ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 16, № 1/2 (2012) 1003(10 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 16, No. 1/2 (2012) 1003(10 p.)

КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ПОТЕНЦІАЛИ ДЛЯ ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД КООРДИНАТ

О. Возняк, В. М. Ткачук
Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 07 жовтня 2011 р.; в остаточному вигляді — 27 лютого 2012 р.)

Метод суперсиметричної квантової механіки для побудови квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів узагальнено для систем із масою, яка є функцією від координат. Знайдено точні розв'язки для основного стану системи, коли ґенеруючими функціями є суперпотенціал та функція, що описує залежність маси від координат. Досліджено умови існування основного та першого збудженого станів для різних залежностей маси від координат у тому самому потенціалі та умови існування зв'язаних станів для постійного потенціалу та координатно залежної маси. Наведено низку прикладів, що ілюструють запропонований метод.
Ключові слова: суперсиметрична квантова механіка; квазіточно розв'язувані потенціали; маса, залежна від координат.

PACS number(s): 03.65.−w, 11.30.Pb

I. ВСТУП

Квантовомеханічні системи з масою, залежною від координат, відіграють ключову роль у багатьох фізичних задачах. Зокрема, практично важливі випадки такої залежності виникають у фізиці неоднорідно леґованих напівпровідників, напівпровідникових гетероструктур, квантових ям, надґраток тощо [1, 2]. Моделі, у яких потенціал та ефективна маса є кусково-неперервними функціями, були предметом інтенсивних як теоретичних, так і експериментальних досліджень (див., наприклад, [3,4]). Концепцію ефективної маси, що є функцією від координат, також застосовують у ядерній фізиці [5], теорії квантових рідин [6] та металічних кластерів [7].

При вивченні систем із масою, залежною від координат, виникають також важливі загальнофізичні проблеми, а саме, проблема упорядкування некомутативних операторів координати та імпульсу в операторі кінетичної енерґії, уточнення граничних умов при переході через поверхню, на якій потенціал та ефективна маса є розривними функціями, проблема галілеївської інваріантності систем із позиційно-залежною масою [4, 8–10].

Для систем, у яких маса є функцією від координат, як і у інших задачах, знаходження точних розв'язків також важливе як із загальнотеоретичних міркувань, так і з погляду практичної побудови різних схем наближених розв'язків. Тому пошукові точних розв'язків для систем із масою, залежною від координат, присвячено багато робіт, виконаних із застосуванням різних методик [11–19]. Зокрема, у працях [17, 19] у межах суперсиметричної квантової механіки метод формінваріантних потенціалів (метод факторизації) для знаходження точних розв'язків стаціонарного рівняння Шредінґера був узагальнений для маси, залежної від координат. У нашій статті, щоб отримати квазіточні розв'язки, ми використовуємо метод суперсиметричної квантової механіки, розширеної для ґенерування КТР потенціалів, запропонований у роботі [20].

II. СУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА ДЛЯ ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД КООРДИНАТ

При переході від класичного гамільтоніана з масою, залежною від координат, до квантового виникає відома проблема впорядкування оператора імпульсу та маси в кінетичній енерґії. Зупинімося на двопараметричній формі оператора кінетичної енерґії Росса [9], для якої оператор гамільтона має вигляд

$$H = -\frac{\hbar^2}{4}\Big[m^{\delta'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\lambda'}(x) + m^{\lambda'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\delta'}(x)\Big] + V(x), \tag{1}$$

де $V(x)$ — потенціал, $\delta', \varkappa', \lambda'$ — параметри, що задовольняють умову $\delta' + \varkappa' + \lambda' = -1$.

Подавши $m(x)$ як

$$m(x) = m_0\ M(x), \quad M(x) = \frac{1}{f^2(x)}, \tag{2}$$

запишімо гамільтоніан у вигляді

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0}\Big[f^{\delta}(x)\nabla f^{\varkappa}(x)\nabla f^{\lambda}(x) + f^{\lambda}(x)\nabla f^{\varkappa}(x)\nabla f^{\delta}(x)\Big] + V(x), \tag{3}$$

де $f(x)$ — додатна функція від координат, а на індекси $\delta, \varkappa, \lambda$ накладено умову $\delta + \varkappa + \lambda = 2$.

Гамільтоніан (3) можна також переписати так:

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{f(x)}\nabla f(x)\nabla\sqrt{f(x)} + V_{\text{eff}}(x) \\
&= \frac{P^2}{2m_0} + V_{\text{eff}}(x),
\end{aligned} \tag{4}
$$

де $V_{\text{eff}}(x)$ — деякий ефективний потенціал, деформований оператор імпульсу, визначений як

$$
P = \sqrt{f(x)}p\sqrt{f(x)}, \tag{5}
$$

повинен задовольняти вимогу ермітовості, що забезпечує ермітовість гамільтоніана і яка приводить до умови [19]

$$
\lim_{x\to\pm\infty} |\psi(x)|^2 f(x) = 0. \tag{6}
$$

Для дослідження енерґетичного спектра систем запишімо гамільтоніан (4) у факторизованому вигляді

$$
H = B^+B^- + \epsilon_0, \tag{7}
$$

де $B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigg(\mp iP + W(x)\bigg)$, ϵ_0 — енерґія основного стану. Без утрати загальності надалі покладемо $\epsilon_0 = 0$. Цього можна досягнути, вибравши відповідно початок відліку енерґії системи. Пов'яжімо з гамільтоніаном системи H один із SUSY-партнерів $H_\pm$, а саме. $H_- = B^+B^-$. Гамільтоніани суперсиметричних партнерів такі:

$$
H_\pm = B^\mp B^\pm = \frac{1}{2}\bigg(P^2 + V_\pm(x)\bigg), \tag{8}
$$

де

$$
V_\pm = W^2(x) \pm f(x)W'(x), \tag{9}
$$

$W(x)$ — суперпотенціал, $W'(x) = \frac{dW(x)}{dx}$ — похідна від суперпотенціалу за координатою, сталу Планка тут і надалі покладаємо $\hbar = 1$.

Оскільки $H = H_-$, то

$$
V_{\text{eff}}(x) = V_-(x) = W^2(x) - f(x)W'(x). \tag{10}
$$

Рівняння для енерґетичного спектра суперсиметричних партнерів запишемо як

$$
H_\pm\psi_n^\pm(x) = E_n^\pm\psi_n^\pm(x),\ n = 0, 1, 2\dots. \tag{11}
$$

Спектри суперсиметричних партнерів H_+ і H_- збігаються, крім, можливо, лише стану з нульовою енерґією. Якщо стан із нульовою енерґією належить операторові H_-, то хвильова функція цього стану, внаслідок того, що гамільтоніан H_- представлено у факторизованому вигляді, задовольнятиме рівняння $B^-\psi_0^-(x) = 0$ та матиме вигляд

$$
\psi_0^-(x) = \frac{C_0^-}{\sqrt{f(x)}}\exp\left(-\int\frac{W(x)}{f(x)}\,dx\right), \tag{12}
$$

де C_0^- — константа нормування.

Необхідною умовою виконання (6) з урахуванням додатності визначення функції $f(x)$ є така умова на суперпотенціал

$$
\text{sign}(W(\pm\infty)) = \pm 1. \tag{13}
$$

Достатню умову ермітовості (6), а також квадратичної інтегровності хвильової функції, при заданому суперпотенціалі $W(x)$, можна забезпечити відповідним вибором функції $f(x)$.

III. ОСНОВНИЙ СТАН

A. Маса та суперпотенціал як ґенеруючі функції

Ми використаємо методику суперсиметричної квантової механіки для ґенерування квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів частинок, маса яких залежить від координат. Вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$, можна знайти розв'язок для основного стану системи. Такий вибір ґенеруючих функцій фіксує залежність маси від координат, оскільки $f(x)$ фіксована. Зміна $f(x)$ приводить до зміни значення як маси від координати так і потенціалу.

Як видно із (10), вигляд потенціалу $V_{\text{eff}}(x)$ визначається двома функціями — суперпотенціалом $W(x)$ та функцією $f(x)$. Вважаючи їх ґенеруючими та беручи до уваги додаткову умову (13), можна дібрати таку пару, яка приведе до потенціалу, для якого існуватиме точна хвильова функція основного стану (12)

$$
V_{\text{eff}}(x) = V_-(x) = W^2(x) - f(x)\ W'(x). \tag{14}
$$

Далі розгляньмо деякі приклади відповідних пар функцій. Для зручності використаймо перепозначення $V_{\text{eff}}(x) \equiv V(x)$.

Приклад 1.

Для першої пари таких функцій виберімо

$$
W(x) = \alpha x^{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{15}
$$

а

$$
f(x) = (a + bx^{2n+2})^k, \tag{16}
$$

де $a, b > 0$.

У цьому випадку потенціал, для якого існує точний розв'язок для основного стану, має вигляд

$$
V(x) = \alpha^2x^{2(2n+1)} - \alpha(2n+1)x^{2n}(a + bx^{2n+2})^k, \tag{17}
$$

а відповідна хвильова функція для стану з нульовою енерґією при $b \neq 0$ є такою:

$$
\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \frac{C_0}{(a + bx^{2n+2})^{\frac{k}{2}}} \\
&\times \exp\left(-\frac{\alpha}{b(2n+2)(1-k)}\,(a + bx^{2n+2})^{1-k}\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

При $b = 0$ основний стан описується іншою хвильовою функцією

$$\psi_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{a^k(2n+2)}x^{2n+2}\right). \qquad (19)$$

Із наведених виразів видно, що зв'язані стани існують при $\alpha > 0$, цілих n та $k < 1$. При $k = 1$ також наявні зв'язані стани, які описуються хвильовою функцією

$$\psi_0(x) = C_0 \cdot (a + bx^{2n+2})^{-\left(\frac{\alpha}{b(2n+2)}+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (20)$$

При $k > 1$ зв'язаних станів не буде тому що при такому обмеженні, накладеному на k, не виконується умова ермітовості оператора P.

Підкреслимо, що зв'язані стани існують як при від'ємних k, коли функція $f(x)$ на нескінченності прямує до нуля ($m(x) \to \infty$), досягаючи максимального значення в точці $x = 0$, так і при додатних k, коли вона на нескінченності прямує до безмежності ($m(x) \to 0$), досягаючи в точці $x = 0$ мінімального значення.

B. Суперпотенціал та потенціальна енерґія як ґенеруючі функції

Зауважимо, що при зміні ґенеруючих функцій $f(x)$ і $W(x)$ змінюються одночасно й маса $m(x)$, і потенціал $V(x)$. Цікаво прослідкувати, як впливають різні залежності маси від координат на основний стан при одному й тому ж самому потенціалі. Для цього треба перейти до нових ґенеруючих функцій, а саме, $W(x)$ і $V(x)$. Це легко зробити, знайшовши $f(x)$ із виразу для потенціалу

$$f(x) = \frac{W^2(x) - V(x)}{W'(x)}. \qquad (21)$$

У цьому випадку, вибравши певного виду потенціал $V(x)$ та змінюючи $W(x)$, одержимо різні функції $f(x)$, тобто різні маси. Розгляньмо одну з можливих умов на ґенеруючі функції $V(x)$ та $W(x)$, яка дозволяє проінтеґрувати (12) у явному вигляді.

$$W(x) = \alpha\varphi(x), \qquad (22)$$

$$V(x) = k\varphi^2(x) + V_0, \qquad (23)$$

де $\varphi(x)$ — деяка нова ґенеруюча функція.

Тепер, зафіксувавши параметри потенціалу k і V_0 та змінюючи параметр суперпотенціалу α, ми зможемо одержати різні залежності маси від координат для того самого потенціалу. У цьому випадку

$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - k)\varphi^2(x) - V_0}{\alpha\varphi'(x)}, \qquad (24)$$

а хвильова функція має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{\varphi'(x)}\Big((\alpha^2 - k)\varphi^2(x) - V_0\Big)^{-\frac{2\alpha^2 - k}{2(\alpha^2 - k)}}. \qquad (25)$$

Щоби функція $\psi_0(x)$ не мала сингулярностей, виберімо $\alpha^2 - k > 0$ і $V_0 = -|V_0|$.

При цьому умови ермітовості оператора P

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|C_0|}{\left[(\alpha^2 - k)\varphi^2(x) + |V_0|\right]^{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k}}} = 0 \qquad (26)$$

та квадратичної інтеґровності хвильової функції задовольняються при

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty. \qquad (27)$$

Розгляньмо деякі приклади функцій $\varphi(x)$, що приводять то точних розв'язків для основного стану.

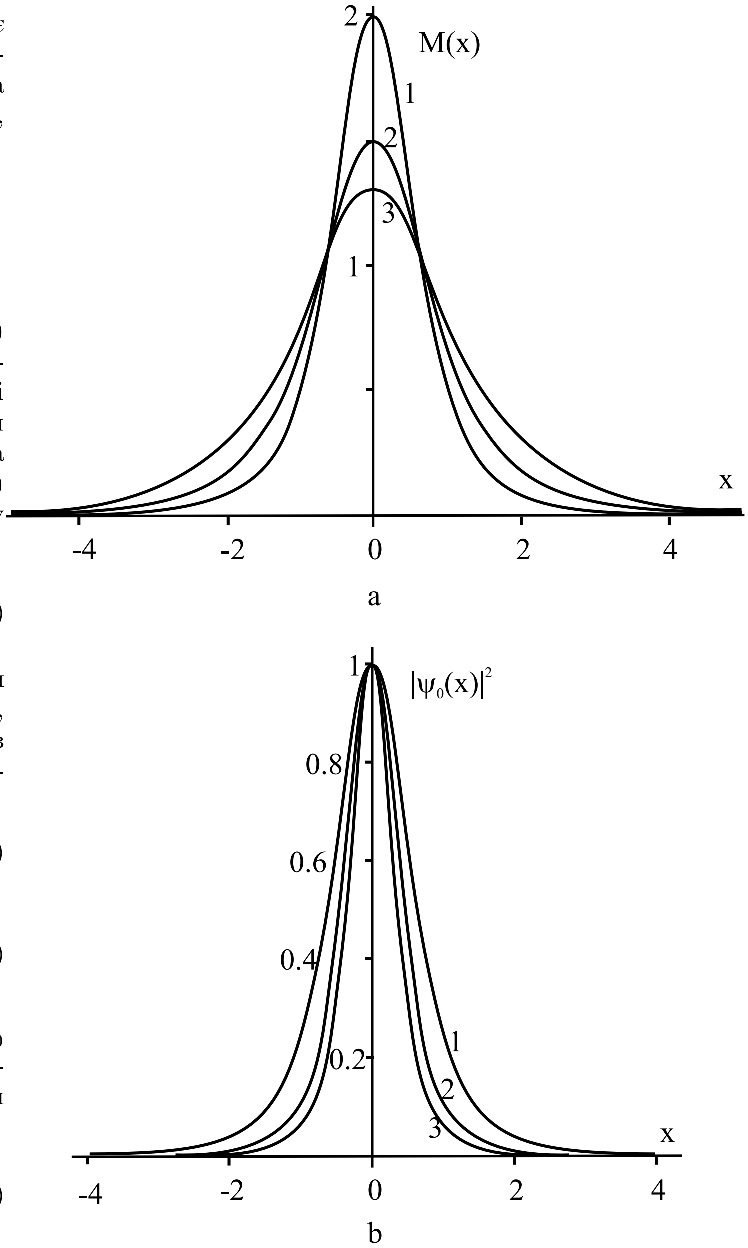

Рис. 1. Залежність маси $M(x) = \alpha^2/[(\alpha^2 - k)x^2 + |V_0|]$ (a) і квадрата модуля хвильової функції основного стану (30) (b) від координат для значень параметра $\alpha^2 = 2$ — крива 1, $\alpha^2 = 1.5$ — крива 2, $\alpha^2 = 1.3$ — крива 3 та при $k = 1$ і $|V_0| = 1$.

Приклад 2

Зокрема, якщо $\varphi(x) = x$, то

$$V(x) = kx^2 - |V_0| \tag{28}$$

і

$$f(x) = ((\alpha^2 - k)x^2 + |V_0|)/\alpha. \tag{29}$$

Для цього випадку хвильова функція основного стану є такою:

$$\psi_0(x) = C_0\Big((\alpha^2 - k)x^2 + |V_0|\Big)^{-\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}} \tag{30}$$

і, за умови $\alpha^2 > k$ описує локалізовані стани. При великих x асимптотика хвильової функції є така: $\psi_0(x) \sim 1/x^{\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}}$. Переписавши $\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}=1 + k/2(\alpha^2 - k)$, бачимо, що чим менше α, тим швидше хвильова функція спадає до нуля. Зауважимо, що маса $M(x) = 1/f^2(x) = \alpha^2/[(\alpha^2 - k)x^2 + |V_0|]^2$ прямує до нуля при $x \to \pm\infty$, причому чим менше α, тим повільніше маса прямує до нуля. Залежності маси та квадрата модуля хвильової функції основного стану від координат зображено на рисунку 1.

Приклад 3.

Для $\varphi(x) = \sinh(x)$

$$V(x) = k\sinh^2(x) - |V_0|, \tag{31}$$

а

$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - k)\sinh^2(x) + |V_0|}{\alpha\cosh(x)}. \tag{32}$$

Для цього випадку хвильова функція основного стану

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{\alpha\cosh(x)} \times \Big((\alpha^2 - k)\sinh^2(x) + |V_0|\Big)^{-\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}}. \tag{33}$$

при $\alpha^2 > k$ описує локалізовані стани.

Якщо ж $\varphi(x)$ при $x \to \pm\infty$ прямує не до нескінченності, а до деякої скінченної величини, умова ермітовості виконується при

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi^2(x) = \varphi_0^2 = \frac{V_0}{\alpha^2 - k} \tag{34}$$

та $k > \alpha^2$. При цьому очевидно, що V_0 повинен бути від'ємним, тобто $V_0 = -|V_0|$.

Для подальшого аналізу розгляньмо конкретний приклад. Зокрема, нехай $\varphi(x) = \tanh(x)$, тоді

$$V(x) = k\tanh(x) + |V_0|, \tag{35}$$

а

$$f(x) = \frac{\cosh^2(x)}{\alpha}((\alpha^2 - k)\tanh^2(x) - |V_0|). \tag{36}$$

Хвильова функція, що описує стан із нульовою енерґією, має вигляд

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{\cosh(x)}\Big((\alpha^2 - k)\tanh^2(x) + |V_0|\Big)^{-\frac{2\alpha^2-k}{2(\alpha^2-k)}}, \tag{37}$$

де $V_0/(k - \alpha^2) = 1$. Ця функція задовольняє всі необхідні для існування зв'язаних станів умови.

C. Частинка з масою, залежною від координат, у полі зі сталим потенціалом

Цікаво розглянути питання про існування зв'язаних станів для частинки, маса якої залежить від координат у полі, потенціал якого є сталою величиною. Використавши визначення потенціалу (10) та прийнявши його сталою величиною, рівною V_0, одержимо

$$f(x) = \frac{W^2(x) - V_0}{W'(x)}, \tag{38}$$

у якому з вимоги, щоб $f(x)$ не перетворювалася в нуль та не ставала від'ємною, виберемо $V_0 < 0$, тобто $V_0 = -|V_0|$ та $W'(x) > 0$.

Підставляючи знайдену функцію $f(x)$ у вираз для хвильової функції основного стану (12), одержимо

$$\psi_0(x) = C_0\frac{\sqrt{W'(x)}}{W^2(x) + |V_0|}. \tag{39}$$

Умова ермітовості оператора P для цього випадку набирає вигляду

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|C_0|}{W^2(x) + |V_0|} = 0 \tag{40}$$

та задовольняється, коли

$$\lim_{x\to\pm\infty}W(x) = \pm\infty. \tag{41}$$

Умова квадратичної інтеґровності хвильової функції,

$$\int|\psi_0(x)|^2dx = |C_0|^2\int\frac{W'dx}{(W^2(x) + |V_0|)^2} = |C_0|^2\int\frac{dW}{(W^2(x) + |V_0|)^2} = \frac{\pi}{|V_0|^{3/2}}, \tag{42}$$

дає змогу знайти сталу нормування, тобто $C_0 = |V_0|^{3/4}/\sqrt{\pi}$.

На завершення цього параграфа наголосимо, що хвильова функція основного стану (39) відповідає русі частинки в сталому потенціалі з масою, яка залежить від координат так:

$$M(x) = \frac{W'^2(x)}{(W^2(x) + |V_0|)^2}. \tag{43}$$

Оскільки потенціал сталий, то зв'язаний стан тут виникає тільки внаслідок залежності маси від координат. Установимо умови, які повинна задовольняти маса, щоб виникав зв'язаний стан. Його існування визначається умовою (42). Тому розгляньмо поведінку маси при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} M(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{W'(x)}{W^2(x)}\right)^2 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{W(x)}\right)^2 = 0, \tag{44}$$

де на останньому етапі ми скористалися тим, що $1/W(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Отже, маса, залежна від координат, може спричинити зв'язаний стан, коли вона прямує до нуля на нескінченності. Це є необхідною умовою існування зв'язаного стану.

Приклад 4.

Розгляньмо приклад виникнення зв'язаних станів у полі зі сталим потенціалом та масою, що є функцією від координат. Виберімо такий суперпотенціал $W(x)$:

$$W(x) = \sinh(x). \tag{45}$$

Функція $f(x)$, що описує залежність маси від координат при русі в полі зі сталим потенціалом $-|V_0|$, у цьому випадку є такою:

$$f(x) = \frac{\sinh^2(x) + |V_0|}{\cosh(x)}. \tag{46}$$

Відповідна хвильова функція є локалізованою в точці $x = 0$ і має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\frac{\sqrt{\cosh(x)}}{\sinh^2(x) + |V_0|}. \tag{47}$$

Зазначимо, що зв'язаний стан, який описується хвильовою функцією $\psi_0(x)$, існує при як завгодно малому від'ємному потенціалі. Інший приклад руху частинки з масою, що є функцією від координат у полі зі сталим потенціалом, розглянемо в наступному параграфі.

IV. КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ЗАДАЧІ З ДВОМА РІВНЯМИ

Для одержання ще одного власного стану оператора H_- врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_+ і H_- пов'язані суперсиметричними перетвореннями

$$E^-_{n+1} = E^+_n,\ E^-_0 = 0, \tag{48}$$

$$\psi^-_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^+_n}}B^+\psi^+_n(x), \tag{49}$$

$$\psi^+_n(x) = \frac{1}{\sqrt{E^-_{n+1}}}B^-\psi^-_{n+1}(x). \tag{50}$$

Розглянувши гамільтоніан H_+, який є суперсиметричним партнером оператора H_-, та знайшовши його основний стан, ми тим самим одержимо перший збуджений стан оператора H_-. Використовуючи суперсиметричні перетворення (48), запишемо H_+ у такому вигляді:

$$H_+ = H^1_- + \epsilon = B^+_1 B^-_1 + \epsilon,\ \epsilon > 0, \tag{51}$$

що приводить до співвідношення між потенціалами суперсиметричних партнерів

$$V_+(x) = V^{(1)}_-(x) + \epsilon, \tag{52}$$

де $B^\pm_1$ та $V^{(1)}_-(x)$ задані виразами (8) та (9) з новим суперпотенціалом $W_1(x)$, а ϵ є енерґією основного стану гамільтоніана H_+, тоді як енерґія основного стану H_- нульова.

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ задовольняють рівняння

$$W^2_0(x) + f(x)\ W'_0(x) = W^2_1(x) - f(x)\ W'_1(x) + 2\varepsilon. \tag{53}$$

Хвильова функція оператора H_+ із енерґією $E = \epsilon$ задовольняє рівняння $B^-_1(x)\psi^+_1(x) = 0$, розв'язком якого є

$$\psi^+_1(x) = \frac{C^+_1}{\sqrt{f(x)}}\exp\left(-\int\frac{W_1(x)}{f(x)}dx\right). \tag{54}$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (49) до $\psi^+_1(x)$, одержимо хвильову функцію збудженого стану з енерґією $E = \epsilon$ гамільтоніана H_-

$$\psi^-_1(x) = \frac{C^-_1}{\sqrt{f(x)}}\ W_+(x)\exp\left(-\int\frac{W_1(x)}{f(x)}dx\right), \tag{55}$$

де $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

Із рівняння (53) не вдається знайти ні $W(x)$, ані $W_1(x)$, але можна знайти таку пару величин $W(x)$ і $W_1(x)$, які задовольнятимуть це рівняння. Для цього введемо дві нові величини

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x), \end{aligned} \tag{56}$$

за допомогою яких рівняння (53) записуємо як

$$f(x)\ W'_+(x) = W_+(x)\ W_-(x) + 2\epsilon. \tag{57}$$

Його можна розв'язати як відносно $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$, так і навпаки. Ми виразимо розв'язок через $W_+(x)$. Тоді

$$W_-(x) = \frac{f(x)\ {W_+}'(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}, \tag{58}$$

а

$$W(x)=\frac{1}{2}\left(W_+(x)-\frac{f(x)\ W'_+(x)-2\epsilon}{W_+(x)}\right),$$
$$W_1(x)=\frac{1}{2}\left(W_+(x)+\frac{f(x)\ W'_+(x)-2\epsilon}{W_+(x)}\right). \tag{59}$$

Вимога несинґулярності потенціалу $V_-(x)$ накладає обмеження на ґенеруючу функцію $W_+(x)$. Розгляньмо випадок, коли $W_+(x)$ має простий нуль у точці x_0, тобто в околі нуля поведінка $W_+(x)$ є такою:

$$W_+(x)=W'_+(x_0)\ (x-x_0)+\frac{1}{2}W''_+(x_0)\ (x-x_0)^2. \tag{60}$$

Несинґулярність $V_-(x)$ можна забезпечити несинґулярністю $W_-(x)$, що приводить до значення енерґії збудженого рівня

$$\epsilon=\frac{f(x_0)\ W'_+(x_0)}{2}. \tag{61}$$

Розгляньмо приклади точних розв'язків для основного та першого збудженого станів для деяких ґенеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат. Почнімо з випадків, для яких залежність від координат як ґенеруючої функції, так і маси частинки є степеневими функціями.

Приклад 5.

Виберімо ґенеруючою функцію

$$W_+(x)=A\ x,\quad A>0, \tag{62}$$

яка має нулі в точці $x_0=0$, а функцією $f(x)$ — квадратичну функцію координат

$$f(x)=a+bx^2,\quad a,b>0. \tag{63}$$

У цьому випадку

$$\epsilon=\frac{aA}{2}, \tag{64}$$

а

$$W_-(x)=bx. \tag{65}$$

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ набирають вигляду

$$W(x)=\frac{A-b}{2}x,$$
$$W_1(x)=\frac{A+b}{2}x, \tag{66}$$

а хвильові функції є такими:

$$\psi_0(x)=C_0(a+bx^2)^{-[\frac{A-b}{4b}+\frac{1}{2}]} \tag{67}$$

і

$$\psi_1(x)=C_1x(a+bx^2)^{-[\frac{A+b}{4b}+\frac{1}{2}]}. \tag{68}$$

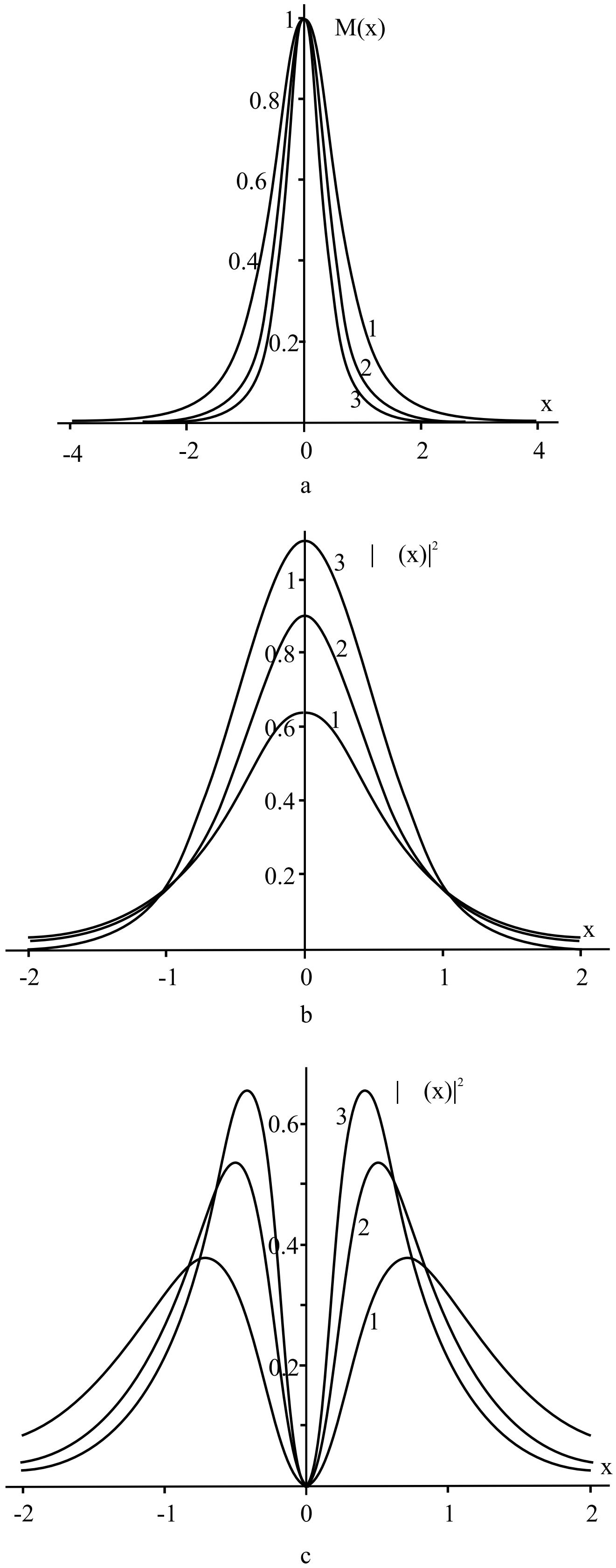

Рис. 2. Залежність маси $M(x)=1/[a^2(1+\beta x^2)^2]$ (a), квадрата модуля хвильової функції основного стану (71) (b) і квадрата модуля хвильової функції першого збудженого стану (72) (c) від координат для значень параметра $\beta=1$ — крива 1, $\beta=2$ — крива 2, $\beta=3$ — крива 3.

З умови правильної поведінки $W(x)$ випливає умова $A > b$.

Потенціал $V_-(x)$ для цього випадку є таким:

$$V_-(x) = \left(\frac{A^2}{4} - Ab + \frac{3}{4}b^2\right)x^2 - \frac{(A-b)a}{2}. \tag{69}$$

Якщо $A = b$ або $A = 3b$, то потенціал набуває сталого значення $V_-(x) = -(A-b)a/2$. При $A = b$ суперпотенціал $W(x) = 0$, що приводить до хвильових функцій, які не задовольняють умову ермітовості оператора імпульсу. Тому цей випадок не дає локалізованих станів і не підходить.

При $A = 3b$ $V_-(x) = -ba$ суперпотенціали набирають вигляду

$$W(x) = bx, \quad W_1(x) = 2bx, \tag{70}$$

а відповідні хвильові функції,

$$\psi_0(x) = \frac{C_0}{a+bx^2} = \frac{C_0(\beta)}{1+\beta x^2}, \tag{71}$$

$$\psi_1(x) = \frac{C_1 x}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C_1(\beta)x}{(1+\beta x^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{72}$$

описують локалізовані стани при будь-яких додатних a і b (тут $\beta = b/a$).

Зауважимо, що маса при цьому має вигляд $M(x) = 1/(a+bx^2)^2 = 1/a^2(1+\beta x^2)^2$ і в ділянці локалізації досягає мінімального значення. При $\beta \to 0$ $M(x) \to 1/a^2 = \text{const}$. Якщо $\beta = 0$, то зв'язані стани відсутні, як і повинно бути для сталої маси і сталого потенціалу. Зі збільшенням β ґрадієнт зміни маси в околі точки $x = 0$ зростає, що спричиняє до зростання ступеня локалізації хвильової функції. Залежності маси та квадрата хвильових функцій основного та першого збудженого станів від координат зображено на рисунку 2.

Приклад 6.

Інший приклад із тією ж ґенеруючою функцією $W_+(x) = Ax$, коли функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{B}{a+bx^2}, \tag{73}$$

де $A > 0$, $B > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Тоді

$$M(x) = \frac{(a+bx^2)^2}{B^2}.$$

Для енерґії першого збудженого рівня маємо

$$\epsilon = \frac{AB}{2a}. \tag{74}$$

Суперпотенціали задачі в цьому випадку є такими:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{Abx^3 + (Aa + \frac{Bb}{a})x}{2(a+bx^2)}, \\ W_1(x) &= \frac{Abx^3 + (Aa - \frac{Bb}{a})x}{2(a+bx^2)}. \end{aligned} \tag{75}$$

Потенціал $V_-(x)$, у полі якого рухається частинка, є такий

$$\begin{aligned} V_-(x) = {} & \frac{A^2b^2}{4}\frac{x^6}{(a+b^2)^2} + \frac{A^2ab + \frac{ABb^2}{a}}{2}\frac{x^4}{(a+bx^2)^2} \\ & + ABb^2\frac{x^4}{(a+bx^2)^3} + \frac{(Aa+\frac{Bb}{a})^2}{4}\frac{x^2}{(a+bx^2)^2} - \frac{3ABb}{2}\frac{x^2}{(a+bx^2)^2} \\ & + \left(ABab + \frac{B^2b^2}{a}\right)\frac{x^2}{(a+bx^2)^3} - \frac{(Aa+\frac{Bb}{a})B}{2}\frac{1}{(a+bx^2)^2}. \end{aligned} \tag{76}$$

Хвильові функції основного стану з нульовою енерґією й першого збудженого стану з енерґією $\epsilon = AB/2a$ мають вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{a+bx^2}\ \exp\left(-\frac{Ab}{8B}x^4 - \frac{Aa+\frac{Bb}{a}}{4B}x^2\right), \tag{77}$$

$$\psi_1(x) = C_1 x\ \sqrt{a+bx^2}\ \exp\left(-\frac{Ab}{8B}x^4 - \frac{Aa-\frac{Bb}{a}}{4B}x^2\right), \tag{78}$$

і $\psi_1(x)$ має вузол у початку координат.

Розгляньмо також приклади, у яких як $W_+(x)$, так і $f(x)$ виражаються через гіперболічні функції.

Приклад 7.

Розгляньмо ґенеруючу функцію

$$W_+(x) = A\ \sinh(\alpha x), \tag{79}$$

а залежність функції $f(x)$, пов'язаної із залежністю маси від координат, описується виразом

$$f(x) = \frac{B}{\cosh(\beta x)}. \tag{80}$$

Ґенеруюча функція має нулі в точці $x_0 = 0$, що приводить до такого значення енерґії першого збудженого стану:

$$\epsilon = \frac{AB}{2}\ \alpha, \tag{81}$$

а суперпотенціали є такими:

$$W(x) = \frac{A}{2}\ \sinh(\alpha x) + \frac{B\alpha}{2\sinh(\alpha x)}\left(\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\beta x)} - 1\right),$$
$$W_1(x) = \frac{A}{2}\ \sinh(\alpha x) - \frac{B\alpha}{2\sinh(\alpha x)}\left(\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\beta x)} - 1\right). \tag{82}$$

Для спрощення розрахунків розгляньмо два часткові випадки, коли $\alpha = \beta$ і коли $\alpha = 2\beta$.

При $\alpha = \beta$ суперпотенціали набирають вигляду

$$W(x) = W_1(x) = \frac{A}{2}\ \sinh(\alpha x). \tag{83}$$

Характер потенціалу $V_-(x)$ визначається виразом

$$V_-(x) = \frac{A^2}{4}\ \sinh^2(\alpha x) - \frac{AB}{2}\alpha, \tag{84}$$

а хвильова функція стану з нульовою енерґією є такою:

$$\psi_0(x) = C_0\ \sqrt{\cosh(\alpha x)}\ \exp\left(-\frac{A}{4B\alpha}\cosh^2(\alpha x)\right). \tag{85}$$

Хвильова функція стану з енерґією $\epsilon = \frac{AB}{2}\alpha$ для першого збудженого стану має в точці $x = 0$ вузол

$$\psi_1(x) = C_1\ \sinh(\alpha x)\ \sqrt{\cosh(\alpha x)}$$
$$\times \exp\left(-\frac{A}{4B\alpha}\cosh^2(\alpha x)\right). \tag{86}$$

Зазначимо, що локалізовані стани в цій задачі існують при додатно визначених сталих A, B та α.

При $\alpha = 2\beta$ суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ такі:

$$W(x) = A\ \sinh(\beta x)\cosh(\beta x) - B\beta\ \frac{\cosh(\beta x) - 1}{\sinh(\beta x)\cosh(\beta x)} + \frac{B\beta}{2}\frac{1}{\sinh(\beta x)\cosh(\beta x)},$$
$$W_1(x) = A\ \sinh(\beta x)\cosh(\beta x) + B\beta\ \frac{\cosh(\beta x) - 1}{\sinh(\beta x)\cosh(\beta x)} - \frac{B\beta}{2}\frac{1}{\sinh(\beta x)\cosh(\beta x)}. \tag{87}$$

Хвильова функція стану з нульовою енерґією має вигляд

$$\psi_0(x) = C_0\cosh(\beta x)\sqrt{2(\cosh(\alpha x) + 1)}\ \exp\left(-\frac{A}{3B\beta}\ \cosh^3(\beta x)\right), \tag{88}$$

а хвильова функція стану з енерґією $\epsilon = AB\ \beta$ є такою:

$$\psi_1(x) = C_1\ \cosh^2(\beta x)\ \sinh(\beta x)\ \sqrt{2(\cosh(\alpha x) + 1)}\exp\left(-\frac{A}{3B\beta}\ \cosh^3(\beta x)\right). \tag{89}$$

З аналізу виразів для хвильових функцій випливає, що локалізовані стани існують при довільних додатних сталих A і B.

Приклад 8.

У цьому прикладі розглянемо умови, при яких виникають локалізовані стани з такою ж, як у попередньому прикладі, залежністю маси від координат, але іншою функцією $W_+(x)$. Отже,

$$f(x) = \frac{B}{\cosh\ x}, \tag{90}$$

а

$$W_+(x) = A\ \tanh\ x. \tag{91}$$

Функція $W_+(x)$ має нуль у точці $x = 0$, основний стан системи має нульову енерґію, а перший збуджений — відповідає енерґії

$$\epsilon = \frac{AB}{2}. \tag{92}$$

Суперпотенціали $W(x)$ і $W_1(x)$ для функцій (90) і (91) є такими:

$$W(x) = \frac{A}{2}\ \tanh\ x - \frac{B}{2}\ \frac{1-\cosh^3\ x}{\sinh\ x\ \cosh^2\ x}, \tag{93}$$

$$W_1(x) = A\frac{A}{2}\ \tanh\ x + \frac{B}{2}\ \frac{1-\cosh^3\ x}{\sinh\ x\ \cosh^2\ x}.$$

Хвильова функція основного стану

$$\psi_0(x) = C_0\sqrt{\cosh\ x+1} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}+1\right)\cosh\ x\right) \tag{94}$$

описує локалізовані стани при додатно визначених сталих A та B. Хвильова функція першого збудженого стану, енерґія якого дорівнює $\epsilon = AB/2$, має вузол при $x = 0$

$$\psi_1(x) = C_1\frac{\sinh\ x}{\sqrt{\cosh\ x+1}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}-1\right)\cosh\ x\right) \tag{95}$$

і при додатних A та B й додатковій умові $A > B$ також описує локалізовані стани.

V. ВИСНОВКИ

У цій статті за допомогою суперсиметричної квантової механіки ми знайшли квазіточно розв'язувані потенціали з точно відомими хвильовими функціями для одного і двох рівнів частинки з масою, залежною від координат. Говорячи точніше, ми знайшли пару, а саме, потенціал і залежну від координат масу, для яких відомі точні хвильові функції для одного і двох рівнів.

Задача, для якої точно відомо розв'язок для одного рівня, на перший погляд, є тривіальною. Проте це тільки на перший погляд, і для задач із масою, залежною від координат, ми маємо змогу відповісти на питання про існування зв'язаних станів. Цікавою є така постановка питання: для якої залежності маси від координат при сталому потенціалі існує хоча б один зв'язаний стан? Зауважимо, що у зв'язку з проблемою впорядкування маси та оператора імпульсу в кінетичній енерґії це питання потребує уточнення. Справді, перехід від одного впорядкування до іншого приводить до іншої ефективної потенціальної енерґії. Тому для одного впорядкування потенціальна енерґія може бути сталою, а для іншого — ні. Ми розглядаємо впорядкування, коли кінетичну енерґію можна записати як $P^2/2$, де $P = -i\frac{1}{m(x)^{1/4}}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)^{1/4}}$, і саме в цьому випадку ставимо це запитання. Ми показали, що необхідною умовою існування зв'язаного стану при сталому потенціалі є прямування маси до нуля на безмежності, $m(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Побудова квазіточно розв'язуваних потенціалів із двома рівнями є суттєво складнішою задачею порівняно з одним. У наших попередніх роботах ця задача для сталої маси була розв'язана в межах суперсиметричної квантової механіки. В цій роботі ми узагальнили суперсиметричний метод конструювання КТР-потенціалів на випадок, коли маса частинки є функцією від координат. Метод проілюстровано низкою прикладів. Приклад 5, як виявляється, відповідає точно розв'язуваному випадку [19]. Цікавим є те, що він демонструє можливість існування локалізованих зв'язаних станів у сталому потенціалі для частинки з масою, залежною від координат. Він підтверджує висновок, отриманий раніше, а саме, для існування зв'язаних станів маса повинна прямувати до нуля на нескінченності. Не аналізуючи всі приклади, звернемо увагу на приклад 8. Тут цікавим є те, що збуджений зв'язаний стан перестає існувати при певних співвідношеннях параметрів, які визначають масу та потенціал, але основний стан залишається. Підсумовуючи, можемо сказати, що поряд з отриманими КТР-потенціалами у випадку залежної від координат маси запропонований метод дає змогу зробити деякі загальні висновки стосовно квантової поведінки частинок із масою, залежною від координат.

[1] L. Serra, E. Lipparini, Europhys. Lett. **40**, 667 (1997).
[2] М. В. Ткач, Я. М. Березовський, Журн. фіз. досл. **7**, 188 (2003).
[3] J. M. Levy-Leblond, Europhys. J. Phys. **13**, 215 (1992).
[4] J. M. Levy-Leblond, Phys. Rev. A **52**, 1845 (1995).
[5] P. Ring, P. Schuk, *The nuclear many-body problem* (New York, Springer-Verlag, 1980), 716 p.
[6] A. F. de Savedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, Phys. Rev. B **50**, 4248 (1994).
[7] A. Puente, L. Serra, M. Casas, Z. Phys. D **31**, 283 (1994).
[8] Л. Ф. Блажиевский, Теор. мат. физ. **40**, 51 (1979).
[9] O. von Roos, Phys. Rev. B **27**, 007547 (1983).
[10] F. S. A. Cavalcante *et al.*, Phys. Rev. B **55**, 1326 (1997).
[11] L. Decar, L. Chetouani, T. F. Hamman, J. Math. Phys. **39**, 2551 (1998).
[12] F. R. Plastino, A. Rigo, V. Casas, F. Garcias, A. Plastino, Phys. Rev. A **60**, 4318 (1999).
[13] A. de Souza Dutra, C. A. S. Almedia, Phys. Lett. A **275**, 25 (2003).
[14] B. Roy, A. Roy, J. Phys. A **35**, 3961 (2002).
[15] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 4727 (2005).
[16] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 7567 (2005).
[17] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37**, 4267 (2004).
[18] B. Bagchi, P. Gporain, C. Quesne, R. Roychoudhury, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2765 (2004).
[19] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **38**, 2929 (2005).
[20] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE POTENTIALS FOR A PARTICLE WITH A POSITION-DEPENDENT MASS

O. Voznyak, V. M. Tkachuk
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

The method of supersymmetric quantum mechanics for generating quasi-exactly solvable potentials has been extended for the case of systems with a position-dependent mass. The exact solutions for the ground and first excited state have been found when both superpotential and position-dependent mass are generating functions. The conditions for the existence of the ground and first excited state for different behaviors of the position-dependent mass in the same potential, as well as those of existence of the bounded states in the case of constant potential and coordinate dependent mass have been studied. Numerous examples have been provided.