Федак І.В.

І відкрита Івано-Франківська обласна олімпіада з математики для учнів 5 – 8 класів

5 клас

1. У коробці багато червоних, синіх, зелених та жовтих ґудзиків. Яку найменшу їх кількість потрібно взяти навмання, щоб серед них обов’язково були 5 ґудзиків одного кольору?

2. Є 5 відрізків з довжинами 1, 2, 3, 4 та 5 сантиметрів. Треба вибрати з них 3 відрізки, з яких вдасться скласти трикутник. Скількома способами це можна зробити?

3. Бочку можна наповнити, якщо у неї налити 6 малих, 3 середніх та 1 велике відро води, чи 2 малих, 1 середнє та 3 великі відра води. Скільки великих відер потрібно для наповнення бочки?

4. У Миколки і Петруся є по 50 гирьок масами 1, 2, 3, … , 50 грамів. Вони по черзі (розпочинає Миколка) викладають гирі, кожен на свою шальку терезів. Петрусь виграє, якщо у деякий момент різниця між масами викладених гирьок дорівнюватиме 50 г. Як повинен грати Петрусь, щоб гарантовано перемогти?

5. Знайдіть найменше натуральне число, у записі якого є всі десять цифр, а сума цифр дорівнює 2018. Чи існує найбільше натуральне число з такими властивостями?

6. Таблицю 5×5 потрібно заповнити цифрами 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику і на кожній з двох діагоналей були записані усі 5 цих цифр. Деякі клітинки таблиці уже заповнені, як на малюнку справа. Заповніть решту клітинок таблиці. Які три цифри, в які клітинки і чому ви вписали першими?

3	4			5
2				
				4

6 клас

1. Знайдіть чотири попарно різні цифри a, b, c, d такі, що

$$\frac{a}{b-c/d}=72.$$

2. Доведіть, що ребус ЗАДАЧА + ЗАДАЧА = ТУРНІР, в якому різні букви відповідають різним цифрам, не має розв'язків.

3. Груша, яблуко і слива лежали на вазі. Петрусь зняв з ваги грушу, вага показала 230г. Поклавши грушу назад, Петрусь зняв яблуко, – вага показала 200г. Коли ж Петрусь зняв з ваги лише сливу, вага показала 290г. Скільки грамів важать груша, яблуко і слива разом?

4. Прямокутник розділили на 9 менших прямокутників, як на малюнку справа. Периметри п'ятьох із них записані всередині відповідних прямокутників. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

	6	
12	4	6
	8	

5. У турнірі з гри у «хрестики-нулики», який проводився за системою «програв – вибув» взяли участь 18 учнів. Кожного дня проводилась лише одна партія, учасники якої визначалися жеребкуванням із учнів, які ще не вибули. 6 школярів стверджують, що зіграли рівно 4 партії. Чи можливе таке?

6. Миколка помножив число 189 на 2018-цифрове число, всі цифри якого дорівнюють 6. Чому дорівнює сума цифр отриманого ним добутку?

7 клас

1. Миколка записав всі двоцифрові числа, використовуючи лише три різні цифри, потім обчислив їх суму S і виявив, що число S записується тими самими трьома цифрами. Доведіть, що таке насправді могло трапитися.

2. Кінь може з'їсти віз сіна за 1 місяць, коза – за 2 місяці, а овечка – за 3 місяці. За який час вони з'їдять віз сіна разом?

3. Прямокутник розділили на 9 менших прямокутників, як на малюнку справа. Площі п'ятьох із них записані всередині відповідних прямокутників. Знайти площу початкового прямокутника.

	6	
12	4	6
	8	

4. Знайти натуральне число, квадрат якого дорівнює сумі квадратів чисел 3030303 та 4040404. Поясніть, як ви отримали це число.

5. Відомо, що $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=1$. Обчислити $\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}$.

6. Натуральне число n має 2 дільники, а число $n+1$ має 3 дільники. Довести, що число $n+2018$ має 4 дільники.

8 клас

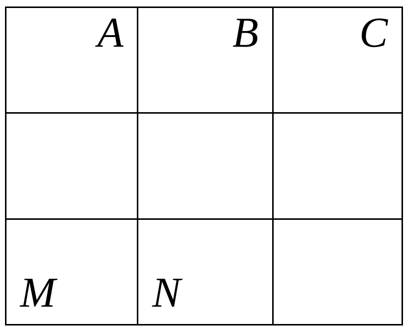
1. У 8 класі вистачає відмінників, але Михайлик вчиться краще від усіх. Якщо Михайлик стане вчитися гірше, то у класі буде 24% відмінників, а якщо він перейде до ліцею, то у класі стане 25% відмінників. Який відсоток відмінників у 8 класі зараз?

2. На гуртку вчитель розклав на шальки терезів 16 гирьок масами 1, 2, 3, … , 16 грамів так, що одна шалька переважила іншу. 15 членів гуртка по черзі виходили із класу і забирали з собою по одній гирьці, причому після виходу кожного учня переважувала протилежна шалька терезів. Доведіть, що описана ситуація можлива, і визначте, яка гирька залишилася на терезах після виходу останнього учня?

3. Миколка стверджує, що квадрат можна розрізати на 8 гострокутних трикутників, а Петрусь хвалиться, що зуміє розрізати його на 2018 таких трикутників. Хто з них має рацію?

4. Відомо, що існують натуральні числа n такі, що серед перших n натуральних чисел можна вибрати два числа, добуток яких дорівнює сумі всіх решти чисел. Знайдіть найменше таке n.

5. Квадрат розділили на 9 однакових квадратиків, як на малюнку справа. Доведіть, що сума кутів MAN, MBN та MCN дорівнює 45 градусів.



6. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{2x+1}=\frac{x^2-1}{2}$.

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

5 клас

1. 17 ґудзиків. 16 ґудзиків буде недостатньо, бо може статися так, що взяли по 4 ґудзики кожного кольору, а 5 ґудзиків одного кольору не виявилося.

2. Трьома: (2, 3, 4), (2, 4, 5) та (3, 4, 5). Врахуйте, що сума довжин двох сторін трикутника більша за довжину третьої сторони.

3. 4 великі відра. З умови задачі випливає, що 4 малі та 2 середні відра можна замінити двома великими. Тому у другому випадку достатньо замінити 2 малі та 1 середнє відро на одне велике.

4. У Петруся є принаймні такі дві виграшні стратегії:

а) він повторює ходи Миколки, очікуючи, поки той не поставить гирьку в 50г, а отже, програє;

б) він відкладає набік гирьку в 50г і робить ходи іншими 49-ма гирьками довільним чином. Після останнього ходу Миколки різниця між масами викладених гирьок дорівнюватиме 50г.

5. Найменшим шуканим числом є 10223456789…9 з 220-ма цифрами 9 вкінці, записаними підряд. Врахуйте, що таке число повинно мати найменшу кількість цифр, не може починатися з нуля, менші цифри мають передувати більшим, і остача від ділення 2018 на 9 дорівнює 2. Тому цифра 2 записана двічі.

Найбільшого натурального з такими властивостями не існує. Припустивши протилежне, допишемо справа ще один нуль і отримаємо більше від нього натуральне число.

6. Заповнена таблиця зображена на малюнку справа. Заповнення слід розпочати з нижньої лівої кутової клітинки, потім перейти до центральної клітинки, тоді – до інших клітинок цієї ж діагоналі і т.д., вибираючи кожен раз клітинку, в якій записати цифру можна однозначно.

3	4	1	2	5
2	5	3	4	1
4	1	2	5	3
5	3	4	1	2
1	2	5	3	4

6 клас

1. Наприклад, $a=9, b=1, c=7, d=8$. Тоді $\dfrac{9}{1-7/8}=72$.

2. Додавання А + А виконується у трьох різних розрядах, при цьому результати записуються трьома різними буквами У, Н та Р. Але це неможливо, бо А + А може набувати лише два різні значення: ця сума є деяким парним числом, якщо не було перенесення одиниці з попереднього розряду, або наступним за ним непарним числом, якщо таке перенесення відбулося.

3. 360 грамів. Якщо груша, яблуко і слива разом важать S грамів, то додавши ці три показники ваги, отримаємо, що

$$3S-S=230+200+290.$$

4. $P=12+6+6+8-4=28$. Врахуйте, що периметр початкового прямокутника дорівнює довжині контуру, який обмежує виділені 5 клітинок. При додаванні перших чотирьох периметрів додатково був порахований ще й периметр центрального прямокутника.

5. Ні. Зігравши 4 партії, учень виграв принаймні у трьох інших учасників турніру (переможець міг виграти у чотирьох). Отже, принаймні 18 учасників турніру зазнали поразок. Але це неможливо, бо переможець турніру не програв нікому.

6. 18162. Для знаходження добутку заданих чисел представимо 189 як різницю чисел 200 та 11 і порахуємо різницю отриманих добутків другого множника, записаного цифрами 6, на ці числа. У результаті дістанемо число 12599…99874, в якому кількість дев'яток, записаних посередині, дорівнює 2015. Можна також шукати закономірність, перемножуючи 189 на числа з меншою кількістю цифр 6.

7 клас

1. Наприклад, $S=594=55+59+54+99+95+94+44+49+45$. Якщо ж вважати, що й у двоцифрових числах цифри не повторюються, то отримаємо $S=132=13+31+32+23+12+21$.

2. $\dfrac{6}{11}$ місяця. Врахуйте, що за 6 місяців вони разом з'їдять $6+3+2=11$ возів сіна. Тому на один віз вони витратять в 11 разів менше часу.

3. $S = 99$. Спочатку доводимо рівність $xt = yz$ для площ довільних чотирьох прямокутників таблиці

x	y
z	t

18	6	9
12	4	6
24	8	12

Далі знаходимо площі інших чотирьох прямокутників на малюнку справа.

4. 5050505. Врахуйте що $\overline{a0a0a0a} = a \cdot 1010101$ та скористайтеся рівністю $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5. З умови задачі випливає, що $a^3 = 1 + a$. Тому

$$\frac{a^6 - 2a^4}{1-a^2} = \frac{(1+a)(1+a) - 2a(1+a)}{1-a^2} = \frac{(1+a)(1-a)}{1-a^2} = 1.$$

6. Натуральне число n має 2 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є простим числом. Число $n+1$ має 3 дільники тоді і тільки тоді, коли воно є квадратом простого числа. Обидві ці умови задовольняє лише число $n = 3$. Тому $n + 2018 = 2021$, дільниками якого є такі 4 числа: 1, 43, 47 та 2021.

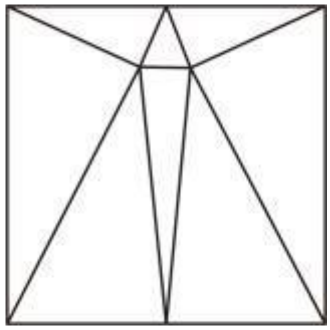
8 клас

1. 28%. Якщо зараз у класі Михайлика є n учнів, серед яких x відмінників, то отримуємо рівності $\frac{x-1}{n} = \frac{24}{100}$ та $\frac{x-1}{n-1} = \frac{25}{100}$. Звідси знаходимо $n = 25,\ x = 7$.

2. Таке, наприклад, можливе, якщо на одній шальці всі гирьки важать непарну, а на іншій – парну кількість грамів, а кожен учень, який виходить, забирає гирьку найбільшої маси з тих, що залишилися. Останньою залишиться гирька масою 1г. Інша гирька залишитися не зможе, бо, якщо гирька в 1г буде забрана, то після цього протилежна шалька не переважить.

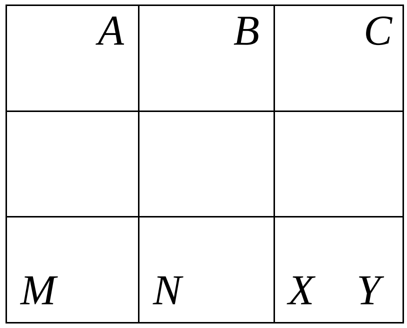
3. Вони обидва мають рацію. Приклад для Миколки наведений нижче на малюнку справа. Далі відзначимо, що довільний гострокутний трикутник можна розрізати на 4 гострокутні трикутники, провівши у ньому середні лінії.

Оскільки $2018-8=2010$ ділиться на 3, то здійснивши таку процедуру з проведенням середніх ліній 670 разів, Петрусь, відштовхуючись від малюнка Миколки, отримає 2018 гострокутних трикутників.



4. $n=10$. При цьому добуток чисел 6 та 7 дорівнює сумі решти восьми чисел. Якщо сума перших n таких чисел дорівнює S, а вибраними двома числами є x та y, то отримуємо рівняння $xy=S-x-y \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=S+1$. Для $n=10$ маємо $S=55$.

5. Врахуйте, що $\angle MAN=\angle XCY$, $\angle MBN=\angle NCX$ (див. малюнок справа). Тому вказана сума кутів дорівнює куту MCY, тобто дорівнює 45 градусів.



6. $x=1+\sqrt{2}$. Прирівнявши обидві частини рівняння до $y\geq 0$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x+1=y^2, \\ x^2-1=2y. \end{cases}$. Додавши рівняння цієї системи, знайдемо $y=x$ або $y=-x-2$, звідки отримуємо два квадратні рівняння $x^2-2x-1=0$ та $x^2+2x+3=0$. Від'ємний корінь першого з них є стороннім, а друге з цих рівнянь дійсних коренів не має.

Можна було також піднести обидві частини заданого рівняння до квадрату і звести його до рівняння

$$\left(x^2-2x-1\right)\left(x^2+2x+3\right)=0.$$

Також можна скористатися властивостями графіків взаємно обернених функцій.