УДК 517.589, 517.926.4

ПРО НОВІ ФУНКЦІЇ, ПОРОДЖЕНІ ЗРОСТАЮЧИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ СТЕПЕНЯМИ, ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Т.П. Гой, Р.А. Заторський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
(*м. Івано-Франківськ*)
tarasgoy@yahoo.com

У комбінаторному аналізі часто спостерігається двоїстість, пов'язана із зростаючими та спадними факторіальними степенями. Якщо комбінаторна задача приводить до деякої комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то зазвичай існує змістовна двоїста комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої комбінаторної тотожності із зростаючими факторіальними степенями.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються як степеневі ряди з участю звичайних факторіалів, які можна трактувати як спадні факторіальні степені. Замінивши у відомих степеневих розвиненнях наведених функцій спадні факторіальні степені відповідними зростаючими факторіальними степенями, приходимо до нових функцій з дещо аналогічними властивостями.

З метою дотримання аналогії між класичними функціями e^x, $\sin x$, $\cos x$ і функціями, запропонованими авторами, збережені відповідні позначення нових функцій (із заміною першої літери відповідною великою літерою).

У літературі часто зустрічаються зростаючі факторіальні степені m з кроком 1 і спадні факторіальні степені з кроком -1, які позначатимемо через

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1) \quad \text{і} \quad x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1)$$

відповідно. Вважають, що $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$. Очевидно, що $m! = m^{\underline{m}}$.

За аналогією з відомими степеневими рядами

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\underline{n}}}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\underline{2n}}}$$

розглянемо функції $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів:

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}, \quad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}, \quad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}. \tag{1}$$

Очевидно, що ряди в (1) збігаються на всій числовій осі.

Теорема 1. *Якщо* $x \geq 0$, *то*

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sqrt{\pi x}\, e^{\frac{x}{4}} \Phi\left(\sqrt{x}/2\right), \quad \mathrm{Sin}(x) = \sqrt{2\pi x}\left(\cos\frac{x}{4} S\left(\alpha\sqrt{x}\right) + \sin\frac{x}{4} C\left(\alpha\sqrt{x}\right)\right),$$

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \sqrt{2\pi x}\left(\cos\frac{x}{4} S\left(\alpha\sqrt{x}\right) - \sin\frac{x}{4} C\left(\alpha\sqrt{x}\right)\right),$$

де $\alpha = (2\pi)^{-1/2}$, $\Phi(p) = \mathrm{erf}\ p = 2\pi^{-1/2}\int_0^p e^{-t^2} dt$ *– функція ймовірностей* (*функція помилок*), $S(p) = \int_0^p \sin\left(\pi t^2/2\right) dt$, $C(p) = \int_0^p \cos\left(\pi t^2/2\right) dt$ *– інтеграли Френеля*.

Якщо $x < 0$, то в усіх формулах теореми 1 потрібно замінити $\sqrt{x}$ на $i\sqrt{|x|}$.

Графіки функцій $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ наведені на рис. 1-3.

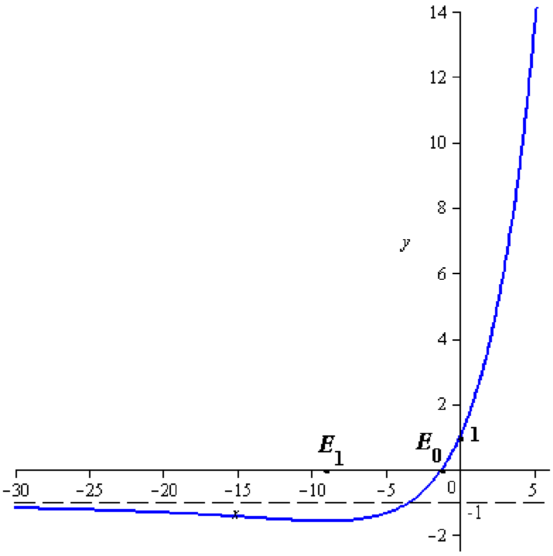

Рис. 1. Графік функцій $y = \mathrm{Exp}(x)$

Єдиним нулем функції $\mathrm{Exp}(x)$ є число $E_0 = 1,22041008459633...$, а у точці $x = E_1 = -9,02371882596227...$ вона досягає свого найменшого значення. Пряма $x = -1$ – горизонтальна асимптота графіка функції $\mathrm{Exp}(x)$ при $x \to -\infty$.

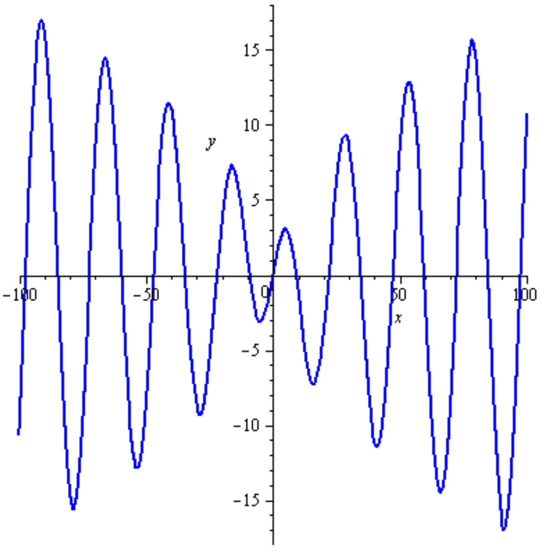

Рис. 2. Графік функції $y = \mathrm{Sin}(x)$

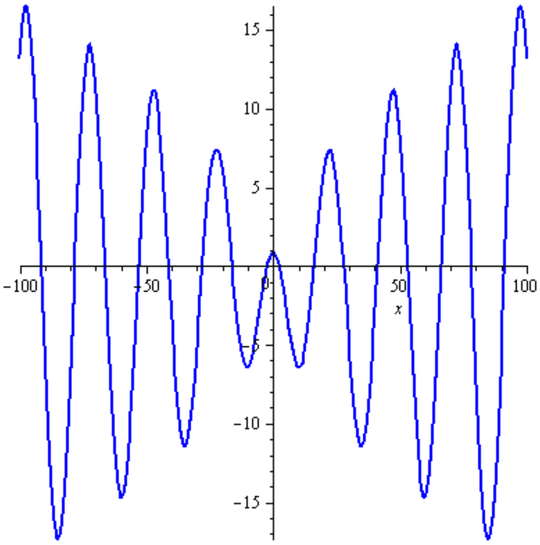

Рис. 3. Графік функції $y = \mathrm{Cos}(x)$

Найменшими додатними нулями функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ є відповідно числа $S_0 = 9,18975829443256...$ і $C_0 = 2,50539603854250...$

З (1) одержуємо формули, які пов'язують між собою введені функції:

$$\mathrm{Exp}(\pm\, ix) = \mathrm{Cos}(x) \pm i\,\mathrm{Sin}(x), \quad \mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = \mathrm{Exp}(ix)\cdot\mathrm{Exp}(-ix),$$

$$\mathrm{Cos}(ix) = \big(\mathrm{Exp}(x) + \mathrm{Exp}(-x)\big)\big/2, \quad \mathrm{Sin}(ix) = \big(\mathrm{Exp}(-x) - \mathrm{Exp}(x)\big)\big/(2i).$$

Теорема 2. *Функції* $\mathrm{Exp}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь*:

$$4xy' - (x+2)y = x+2, \quad y(0) = 1;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = -4x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = 12 - x^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$