

Квантовий генетичний алгоритм вищих порядків для 0-1 задачі пакування рюкзака

Ткачук В.М., к.ф.-м.н., доцент

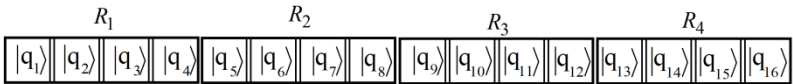
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ*

Квантовий генетичний алгоритм (QGA) є новим еволюційним алгоритмом, що поєднує в собі ідеї квантових обчислень на технології класичних генетичних алгоритмів [1]. При реалізації QGA мінімальною одиницею інформації є кубіт – квантова система, що може перебувати в двох базових станах: $|0\rangle$ та $|1\rangle$ [2]. Квантова природа кубіта полягає в принципі суперпозиції:

$$|q\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1 \quad (1)$$

Потужність квантових обчислень зумовлена квантовим паралелізмом, що ґрунтується на принципі суперпозиції та заплутаності станів. Можливість та ефективність використання заплутаних станів в QGA до задач комбінаторної оптимізації була проілюстрована в [3].

Структура квантової хромосоми. Якщо квантова хромосома складається із $N = 16$ кубітів, причому кожні чотири з них перебувають у заплутаному стані ($r = 4$), то її можна представити наступним чином:



В даному випадку хромосома складається із чотирьох квантових регістрів (R_1, R_2, R_3, R_4). Кількість основних станів регістру рівна $2^r = 2^4 = 16$:

$$|0000\rangle, |0001\rangle, |0010\rangle, \dots, |1111\rangle$$

Згідно принципу суперпозиції його стан є лінійною комбінацією базових станів:

$$|q\rangle = \alpha_0|0000\rangle + \alpha_1|0001\rangle + \alpha_2|0010\rangle + \alpha_3|0011\rangle + \dots + \alpha_{16}|1111\rangle$$

При переході до квантових регістрів вищих порядків ($r > 2$) для представлення квантової хромосоми необхідно додатково збільшити розмір матриці M , необхідний для представлення особи популяції. Так, при $r = 4$:

$$M = \frac{N}{r} \cdot 2^r = \frac{16}{4} \cdot 2^4 = 64 > 2 \cdot N = 32$$

Оператор квантового гейту. Вся інформація про задачу та алгоритм її розв'язку закладається в квантовий гейт, тому його робота є визначальною

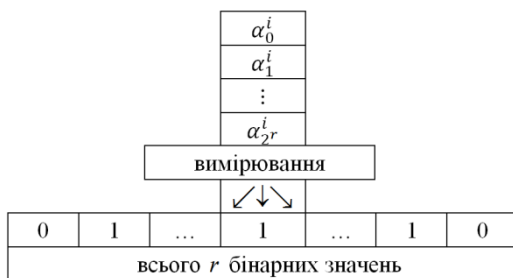
ною при побудові будь-якого QGA. Роботу оператора можна поділити на два етапи. На першому для кожного регістру R_i збільшується амплітуда ймовірності вибраного квантового стану b :

$$(\alpha_i^b)' = \sqrt{[\alpha_i^b]^2 + \mu(1 - \alpha_i^b)} \quad (3)$$

Стан b визначається десятковим представленням фрагменту класичної хромосоми найкращої особини популяції, що відповідає квантовому регістру R_i . Значення μ лежить в межах $[0,1]$ та підбирається за результатами попередніх досліджень. Як показали моделювання, зважаючи на адаптивний характер роботи оператора, для задач комбінаторної оптимізації можна прийняти $\mu \approx 1$.

На другому етапі необхідно пропорційно зменшити амплітуди ймовірності інших станів регістру R_i для забезпечення виконання умови нормування. Таким чином у кожному новому поколінні забезпечується збільшення ймовірності того, що в результаті спостереження генеруються класичні особини, більш схожі на найкращу. При такому алгоритмі роботи квантового гейту також можна обійтися без таблиці пошуку, що є одним із принципів недоліків традиційного QGA.

Алгоритм вимірювання стану квантової хромосоми реалізований згідно запропонованого в [3] підходу. Схематично процес вимірювання стану регістру R_i та перехід до класичного представлення хромосоми можна зобразити наступним чином:



Процедура відновлення квантової хромосоми. В процесі ініціалізації популяції, чи в ході її еволюції завжди є ймовірність отримати ряд «поганих» особин, які не задовільняють умові обмеження загальної ваги рюкзака. Процедура відновлення в QGA принципово інша, ніж в класичному генетичному алгоритмі, бо вимагає корекції і квантової хромосоми. Процес її відновлення реалізовано згідно представленого нижче алгоритму:

Відновлення квантової хромосоми

- 1 **for** $i \in \{1, \dots, k\}$ **do**
- 2 $sum \leftarrow 0$

```

3      for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do
4           $sum \leftarrow sum + x_i \cdot 2^j$ 
5      for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do
6           $\alpha_i^j \leftarrow \sqrt{(1 - \beta^2)/(2^r - 1)}$ 
7      end for
8       $\alpha_i^{sum} \leftarrow \beta$ 
9      end for
10     end for

```

Тут x_i – класична хромосома, отримана із квантової в результаті квантового вимірювання та наступного відновлення. $\beta \in [0,1]$ - параметр роботи алгоритму. Дослідження показали, що він не залежить від розміру системи N , рівня кореляції вхідних даних і оптимальним в подальших моделюваннях взято $\beta = 0.985$ (див. рис.1).

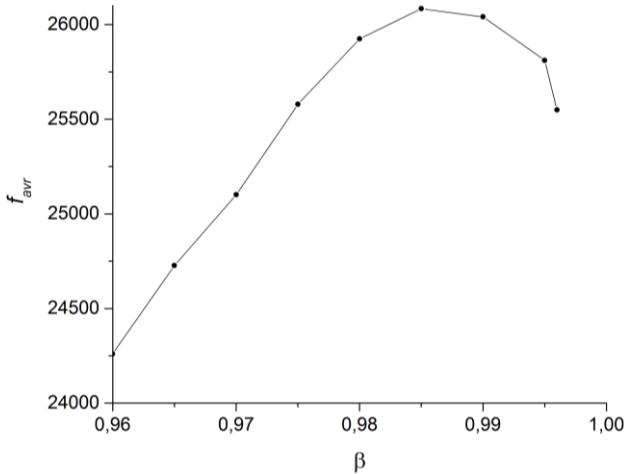


Рисунок 1. Вплив β на середню пристосованість найкращої особи популяції при $N = 500$ некорельованих вхідних даних

Результати моделювання. При реалізації QGA розмір популяції складав $s = 50$ особин, час еволюції $t = 500$, $N = 500$ некорельованих вхідних даних. Ефективність роботи оцінена за середньою пристосованістю найкращої особи популяції f_{avr} та середнім часом роботи алгоритму t_{sd} . Їх типову поведінку приведено на рис.2 (точне значення рівне 28857).

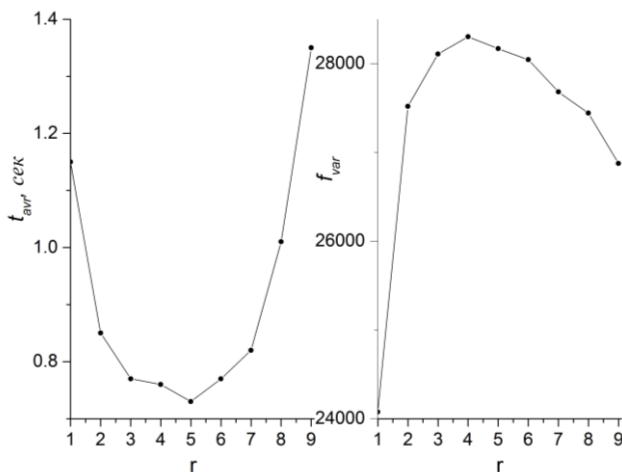


Рисунок 2. Середній час роботи t_{avr} та середня пристосованість найкращої особини популяції f_{avr} в залежності від розміру квантового регістру r .

Висновки. Перехід в QGA до квантових регістрів вищих порядків ілюструє хорошу можливість глобального пошуку завдяки використанню процедури відновлення квантової хромосоми та оператора квантового вимірювання. Швидка локальна збіжність забезпечується адаптованим алгоритмом роботи оператора квантового гейту, який для своєї реалізації не вимагає використання таблиці пошуку. Проведені моделювання дозволяють за співвідношенням ефективність/продуктивність вважати за оптимальний розмір квантового регістру порядку 3-6 кубітів.

Список літератури

1. Han K.-H., Kim J.-H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problem // Proc.Congress on Evolutionary Computation. – Vol. 2, La Jolla, CA, July 2000. – P. 1354-1360.
2. Narayanan A., Moore M. Quantum-inspired genetic algorithms // Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'96), Nagoya, Japan. – 1996. – P. 61–66.
3. Nowotniak R., Kucharski J. Higher-Order Quantum-Inspired Genetic Algorithms // Federated Conference on Annals of Computer Science and Information Systems. – 2014. – P.465-470.