Федак І.В.

XIV Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2018 року.

1. Робот придумав шифр для запису слів. Він замінив деякі букви алфавіту одноцифровими чи двоцифровими числами (різні букви – різними числами), використовуючи лише цифри 1, 2, 3. Спочатку він зашифрував себе: РОБОТ=3112131233. Потім записав своїм шифром слово МАТЕМАТИКА. Але дуже здивувався, що шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ виявилися однаковими. Запишіть цим шифром слово АЛГЕБРА.

Розв'язання. Оскільки у шифрі слова РОБОТ 10 цифр, то коди всіх його букв є двоцифровими і визначаються однозначно. Запишемо у таблиці усі 12 можливих кодів і ті букви, коди яких ми уже знаємо:

1=	11=	21=	31=Р
2=	12=О	22=	32=
3=	13=Б	23=	33=Т

Оскільки шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ співпали і Б=13, то К=1. Звідси маємо КРОКО…=13112112… . Читаючи це як початок слова БЕГЕМОТ і враховуючи, що Е не дорівнює 1, отримаємо Е=11. Тоді Г=2, бо інакше не виходить друге Е. Отже, М=2*. Крім того, маємо кінець цього слова …ОТ=…1233. Звідси випливає, що Л=3, И=23, а Д=*1. Оскільки Р=31, Е=11, то маємо єдину можливість Д=21, звідки М=22, і ми розкрили майже весь шифр:

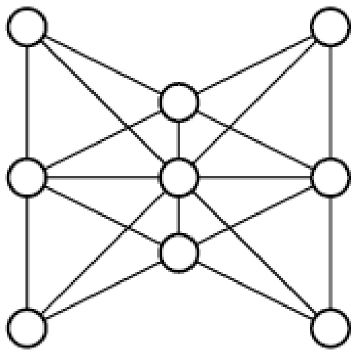
1=К	11=Е	21=Д	31=Р
2=Г	12=О	22=М	32=
3=Л	13=Б	23=И	33=Т

Враховуючи, що робот зумів записати слово МАТЕМАТИКА, отримуємо останній код А=32. Тому АЛГЕБРА=323211133132.

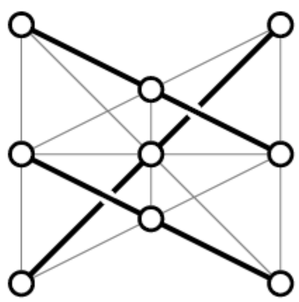
2. Оргкомітет XIV обласного турніру юних математиків відзначив переможця турніру в особистій першості зачарованою коробкою з чотирнадцятьма цукерками. Але, як тільки той забирав з коробки деяку кількість цукерок і клав їх до себе в сумку, частина цукерок із сумки (принаймні одна, можливо, й усі) миттєво поверталася назад у коробку. При цьому кожного разу кількості таких цукерок (чи покладених у сумку, чи повернутих з неї у коробку) мали були різними. Якщо ж на якомусь кроці дотриматися останньої вимоги не вдавалося, то коробка таємниче зникала разом з цукерками, які на цей момент у ній залишалися. Яка найбільша кількість цукерок може залишитися у сумці переможця турніру на момент зникнення чарівної коробки?

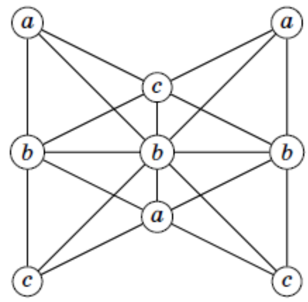
Розв'язання. Спочатку доведемо, що усі 14 цукерок залишитися у сумці переможця турніру не могли. Припустивши протилежне, отримаємо, що останнє переміщення цукерок відбулося з чарівної коробки у його сумку. У такому разі усіх переміщень була непарна кількість. Тому принаймні одна з можливостей від 1 до 14 ще не була реалізована і саме така кількість цукерок повернеться назад у чарівну коробку. Проте залишити собі 13 цукерок переможцеві вдасться. Наведемо приклад послідовності його дій, в якій ходи чарівної коробки у відповідь будуть вимушеними. Після кожного ходу у дужках записані кількості цукерок у сумці переможця: +2 (2) – 1(1) + 3 (4) – 4 (0) + 6 (6) – 5 (1) + 7 (8) – 8 (0) + 10 (10) – 9 (1) + 11 (12) – 12 (0) + 13 (13). Залишився лише хід 14, але він неможливий. Тому чарівна коробка зникає.

3. На столі лежать 9 яблук, утворюючи при цьому 10 рядів по три яблука як на малюнку справа. Юному математику відомо, що у дев'ятьох рядах сумарні маси трьох яблук однакові, а в одному – така маса яблук є більшою. У нього є терези з двома шальками без гир. Він може взяти зі столу довільну парну кількість яблук і, скориставшись терезами, повернути їх на стіл, кожне на своє попереднє місце. За яку найменшу кількість зважувань він гарантовано зуміє виявити ряд, в якому сумарна маса трьох яблук є найбільшою?



Розв'язання. Жодних зважувань не потрібно. Перед тим як користуватися терезами для зважування, трохи поміркуємо, виділивши три ряди яблук як на малюнку нижче зліва. У них сумарна маса усіх яблук дорівнює масі усіх дев'яти яблук, виставлених на столі. Таку ж сумарну масу отримаємо і у трьох вертикальних рядах. Оскільки принаймні 5 із цих шести мас у рядах по три яблука за умовою задачі є рівними, то й у шостому ряді сумарна маса трьох яблук є такою ж. Аналогічно доводимо, що й у інших похилих рядах сумарні маси яблук є однаковими. Тому відмінною від інших може бути лише сумарна маса яблук горизонтального ряду. Що така ситуація можлива, показано на малюнку нижче справа, де $2b \neq a + c$:





4. Площину розбили на одиничні квадратики й у кожен квадратик записали по одному натуральному числу. Після цього для кожного квадратика порахували різницю: добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках знизу та зверху. Чи могло статися так, що усі такі різниці дорівнюють 11 ?

Розв'язання. Могло. Розглянемо узагальнену послідовність Фібоначчі, яка задається рівностями: $f_1 = a,\ f_2 = b$ та $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ для всіх цілих n і скористаємося для неї узагальненою формулою Каталана: $f_{n-k} f_{n+k} - f_n^2 = (-1)^{n-k+1} \cdot \mu F_k^2$, де $\mu = a^2 + ab - b^2$ – характеристика такої послідовності, F_k – числа Фібоначчі.

Якщо a та b – натуральні числа такі, що $a \ge b$, то безпосередньо з означення випливає, що всі елементи узагальненої послідовності Фібоначчі будуть цілими числами, а її характеристика μ – натуральним числом. Крім того, $f_n > 0$ для всіх натуральних n, бо суми натуральних чисел є натуральними числами.

Якщо $n = 2m+1,\ m \in \mathrm{Z},\ k = 2$, то для всіх цілих чисел m отримаємо рівність

$$f_{2m-1} f_{2m+3} - f_{2m+1}^2 = \mu. \qquad (*)$$

Доведемо, що всі елементи f_n з довільними непарними цілими індексами є натуральними числами.

Для натуральних n ми це вже отримали вище. Припустимо тепер, що $f_n \le 0$ для деякого від'ємного непарного цілого n. З усіх таких n виберемо найбільший і підставимо $f_n = f_{2m-1}$ у рівність (*). Оскільки усі інші елементи, які входять у цю рівність є додатними, то отримуємо суперечність – від'ємна її ліва частина не може дорівнювати додатному числу μ.

Заповнимо клітинки площини стовпчиками з однакових елементів цієї послідовності з непарними індексами. Три горизонтальні рядки такого заповнення наведено у таблиці нижче:

…	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	…
…	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	…
…	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	…

Зі сказаного вище випливає, що всі елементи такої таблиці є натуральними числами, і для кожної клітинки різниця добутку чисел, записаних у сусідніх з нею квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з нею квадратиках знизу та зверху, дорівнює μ.

Для $a = 3,\ b = 2$ звідси отримаємо, що всі такі різниці дорівнюють 11.

Зауважимо, що у рядках цієї таблиці її елементи зв'язані між собою співвідношенням $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n,\ n\in\mathrm{Z}$. Така рівність не є випадковою і не залежить від вибору $f_1=a,\ f_2=b$, бо

$$f_{2m-1}+f_{2m+3}=\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)+\left(f_{2m+1}+f_{2m+2}\right)=2f_{2m+1}+\left(f_{2m+2}-f_{2m}\right)=3f_{2m+1},\ m\in\mathrm{Z}.$$

5. Чи існують 2018 попарно різних натуральних чисел таких, що сума обернених до них чисел дорівнює 1.

Розв'язання. Існують. Наведемо два приклади наборів таких чисел. В обох з них скористаємося рівністю $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Оскільки, крім того, також $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2015}}+\frac{1}{2^{2015}}$, то достатньо останній доданок замінити на $\frac{1}{2\cdot 2^{2015}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2015}}+\frac{1}{6\cdot 2^{2015}}$.

Можна було міркувати ще й так:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}.$$

Тому, збільшуючи на кожному кроці кількість доданків на два, таку процедуру вдасться продовжити до отримання 2018 доданків.

6. Крива на площині у деякій декартовій системі координат є графіком функції $y=\sin x$. Чи може вона в іншій декартовій системі координат бути графіком функції $y=\sin^2 x$?

Розв'язання. Може. Підходить, наприклад, система координат, центр якої у старій системі має координати $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$, а одиниця масштабу на кожній осі нової системи координат вдвічі більша у порівнянні зі старою. Справді, оскільки $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$, то при $x=2t-\frac{\pi}{2},\ z=\frac{y+1}{2}$, тобто $y=2z-1$, отримуємо $z=\sin^2 t$.

7. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1,\ \ F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\ n\geq 1$. Для кожного натурального числа n розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_n x+F_{n+1}y^2=F_{n+2}z^3, \\ F_n y+F_{n+1}z^2=F_{n+2}x^3, \\ F_n z+F_{n+1}x^2=F_{n+2}y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу циклічну систему рівнянь:

$$\begin{cases} mx + ky^2 = (m+k)z^3, \\ my + kz^2 = (m+k)x^3, \quad m \in \mathrm{N},\ k \in \mathrm{N}. \\ mz + kx^2 = (m+k)y^3, \end{cases}$$

Покладаючи $z = y = x$, отримаємо три її розв'язки:

$$(0,0,0),\ (1,1,1) \text{ та } \left(-\frac{m}{m+k}, -\frac{m}{m+k}, -\frac{m}{m+k}\right).$$

Далі доводимо, що інших розв'язків така система рівнянь не має.

Покладаючи, наприклад, $z = 0$, з третього рівняння отримуємо, що $y \geq 0$. Тоді, внаслідок другого рівняння, також $x \geq 0$. І, нарешті, з першого рівняння, маємо $y = x = 0$.

Нехай тепер $z > 0$. Тоді з третього рівняння отримуємо, що також $y > 0$. А з другого рівняння маємо, що й $x > 0$.

Припускаючи при цьому, що $z = \max\{x, y, z\}$, з першого рівняння системи отримуємо, що $z \leq 1$, бо інакше $mx + ky^2 < mz^3 + kz^3 = (m+k)z^3$.

Так само для $z = \min\{x, y, z\}$ з першого рівняння системи отримуємо, що $z \geq 1$, бо інакше $mx + ky^2 > mz^3 + kz^3 = (m+k)z^3$.

Таким чином, $\max\{x, y, z\} = \min\{x, y, z\} = 1$, тобто $z = y = x = 1$.

І, нарешті, розглянемо випадок, коли $z < 0$. Тоді з першого рівняння отримуємо, що $x < 0$, а з другого рівняння маємо $y < 0$. Здійснивши при цьому заміну $x = -\dfrac{mu}{m+k}$, $y = -\dfrac{mv}{m+k}$, $z = -\dfrac{mw}{m+k}$, після очевидних спрощень отримаємо наступну, теж циклічну систему рівнянь:

$$\begin{cases} mw^3 + kv^2 = (m+k)u, \\ mu^3 + kw^2 = (m+k)v, \quad m \in \mathrm{N},\ k \in \mathrm{N}. \\ mv^3 + ku^2 = (m+k)w, \end{cases}$$

Доведемо, що для додатних u, v, w вона має лише розв'язок $u = v = w = 1$.

Серед трьох таких чисел u, v, w принаймні два будуть не менші за 1, або принаймні два – не більші за 1. Вибираючи, у кожному з випадків у ролі таких двох, наприклад, числа v та w, з першого рівняння отримуємо, що також $u \geq 1$ чи $u \leq 1$ відповідно.

Далі, якщо кожне з чисел u, v, w не менше за 1, то покладаючи, наприклад, $u = \min\{u, v, w\}$, з першого рівняння отримаємо спочатку $u = 1$, а далі $v = w = 1$, бо інакше $mw^3 + kv^2 \geq mu^3 + ku^2 > (m+k)u$.

Якщо ж кожне з таких чисел не більше за 1, то аналогічно для $u = \max\{u, v, w\}$, з першого рівняння отримаємо спочатку $u = 1$, а далі $v = w = 1$, бо інакше $mw^3 + kv^2 \leq mu^3 + ku^2 < (m+k)u$.

Отже, відсутність інших розв'язків досліджуваної нами системи доведена.

Повертаючись до системи рівнянь з умови задачі, звідси як окремий випадок матимемо такі три її розв'язки:

$$(0,0,0),\ (1,1,1) \text{ та } \left(-\frac{F_n}{F_{n+2}}, -\frac{F_n}{F_{n+2}}, -\frac{F_n}{F_{n+2}}\right),\ n \in \mathrm{N}.$$

8. Нехай a, b, c – довільні додатні числа; (x, y, z) – деяка їх перестановка. Дослідіть, яких значень може набувати вираз

$$A = \frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} + \frac{z}{c+a}.$$

Розв'язання. Зрозуміло, що для кожної перестановки

$$A > \frac{x}{a+b+c} + \frac{y}{b+c+a} + \frac{z}{c+a+b} = 1.$$

Розглянемо тепер 6 можливих різних перестановок:

$A_1 = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2}$ – відома нерівність, звідки отримуємо, що $E(A_1) = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

$$A_2 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1,\ A_3 = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} > 1,\ A_2 + A_3 = 3.$$

Звідси отримаємо, що $E(A_2) = E(A_3) = (1;2)$.

$$A_4 = \frac{c}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{a}{c+a},\ A_5 = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{c}{c+a},\ A_6 = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{c+a}.$$

При цьому $E(A_4) = E(A_5) = E(A_6) = (1; +\infty)$.

Для обґрунтування записаних вище рівностей для множин значень необхідно у певному порядку замість a, b, c підставляти вирази $t^2, t, 1$ тощо і скористатися неперервністю отриманих виразів як функцій змінної t. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

9. У верхньому рядку та лівому стовпці таблиці 2018×2018 проставлено одиниці. Число у будь-якій іншій комірці таблиці дорівнює сумі усіх чисел, які стоять водночас ліворуч і вище від цієї комірки. Знайдіть усі комірки, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що така таблиця симетрична відносно діагоналі, яка виходить з її лівого верхнього кута.

Доведемо, що для всіх i, j, більших за 1, справджується рівність

$$a_{i+1,j} = a_{i,j} + a_{i+1,j-1}.$$

Тут відлік i проводимо зліва направо, а відлік j – зверху вниз.

Наглядно доведення цієї рівності проілюстровано у наведеній нижче таблиці. Елемент $a_{i+1,j}$ в ній дорівнює сумі елементів у клітинках, позначених всіма чотирма кольорами. Елемент $a_{i,j}$ дорівнює сумі елементів у клітинках позначених синім і цегловим кольором, а елемент $a_{i+1,j-1}$ дорівнює сумі елементів у клітинках позначених синім і жовтим кольором. Оскільки, крім того, елемент $a_{i,j-1}$ у зеленій клітинці дорівнює сумі елементів у синіх клітинках, то звідси отримуємо рівність $a_{i+1,j} = a_{i,j} + a_{i+1,j-1}$.

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$\ldots$	$a_{i-1,1}$	$a_{i,1}$	$\ldots$	$\ldots$
$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	$\ldots$	$a_{i-1,2}$	$a_{i,2}$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_{1,j-1}$	$a_{2,j-1}$	$\ldots$	$a_{i-1,j-1}$	$a_{i,j-1}$	$a_{i+1,j-1}$	$\ldots$
$1\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$a_{i,j}$	$a_{i+1,j}$	$\ldots$
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

З міркувань симетрії для всіх $i,\ j$, більших за 1, правильною буде і рівність

$$a_{i,j+1} = a_{i,j} + a_{i-1,j+1}.$$

Звідси випливає, що кожен елемент таблиці, крім елемента $a_{2,2}$ та елементів першого рядка зверху та першого стовпчика зліва, дорівнює сумі свого сусіда зверху та свого сусіда ліворуч. Тому може ділитися на обох із них, якщо вони рівні між собою.

Таким чином, всіма шуканими елементами є: $a_{2,3}$, $a_{3,2}$ та $a_{n,n}$, $n \geq 2$.

Фрагмент такої таблиці виглядає так:

1	1	1	1	1	1	…
1	**<u>1</u>**	**<u>2</u>**	3	4	5	…
1	**<u>2</u>**	**<u>4</u>**	7	11	16	…
1	3	7	**<u>14</u>**	25	41	…
1	4	11	25	**<u>50</u>**	91	…
1	5	16	41	91	**<u>182</u>**	…
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

У його межах наведені жирним і підкреслені елементи, які задовольняють умову задачі.

10. Алісі якось наснилися 2018 гномів, що стояли по колу. Кожен із гномів мав спочатку деяку парну (можливо, нульову) кількість цукерок. Далі сталося таке: усі гноми одночасно поділили свої цукерки на дві рівних частини та віддали одну частину своєму сусідові зліва, а іншу – своєму сусідові справа. У підсумку у деякого гнома опинилася 1 цукерка, у наступного за годинниковою стрілкою – 2 цукерки, у наступного – 3 цукерки і т. д.; в останнього (того, що стояв перед першим гномом) стало, відповідно, 2018 цукерок. Чи могло б таке статися насправді?

Розв'язання. Не могло. З умови задачі випливає, що у кожного гнома, а отже і загальна кількість цукерок, парна. Але сума чисел від 1 до 2018 є непарною.

Зауважимо, що до аналогічного висновку прийдемо і за довільної кількості гномів $n = 4k + 1$ та $n = 4k + 2$, де $k \in \mathrm{N}$.

Але, наприклад, для $n = 3$ описана тут ситуація можлива, якщо спочатку у першого гнома були 4 цукерки, у другого – 2 цукерки, а у третього – не було жодної.

Доведемо, що інших таких n немає. Справді, для $n = 4$ перший та третій гноми отримають порівну цукерок як від другого, так від четвертого гнома. Отже, у них не може виявитися одна та три цукерки відповідно.

Нехай тепер $n \geq 5$. Припустимо, що спочатку у гномів за годинниковою стрілкою було $2x_1$, $2x_2$, …, $2x_n$ цукерок відповідно. З умови задачі отримуємо таку систему рівнянь:

$$x_n + x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 2,\ x_2 + x_4 = 3,\ x_3 + x_5 = 4,\ ...,x_{n-2} + x_n = n-1,\ x_{n-1} + x_1 = n$$

Оскільки за умовою задачі виходить, що гном з номером n подарував на 2 цукерки більше, ніж гном з номером $n-4$, тобто $x_n \geq 2$. Але тоді з першого рівняння виходить, що $x_2 < 0$, чого бути не може.

11. Знайдіть усі натуральні числа p та q, які задовольняють рівняння

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p} + \operatorname{arctg}\frac{1}{q} = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Зрозуміло, що числа p та q повинні бути більші за 1. Тоді кожен доданок зліва виявиться меншим за $\frac{\pi}{4}$. Отже, їх сума буде меншою за $\frac{\pi}{2}$. Тому, застосувавши формулу тангенса суми $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ до лівої частини рівності, приходимо до рівняння $\frac{p+q}{pq-1} = 1$, рівносильного початковому, яке можна переписати у вигляді $(p-1)(q-1) = 2$. Звідси знаходимо такі пари натуральних розв'язків: $p = 2,\ q = 3$ та $p = 3,\ q = 2$.

Як узагальнення, знайдемо також усі натуральні числа p, q, r, що задовольняють рівняння $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}+\operatorname{arctg}\frac{1}{r}=\frac{\pi}{4}$.

Знову ж таки, числа p, q, r більші за 1. При цьому сума трьох доданків у лівій частині рівності буде меншою за $\frac{3\pi}{4}$. Тому з рівності тангенсів обох частин буде випливати і задана в умові рівність. Враховуючи, що вище ми вже отримали $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{q}=\operatorname{arctg}\frac{p+q}{pq-1}$, за формулою тангенса суми приходимо до рівняння $\frac{p+q}{pq-1}+\frac{1}{r}=1-\frac{p+q}{pq-1}\cdot\frac{1}{r}$, яке можна переписати у вигляді

$$pqr+1=(pq+qr+rq)+(p+q+r).$$

Поділимо обидві його частини на pqr. У результаті отримаємо

$$1+\frac{1}{pqr}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rq}\right).$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $p\ge q\ge r$. Якщо при цьому $r\ge 4$, то ліва частина останньої рівності більша за 1, а права – не перевищує $\frac{3}{4}+\frac{3}{16}=\frac{15}{16}$, і така рівність не справджується.

Якщо ж $r=3$, то приходимо до рівняння, яке можна записати у вигляді $(p-2)(q-2)=5$. Для $p\ge q\ge r$ з нього маємо розв’язок $p=7,\ q=r=3$.

А якщо $r=2$, то отримуємо рівняння $(p-3)(q-3)=10$, з якого для $p\ge q\ge r$ знаходимо два розв’язки: $p=13,\ q=4,\ r=2$ та $p=8,\ q=5,\ r=2$.

Інші шукані трійки (p,q,r) дістаємо, розглянувши всі можливі перестановки в отриманих вище розв’язках.

12. Нехай $x=2p$, $x+1=3q$, $x+n=2r$, $x+n+1=3s$, де $p,\ q,\ r,\ s$ – деякі прості числа, n – натуральне число. Доведіть, що $n\ge 12$.

Розв’язання. Зауважимо, що $x=5$ не задовольняє умову задачі, бо 5 – непарне число. Тому $q\ge 3$, а разом з ним і більші за нього прості числа p, r, s – також непарні. Оскільки при цьому $n=2(r-p)\vdots 4$ та $n=3(s-q)\vdots 3$, то $n\vdots 12$. Отже, $n\ge 12$.

Цікаво, що значення $n=12$ може досягатися, наприклад, для простих чисел $p=15643,\ q=10429,\ r=15649,\ s=10433$. При цьому $x=31286$.

13. Доведіть, що $C_{30}^{20}+C_{31}^{20}+C_{32}^{20}+...+C_{49}^{20}+C_{50}^{20}>2^{39}$, де $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Розв’язання. Доведемо навіть сильнішу нерівність:

$$C_{30}^{20}+C_{31}^{20}+C_{32}^{20}+...+C_{49}^{20}+C_{50}^{20}>C_{30}^{20}=\frac{50\cdot 49\cdot ...\cdot 31}{20!}=$$

$$=\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}\cdot\frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}\cdot\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\cdot\frac{36}{6}\cdot\frac{35}{5}\cdot\frac{34}{4}\cdot\frac{33}{3}\cdot\frac{32}{2}\cdot\frac{31}{1}>$$

$$>\left(\frac{5}{2}\right)^5\cdot 3^5\cdot 4^4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 16\cdot 31=5^5\cdot 3^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 2^{11}=$$

$$=5^5\cdot 3^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 2^{11}=5437884375\cdot 2^{11}>4294967296\cdot 2^{11}=2^{32}\cdot 2^{11}=2^{43}>2^{39}.$$

14. Назвемо дві трійки $A=(a_1, a_2, a_3)$ та $B=(b_1, b_2, b_3)$ натуральних чисел еквівалентними, якщо $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$ та $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3$. При цьому трійки, які відрізняються лише порядком розташування елементів, будемо вважати за одну й ту ж трійку. Доведіть, що існує нескінченна кількість пар різних еквівалентних трійок A та B таких, що жодна пара не утворюється з іншої пари множенням усіх шести елементів на одне й те ж число.

Розв'язання. Такими для кожного натурального $n\ge 2$ є, наприклад, трійки чисел: $A=\left(1, n(2n-1), n(2n-1)\right)$, $B=\left(n, n, (2n-1)^2\right)$. При цьому маємо $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=4n^2-2n+1,\ a_1a_2a_3=b_1b_2b_3=n^2(2n-1)^2$.

Як узагальнення, знайдемо також усі натуральні числа M, для яких існують дві еквівалентні трійки натуральних чисел $a_1\le a_2\le a_3$ та $b_1\le b_2\le b_3$ такі, що $\max\{a_3,b_3\}=M$.

Покажемо, що шуканими є всі складені числа $M\ge 8$.

Насамперед доведемо, що дві еквівалентні трійки не можуть мати спільного елемента. Справді, припустивши протилежне, для пар інших двох елементів отримаємо рівність як їх сум (нехай b), так і їх добутків (нехай c), що з врахуванням теореми Вієта, вказує, що кожна така пара є розв'язком одного і того ж квадратного рівняння $x^2-bx+c=0$. А це означає, що ми маємо справу з однією, а не з двома різними трійками.

Доведемо тепер, що число M складене. Справді, якщо $M=p-$ просте число, то добуток чисел в одній з трійок ділиться на p. Тому рівний йому добуток чисел другої трійки також ділиться на p. А оскільки $p-$ найбільше із цих шести чисел, то для цього число p повинно належати до другої трійки, що суперечить доведеному вище.

Далі, з врахуванням доведеного, простим перебором пар трійок вигляду $A=(2, 2, x)$, $B=(y, z, 4)$ та $A=(2, 3, x)$, $B=(y, z, 6)$ переконуємося, що для $M=4$ та $M=6$ шуканих різних еквівалентних трійок не існує.

Справді, для першої пари трійок з рівностей $x=y+z$ та $x=yz$ знаходимо $x=4$, $y=z=2$. А для другої пари – з рівностей $x=y+z+1$ та $x=yz$ маємо $x=6$, $y=2$, $z=3$.

Для інших складених $M \geq 8$ відповідно отримуємо:

1) Для $M = (2m+1)(2n+1)$, $m, n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \left(1,\ (n+1)(2m+1),\ (m+1)(2n+1)\right),\ B = \left(m+1,\ n+1,\ (2m+1)(2n+1)\right).$$

Рівність добутків тут очевидна, а для кожної із сум отримуємо значення $4mn + 3(m+n+1)$.

2) Для $M = 2(2n+3)$, $n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \left(2,\ 2n+3,\ 3(n+2)\right),\ B = \left(3,\ n+2,\ 2(2n+3)\right).$$

Рівність добутків також очевидна, а кожна із сум дорівнює $5n+11$.

3) Для $M = 4(n+1)$, $n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \left(2,\ 2(n+2),\ 3(n+1)\right),\ B = \left(3,\ n+2,\ 4(n+1)\right).$$

Тут так само рівність добутків сумніву не підлягає, а для кожної із сум маємо значення $5n+9$.

15. Знайдіть кількість непорожніх підмножин множини {1, 2,…, 1009} із сумою елементів, що ділиться на 2018.

Розв'язання. Розв'яжемо загальнішу задачу. Нехай p – довільне просте число вигляду $p = 4n+1$. Як відомо, кількість всіх підмножин множини $A = \{1,\ 2, \ldots,\ p\}$, включаючи і порожню множину, дорівнює 2^p.

Розіб'ємо всі ці множини на пари так, щоб множини кожної пари між собою не перетиналися, а їх об'єднання давало всю множину A. Зрозуміло, що таких пар буде 2^{p-1}. Виключимо з розгляду пару $(A, \varnothing)$, бо за умовою задачі потрібно розглядати лише не порожні підмножини, а сума всіх елементів множини A дорівнює $(4n+1)(2n+1)$ і не ділиться на $2p$.

Решту $2^{p-1}-1$ пар згрупуємо таким чином, щоб у кожній групі з номером $k,\ 1 \leq k \leq 2n,$ були лише пари множин, які містять k та $p-k$ елементів відповідно.

Такі групи міститимуть $C_p^k = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$ пар. А оскільки p – просте число, то у кожній групі кількість елементів ділитиметься на p.

Розіб'ємо тепер кожну групу на підгрупи по p пар так, щоб у кожній підгрупі суми чисел множин, що складаються з k елементів, давали різні остачі при діленні на p. Це вдасться зробити, бо у всій групі таких сум з різними остачами порівну.

Тоді у кожній підгрупі виявиться рівно одна пара, суми елементів в обох множинах якої діляться на p. Але, оскільки сума елементів множини A при діленні на $2p$ дає остачу p, то лише в одній з цих множин сума елементів ділитиметься на $2p$.

Таким чином, для всіх простих чисел $p=4n+1$ кількість непорожніх підмножин множини $\{1,\ 2,\ldots,\ p\}$ із сумою елементів, що ділиться на $2p$, дорівнює $\frac{2^{p-1}-1}{p}$. У тому числі і для простого числа $p=1009=4\cdot 252+1$.

Зауважимо, що отримана відповідь залишиться справедливою і для простих чисел вигляду $p=4n-1$.

Відзначимо також, що внаслідок малої теореми Ферма число $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ є натуральним для всіх простих чисел $p\ge 3$.

16. У прямокутній шоколадній плитці розміру 20×18 є дольки двох кольорів – білі й чорні. Ліва верхня долька завжди чорна, права нижня – завжди біла; кольори інших дольок задаються довільно. Ганнуся й Петрик почергово відрізають від шоколадки шматки Г-подібним ножем і з’їдають їх. Кожним ходом гравець забирає певну дольку і все з умовного прямокутника, в якому ця долька знаходиться у лівому верхньому куті. Починає гру Ганнуся. Програє той, хто перший з’їсть чорну дольку. Доведіть, що при довільному розфарбуванні шоколадки Ганнуся має виграшну стратегію.

Розв’язання. Фрагменти плитки, які утворюються після ходів Ганнусі та Петрика, будемо називати позиціями. Позицію, при якій гравець своїм ходом вимушений відрізати хоч одну чорну дольку, вважатимемо кінцевою. Зрозуміло, що вона є програшною для цього гравця, тобто кожен зроблений ним хід з такої позиції приводить до його поразки. Оскільки спочатку права нижня долька завжди є білою, яку можна вирізати, не програвши зразу, то стартова позиція (вся шоколадка) не є кінцевою.

Якщо в кінцеву позицію з деякої позиції можна за один хід попасти хоч одним способом відрізання, то природно таку позицію вважати виграшною.

Надалі програшними будемо називати позиції, з яких довільне допустиме відрізання веде у виграшну (для суперника) позицію. Відповідно, позиції, з яких хоч одним способом відрізання можна попасти у програшну (для суперника) позицію, вважатимемо виграшними.

Припустимо тепер, що для деякого розфарбування шоколадки розміру m на n у Ганнусі немає виграшної стратегії. Це означає, що така стартова позиція є для неї програшною, і будь-який зроблений нею хід приводить до виграшної для Петрика позиції. Зрозуміло, що він негайно цим скористається і залишить своїм ходом наступну програшну для неї позицію. Оскільки розміри шоколадки обмежені, то у такий спосіб Ганнуся, кожного разу займаючи програшні позиції, на деякому кроці опиниться у кінцевій позиції і програє.

Але уявімо собі, що гра одночасно відбувається на двох однакових шоколадках, причому на обох гру розпочинає Ганнуся.

Як же ж тепер діяти Ганнусі? Першим своїм ходом на одній з шоколадок вона вирізає праву нижню клітинку. Оскільки за припущенням виникла виграшна для Петрика позиція, то він матиме змогу зробити хід, який не приводить зразу до його поразки, і йому не залишається іншого вибору, як утворити програшну для Ганнусі позицію. Інакше своїм наступним ходом уже Ганнуся матиме змогу утворити програшну для Петрика позицію. Але при цьому у вирізаний ним умовний прямокутник обов'язково попаде уже вирізана права нижня клітинка.

Тоді Ганнуся на другій шоколадці першим своїм ходом утворює позицію, яка виникла на першій шоколадці після першого ходу Петрика. Дочекавшись його відповіді, вона повторює цей хід Петрика на першій шоколадці. Знову чекає на його відповідь і повторює хід Петрика на другій шоколадці, і так далі.

Зрозуміло, що за скінченне число таких повторень ходів гра на обох шоколадках закінчиться, причому на одній переможе Петрик, а на іншій Ганнуся. А це суперечить тому, що стартова позиція була для Ганнусі програшною. Таким чином, при довільних розмірах шоколадки й довільному її розфарбуванні Ганнуся має виграшну стратегію.

17. Під час шахової партії залишилося п'ять фігур (або пішаків) на клітинках a1, b1, b5, c2, c4. Ганнуся подивилася на шахівницю і запитала, чий хід. Отримавши відповідь, вона змогла визначити останній хід кожного із суперників. Наведіть приклад такої позиції.

Розв'язання. Потреба Ганнусі запитати, чий хід, означає, що в шуканій позиції мають бути можливими як хід білих, так і хід чорних.

Відповідь, яку отримає Ганнуся, має бути саме такою, за якої їй вдасться визначити останній хід кожного із суперників. Інакше Ганнуся зразу могла б сказати: якщо зараз хід білих, то останні ходи суперників були такими, а якщо хід чорних – то такими.

Доведемо тепер, що умови задачі задовольняє наступне розташування фігур на шаховій дошці: білі – Кр a1; чорні – Кр c2, С b1, К b5, К c4.

Якщо у відповідь на своє питання Ганнуся почула, що зараз *хід чорних*, то перед цим білий король не міг попасти на поле a1 з поля b2, бо воно зараз знаходиться під двома ударами чорних фігур.

Не міг він попасти на поле a1 і з поля b1, бо воно перед цим було або під ударом чорного короля, або його уже займав чорний слон.

Тому попасти на поле a1 білий король міг лише з поля a2 за єдиної умови, що перед цим чорні зробили хід b2- b1С.

А як же перед цим білий король опинився на полі a2? Він не міг попасти туди з поля a3, бо воно зараз перебуває під двома ударами чорних коней. Не міг попасти туди і з поля b3, бо воно межує з позицією чорного короля, яка в дальших діях не змінилася.

Тому передостанній хід білих міг бути лише таким: Кр a1-a2. А це означає, що перед останнім ходом білих на полі a1 не знаходилася жодна чорна фігура.

Таким чином, за такої відповіді останній хід чорних був b2-b1С, на що білі відповіли ходом Кр a2-a1.

Припустимо тепер, що у відповідь на своє питання Ганнуся почула би, що зараз *хід білих*, тобто на дошці виникла патова ситуація. Але у такому разі їй не вдалось би однозначно відновити останні ходи кожного із суперників.

Справді, якщо, наприклад, перед своїм останнім ходом король чорних знаходився би на полі c1, то позиція на дошці могла б виникнути таким чином:

1. …, b2-b1С
2. Кр а2-а1, Кр c1-c2.

Але вона могла би скластися на шаховій дошці і в такий спосіб:

1. …, Т b3-b1+
2. Ф h1:b1+, С а2:b1.

А це суперечить умові задачі, що Ганнуся змогла однозначно визначити останні ходи кожного із суперників. Отже, для виконання умов задачі підходить тільки перша з наведених відповідей – зараз хід чорних.

18. Нехай K, T – точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл до сторони BC трикутника ABC, M – середина сторони BC. Побудуйте циркулем і лінійкою трикутник ABC за променями AK та AT (на них точки K, T не відмічено) та точкою M .

Розв'язання. 1. <u>*Аналіз*</u>. Насамперед зауважимо, що $AB \neq AC$, інакше точки K та T співпадали би. Надалі для конкретності будемо вважати, що $AB = c > AC = b$. Тоді $AK < AT$.

З рівності відрізків дотичних до кола отримаємо рівності: $BK = p - b$, $CK = p - c$, $BT = p - c$, $CT = p - b$. Звідси випливає, що точки K та T симетричні відносно точки M – середини сторони BC, причому $KT = c - b$.

Розглянемо тепер систему координат з центром у точці M і, враховуючи сказане вище, задамо координати деяких точок у цій системі: $A(s;q)$, $s > 0$, $q > 0$, $T(-d;0)$, $K(d;0)$, $d > 0$, $B(-x;0)$, $C(x;0)$, $x > 0$.

Внаслідок рівності $KT = c - b$ отримуємо рівняння

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} - \sqrt{(s-x)^2 + q^2} = 2d .$$

Помноживши обидві його частини на вираз, спряжений до лівої частини, отримаємо також

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} + \sqrt{(s-x)^2 + q^2} = \frac{2sx}{d}.$$

Додавши останні два рівняння, отримаємо

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} = d + \frac{sx}{d}.$$

Звідси після піднесення до квадрату і очевидних спрощень приходимо до рівності:

$$\left(s^2 - d^2\right)x^2 = \left(s^2 + q^2 - d^2\right)d^2. \qquad (*)$$

Якщо $s^2 - d^2 > 0$, то звідси отримуємо

$$x = \sqrt{\frac{s^2 + q^2 - d^2}{s^2 - d^2}} \cdot d = \sqrt{\frac{AM^2 - MK^2}{AQ^2 - MK^2}} \cdot d ,$$

де Q – проекція точки A на вісь ординат.

Проаналізуємо тепер інші випадки:

Якщо $s^2-d^2=0$, то з рівності (*) отримуємо, що $d=0$, тобто точки K та T співпадають, чого бути не може.

Якщо ж $s^2-d^2<0$, то у випадку $s^2+q^2-d^2>0$ рівність (*) неможлива, а у разі $s^2+q^2-d^2<0$ з неї отримуємо, що $x<d$, тобто вписане коло дотикається до сторони BC на її продовженні, чого також бути не може.

Таким чином, побудова трикутника ABC можлива лише за умови, що $s^2-d^2>0$, і точка M лежить між заданими променями.

2. <u>*Побудова*</u>.

Продовжуємо відрізок AM до точки D такої, що $AM=MD$, і проводимо через точку D прямі, паралельні до заданих променів. Далі з'єднуємо отримані точки перетину з цими променями між собою.

Якщо вважати, що не вказано, котрий саме з променів є променем AK, а котрий – променем AT, то ближчу з цих точок до вершини A позначаємо через K, а іншу – через T.

Якщо ж за умовою задачі вважати, що нам відомо, котрий з променів є променем AK, а котрий – променем AT, то у разі, коли ближча до вершини A точка попала на промінь AT, робимо висновок, що така побудова неможлива. Ця ситуація виникне у випадку, коли точка M знаходиться між променем AK і бісектрисою кута, утвореного цими променями.

Якщо ж вона попала на промінь AK, тобто точка M знаходиться між променем AT і бісектрисою кута, утвореного цими променями, то, як і вище позначаємо її через K, а іншу – через T.

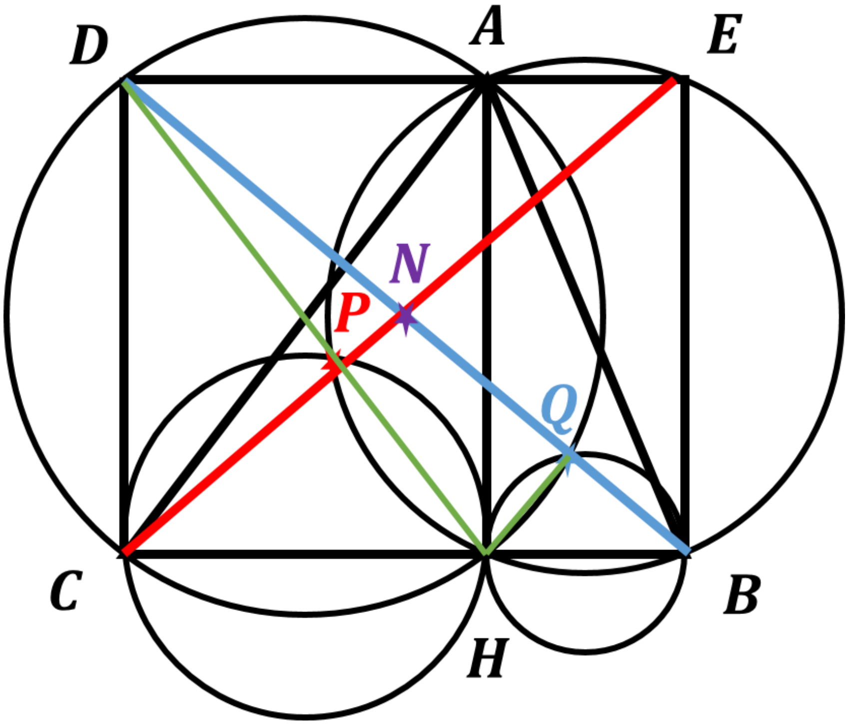
Далі проводимо пряму KT та перпендикуляр до неї у точці K. Якщо точки A та T не лежать по різні сторони від цього перпендикуляра, то такого трикутника не існує. В іншому разі продовжуємо побудову.

Для цього проводимо перпендикуляр до прямої KT у точці M і відкладаємо на ньому у тій же півплощині, в якій знаходиться точка A, точки R та S такі, що $KR=AQ$, $KS=AM$. Тоді з рівності (*) за теоремою Піфагора отримуємо, що $x=\dfrac{MS}{MR}\cdot MK$. Звідси випливає, що SC паралельна до RK.

Таким чином, у даному випадку вершину C на прямій KT ми зможемо побудувати. А вершину B отримуємо симетрією точки C відносно точки M.

19. У гострокутному трикутнику ABC провели висоту AH. На відрізках AB, BH, CH та AC як на діаметрах побудовані кола $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 відповідно. Окрім точки H, кола ω_1 та ω_3 перетинаються у точці P, а кола ω_2 та ω_4 – у точці Q. Прямі BQ та CP перетинаються у точці N. Доведіть, що ця точка лежить на середній лінії трикутника ABC, яка паралельна до BC.

Розв'язання. Побудуємо прямокутник $BCDE$ з висотою $CD=AH$ і з'єднаємо точку Q з його вершинами B та D і точкою H.



Оскільки точка Q лежить на колах ω_2 та ω_4, причому діаметром останнього, крім AC, є також DH, то кути BQH та DQH є прямими. Звідси випливає, що точка Q лежить на діагоналі BD прямокутника $BCDE$.

Аналогічно доводимо, що точка P лежить на діагоналі CE цього прямокутника. Тому точка N є точкою перетину його діагоналей.

Враховуючи також, що відрізок CE знаходиться лівіше діагоналі HE прямокутника $BHAE$, яка проходить через середину AB, а відрізок BD – правіше діагоналі HD прямокутника $CHAD$, яка проходить через середину AC, звідси отримуємо, що точка N лежить на середній лінії трикутника ABC, що паралельна до BC.

20. Дослідіть, чи для кожного скінченного набору точок у просторі існує незамкнена ламана без самоперетинів з вершинами в усіх цих точках (і тільки у них).

Розв'язання. Для кожної пари заданих точок розглянемо площину, перпендикулярну до прямої, яка проходить через ці дві точки. Зрозуміло, що таких площин буде скінченна кількість. Тому знайдеться пряма, яка не є паралельною до жодної з них. Розглянемо перпендикулярні проекції заданих точок на цю пряму. Вони утворюють впорядковану послідовність точок. Отже, залишається тільки послідовно з'єднати задані точки у тому порядку, в якому виявилися їхні проекції.