконаємо послідовні рівносильні перетворення цієї рівності, враховуючи, що в різносторонньому трикутнику $\beta \neq \alpha$:

$$\left(2 - \cos 2\beta\right)\sin 2\alpha = \left(2 - \cos 2\alpha\right)\sin 2\beta,$$

$$2\left(\sin 2\alpha - \sin 2\beta\right) = \sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\sin 2\beta,$$

$$2\left(\sin 2\alpha - \sin 2\beta\right) = \sin 2\left(\alpha - \beta\right),$$

$$4\sin\left(\alpha - \beta\right)\cos\left(\alpha + \beta\right) = 2\sin\left(\alpha - \beta\right)\cos\left(\alpha - \beta\right),$$

$$2\cos\left(\alpha + \beta\right) = \cos\left(\alpha - \beta\right),$$

$$2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

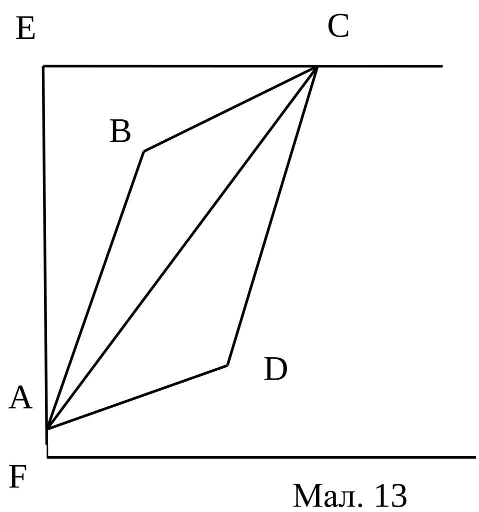
$$\cos\alpha\cos\beta = 3\sin\alpha\sin\beta.$$

Звідси випливає, що шуканою необхідною і достатньою умовою того, щоб для X – точки перетину медіан трикутника ABC – H_1A була бісектрисою кута MH_1N, є умова $\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta = 3$.

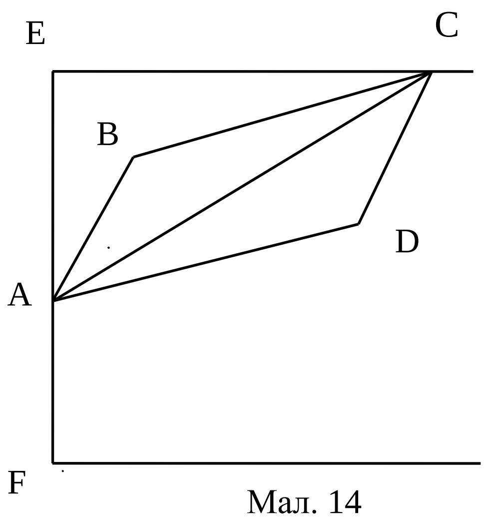
15. Петрик має однакові паралелограми з кутами 45° та 135° і довжинами сторін 1 та $\sqrt{2}$. Доведіть, що у прямокутнику розмірів 2×19 він не зможе помістити більше ніж 36 параллелограмів. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів він зможе помістити у квадраті розмірами 4×4? Паралелограми можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна навіть частково накладати один на одного?

Розв'язання. Будемо розв'язувати ***загальнішу задачу*** для смуги розмірів $2\times n,\ n\geq 2$.

Доведемо, що більше $2n-2$ таких паралелограмів у цій смузі викласти не вдасться. Для цього проаналізуємо розміри площ тих частинок, які прилягають до лівого та правого країв смуги і не покриті жодним паралелограмом.



Мал. 13



Мал. 14

Для кожної з двох можливих форм паралелограмів $ABCD$ прилеглих до лівої та верхньої меж смуги, це буде площа чотирикутника $AECB$ (див. мал. 13, 14). Якщо б точки A чи C не лежали на межах смуги то паралелограм $ABCD$ ми перемістили би вліво чи вверх, і від цього непокрита площа тільки зменшилась би.

Нехай (див. мал. 13) $AB=\sqrt{2}$, $BC=1$, $\angle CAE=\alpha$.

Тоді, враховуючи, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 1, а за теоремою косинусів діагональ $AC=\sqrt{5}$ і ділить цю площу пополам, отримаємо

$$S_{AECB}=S_{AEC}-S_{ABC}=\frac{1}{2}AC^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}. \quad (*)$$

Знайдемо, в яких межах може знаходитися величина α.

Найменше можливе значення для α будемо мати, якщо точка A збігається з точкою F. При цьому $EF=2$, $EC=1$ та $S_{AECB}=S_{AEC}-S_{ABC}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Внаслідок (*) зі зростанням α до 45° ця площа також зростатиме до значення $S_{AECB} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, а далі спадатиме аж поки точка B не опиниться на відрізку EC. Оскільки при цьому $\angle ABE = 45^{\circ}$, то отримаємо $S_{AECB} = S_{ABE} = \frac{1}{2}$.

Отже, завжди $S_{AECB} \geq \frac{1}{2}$, причому рівність досягається лише для вказаних вище двох крайніх розташувань паралелограма $ABCD$. При цьому для кожного з цих двох крайніх випадків розмістити у заданій смузі ще один паралелограм так, щоб у прилеглих до EF двох одиничних квадратиків не було інших непокритих частинок не вдасться. Тому разом у першому випадку сумарна непокрита площа з лівої частини смуги виявиться більшою за $\frac{1}{2}$.

Так само (див. мал. 14), якщо $\angle ACE = \gamma$, отримаємо $S_{AECB} = \frac{5}{4}\sin 2\gamma - \frac{1}{2}$. Тут для $AE \geq AF$ ситуація аналогічна до попереднього випадку.

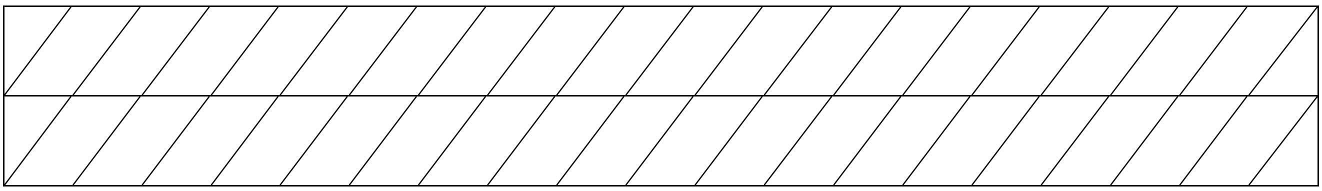
А далі (якщо $n \geq 3$) площа продовжить спадати аж поки точка B не опиниться на відрізку EC. Оскільки при цьому $\angle ABE = 45^{\circ}$, то отримаємо $S_{AECB} = S_{ABE} = \frac{1}{4}$. Отже, в такому підвипадку прилегла до точки E непокрита частина смуги матиме площу не меншу за $\frac{1}{4}$.

Але так само площу не меншу за $\frac{1}{4}$ тоді матиме і непокрита частина, яка прилягає до AF. Отже, разом до EF прилягає непокрита площа не менша за $\frac{1}{2}$. При цьому у разі рівності цієї площі числу $\frac{1}{2}$ ми знову ж не зможемо помістити у заданій смузі ще один паралелограм так, щоб у прилеглих до EF двох одиничних квадратиків не було інших непокритих частинок. Тому, як і в першому випадку, разом сумарна непокрита площа з лівої частини смуги виявиться більшою за $\frac{1}{2}$.

Аналогічний висновок можна зробити і для непокритої площі біля правої межі смуги. Тому, остаточно, непокритою у вказаній смузі паралелограмами виявиться площа більша за 1. А оскільки така площа виражається цілим числом, то вона не менша за 2.

Тому більше $2n-2$ паралелограмів у такій смузі розмістити не вдасться.

Нескладно навести приклад розміщення рівно $2n-2$ таких паралелограмів у смузі розмірів $2\times n,\ n\geq 2.$ Для цього достатньо у кожному рядку такої смуги викласти один за одним по $n-1$ паралелограмів так, щоб два сусідні мали спільну сторону довжиною $\sqrt{2}$. Наприклад, для $n=19$ отримаємо 36 таких паралелограмів:



Зауважимо, що у такий спосіб у прямокутнику розмірами $4\times n,\ n\geq 4,$ вдасться викласти $4n-4$ паралелограмів.

Зокрема, у квадраті 4×4 їх отримаємо 12.

16. На дошці відмічено n точок, які є вершинами правильного n-кутника. В одній із точок знаходиться фішка. Два гравці по черзі переміщують її в іншу відмічену точку і при цьому малюють відрізок, що їх сполучає. Якщо дві точки вже з'єднані відрізком, то такий хід заборонений. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників, якщо: а) $n=6$; б) $n=7$?

Розв'язання. Будемо розв'язувати ***загальнішу задачу*** для вершин довільного правильного n-кутника. При цьому позначати такі вершини буквами будемо у порядку першого попадання у них фішки.

Вершину, в якій фішка знаходилася спочатку, позначимо A_1. Вершину, в яку її перемістив перший гравець, – A_2, а вершину, в яку після цього пересунув фішку другий гравець, – A_3.

Далі опишемо виграшну стратегію першого гравця. Спочатку він переміщує фішку з вершини A_3 у вершину A_1.

Якщо $n=3$, то гра закінчилася його перемогою.

В іншому разі другий гравець змушений перемістити фішку у ще не задіяну вершину, яку позначимо A_4. У відповідь перший гравець переміщує фішку у вершину A_2.

Якщо при цьому він ще не виграв, то у другого знову вимушений хід в нову не задіяну вершину A_5, на що перший відповідає ходом у вершину A_1.

Таким чином, чергуючи ходи у вершини A_1 та A_2, перший гравець змушує суперника кожного разу ходити у нову не задіяну досі вершину. Зрозуміло, що, яким би не було n, такі нові вершини колись вичерпаються, і на цьому гра закінчиться перемогою першого гравця.

Нескладно порахувати, що при цьому разом обома гравцями буде зроблено $2n-3$ ходи. Якщо n непарне, то гра закінчиться у вершині A_1, а якщо n парне, то вона фінішує у вершині A_2.

Зокрема, для $n=6$ та $n=7$ за описаної стратегії завершення гри відбудеться у вершинах A_2 та A_1 відповідно.

17. Задано чотири послідовні члени арифметичної прогресії a_1, a_2, a_3, a_4. Миколка і Ганнуся грають у таку гру. Вони по черзі (першою ходить Ганнуся) вибирають одне з чотирьох заданих чисел і записують його замість символу $*$ у вираз $*\cdot*-*\cdot*$. Після чотирьох ходів у виразі кожне із заданих чисел зустрічається по одному разу. Якщо значення виразу є від'ємним числом, то виграє Миколка. В іншому випадку виграє Ганнуся. Чи є у Ганнусі виграшна стратегія?

Розв'язання. Позначимо через a медіану, і для зручності – через $2d$ різницю цієї прогресії. Тоді $a_1=a-3d$, $a_2=a-d$, $a_3=a+d$, $a_4=a+3d$.

Якщо $d=0$, то всі елементи прогресії рівні, і значення отриманого виразу також буде дорівнювати 0, тобто виграє Ганнуся.

Нехай тепер $d>0$. Обчислимо різниці:

$$a_4a_3 - a_1a_2 = (a+3d)(a+d) - (a-3d)(a-d) = 8ad\,,$$
$$a_4a_2 - a_1a_3 = (a+3d)(a-d) - (a-3d)(a+d) = 4ad\,,$$
$$a_3a_2 - a_1a_4 = (a+d)(a-d) - (a-3d)(a+3d) = 8d^2\,.$$

Звідси отримуємо, що за умови $a \ge 0$, тобто $a_1 + a_4 \ge 0$, Ганнуся переможе, якщо першим своїм ходом запише a_1 у праву частину виразу. А за умови $a < 0$, тобто $a_1 + a_4 < 0$, їй для перемоги достатньо своїм першим ходом записати у праву частину виразу a_4.

Випадок $d < 0$ зводиться до попереднього, якщо елементи заданої прогресії занумерувати в протилежному порядку, або ж просто поміняти ролями a_1 та a_4.

Як ***узагальнення*** розглянемо аналогічні ігри з чотирма послідовними елементами інших послідовностей:

а). ***Геометрична прогресія***.

Нехай $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$, $a_4 = aq^3$.

Випадки $a = 0$, $q = 0$ та $q = 1$ є тривіальними. Для них значення отриманого виразу буде дорівнювати 0, тобто перемагає Ганнуся.

Для інших a та q обчислимо різниці:

$$a_4a_3 - a_1a_2 = aq^3 \cdot aq^2 - a \cdot aq = a^2q\left(q^4 - 1\right),$$
$$a_4a_2 - a_1a_3 = aq^3 \cdot aq - a \cdot aq^2 = a^2q^2\left(q^2 - 1\right),$$
$$a_3a_2 - a_1a_4 = aq^2 \cdot aq - a \cdot aq^3 = 0\,.$$

Звідси випливає, що для перемоги Ганнусі достатньо своїм першим ходом записати:

a_1 у праву частину виразу, якщо $q > 1$;

a_4 у праву частину виразу, якщо $0 < q < 1$;

a_3 у ліву частину виразу, якщо $-1 \le q < 0$;

a_2 у ліву частину виразу, якщо $q < -1$.

б). ***Послідовність чисел Фібоначчі***.

Розглянемо послідовність чисел F_n, яка визначається рівностями: $F_1 = F_2 = 1$ та $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$. Нехай $a_1 = F_n$, $a_2 = F_{n+1}$, $a_3 = F_{n+2}$, $a_4 = F_{n+3}$ для деякого натурального числа n.

З врахування формул Кассіні для всіх $n \in \mathrm{N}$ отримуємо:

$$a_4 a_3 - a_1 a_2 = F_{n+3}F_{n+2} - F_n F_{n+1} =$$

$$= \left(F_{n+1} + F_{n+2}\right)F_{n+2} - \left(F_{n+2} - F_{n+1}\right)F_{n+1} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 > 0,$$

$$a_4 a_2 - a_1 a_3 = F_{n+3}F_{n+1} - F_n F_{n+2} = \left(F_{n+2} + F_{n+1}\right)F_{n+1} - F_n F_{n+2} =$$

$$= F_{n+2}F_{n+1} + \left(F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}\right) = F_{n+2}F_{n+1} + \left(-1\right)^n > 0,$$

$$a_3 a_2 - a_1 a_4 = F_{n+2}F_{n+1} - F_n F_{n+3} =$$

$$= \left(F_{n+1} + F_n\right)F_{n+1} - F_n\left(F_{n+2} + F_{n+1}\right) = F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = \left(-1\right)^n.$$

Тому виграшна стратегія Ганнусі полягає в наступному: якщо n парне, то вона першим ходом записує $a_1 = F_n$ у праву частину виразу; якщо ж n непарне, то вона першим ходом записує $a_4 = F_{n+3}$ зліва.

Зауважимо, що для послідовності ***чисел Люка***, які визначаються рівностями $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ та $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, подібно отримаємо, що $a_4 a_3 - a_1 a_2 = L_{n+2}^2 + L_{n+1}^2 > 0$, $a_4 a_2 - a_1 a_3 = L_{n+2}L_{n+1} - 5\left(-1\right)^n > 0$ та $a_3 a_2 - a_1 a_4 = 5\left(-1\right)^{n+1}$. Тому тепер навпаки, Ганнусі для перемоги треба першим ходом записати $a_1 = L_n$ у праву частину виразу, якщо n непарне, та записати першим ходом $a_4 = L_{n+3}$ зліва, якщо n парне.

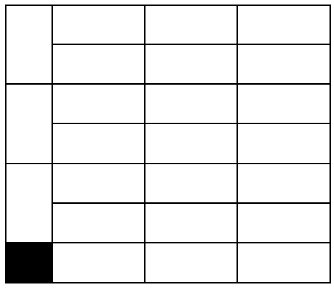
18. Двоє грають у таку гру. Перший називає будь-який натуральний дільник числа 1000000, а далі гравці по черзі множать або ділять останній названий дільник на просте число так, щоб отриманий результат був знову дільником числа 1000000, який не називався раніше. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників?

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати ***загальнішу задачу*** для гри з дільниками числа $p^{2m}q^{2n}$, де $p, q -$ довільні різні прості, а $m, n -$ довільні натуральні числа.

Геометрично таку задачу можна трактувати як блукання фішкою одиничними квадратиками, на які горизонтальними та вертикальними відрізками розбито прямокутник розмірами $\left(2m+1\right)\times\left(2n+1\right)$.

Вибір першим гравцем початкового дільника означає вибір стартового квадратика; множенню чи діленню на p відповідає рух до сусіднього квадратика справа чи зліва відповідно; а множенню чи діленню на $q -$ відповідні рухи до сусідніх квадратиків зверху чи знизу. При цьому лівий нижній квадратик відповідає дільнику 1, правий верхній – числу $p^{2m}q^{2n}$.

На прикладі $m = n = 3$ проілюструємо виграшну стратегію першого гравця. Він вибирає дільник 1 – замальований квадратик. Інші квадратики розіб'ємо на пари, наприклад, лівий стовпчик у вертикальні, а решту у горизонтальні прямокутники 1×2, як у таблиці справа:



Як тільки другий гравець пересуває фішку в одну з клітинок такої пари, перший у відповідь пересуває цю фішку в другу клітинку цієї ж пари. Таким чином, у першого гравця завжди знайдеться хід у відповідь. А оскільки кількість пар клітинок скінченна, то на комусь кроці ходи другого гравця вичерпаються.

Для $p = 2,\ q = 5,\ m = n = 3$ як окремий випадок отримуємо задачу на гру з дільниками числа 1000000.

Зауважимо, що описана стратегія природно переноситься на гру з дільниками числа $p^{2m}q^{2n}r^{2k}$, де $p, q, r -$ довільні попарно різні прості, а $m, n, k -$ довільні натуральні числа.

Геометрично вона зведеться до блукання одиничними кубиками паралелепіпеда розмірами $(2m+1)\times(2n+1)\times(2k+1)$, який розбили прямокутні паралелепіпеди розмірами $1\times1\times2$ та 1 одиничний кубик.

Для перемоги першому гравцеві достатньо спочатку стати в одиничний кубик, який не входить в жодну пару, а потім на кожен хід суперника відповідати переміщенням в другий із одиничних кубиків того ж паралелепіпеда, в якому перед цим опинився другий гравець.

19. Цар Сиракуз Гієрон мав 6 золотих злитків. На вигляд злитки схожі, проте маси у них різні (однакових мас немає). Архімеду видали терези зі стрілкою і бирки з номерами від 1 до n. Гієрон наказав Архімеду зважити ці злитки й на кожний приклеїти бирку так, щоб номери йшли за зростанням мас. При цьому Архімеду видають злитки по одному й одразу після зважування й наклеювання бирки його забирають (тобто змінити бирку вже не можна). Проте дозволяється, щоб номери йшли не за порядком: наприклад, можна, щоби найлегший мав номер 3, другий за масою – 8 тощо. Вкажіть хоч одне n, за якого Архімед зуміє впоратись із завданням?

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати ***загальнішу задачу*** для k золотих злитків і доведемо, що мінімальне значення n, за якого Архімед гарантовано впорається із завданням, дорівнює $2^k - 1$.

Для доведення введемо до розгляду два фіктивні злитки з масами $m_0 = 0$ та $m_\infty = \infty$ відповідно. Будемо вважати, що на ці злитки уже наклеєні номери 0 та 2^k.

На перший принесений Архімедові злиток він наклеює номер $n_1 = 2^{k-1}$– середнє арифметичне номерів фіктивних злитків.

Далі, для кожного нового принесеного йому злитка з масою m Архімед встановлює між якими двома сусідніми масами з попередніх злитків (враховуючи й фіктивні) знаходиться маса принесеного злитку і наклеює на нього номер, який також дорівнює середньому арифметичному номерів таких двох злитків.

При цьому для проведення всього процесу нумерування йому вистачить бирок з номерами від 1 до $2^k - 1$, тобто маємо $n \geq 2^k - 1$.

Для $k = 1$ чи $k = 2$ це твердження очевидне. А якщо припустити, що воно правильне для всіх $k \leq m$, де $m > 1$, то для $k = m + 1$ після наклеювання першого номера $n_1 = 2^m$ як зліва, так справа від нього залишається необхідний запас у $2^m - 1$ номерів.

Меншої кількості бирок може й не вистачити. Наприклад, взяти $n_1 < 2^{k-1}$ не вдасться, якщо подані злитки йтимуть за спаданням мас. Водночас, запаси номерів мають бути достатніми в обидві сторони, бо у кожен момент порядок чергування мас злитків може змінитися.

20. За допомогою мікроскопу вчені вивчають 5 мікроорганізмів, які є ідентичними між собою в усьому, крім розмірів та швидкості росту. Кожен мікроорганізм росте з певною лінійною швидкістю, яка для різних організмів може бути різною. Щохвилини вчені проводять спостереження: вони дивляться у мікроскоп та занотовують 5 чисел, що відповідають розмірам мікроорганізмів у даний момент часу (порядок чисел виявляється довільним, оскільки організми весь час рухаються). Доведіть, що існує таке число m, яке не залежить від набору мікроорганізмів, що після m спостережень вчені гарантовано зможуть вивести набір із 5 швидкостей, з якими ростуть мікроорганізми.

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати ***загальнішу задачу*** для довільного числа із n мікроорганізмів.

Зрозуміло, що у випадку $n=1$ достатньо буде двох вимірювань – на початку і через хвилину.

Нехай тепер $n \geq 2$. Розглянемо довільні два мікроорганізми з цього набору з початковими розмірами a, b та швидкостями росту u, v відповідно, причому $|a-b|+|v-u| \neq 0$. У момент часу t їхні розміри дорівнюватимуть $a+ut$ та $b+vt$. Якщо $u<v$, то, не залежно від a, b, у деякий момент часу t різниця їхніх розмірів $(b+vt)-(a+ut)$ стане додатною. А якщо $u=v$, то ця різниця не зміниться і дорівнюватиме $b-a \neq 0$.

Звідси випливає, що для довільного скінченного набору мікроорганізмів у деякий момент часу t їхні розміри виявляться попарно різними, і, крім того, вони будуть впорядковані у тому ж порядку, що й швидкості їхнього росту (за рівних швидкостей таке впорядкування відповідатиме впорядкуванню за їхніми початковими розмірами).

Якщо у цей момент часу записати n чисел, які відповідають розмірам мікроорганізмів, у порядку зростання $\left(s_1^t, s_2^t, \ldots, s_n^t\right)$ і так само повторити через хвилину, записавши набір чисел $\left(s_1^{t+1}, s_2^{t+1}, \ldots, s_n^{t+1}\right)$, то шуканий набір швидкостей росту буде: $\left(s_1^{t+1}-s_1^t, s_2^{t+1}-s_2^t, \ldots, s_n^{t+1}-s_n^t\right)$.

Відповідно, шукане число $m=t+2$.

Зауважимо, що вказане тут число m не завжди буде мінімально можливим.