Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція
Ворохта
26 лютого — 1 березня 2020

Івано-Франківське математичне товариство
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Всеукраїнська наукова конференція

Ворохта
26 лютого — 01 березня 2020 року

тези доповідей

Івано-Франківськ, 2020

Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта 26 лютого — 1 березня 2020 р. Тези доповідей. –Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2020. – 95 с.

Організаційний комітет:

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень, поданих на Всеукраїнську наукову конференцію “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. Тези доповідей і повідомлень подані в авторських варіантах.

Зміст

A relation between maximum norm and minimum norm for entire curves of bounded l-index in ℓ_∞

Bandura A. I.

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

andriykopanytsia@gmail.com

We will use notations from [1, 2]. Let ℓ^∞ be a sequence space whose elements are the bounded complex sequences. The space is equipped with the norm $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Let $F : \mathbb{C} \to \ell^\infty$ be an entire curve, i.e. $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, where every f_j is an entire function, $j \in \mathbb{N}$. By B^∞ we denote a space consisting from functions $F : \mathbb{C} \to \ell^\infty$ which are bounded on every compacta, i.e. $F \in B^\infty$ if for every compacta $G \subset \mathbb{C}$ there exists $C > 0$ such that for any $z \in G$ one has $\|F(z)\|_\infty \le C$. Let $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ be a positive continuous function. The notation $F^{(k)}(z)$ stands for $(f_1^{(k)}(z), \ldots, f_n^{(k)}(z), \ldots)$.

Recently, there was presented [1, 2] a generalization of concept of bounded l-index for entire curves in l_∞. Also there was proved one criteria describing local behavior of these curves. Here we continue these investigations and present another criteria for the class B^∞.

Let us remind a main definition from [1, 2]:

Definition 1. *A function $F \in B^\infty$ is called a function of bounded l-index, if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for every $m \in \mathbb{Z}_+$ and for all $z \in \mathbb{C}$ one has*

$$\frac{\|F^{(m)}(z)\|_\infty}{m! l^m(z)} \le \max_{0 \le k \le m_0} \frac{\|F^{(k)}(z)\|_\infty}{k! l^k(z)}. \tag{1}$$

Let us denote $\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{t_1, t_2 \in \mathbb{C}} \left\{ \frac{l(t_1)}{L(t_2)} : |t_1 - t_2| \le \frac{\eta}{\min\{L(t_1), L(t_2)\}} \right\}$. By Q we denote a class of positive continuous function $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, satisfying the condition $(\forall \eta \ge 0) :\ \lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$.

Using results from [1, 2], we obtain the next criterion of l-index boundedness for functions from B^∞. Similar result was firstly deduced by G. H. Fricke [4] for entire functions of bounded index. Further it was generalized for various classes of holomorphic functions [5, 6]. Our main results are following:

Theorem 2. *Let $l \in Q$. If the function $F \in B^\infty$ is of bounded l-index then for each $R > 0$ there exist $P_2(R) \geq 1$ and $\eta(R) \in (0, R)$ such that for every $z_0 \in \mathbb{C}$ and some $r = r(z_0) \in [\eta(R), R]$ the inequality holds*

$$\max\{\|F(z)\|_\infty : |z - z_0| = r/l(z_0)\} \leq P_2 \min\{\|F(z)\|_\infty : \ |z - z_0| = r/l(z_0)\}. \quad (2)$$

Theorem 3. *Let $l \in Q$, $F \in B^\infty$. If there exist $R > 0$, $P_2 \geq 1$ and $\eta \in (0, R)$ such that for all $z_0 \in \mathbb{C}$ and some $r = r(z_0) \in [\eta, R]$ inequality (2) is valid, then the function F has bounded l-index.*

[1] A. I Bandura, Entire curves having bounded l-index in ℓ_∞, Mat. Stud., **52** (1), 108-112 (2019). doi: 10.30970/ms.52.1.108-112

[2] A.I. Bandura, Entire curves having bounded l-index in an infinite-dimensional space // Infinite-Dimensional Analysis and Topology: international conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky: book of abstracts, 16-20 October, 2019, Ivano-Frankivsk, Ukraine. – P. 4-5.

[3] A. Bandura, O. Skaskiv, *Functions Analytic in the Unit Ball Having Bounded L-Index in a Direction*, Rocky Mountain J. Math., **49** (4), 1063–1092 (2019). doi: 10.1216/RMJ-2019-49-4-1063

[4] Fricke, G.H. Entire functions of locally slow growth. *J. Anal. Math.* **28**(1), 101–122 (1975).

[5] Sheremeta, M.N., Kuzyk, A.D. *Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index, Sib. Math. J.* **33** (2), 304–312 (1992). doi:10.1007/BF00971102

[6] Sheremeta, M. Analytic functions of bounded index, Lviv: VNTL Publishers, 1999.

The nonlocal problem with multipoint perturbations of the boundary conditions for an ordinary differential equation with involution

Baranetskij Ya.O.

Lviv Polytechnic National University

baryarom@ukr.net

Kalenyuk P.I.

Lviv Polytechnic National University

kalenyuk@lp.edu.ua

Kopach M.I.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

kopachm2009@gmail.com

Solomko A.V.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

ansolvas@gmail.com

The fundamentals of the theory of linear differential equations in partial derivatives with constant coefficients were investigated in the works of L. Ehrenpreis, L. Hermander, L. Garding, V. Malgrange, V.P. Palamodov, I.G. Petrovsky, B.Yo. Ptashnyk.

The classes of uniqueness and existence of the solution of boundary value problems in bounded domains for equations with constant coefficients were studied in [3]– [7]. Mixed boundary value problems mean such problems when the boundary lines of various types are located on the surface of the region. Boundary value problems with mixed conditions arise in hydrodynamics, the mathematical theory of elasticity. In this report we considered the problem with nonlocal boundary conditions which are multipoint perturbations of mixed boundary conditions in the unit square G with using Fourier method. The properties of a generalized transformation operator $R : L_2(G) \to L_2(G)$, which maps the normalized functions of the operator L_0 of mixed boundary conditions in the root functions of the L for perturbed nonlocal problem, are studied.

Also we construct a commutative group of a generalized transformation operators $\Gamma(L_0)$. We show that for any transformation operator $R \in \Gamma(L_0)$:

$L_2(G) \to L_2(G)$ corresponds some abstract nonlocal problem and vice versa. We construct system $V(L)$ of root functions of operator L. In case, if $V(L)$ is a Riesz basis in the space $L_2(G)$, we obtain sufficient conditions under which nonlocal problem has unique solution in form of Fourier series by system $V(L)$.

Let $G := \{x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1,\ x_2 < 1\},\ D_1,\ D_2$ – are the operators of differentiation by the variables $x_1,\ x_2$ respectively; $W_2^{2n}(G)$ – be a Sobolev space with a scalar product and norm respectively:

$$(u, v; H_2) := (u, v; L_2(G)) + (D_1^{2n}u, D_1^{2n}v; L_2(G)) + (D_2^{2n}u, D_2^{2n}v; L_2(G)),$$

$$\|u; H_2\| := \sqrt{(u, u; H_2)},$$

where $[L_2(0, 1)]$ – be a set of linear continuous operators over the space $L_2(0, 1)$.

Let's consider the nonlocal problem

$$L(-D_1^2, -D_2^2)u := \sum_{q=0}^{n} a_q D_1^{2q} D_2^{2n-2q} u = f(x),\ x \in G, \tag{1}$$

$$\ell_{s,1}u := D_1^{2s-2}u|_{x_1=0} + D_1^{2s-2}u|_{x_1=1} + \ell_{s,1}^1 u = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,1}u := D_1^{2s-2}u|_{x_1=0} - D_1^{2s-2}u(1, x_2) = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$\ell_{s,2}u := D_2^{2s-2}u|_{x_1=0} - D_2^{2s-2}u|_{x_1=1} + \ell_{s,2}^1 u = 0,\ s = 1, ..., n, \tag{4}$$

$$\ell_{n+s,2}u := D_2^{2s-1}u|_{x_2=0} - D_2^{2s-1}u|_{x_2=1} = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{5}$$

where

$$\ell_{s,j}^1 u := \sum_{q=0}^{k_{s,j}} \sum_{r=0}^{n_j} b_{s,q,r,j} D_1^q u(x_1, x_2)|_{x_j = x_{j,r}},\ s = 1, ..., n, \tag{6}$$

$$0 = x_{j,1} < x_{j,2}, ..., x_{j,n_j} \le 1,\ b_{s,q,r,j} \in \mathbb{R},$$

$$q = 0, 1, ..., k_{s,j},\ k_{s,j} < 2n,\ r = 0, 1, ..., n_j,\ s = 1, \dots, n,\ j = 1, 2,$$

$$\mu_{1,k} = \pi^2 k^2,\ \mu_{2,m} = 4\pi^2 m^2,\ k = 1, ...,\ m = 0, 1, ...$$

Let $L : L_2(G) \to L_2(G)$ – be the operator of the problem (1)–(6); $Lu := L(-D_1^2, D_2^2)u,\ u \in D(L),\ D(L) := \{u \in W_2^{2n}(G) : \ell_{s,j}u = 0,\ s = 1, \dots, 2n,\ j = 1, 2\}$.

Let us consider the following assumptions.

Assumption $P_1 : b_{s,q,r,j} = (-1)^j(-1)^q b_{q,1,n_j-r,j},\ \ x_{j,r} = 1 - x_{j,n_j-r},\ r = 0, ..., n_j,\ s = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2$.

Assumption $P_2 : k_{s,j} \le 2s - 2,\ s = 1, ..., n,\ j = 1, 2$.

Assumption P_3 : for any real numbers $\mu_1,\ \mu_2$ the positive number C_1 exists, that the inequality $C_1|\mu|^n \le |L(\mu_1, \mu_2)|$ holds, where $\mu := (\mu_1, \mu_2),\ |\mu|^2 := |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2$.

Theorem 1. *Let Assumptions P_1–P_3 and $a_0 a_n \ne 0$ hold. Then, for arbitrary function $f \in L_2(G)$ the unique solution of problem* (1)–(6) *exists.*

[1] Amanov D., Ashyralyev A. *Well-posedness of boundary value problems for partial diffferential equations of even order.* Electronic Journal of Differential Equations, 2014, **108**, 1–18.

[2] Baranetskij Ya.O., Demkiv I.I., Kalenyuk P.I., Solomko A.V. *The nonlocal boundary problem with perturbations of antiperiodity conditions for the elliptic equations with constant coefficients.* Carpathian Math. Publ. 2018, **10**, (2), 215–234.

[3] Baranetskij Ya.O., Kalenyuk P.I., Kopach M.I. *The nonlocal boundary problem with multypoint perturbations for the differential equations with constant coefficients of even order.* Math. methods and physic-mech. fields. 2018, ICAAM, **61**, (1), 16–39.

[4] Baranetskij Ya.O., Kalenyuk P.I., Kopach M.I., Solomko A.V. *The nonlocal problem with mixed boundary conditions for the elliptic equation with constant coefficients.* Carpathian Math. Publ. 2019, **12**, (2), 228–239.

[5] Irgashev B.Yu. *On one boundary-value problem for an equation of higher even order.* Russian Math. (Iz. VUZ). 2017, **61**, (9), 10–18.

[6] Koshanov B., Soldatov A. *About the generalized Dirichlet-Neumann problem for an elliptic equation of high order.* 2018.

[7] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S, Kmit' I.Ya., Polischuk V.M. *Nonlocal boundary-value problems for partial differential equations.* – Kiev: Naukova Dumka, 2002. (in Ukrainian).

Local Versions of the Wiener-Levi Theorem

Favorov S.Yu.

Karazin's Kharkiv National University

sfavorov@gmail.com

Let $h(z)$ be an analytic (or real-analytic) function in the neighborhood of some compact set K on the plane $\mathbb{C}$. We show that for any complex measure μ on the Euclidean space $\mathbb{R}^d$ of a finite total variation without singular components there is another measure ν without singular components such that its Fourier transform $\hat{\nu}(y)$ coincides with $h(\hat{\mu}(y))$ for each $y \in \mathbb{R}^d$, for which $\hat{\mu}(y) \in K$. If K contains the set $\hat{\mu}(\mathbb{R}^d)$ and μ is a pure point or an absolute continuous measure, we get the known versions of the Wiener-Levi theorem [1]. Also, some applications to the theory of quasicrystals are given ([1], [2]).

[1] Rudin, W.: McGraw -Hill Book Company, New York, (1973) 443pp. *Functional Analysis*, McGraw -Hill Book Company, New York, (1973) 443pp.

[2] Favorov, S.Yu. *Large Fourier quasicryals and Wiener's Theorem* Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 25, Issue 2, (2019), p.377-392.

[3] Favorov, S.Yu. *Local Wiener's Theorem and Coherent Sets of Frequencies*, to appear in Analysis Mathematica.

Факторизаційні тотожності в теорії випадкових процесів

Осипчук М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

Портенко М. І.

Інститут математики НАН України

portenko@imath.kiev.ua

Використання факторизаційних тотожностей в стохастиці розпочалось з робіт Ф. Спіцера (F. Spitzer) середини 50-х років XX-го сторіччя, що стосувалися випадкових блукань на ґратці цілих чисел дійсної осі. В середині 60-х років сибірський математик Б. А. Рогозін отримав аналог результату Спіцера для загального процесу з незалежними приростами. Ми називаємо відповідну тотожність формулою Рогозіна-Спіцера. Цілу низку застосувань факторизаційних тотожностей до процесів масового обслуговування можна знайти в роботах А. А. Боровкова, Д. В. Гусака та багатьох інших.

В нашому дослідженні ми стартуємо з формули Рогозіна-Спіцера і отримуємо нові формули, що характеризують певні властивості симетричних α-стійких процесів на дійсній осі.

Нехай на дійсній осі заданий стохастично неперервний однорідний процес $(X(t))_{t\geq 0}$ з незалежними приростами, що стартує з нуля. Всі скінченновимірні розподіли такого процесу можна виразити через функцію розподілу величини $X(t)$ при довільному фіксованому $t > 0$

$$F_t(x) = \mathbb{P}(\{X(t) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Відомо, що траєкторії такого процесу можна вважати неперервними справа і такими, що в кожний момент існують границі зліва. Тоді цілком визначеними є випадкові процеси

$$X_+(t) = \sup_{0 \le s \le t} X(s), \text{ та } X_-(t) = \inf_{0 \le s \le t} X(s), \quad t \ge 0.$$

Формула Рогозіна-Спіцера пов'язує розподіли цих процесів з розподілом величини $X(t)$, тобто, функцією $(F_t(x))_{x \in \mathbb{R}}$.

Твердження (формула Рогозіна-Спіцера)**.** *При* $\lambda > 0$ *та* $\xi \in \mathbb{R}$ *виконуються рівності*

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_{\mathbb{R}_\pm} e^{i\xi y} \, d_y \mathbb{P}\left(\{X_\pm(t) < y\}\right) \right] dt =$$
$$\exp\left\{ \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_{\mathbb{R}_\pm} (e^{i\xi y} - 1) \, dF_t(y) \right] \frac{dt}{t} \right\},$$

де $\mathbb{R}_\pm = \{x \in \mathbb{R} : x \gtrless 0\}$.

Розглянемо такий підклас згаданих вище процесів, для якого функція $(F_t(y))_{y \in \mathbb{R}}$ при $t > 0$ є абсолютно неперервною відносно лебегової міри на $\mathbb{R}$ зі щільністю

$$g(t, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha} \cos(\xi y) \, d\xi, \quad t > 0, \; y \in \mathbb{R},$$

де $\alpha \in (0, 2]$ та $c > 0$ — фіксовані параметри. Це і є симетричні α-стійкі процеси. При $\alpha = 2$ ці процеси є вінеровими. Нас буде цікавити випадок $\alpha \in (1, 2)$.

Для $y > 0$ покладемо $\sigma_y = \inf\{t \ge 0 : X(t) \ge y\}$.

Теорема 1. *При всіх* $y > 0$ *справджується рівність*

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1/2} \left(1 - \mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_y}\right) = \frac{2}{\alpha \sqrt{c}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} y^{\alpha/2}.$$

Для порівняння наведемо подібний результат, який отримується з допомогою інших міркувань.

При $y \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ розглянемо випадкову величину $\tau_y = \inf\{t \ge 0 : X(t) = y\}$. Відомо, що при $\alpha \in (1, 2]$ маємо рівність $\mathbb{P}(\{\tau_y < +\infty\}) = 1$, яким би не було $y \in \mathbb{R}_0$.

Теорема 2. *При всіх $y \in \mathbb{R}_0$ справджується рівність*

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{1/\alpha - 1}\left(1 - \mathbb{E}e^{-\lambda\tau_y}\right) = \frac{\varkappa}{\pi c}\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha - 1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}|y|^{\alpha-1},$$

де $\varkappa = \alpha c^{1/\alpha}\sin(\pi/\alpha)$.

Очевидно, при $\alpha = 2$ теореми 1 та 2 зводяться до одного і того ж твердження.

Наслідок. а) *При всіх $y > 0$ та $\beta \in (0, 1/2)$ маємо $\mathbb{E}(\sigma_y)^\beta < \infty$.*

б) *При всіх $y \in \mathbb{R}_0$ та $\gamma \in (0, 1 - 1/\alpha)$ маємо $\mathbb{E}(\tau_y)^\gamma < \infty$.*

Quotient of a weighted sum of ℓ_1-spaces associated with supersymmetric polynomials

Jawad F.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

farah.jawad@yahoo.com

Zagorodnyuk A.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

andriyzag@yahoo.com

Let $X = \ell_1 \bigoplus \ell_1$. We represent each element z of X by $z = (y|x)$, $x, y \in \ell_1$. Let us consider polynomials $T_m \colon X \to \mathbb{C}$,

$$T_m(z) = F_m(x) - F_m(y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^m - y_k^m).$$

Polynomials T_m, $m \in \mathbb{N}$ are algebraically independent and form an algebraic basis on the algebra of *supersymmetric* polynomials on X. In [3] the algebra of supersymmetric polynomials was investigated and a commutative ring structure on the corresponding quotient set $X/\sim$ was described.

In the talk we will consider a complex Banach space X which is a weighted direct sum of infinity copies of $\ell_1 \bigoplus \ell_1$ and polynomials which are supersymmetric on each term of this sum. We show that under some assumptions, $X/\sim$ is a real locally convex algebra which contains a normed subalgebra. This is an extension of results, obtained in [3], [4].

[1] A. Alencar, R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, *Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55–64.

[2] I. Chernega, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, *A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*. Rev. Mat. Complut., **27** (2) (2014), 575–585.

[3] F. Jawad, A. Zagorodnyuk, *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series*. Symmetry, **11** (9) (2019), 1111 (19 p.).

[4] F. Jawad, H. Karpenko, A. Zagorodnyuk, *Algebras generated by special symmetric polynomials on ℓ_1*. Carpathian Math. Publ., **11** (2) (2019), 335–344.

Секційні доповіді

Секція теорії ймовірностей

Про збіжність майже напевне відстані між розв'язками стохастичного диференціального рівняння з нерегулярними коефіцієнтами

Арясова О. В.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України

oaryasova@gmail.com

В доповіді вивчається стохастичне диференціальне рівняння (СДР) з нерегулярним коефіцієнтом переносу, який, взагалі кажучі, є необмеженим і розривним. Припустимо, що коефіцієнт переносу може бути представлений у вигляді суми дисипативного доданку і вимірного обмеженого члена. Коефіцієнт дифузії вважається ліпшицевим та невиродженим.

Зауважимо, що за таких припущень СДР має єдиний сильний розв'язок.

Розглянемо два розв'язки рівняння, що стартують з різних точок. Доводиться, що для достатньо великих значень дисипативного коефіцієнта відстань між цими розв'язками прямує до нуля майже напевне з експоненціальною швидкістю, коли t прямує до нескінченності. Аналогічний результат одержується також для збіжності в $L_p,\ p \geq 2$.

Розв'язок диференціального рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією.

Базилевич І. Б.

ЛНУ ім. Івана Франка

i_bazylevych@yahoo.com

Якимишин Х. М.

НУ "Львівська політехніка"

yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

Розглянемо гіллястий процес з міграцією та неперенвним часом $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$ [1].

Теорема 1. *[1] Твірна функція процесу $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$, при $|s| \leq 1$ та $s \neq 0$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + g(s)F_\mu(t,s) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{m} P\{\mu(t) = n\}\left(s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t) = n\} s^n r(s) \quad (1)$$

з початковою умовою

$$F_\mu(0,s) = s. \quad (2)$$

Для даного процесу має місце твердження

Теорема 2. *Рівняння* (1) *з початковою умовою* (2) *має розв'язок*

$$F(t,s) = \widehat{F}(t,s) e^{\int\limits_0^t (g(\widehat{F}(u,s)) + r(\widehat{F}(u,s)))du} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{m} \int\limits_0^t P\{\mu(x) = n\} \sum_{k=n+1}^{m} r_k (1 - \widehat{F}^{n-r}(t-x,s)) e^{\int\limits_0^{t-x} (g(\widehat{F}(u,s)) + r(\widehat{F}(u,s)))du} dx, \quad (3)$$

який єдиний у класі неперервно-диференційованих функцій на проміжку $\Delta(\varepsilon) = \{s : s \in [\varepsilon, 1], 0 < \varepsilon < 1\}$, а $\widehat{F}(t,s)$ – твірна функція гіллястого процесу без міграції з неперервним часом.

[1] Христина Якимишин, *Рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією*, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат., **84** (2017), 119–125.

Асимптотика ймовірності банкрутства за умов великих виплат та при існуванні відсоткової ставки на резервний капітал

Білинський А. Я.

Львівський національний університет імені Івана Франка

andrii.bilynskyi@gmail.com

Кінаш О. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Okinasch@yahoo.com

Асимптотику ймовірності банкрутства за умов великих виплат розглянуто, зокрема, в [1], тут виведено асимптотику ймовірності банкрутства для розподілів Парето, Вейбула, Бектандера типу I та II. Однак ці результати не працюють у випадку існування відсоткової ставки на резервний капітал.

Процес ризику у випадку класичної моделі Крамера-Лундберга, коли крім страхових внесків, страхова компанія отримує відсотки на резервний капітал з відсотковою ставкою $\delta > 0$ визначається як

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + c\int\limits_0^t e^{\delta tv}dv - \int\limits_0^t e^{\delta(t-v)}dS(v), t \geq 0,$$

де $S(v) = \sum\limits_{n=1}^{N(t)} X_n$, інтенсивність страхових внесків $c > 0$, u – початковий капітал. [2]

Клюпельберг та Штадмюлер [3] вивчали таку модель у випадку, коли функція розподілу $F(x)$ має "хвости що регулярно змінюються.

Нами, з врахуванням [3], знайдено ймовірність банкрутства у випадку виплат, що мають розподіли Парето та Бектандера.

[1] Білинський А. *Оцінка ймовірності банкрутства у випадку виплат розподілених за субекспоненційними законами* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. Випуск 25, 2017.- С. 56-63

[2] Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник - К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. - 224 с.

[3] Kluppelberg C., Stadtmuller U. *Ruin probability in the presence of heavy tails and interest rates* // Scand. Actuarial J. - 1998. - N 1 - P. 49-58.

Статистичний аналіз текстів передвиборчих програм та їх зв'язок з результатами виборів

Гураль І. М.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
math@nung.edu.ua

Осипчук М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
myosyp@gmail.com

Смоловик Л. Р.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
math@nung.edu.ua

Сучасний етап розвитку людства характеризується бурхливим зростанням кількості інформації. Повноцінне і ефективне забезпечення суспільства новітньою інформацією є необхідною передумовою підвищення ефективності наукових досліджень. Однією з найбільш поширених форм зберігання інформації є інформація, представлена у вигляді текстових ресурсів на мові певної країни, тому аналіз текстів є одним з найважливіших напрямків досліджень.

В даний час великий інтерес у представників різних сфер діяльності викликають політичні події країни. Результати політичних виборів мають прямий вплив на майбутнє країни і населення. Мотиви голосування визначаються багатьма факторами. Хоча в середовищі політиків існує думка, що виборці голосують не за програми і платформи, а за особистості, саме передвиборча програма є концентрованим виразом цілей, завдань і намірів кандидатів, політичних партій, виборчих блоків.

За допомогою статистичних методів авторами було проаналізовано тексти передвиборчих програм кандидатів на пост Президента України на виборах 2019 року. З одержаного набору текстів вибираємо слова і, спочатку підраховуємо частоти, з якими кожне слово зустрічається в кожному із текстів. Далі на основі сентиментальних категорій мови визначаємо частоти, з якими зустрічаються слова кожної категорії в цих текстах. Застосовуючи метод багатовимірного шкалювання визначаємо по одній найбільш вагомій характеристиці серед кількісних та сентиментальних характеристик. Таким чином, утворюється набір даних, який складається з двох числових характеристик, що описують особливості розглянутих текстів.

Маючи на меті вияснити існування зв'язку між текстами передвиборчих програм кандидатів та результатами виборів, а також, класифікувати ці програми та встановити особливості побудованих класів, застосовуємо методи кореляційного та кластерного аналізів. В кореляційному аналізі використовуємо ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена, що продиктовано відносно невеликою кількістю спостережень (кандидатів) та тим, що цей коефіцієнт є індикатором тісноти зв'язку між характеристиками, який задається монотонною (не обов'язково лінійною) функцією. Критерієм наявності зв'язку між характеристиками є значимість відповідного коефіцієнта кореляції. Для визначення значимості вибираємо стандартний граничний рівень значущості, рівний 0,05. В процедурах кластерного аналізу вибрано метод Уорда, який зазвичай приводить до краще структурованих кластерів.

Підготовку даних та всі статистичні обчислення здійснено з допомогою середовища статистичних розрахунків R. Використано також графічні можливості цього середовища. Сентиментні категорії слів визначались за допомогою морфологічного визначника для української мови UGTag.

Встановлено зв'язок між текстами передвиборчих програм кандидатів та офіційними результатами першого туру виборів, а також результатами загальнонаціонального екзит-полу. Застосовуючи процедури кластеризації методом Уорда, виділено чотири групи кандидатів на пост Президента України. Встановлено особливості текстів програм побудованих груп і створено хмарки ключових слів для швидкого сприйняття найбільш вживаних слів і їх розподілу за популярністю один відносно одного.

Асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета коефіцієнта портфеля з максимальним відношенням Шарпа

Заболоцький М. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка

mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua

Заболоцький Т. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

zjabka@yahoo.com

Портфель з максимальним відношенням Шарпа займає особливе місце у множині ефективних портфелів, оскільки відношення Шарпа є одним з головних показників управління портфелем фінансових активів [1]. Властивості вибіркових оцінок характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа досліджувалися в багатьох працях. Зокрема, в [2] і [3] відповідно доведено, що для вибіркових оцінок ваг такого портфеля не існує математичного сподівання та неможливість побудови незміщеної оцінки цих ваг. Враховуючи вищенаведені недоліки портфеля з максимальним відношенням Шарпа, виникає питання: чи можливо використати на практиці портфель з кращими властивостями (наприклад, зі сталими вагами) та характеристиками, що істотно не відрізняються від характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа. Для відповіді на це питання необхідно побудувати статистичний тест, який дасть змогу оцінити відмінність між характеристиками портфелів. Для побудови тесту дослідимо ймовірнісні властивості оцінки бета коефіцієнта у випадку, коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є еталонним, а цільовий – портфель зі сталими вагами.

За умови відсутності безризикового розміщення коштів формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ вектор дохідностей активів портфеля в момент часу t та припустимо, що вектор $\mathbf{X}_t$ має k-вимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\mathbf{X}_t \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$). З [2] та [4] отримаємо

$$\beta_{SR} = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{1}$$

де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці, $\mathbf{w}$ – вектор ваг цільового портфеля, які є сталими. Оскільки параметри розподілу вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_t$ невідомі на практиці, то використаємо вибіркові оцінки, які отримуються на основі вибірки попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\ldots$, $\mathbf{X}_n$, тобто

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j \quad \text{та} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_j-\hat{\boldsymbol{\mu}})'\,. \tag{2}$$

Підставивши оцінки (2) у (1), отримаємо вибіркову оцінку параметра β_{SR}, яку позначимо $\hat{\beta}_{SR}$.

Теорема 1. *За наших припущень маємо*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR}-\beta_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2), \quad n\to+\infty,$$

де

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{2(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} - \frac{4(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3} + \frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\\ &+ \frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})+2(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})-2(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\end{aligned}$$

та $\xrightarrow{d}$ *позначає збіжність за розподілом.*

[1] Хохлов В. Ю., *Математичні методи в управлінні портфелем цінних паперів*, К.: Кондор-Видавництво, (2017), 298 с.

[2] Okhrin Y., Schmid W., *Distributional properties of optimal portfolio weights*, Journal of econometrics, **134** (2006), 235–256.

[3] Schmid W., Zabolotskyy T., *On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio*, ASTA – Advances in Statistical Analysis, **92** (2008), 29–34.

[4] Bodnar T., Gupta A. K., Vitlinskiy V., Zabolotskyy T., *Statistical inference for the beta coefficient*, Risks, **7** (2019), 56.

Про напівгрупу Феллера для одновимірного процесу дифузії з рухомими мембранами

Копитко Б. І.

Ченстоховський політехнічний університет, Ченстохова, Польща
bohdan.kopytko@im.pcz.pl

Шевчук Р. В.

Національний університет «Львівська Політехніка», Львів
r.v.shevchuk@gmail.com

Доповідь присвячена двом взаємопов'язаним питанням: встановленню класичної розв'язності однієї початково-крайової задачі для лінійного одновимірного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами з нелокальними складовими інтегрального типу в крайових умовах та знаходженню за допомогою її розв'язку інтегрального зображення двопараметричної напівгрупи Феллера, якій відповідає на заданому проміжку прямої деякий неоднорідний марковський процес. Об'єднання цих двох питань представляє так звану задачу про склеювання двох дифузійних процесів, заданими своїми твірними диференціальними операторами в підобластях заданого проміжка, яку ще можна трактувати як задачу про побудову математичної моделі фізичного явища дифузії в середовищі з мембранами. При цьому додатково припускається, що в межових точках розглядуваних областей, де розташовані рухомі мембрани (це означає, що положення цих точок на числовій прямій визначається за допомогою заданих функцій, які залежать від часової змінної), вважаються заданими відповідні варіанти загальної крайової умови або умови спряження Феллера-Вентцеля [1].

Розв'язок параболічної задачі спряження отримано методом граничних інтегральних рівнянь і доведено, що він володіє напівгруповою властивістю. Наявність інтегрального зображення для знайденої напівгрупи дозволяє відносно легко обгрунтувати твердження про те, що ця напівгрупа породжує на заданому проміжку прямої деякий неоднорідний марковський процес.

[1] *Вентцель А.Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР. Математика. – 1956. – **111**, №2. – С. 269–272.

Про потенціал простого шару для деякого псевдодиференціального рівняння, пов'язаного з лінійним перетворенням симетричного α-стійкого випадкового процесу

Мамалига Х. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mamalygakhrystyna@gmail.com

Осипчук М. М.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

Розглянемо процес Маркова $(x_0(t))_{t\geq 0}$ в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ зі щільністю ймовірності переходу

$$g_0(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,x-y)-t|\xi|^\alpha} d\xi, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$$

який і називається симетричним α-стійким випадковим процесам з показником $\alpha \in (0,2]$. Ми розглядатимемо ситуацію, коли $\alpha \in (1,2)$.

Нехай P деяка невироджена $d \times d$-матриця і $x(t) = Px_0(t)$, $t \geq 0$. Тоді щільність ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ задаватиметься рівністю

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,x-y)-t(Q\xi,\xi)^{\frac{\alpha}{2}}} d\xi, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d \qquad (1)$$

в якій $Q = PP^*$.

Функція (1) є фундаментальним розв'язком псевдодиференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \qquad (2)$$

в якому псевдодиференціальний оператор $\mathbf{A}$ задається символом $(-(Q\xi,\xi)^{\frac{\alpha}{2}})_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Оператор $\mathbf{A}$ є генератором процесу Маркова $(x(t))_{t\geq 0}$.

Нехай задана деяка поверхня S та неперервна функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in S}$, для якої при кожному $T > 0$, для всіх $t \in (0;T]$, $x \in S$ виконується

$$|\ \psi(t,x)\ | \leq C_T t^{-\beta}$$

з деякими сталою $\beta < 1$ та сталою $C_T > 0$, яка, можливо, залежить від T.

Щодо поверхні S в цій доповіді будемо припускати, що вона належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0;1)$ та ділить множину $\mathbb{R}^d$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D_- та зовнішню D_+ (так, що $\mathbb{R}^d = D_- \cup S \cup D_+$) і, крім того, є або обмеженою, або ж необмеженою і такою, що в кожних двох її точках зовнішні нормалі утворюють кут, косинус якого відділений від нуля. Очевидно, що гіперплощина належить до останнього випадку.

Функція $(v(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю

$$v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)d\sigma_y, \quad t>0, x\in\mathbb{R}^d, \tag{3}$$

в якій внутрішній інтеграл є поверхневим інтегралом першого роду, зветься потенціалом простого шару на поверхні S з густиною ψ для рівняння (2).

Визначимо оператор $\mathbf{B}$ символом $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Нескладні підрахунки приводять до співвідношення

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \left(\nabla, \mathbf{B}\varphi(Q^{1/2}\cdot)\right)(Q^{-1/2}x), \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

правильне для кожної функції φ з області визначення оператора $\mathbf{A}$. Нехай ν — деякий фіксований орт із $\mathbb{R}^d$. Розглянемо псевдодиференціальний оператор $\mathbf{B}_\nu = (Q\nu, \mathbf{B})$, який можна розглядати як аналог похідної в конапрямі вектора ν.

Потенціал простого шару (3) є неперервною на $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d$ функцією, яка при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d\backslash S$ задовольняє рівняння (3), а також справджується наступне твердження.

Теорема. *За сформульованих вище припущень для кожних $t>0$, $x\in S$ виконується*

$$\begin{aligned}\lim_{z\to x\pm} B_{\nu(x)}v(t,\cdot)(z) = \mp\, &\frac{1}{2}\psi(t,x) + \\ &\int_0^t d\tau \int_S B_{\nu(x)}g(t-\tau,\cdot,y)(x)\psi(\tau,y)d\sigma_y,\end{aligned} \tag{4}$$

де $z\to x\pm$ означає, що $z = x+\delta\nu(x)$ і $\delta\to 0\pm$, а $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні S в точці x.

Зауваження. *Інтеграл у правій частині рівності* (4) *називається прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x\in S$ на потенціал простого шару* (3) *в точці $x\in S$.*

Про одну модельну задачу для параболічного рівняння другого порядку та пов'язану з нею напівгрупу Феллера

Новосядло А. Ф.

ЛНУ ім. І.Франка

nandrew183@gmail.com

Розглядається друга модельна початково-крайова задача для параболічного рівняння другого порядку при багатьох просторових змінних за умови, коли коефіцієнти рівняння можуть мати розриви першого роду вздовж деякої фіксованої поверхні (вона розділяє задану область на дві підобласті), на якій задаються дві умови спряження. При цьому одна з цих умов є відображенням властивості неперервності шуканого розв'язку задачі, а друга представляє один з варіантів загальної крайової умови Вентцеля [1], до якої, крім похідних по нормалі від невідомої функції, входять також її похідні першого і другого порядків за дотичними змінними. Зауважимо, що особливістю даної задачі є те, що вона не є параболічною в тому сенсі, що для неї не виконується так звана умова сумісного накривання [2] (у випадку початково-крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку з гладкими коефіцієнтами аналогічну умову називають умовою доповняльності). А це означає, що ця задача не вкладається в клас початкового-крайових задач для параболічний рівнянь і систем, для яких побудована загальна теорія. Нагадаємо також [3], що подібного типу початково-крайові задачі для параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами виникають, зокрема, в теорії випадкових процесів при розв'язанні аналітичними методами так званої задачі про склеювання двох дифузійних процесів у скінченновимірному евклідовому просторі або, що те ж саме, при побудові математичних моделей фізичного явища дифузії в середовищах, де на фіксованих поверхнях розташовані мембрани. Класичну розв'язність розглядуваної задачі спряження у просторі обмежених неперервних функцій отримано нами методом граничних інтегральних рівнянь. Доводиться також, що за допомогою розв'язку цієї задачі можна побудувати однопараметричну напівгрупу Феллера, яка породжує у відповідній області скінченновимірного евклідового простору деякий однорідний марковський процес. Крім того показано, що побудований в описаний спосіб процес, можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М. І. Портенка [3].

[1] Дынкин Е.Б., *Марковские процессы*, -М. : Физматгиз, (1963), –859 с.

[2] Жирашу Н.В., Эйдельман С.Д., *Параболические граничные задачи*, -Кишинев: Штиинца, (1992), –328 с.

[3] Портенко М.І., *Процеси дифузії в середовищах з мембранами*, - Інститут математики НАН України, Київ, (1995), –199 с.

Про проблему вибору розв'язку диференціального рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами, який збурюється малим шумом

Пилипенко А.Ю.

Інститут математики НАН України

pilipenko.ay@gmail.com

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$dX_0(t) = a(X_0(t))dt, X_0(0) = 0 \tag{1}$$

та його збурення малим шумом

$$dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))dt + \varepsilon b(X_\varepsilon(t-))dZ(t), X_\varepsilon(0) = 0, \tag{2}$$

де Z – процес Леві.

Якщо функції a, b задовольняють локальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту, то обидва рівняння мають єдині розв'язки. При цьому неважко перевірити, що має місце рівномірна збіжність за ймовірністю

$$\forall T > 0 \quad \sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t) - X_0(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Припустимо, тепер, що умова Ліпшиця для a порушується. Якщо шум невироджений, то рівняння (2) має єдиний розв'язок [2, 4–6] при досить загальних умовах на a, на відміну від (1).

Ми вивчаємо задачу про знаходження границі за розподілом послідовності $\{X_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ у випадку, коли перенос a правильно змінюється в околі нуля з індексом $\beta < 1$.

Відповідна границя з певними ймовірностями обирає максимальний та мінімальний розв'язки (1). Цей результат є узагальненням робіт [1, 3].

[1] R. Bafico, P. Baldi, *Small random perturbations of Peano phenomena*, Stochastics, **6**, n. 3, (1982), 279–292.

[2] Engelbert, H. J. and Schmidt, W. *Strong Markov Continuous Local Martingales and Solutions of One-Dimensional Stochastic Differential Equations (Part III).* Mathematische Nachrichten, **151(1)**, (1991), 149–197.

[3] A. Pilipenko, F. Proske, *On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise.* Statistics & Probability Letters. **132**, January 2018, 62–73.

[4] Portenko N.I. *Some perturbations of drift-type for symmetric stable processes* Random Operators and Stochastic Equations, **2(3)**, (1994), 211–224.

[5] Tanaka, H., Tsuchiya, M., and Watanabe, S. 1974. *Perturbation of drift-type for Lévy processes. Journal of Mathematics of Kyoto University*, **14(1)**: 73-92.

[6] A.Yu. Veretennikov *On the strong solutions of stochastic differential equations* Theory Probab. Appl. **24**, N 2, (1979), p. 354–366.

Гранична поведінка випадкових блукань з затримками у нулі

Приходько О. О.

Київський політехнічний інститут

o.prykhodko@yahoo.com

Розглянемо випадкове блукання $\{\tilde{S}(n)\}$, яке поводить себе як симетричне випадкове блукання із інтегровними з квадратом стрибками, за винятком точки 0. При потраплянні в точку 0, воно затримується на випадкову кількість часу $\eta_i \geq 0$ (н.о.р.); а далі продовжує іти як звичайне випадкове блукання. В роботі досліджується гранична поведінка такого блукання, нормованого як у теоремі Донскера, $\frac{\tilde{S}(nt)}{\sqrt{n}}$. Для випадку $\mathbb{E}\eta_i < \infty$ одержано збіжність до звичайного вінерівський процесу. Для випадку схеми серій $\{\eta_i^n \sim Geom(\frac{p}{n^\gamma})\}$ встановлено, що можливі лише наступні режими: вінерівський процес, вінерівський процес зупинений в 0, вінерівський процес із липкою точкою 0.

Найпростіші моделі стандартного алгоритму Монте-Карло розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Сеничак В. В.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

wsenyc@gmail.com

Дискретна модель випадкових блукань

В основу найпростішої схеми дискретного варіанту стандартного алгоритму методу Монте-Карло чисельного розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа в довільній області покладено принципи випадкових блукань по вузлах цілочисельної решітки з метою отримання певної "винагороди" за вихід частинки із внутрішньої вузлової точки області в граничну. При цьому "винагорода" визначається відносною частотою кількості досягнень випадковою частинкою кінцевої (граничної) точки.

В роботі [1] описано алгоритм, за яким можна отримати наближений розв'язок в одній будь-якій внутрішній точці A області Ω за формулою

$$U\left(A\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} n_i{\cdot}U_i,$$

де N — число (кількість) вузлів на границі області Ω;

n — загальне число маршрутів частинки, що здійснює випадкові блукання з точки A;

n_i — число (кількість) досягнень частинкою граничних вузлів B_i;

U_i — значення функції U в точках B_i: $U_i = U\left(B_i\right)$.

Вважається, що необхідна точність вагових коефіцієнтів (відносних частот $\frac{n_i}{n}$) може бути забезпечена лише при дуже великих n у відповідності до закону великих чисел (у формі Бернуллі). В такому випадку відносні частоти виявляють властивість стійкості, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n} = L_i,$$

де числа L_i є ймовірностями переходу частинки з точки A в точку B_i. Таким чином, теорема Бернуллі гарантує збіжність (по ймовірності) послідовностей відносних частот до деякого граничного значення.

У підсумку зазначимо, що дискретна схема випадкових блукань, яка грунтується тільки на комбінаторних властивостях, приводить до результатів, які є справедливими і у своїй граничній формі. Граничний перехід дає змогу замінити многочисельні зигзагоподібні маршрути у схемах випадкових блукань на один прямолінійний (граничний) у відповідності до фізичного змісту.

Неперервна модель випадкових блукань

Ідею побудови алгоритму, що грунтується на моделюванні точок послідовного виходу траєкторії із деяких простих областей, наприклад, сфер ("процес блукання по сферах" або "сферичний процес") для рівняння Лапласа запропонував Дж. Броун. Математичне обгрунтування (як наслідок відомої теореми про середнє значення для гармонійної функції) в значній мірі належить М. Мюллеру [2].

Між схемою Броуна-Мюллера "блукання по сферах (по колах)" і механізмом розповсюдження частинок є прямий зв'язок: як тільки блукаючі частинки досягнуть країв області (торкнуться границі), вони почнуть прилипати до границі (поглинатись нею), що стало можливим інтерпретувати "блукання по сферах" як стандартний алгоритм методу Монте-Карло.

Отже, "сферичний процес" передбачає наближення випадкової частинки до границі області (граничної точки B_i) по сферах (колах) радіусом $r = r(t)$ за час t. В [3], зокрема, зазначено, що "сферичне блукання" суттєво ефективніше за блукання по сітці, однак з ймовірністю 1 блукання по сферах не виходить на границю за скінченну кількість кроків.

Висновки

Аналіз найпростіших моделей випадкових блукань (дискретної і неперервної) показав, що перехідна ймовірність ("винагорода" за вихід частинки з внутрішньої точки області в граничну) не залежить ні від форми маршруту, ні від їх кількості, ні від часу, а визначається лише координатами початкової і кінцевої точок.

[1] В.М. Сеничак, В.В. Сеничак. *Ймовірнісна інтерпретація скінченно-різницевих та скінченно-елементних апроксимацій у крайових задачах еліптичного типу*, Прикарпатський вісник НТШ Число, **38** (2) (2017), 57–70.

[2] M. Muller. *Some Continuous Monte Carlo Methods for the Dirichlet Problem* , The Annals of Mathematical Statistics, **27** (3) (1956), 569–589.

[3] С.М. Ермаков, Т.А. Михайлов. Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982. — 296 с.

Discrete models and probabilistic schemes for the boundary value problem solution of elliptic partial differential equations

Senychak V. M.

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
wsenyc@gmail.com

Senychak V. V.

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
wsenyc@gmail.com

The Dirichlet problem for the Laplace equation is one of the most important problems in mathematical physics and is widely used in engineering calculations. Such a problem arises in the study of stationary temperature fields, bending of plates of arbitrary shape, torsion of prismatic rods, filtration through a porous medium, eddy motion of an ideal fluid, distribution of electric or magnetic potential, etc.

The discretization of problems formulated in terms of differential or integral equations is accomplished by well-crafted finite difference, finite element, boundary element and control volume methods, or the ubiquitous Monte Carlo algorithm. However, traditional versions of discrete methods lead to large-scale problems and creation and solving of appropriate systems of linear algebraic equations, which to some extent impede the widespread practical use of these methods.

The simplest models of the random walks serve as a foundation of the statistical algorithm of the Monte Carlo method for numerical solving of the Dirichlet problem for Laplace's equation. The analysis of such models revealed that a transitional probability (a "reward"that particle receives after leaving the boundary) does not depend on the shape of the route, nor the particle's number, nor time. However, it is determined only by the coordinates of the particle's start and end points. In this case, the boundary crossing makes it possible to replace the numerous zigzag routes in the schemes of random walks by one straight boundary line in accordance with the physical content.

A simple way of an explicit constructing of the basic functions of simplex elements of linear type based on geometric probability, which is consistent with the physical and mechanical content in the real processes of the Brownian motion, justifies the establishment of the barycentric coordinates equivalent to the simplex element by transitional probabilities in the schemes of random walks.

For practical implementation of the aforementioned problems, a workable and effective analogue was suggested and proved to be correct according to probabilities, physical and computational aspects of the model - Simplex Moving Method, which is advantageous due to significant reduction of the volume of preparatory and computational work by eliminating grid discretization with its bulky operations.

The computational template uses only one simplex element of linear type (in the form of a triangle in the two-dimensional case, and in the form of a tetrahedron in the three-dimensional case) with vertices at the boundary of the study area. It is envisaged to move it systematically so that new boundary nodes are included in the calculation. The computational procedure of sequential movement of the simplex element implements the process of wandering of the Brownian particle, and the value of the function at the inner point is determined in the form of an average reward for the exit of the particle to the boundary nodal point.

On the basis of the discrete equivalent of the fundamental principle of the mean value for harmonic functions, a technique for selecting the minimum number of nodes at the boundary of the study area was developed, and the most reliable results can be obtained involving the nodes in the computational process.

A series of computational experiments carried out with the help of computer programs that implement the Simplex Moving Method clearly demonstrates the advantages and benefits of the proposed approach while effectively solving boundary value problems of mathematical physics. In this case, the results of the calculations do not depend on the location of the study area in the selected coordinate system relative to its center, and the value of the desired function can be calculated for any number of arbitrarily placed points, including one.

Above mentioned algorithms and programs are informative enough so that they can be successfully used in solving problems of fluid dynamics, heat conduction, theory of elasticity, etc.

A new approach to solving boundary value problems of elliptic type offers great opportunities for raising a number of problems in the futher theoretical and experimental research and development of modern technologies of computerised implementation.

Обрахунок страхового тарифу у випадку F-моделі

Чорний Р. О.

ЛНУ ім. Івана Франка

rostykchornyy@gmail.com

Кінаш О. М.

ЛНУ ім. Івана Франка

okinasch@yahoo.com

Було розгячнуто задачу на визначення страхового тарифу в умовах фактирозаційної моделі[див. [1], ст.248]. Виведено формулу для визначення оптимальної страхової ставки. Також розглянуто ряд прикладів за умов виплат розподілених за законами Вейбула, Паретто та Бектандера 1-го та 2-го типів.

[1] Королев В.Ю. *Математические основы теории риска.*/ В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. - , М.:Физматлит,(2011). - 620 с.

Дослідження асимптотики радіуса та стабілізації кута розв'язку двовимірного стохастичного диференціального рівняння

Юськович В. К.

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»

viktyusk@gmail.com

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння (СДР)

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + \sigma(X(t))\mathrm{d}W(t),$$

де $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ — двовимірний вінерівський процес.

Припускається, що коефіцієнти

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

задовольняють умови існування та єдиності розв'зку СДР (див. [1]).

Введемо полярні координати

$$R(t) = |X(t)|, \varPhi(t) = \frac{X(t)}{|X(t)|}.$$

Ми вивчаємо умови на коефіцієнти СДР, при яких:

- $R(t) \to \infty, t \to \infty$ майже напевно;
- існує границя $\lim_{t\to\infty} \varPhi(t)$ майже напевно, —

та досліджуємо асимптотику зростання $R(t)$ при $t \to \infty$.

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения.* – К.: Наукова думка (1968). – 356 с.

Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball

Baksa V. P.

Ivan Franko National University of Lviv
vitalinabaksa@gmail.com

Bandura A. I.

Ivan Franko National University of Lviv
andriykopanytsia@gmail.com

Skaskiv O. B.

Ivan Franko National University of Lviv
olskask@gmail.com

For $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+ := (0, +\infty)^2)$ we denote by $\mathbb{D}^2((z_0, \omega_0), R) = \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| < r_1, |\omega - \omega_0| < r_2\}$ a polydics, and by $\mathbb{B}^2((z_0, \omega_0), r) = \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} < r\}$ a ball of the radii $r > 0$, $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^2((0, 0), 1)$.

An analytic vector-valued function $F = (f_1, f_2) : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ is said to be *of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables*, if there exists $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that $(\forall (z, \omega) \in \mathbb{B}^2)$ $(\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2_+)$

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z, \omega)\|}{i!j!l_1^i(z, \omega)l_2^j(z, \omega)} \leq \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} : k, m \in \mathbb{Z}_+, k + m \leq n_0\right\}.$$

Here $\|F\| = \max\{|f_j| : j \in \{1, 2\}\}$.

We put

$$M(R, (z_0, \omega_0), F) = \max\left\{\|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2((z_0, \omega_0), R)\right\},$$

where $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$, $R \in \mathbb{R}^2_+$. Then

$$M(R, (z_0, \omega_0), F) = \max\left\{\|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{D}^2((z_0, \omega_0), R)\right\},$$

because the maximum modulus of the analytic vector-function in a closed bidisc is attained on its skeleton.

Theorem 1. *Let* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$, $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *be an analytic vector-function. If there exist* $R', R'' \in \mathbb{R}^2_+$, $R' < R''$,$|R''| < \beta$ *and* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *such that for each* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}, (z_0,\omega_0), F\right) \leq p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}, (z_0,\omega_0), F\right) \tag{1}$$

then F *has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables.*

For every $f \in \mathcal{E}^p$ denote by $K(f, Z)$ class of entire functions of the form $f(z,\omega) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$, where $\{Z_n(\omega)\}$ is a Rademacher sequence, i.e. a sequence of independent random variables such that $\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega) = -1\} = \mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega) = 1\} = 0,5$ $(n \in \mathbb{N})$.

Theorem 2. *Let* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *If analytic vector-function* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables then for all* $R', R'' \in \mathbb{R}^2_+$, $R' < R''$, $|R''| \leq \beta$ *there exists* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *such that for every* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *inequality* (1) *holds.*

Про множину борелівських виключних векторів для цілих кривих

Бандура А. І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

mh@nung.edu.ua

Савчук Я. І.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

mh@nung.edu.ua

Будемо використовувати основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1].

Розглядатимемо цілі криві з лінійно незалежними компонентами і без спільних нулів.

Відповідно до означення борелівського виключного значення для мероморфної функції ненульовий вектор $\vec{a} \in C^p$ назвемо *борелівським виключним вектором для цілої кривої* $\vec{G} : C \to C^p$, якщо категорія росту $N\left(r, \vec{a}, \vec{G}\right)$ нижча за категорію росту $T\left(r, \vec{G}\right)$.

Відомо (див., напр. ст. 130 в [2]), що трансцендентна мероморфна функція не може мати більше двох борелівських виключних значень. Нам вдалося цей результат перенести на випадок цілих кривих.

Теорема 1. *Для довільної трансцендентної цілої кривої $\vec{G} : C \to C^p$ будь-яка допустима система борелівських виключних векторів містить не більше p векторів.*

Ця теорема не дає повного описання структури множини борелівських виключних векторів аналогічно до описання структури множини неванліннівських дефектних векторів в [3]. Для прикладу розглянемо цілу криву

$$\vec{G}(z) = \left(1, z, \ldots, z^{n-2}, e^z\right), \tag{1}$$

яка, очевидно, має перший порядок, отже,

$$\ln r = o\left(T\left(r, \vec{G}\right)\right).$$

Для довільного ненульового вектора

$$\vec{a} \in B_1 = \left\{\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}, 0) : b_j \in C, j = \overline{1, p-1}\right\}$$

маємо $n\left(r, \vec{a}, \vec{G}\right) = O(1)$, тобто $N\left(r, \vec{a}, \vec{G}\right) = O(\ln r)$, тому усі вектори із $B_1 \backslash \left\{\vec{0}\right\}$ будуть виключними борелівськими для цілої кривої (**??**). Також виключними борелівськими будуть вектори виду $\vec{a} = (0, 0, \ldots, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$, бо для кожного з них $n\left(r, \vec{a}, \vec{G}\right) = 0$, і відповідно, $N\left(r, \vec{a}, \vec{G}\right) = 0$. Зауважимо, що B_1 – підпростір розмірності $(p-1)$ із C^p. Очевидно, p векторів $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$,$\vec{e}_p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ є ортонормованим базисом в C^p і утворюють допустиму систему в C^p. Кожен з них є борелівським виключним для $\vec{G}$ виду (1).

Множину усіх борелівських виключних векторів для цілої кривої $\vec{G}$ позначатимемо $B\left(\vec{G}\right)$. Стосовно цієї множини отримано таку властивість.

Теорема 2. *Для довільної трансцендентної цілої кривої $\vec{G} : C \to C^p$ множина $B\left(\vec{G}\right) \cup \left\{\vec{0}\right\}$ є скінченним об'єднанням підпросторів $A_j \subset C^p$ розмірності $\leq p-1$, причому існує не більше p лінійно незалежних векторів, що кожен з A_j є лінійною оболонкою якихось з цих векторів.*

Нам не вдалося розв'язати обернену задачу для множини борелівських виключних векторів цілої кривої аналогічно до того, як це зроблено в [4] для множини неванліннівських дефектних векторів.

[1] Петренко В.П. Целые кривые. Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.

[2] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[3] Савчук Я.И. Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка. – Укр. мат. журн., 1985, т. 37, № 5, с. 609 - 615.

[4] Савчук Я.И. О множестве дефектных векторов целых кривых. – Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 3, с. 385 -389.

Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Боднар Д. І.

Тернопільський національний економічний університет

bodnar4755@ukr.net

Біланик І. Б.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

i.bilanyk@ukr.net

Возняк О. Г.

Тернопільський національний економічний університет

olvoz@ukr.net

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) з нерівнозначними змінними при фіксованих значеннях змінних зводяться до ГЛД спеціального вигляду з комплексними ементами

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $i_0 = N$, $N -$ фіксоване натуральне число, що визначає розмірність ГЛД, $\mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\ : 1 \le i_k \le i_{k-1} \le ... \le i_0;\ k \ge 1\}$.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють умови:*

$$\Im(b_{i(2p-1)}) \ge 0,\ \Im(b_{i(2p)}) \le 0,\ p = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\Re(b_0) \ge \delta,\ \Re(b_{i(k)}) \ge \delta,\ \delta > 0,\ i(k) \in \mathcal{I},$$

$$0 < a_{i(k)} < M,\ M > 0,\ i(k) \in \mathcal{I}.$$

Тоді ГЛД (1) *збігається і для швидкості збіжності справджується оцінка*

$$|f_m - f_{Nn}| < D \left(\frac{(\delta^2 + 4M)^{1/2} - \delta}{(\delta^2 + 4M)^{1/2} + \delta} \right)^n,\ m \geq Nn,$$

де D – *деяка додатна стала, що не залежить від* m *і* n.

Зауваження 2. *Твердження теореми залишається вірним, якщо умову* (2) *замінити умовою*

$$\Im(b_{i(2p-1)}) \leq 0,\ \Im(b_{i(2p)}) \geq 0,\ p = 1, 2, \ldots.$$

Continuity of solutions for a class of fourth-order quasilinear elliptic equations via Wolff potentials

Voitovych M. V.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine

voitovichmv76@gmail.com

We consider a class of quasilinear elliptic fourth-order partial differential equations in the divergence form, which prototype is

$$\sum_{|\alpha|=2} D^\alpha\big(|D^2 u|^{p-2} D^\alpha u\big) - \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha\big(|Du|^{q-2} D^\alpha u\big) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad (1)$$

where Ω is a bounded open set in $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\Omega)$, $1 < p < n/2$, $2p < q \leqslant n$.

Such type of equations were first considered in [7] and subsequently became the subject of numerous studies in the context of existence and regularity of generalized solutions to high-order nonlinear PDEs (see, e.g., [5, 8] for references). In particular, in the recent work [8] the famous result of T. Kilpeläinen and J. Malý [4] on the pointwise $\mathbf{W}^f_{1,q}$-potential estimates of solutions to the q-Laplace equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = f$ was extended to equations of the form (1). The pointwise estimates obtained in [8] provide the local boundedness of solutions to Eq. (1) if $\sup\limits_{x\in\Omega} \mathbf{W}^f_{1,q}(x; R) < +\infty$ for any $R > 0$. Here, the function f is extended by zero on $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ and, by definition (see, for instance, [1, 4]),

$$\mathbf{W}^f_{1,q}(x; R) = \int_0^R \left(r^{q-n} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy \right)^{1/(q-1)} \frac{dr}{r}$$

is the Wolff potential of the function f in the ball $B_R(x)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-x|<R\}$.

The proof of the interior continuity of solutions to Eq. (1) in terms of the potential $\mathbf{W}^f_{1,q}$ requires further studies which are the subject of this report. The main result of the report is the following inequality for the oscillation $\operatorname{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} = \operatorname{ess\,sup}_{B_\rho(x_0)} u - \operatorname{ess\,inf}_{B_\rho(x_0)} u$ of an arbitrary generalized solution u to Eq. (1) in the balls $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0) \subset B_{2R}(x_0) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} &\leqslant C(\rho/R)^{\vartheta} \operatorname{osc}\{u; B_R(x_0)\} \\ &\quad + C(\rho^\theta R^{1-\theta})^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + C \sup_{x\in\Omega} \mathbf{W}^f_{1,q}(x; 4\rho^\theta R^{1-\theta}),\end{aligned} \tag{2}$$

where $\theta \in (0,1)$ is arbitrary, and $C = C(n,p,q)$ and $\vartheta = \vartheta(n,p,q,\theta)$ are some positive constants. The proof of this inequality is based on the use of the modified Kilpeläinen-Malý method (see [8]) and the pointwise $\mathbf{W}^f_{1,q}$-potential estimates of superpositions of solutions and Moser-type logarithmic functions [6, 7].

As in the case of second-order equations (see, e.g., [4,5]), estimate (2) implies the continuity of the solution u at the point $x_0 \in \Omega$ if

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{x\in\Omega} \mathbf{W}^f_{1,q}(x;\rho) = 0, \tag{3}$$

and also the local Hölder continuity of solutions of Eq. (1) under the assumption that f belongs to the Morrey space $M^\tau(\Omega)$ with some $\tau > n/q$.

We also apply estimate (2) and condition (3) to prove the continuity of solutions of Eq. (3) in the following borderline cases:

(i) $n > q$ and f belongs to the Lorentz space $L^{n/q,1/(q-1)}(\Omega)$;

(ii) $n = q$ and f belongs to the Orlicz-Zygmund space

$$L(\log L)^{n-1}(\log\log L)^{n-2}\cdots(\log\cdots\log L)^{n-2}(\log\cdots\log L)^{n-2+\epsilon}(\Omega),\ \ \epsilon > 0.$$

This results are the sharp analogues of those valid in the case of second-order equations (cf. [2, 3]).

[1] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, in: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[2] V. Ferone, N. Fusco, *Continuity properties of minimizers of integral functionals in a limit case*, J. Math. Anal. Appl., **202** (1) (1996), 27–52.

[3] R. Jiang, P. Koskela, D. Yang, *Continuity of solutions to n-harmonic equations*, Manuscripta Math., **139** (1-2) (2012), 237–248.

[4] T. Kilpeläinen, J. Malý, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*, Acta Math. **172** (1) (1994), 137–161.

[5] A. A. Kovalevsky, I. I. Skrypnik, A. E. Shishkov, *Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2016.

[6] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960) 457–468.

[7] I. V. Skrypnik, *Higher order quasilinear elliptic equations with continuous generalized solutions* (Russian), Differentsial'nye Uravneniya, **14** (6) (1978), 1104–1118.

[8] M. V. Voitovych, *Pointwise estimates of solutions to $2m$-order quasilinear elliptic equations with m-(p,q) growth via Wolff potentials*, Nonlinear Anal., **181** (2019), 147–179.

Hypercomplex monogenic approach to the theory of isotropic plane media

Gryshchuk S. V.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

gryshchuk@imath.kiev.ua

We seek, among of all two-dimensional commutative associative algebras of the second rank with the unity, a totally of all their bases $\{e_1, e_2\}$, such that $e_1^4 + 2e_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$, $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$. This set is found in an explicit form and complete the previous its subset which was found in [1]. Considered an approach of algebra-valued "analytic" functions $\Phi(xe_1 + ye_2)$ (x and y are real variables), such that their real-valued function-components satisfy the biharmonic equation. The similar approach to the orthotropic media (which is not isotropic) is considered in [2, 3].

This research is partially supported by the State Program of Ukraine (Project No. 0117U004077).

[1] I. P. Mel'nichenko, *Biharmonic bases in algebras of the second rank*, Ukr. Math. J., **38** (2) (1986), 224–226.

[2] Gryshchuk S. V., *Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I*[Ukrainian, English summary], Ukr. Mat. Zh., **70** (8) (2018), 1058–1071; English translation (Springer): Ukr. Math. Z., **70** (8) (2019), 1221–1236.

[3] S. V. Gryshchuk, *Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of the plane orthotropy. II* [Ukrainian, English summary], Ukr. Mat. Zh., **70** (10) (2018), 1382–1389; English translation (Springer): Ukr. Mat. Zh., **70** (2019) (10), 1594-–1603.

Траєкторно регулярні та одностайно поступальні оператори перетворення координат

Грушка Я.І.

Інститут Математики НАН України

grushka@imath.kiev.ua

В цій доповіді під ***координатним простором*** будемо розуміти математичний об'єкт $\mathfrak{Q}$ одного з наступних трьох типів:

1. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ — топологічний простір;
2. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathbb{K}, +, \times)$ — векторний простір;
3. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathbb{K}, +, \times, \mathcal{T})$ — топологічний векторний простір,

де $\mathcal{T}$ є топологією на множині $\mathfrak{X}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — поле дійсних або комплексних чисел, а $+$ та $\times$ є бінарними операціями додавання векторів з $\mathfrak{X}$ та множення векторів з $\mathfrak{X}$ на скаляри з поля $\mathbb{K}$. В усіх трьох випадках множину $\mathfrak{X}$ позначатимемо через $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}.$$

При цьому в першому випадку кооринатний простір $\mathfrak{Q}$ називатимемо ***топологічним координатним простором***, а в другому та третьому випадку — ***векторним*** та ***топологічним векторним*** координатним простором (відповідно).

Означення 1. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — координатні простори, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ і $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_1, \leq_2)$ ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \neq \emptyset$) — довільні лінійно упорядковані множини* (в сенсі [2, стор. 12]). *Довільну бієкцію $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ будемо називати оператором перетворення координат* (ОПК) *з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Множину всіх ОПК з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо позначати через:*

$$\mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2).$$

Траєкторією точки $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ відносно ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати множину:

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) := \{\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} \subseteq \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2).$$

Означення 2. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — векторні координатні простори. ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати:*

1) ***траєкторно регулярним****, якщо для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ траєкторія $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ є функцією (тобто $\forall (\tau_1, \mathrm{y}_1), (\tau_1, \mathrm{y}_1) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ з умови $\tau_1 = \tau_2$ випливає рівність $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$;*
2) ***одностайно-поступальним*** *(скорочено —* ***одностайним****), якщо ОПК є $\mathscr{U}$ траєкторно регулярним і для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ існує такий вектор $\zeta = \zeta_{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, що:*

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_2) = \{(\tau, \mathrm{y} + \zeta) \mid (\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_1)\}.$$

Одностайні ОПК описують перетворення координат з рухомої одностайно-поступальної системи відліку в задану нерухому систему відліку у векторних універсальних кінематиках. Одностайно-поступальні системи відліку цікаві тим, що для таких систем відліку можна дати чітке і однозначне означення переміщення рухомої системи відліку відносно нерухомої, яке не залежить від вибору нерухомої точки в рухомій системі відліку [1,3].

Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — довільні координатні простори.

Означення 3. *ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати:*

1) ***часододатнним****, якщо для довільних $(t_1, \mathrm{x}_1), (t_2, \mathrm{x}_2) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ та $(\tau_1, \mathrm{y}_1), (\tau_2, \mathrm{y}_2) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ з умов $\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\tau_i, \mathrm{y}_i)$ $(i \in \{1, 2\})$ $\tau_1 <_2 \tau_2$ і $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$ випливає нерівність $t_1 <_1 t_2$ (де $<_1$ та $<_2$ — відношення строгого порядку, породжені відношеннями нестрогого порядку $\leq_1$ та $\leq_2$ відповідно).*
2) ***часовід'ємним****, якщо для довільних $(t_1, \mathrm{x}_1), (t_2, \mathrm{x}_2) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ та $(\tau_1, \mathrm{y}_1), (\tau_2, \mathrm{y}_2) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ з умов $\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\tau_i, \mathrm{y}_i)$ $(i \in \{1, 2\})$ $\tau_1 <_2 \tau_2$ і $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$ випливає нерівність $t_2 <_1 t_1$.*
3) ***часознаковизначеним****, якщо $\mathscr{U}$ є часододатнним або часовід'ємним.*

Теорема 4. *Якщо для $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ обернене відображення $\mathscr{U}^{[-1]} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2; \mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ є часознаковизначеним ОПК, то ОПК $\mathscr{U}$ є траєкторно регулярним.*

Контрприклади показатиують, що в загальному випадку теорема, обернена до теореми 4, місця не має. Проте, якщо накласти певні додаткові умови топологічного характеру на часові шкали $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$, координатні простори $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ і ОПК $\mathscr{U}$, то теорему 4 можна "обернути". При цьому лінійно упорядковані множини $\mathbb{T}_1$ і $\mathbb{T}_2$ вважаються топологічними просторами відносно порядкової топології [2, стор. 314], тобто топології, породженої всеможливими відкритими інтервалами на $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$.

Теорема 5. *Нехай $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — топологічні координатні простори і $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ — траєкторно регулярний ОПК. Якщо топологічні простори $\mathfrak{Q}_1$ і $\mathbb{T}_1$ є зв'язними, а відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є нарізно неперервним, то ОПК $\mathscr{U}^{[-1]} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2; \mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ є часознаковизначеним.*

Теорема 6 ([3]). *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — векторні координатні простори. Відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є одностайним ОПК тоді і тільки тоді, коли існують функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, що задовольняють такі умови:*

1) *Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{T}_1$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$.*
2) *Функція $\mathbf{g}$ є бієкцією між $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$.*
3) *Для довільної пари $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ виконується рівність:*

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})). \tag{1}$$

[1] Ya.I. Grushka. *Self-consistently Translational Motion of Reference Frames and Sign-definiteness of Time in Universal Kinematics.* Methods Funct. Anal. Topology, **24** (2) (2018), 107–119.

[2] Г. Биркгоф. *Теория решеток.* "Наука", Москва, (1984).

[3] Я.І. Грушка. *Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках.* Вісник Черкаського університету: Серія фізико-математичні науки, (1) (2017), 122–137.

Функціональний поліном типу Тейлора

Демків І.І.

НУ "Львівська політехніка"

ihor.i.demkiv@lpnu.ua

Копач М.І.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

kopachm2009@gmail.com

Пукач П.Я.

НУ "Львівська політехніка"

petro.y.pukach@lpnu.ua

Узагальненням класичної теорії інтерполювання функцій однієї змінної, на випадок нелінійних функціоналів та операторів, присвячено багато робіт. Операторні інтерполяційні формули типу Ньютона посідають тут помітне місце. Оскільки в багатьох відомих формулах використовується континуальна інформація про оператори, що інтерполюються, множина вузлів дискретна, тому будемо розглядати інтерполяційний поліном вигляду

$$\begin{aligned} P_n^I\left(x\left(\cdot\right)\right) &= F\left(x_0\left(\cdot\right)\right) + \int_0^1 K_1\left(z_1\right)\left[x\left(z_1\right) - x_0\left(z_1\right)\right] dz_1 + \ldots \\ &\ldots + \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{n-1}}^1 K_n\left(z^n\right) \prod_{i=1}^n \left[x\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)\right] dz_n \ldots dz_1, \end{aligned}$$

побудований для функціонала $F : Q\left(0,1\right) \to R^1$ на континуальній множині вузлів $x^n\left(\cdot,\xi^n\right) = x_0\left(\cdot\right) + \sum_{i=1}^n H\left(\cdot - \xi_i\right)\left[x_i\left(\cdot\right) - x_{i-1}\left(\cdot\right)\right]$, $\xi^n = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$, $\xi^n \in \Omega_{z^n} = \left\{z^n : 0 \le z_1 \le \ldots \le z_n \le 1\right\}$, де $x_i\left(t\right) \in Q\left[0,1\right]$, $i = \overline{1,n}$, $H\left(t\right)$ — функція Гевісайда.

На його основі пропонується конструювати функціональний поліноми типу Тейлора, використовуючи кратність вузлів за допомогою граничного переходу. Отримана формула Тейлора $P_n^T(x(\cdot))$ з формули Ньютона граничним переходом буде єдиною та інваріантною щодо поліномів того ж самого степеня [1].

[1] Baranetskij Y.O., Demkiv I.I., Kopach M.I., Obshta A.F. *The interpolation functional polynomial: the analogue of the Taylor formula*, Математичні студії, **50** (2) (2018), 198–203.

Interpolation integral continued fraction with twofold node

Demkiv I.I.

Lviv Polytechnic National University

ihor.demkiv@gmail.com

Ivasiuk I.Ya.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

vanobsb@gmail.com

Kopach M.I.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

kopachm2009@gmail.com

In the article [1] interpolation integral continued fractions (interpolation ICF) was introduced and it has been proved that the introduced there definition of kernel is a necessary condition that the ICF are interpolative for a functionals $F : L_1(0,1) \to \mathbb{R}$ on the continual set of nodes

$$x^n(\cdot,\xi^n) = x_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} H(\cdot - \xi_i)(x_i(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)), \tag{1}$$

where $\Omega_{z^n} = \{z^n : 0 \le z_1 \le \ldots \le z_n \le 1\}$, $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega_{z^n}$.

Sufficient conditions of an integral fraction interpolativity (see [1]) were discovered in the work [2]. These conditions state that the substitution rule takes place. In the article [3] there are given sufficient conditions for functional $F(x(\cdot))$ to fulfill the substitution rule.

Investigated in [1, 2] ICF has the following problem. In (1) we set $x_i(z) \equiv x_i = const$, $i = 0, \ldots, n$, $x(z) \equiv x = const$. Then the interpolation ICF will not transform in a interpolation continuous fraction for a function of single variable.

To solve this problem in [4] it is introduced the new class of the interpolation ICF of type

$$Q_n(x(\cdot)) = K_0^I + \underset{i=1}{\overset{n}{D}} \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \tag{2}$$

where $q_m(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \dots \int\limits_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^m) \prod\limits_{l=1}^m (x(z_l) - x_{l-1}(z_l))\, dz_l.$

In [4] it is proved that the necessary condition for interpolativity of ICF (2) for a smooth functional $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to \mathbb{P}^1$ on continual nodes set (1) is following: its kernel must be defined by formulas

$$\begin{aligned}
&K_p^I(\xi^p) = (-1)^p \prod_{i=1}^p (x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))^{-1} \frac{\partial^p}{\partial\xi_1 \dots \partial\xi_p} \underset{i=1}{\overset{p}{D}} \frac{q_{p-i}(x^p(\cdot,\xi^p))}{-1},\\
&q_m(x^p(\cdot,\xi^p)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{m-1}}^1 K_m^I(z^m) \prod_{l=1}^m (x(z_l,\xi^p) - x_{l-1}(z_l))\, dz_l,\\
&q_0(x^p(\cdot,\xi^p)) = F(x_0(\cdot)) - F(x^p(\cdot,\xi^p)) + 1,\ K_0^I = F(x_0(\cdot)),\\
&K_1^I(\xi^1) = -(x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1))^{-1} \frac{\partial}{\partial\xi_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - \xi_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))),\\
&m = 1,3,\dots, p = 2,3,\dots,n,
\end{aligned} \tag{3}$$

and the sufficient condition is: the substitution rule

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} \left(F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1}))\big|_{z_{p+1}=z_p} \right)\\
&= \frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_p} \left(F(x^{p+1}(\cdot, z^{p+1})) \right) \Big|_{z_{p+1}=z_p} \frac{x_{p+1}(z_p) - x_{p-1}(z_p)}{x_p(z_p) - x_{p-1}(z_p)},
\end{aligned} \tag{4}$$

$p = 1,\dots,n$, must takes place. Here $Q[0,1]$ is the space of piecewise continuous functions on $[0,1]$ with finite number of a break points of first type.

Lets us consider a functional $F : L_1(0,1) \to \mathbb{R}^1$ on continual notes set (1) for $n = m+1$ and suppose that for this functional substitution rule (4) holds. Then we want to construct interpolant $Q_{m+1}^E(x(\cdot))$ with kth twofold node using interpolative ICF of Newton type (2), (3) and prove that constructed ICF is a interpolant of Hermitian type, i.e.

$$\begin{aligned}
&Q_{m+1}^E \left(x_0(\cdot) + \sum_{l=1, l\neq k+1}^{m+1} (x_l(\cdot) - x_{l-1}(\cdot)) H(\cdot - \xi_l) \right)\\
&= F \left(x_0(\cdot) + \sum_{l=1, l\neq k+1}^{m+1} (x_l(\cdot) - x_{l-1}(\cdot)) H(\cdot - \xi_l) \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$Q_{m+1}^{E}{}' \left(x_0(\cdot) + \sum_{l=1}^{m+1} (x_l(\cdot) - x_{l-1}(\cdot)) H(\cdot - \xi_l) \right) v_k(\cdot) H(\cdot - \xi_{k+1})$$
$$= F' \left(x_0(\cdot) + \sum_{l=1}^{m+1} (x_l(\cdot) - x_{l-1}(\cdot)) H(\cdot - \xi_l) \right) v_k(\cdot) H(\cdot - \xi_{k+1}). \quad (6)$$

The following theorem holds true.

Theorem 1. *Let the substitution rule* (4) *takes place and some modified* $q_m(x(\cdot))$ *exist on* $Q[0,1]$. *Then continual interpolation conditions* (5), (6) *take place for interpolant of Hermitian type and it does not depend on direction of differentiation.*

[1] B.R. Mykhal'chuk, *Interpolation of nonlinear functionals by integral continued fractions*, Ukrainian Math. J. **51**(3) (1999), 406–418. doi:10.1007/BF02592477

[2] V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, B.R. Mykhal'chuk, *Interpolational Integral Continued Fractions*, Ukrainian Math. J. **55**(4) (2003), 576–587. doi:10.1023/B:UKMA.0000010158.50027.08

[3] V.L. Makarov, I.I. Demkiv, B.R. Mykhal'chuk, *Necessary and sufficient conditions of interpolation functional polynomial existence on continual sets of knots*, Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. **7** (2003), 7

[4] V.L. Makarov, I.I. Demkiv, *New class of Interpolation integral continued fractions*, Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. **11** (2008), 17

Задача про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола

Заболотний Я. В.

Інститут математики НАН України

yaroslavzabolotnii@gmail.com

Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини складають відомий класичний напрям геометричної теорії функцій комплексної змінної. Дана тематика була започаткована в статті М.О. Лаврентьева 1934 року [1] і потім развивалася в работах багатьох авторів (див., наприклад, [2], [3] і наведену там бібліографію).

Нехай $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. На розширеній комплексній площині розглянемо систему довільних неперетинних многозвязних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, причому n областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола і нехай $r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$.

В роботі [2] було сформульовано наступну екстремальну проблему.

Проблема 1. *Знайти точну верхню оцінку для функціоналу*

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, *де* $B_i\bigcap B_j = \emptyset$ *при* $0 \leq i, j \leq n$ *і* $i \neq j$ *— неперетинні області, и* $B_1, \ldots, B_n$ *симетричні відносно одиничного кола.*

Правильна наступна теорема.

Теорема 2. *Для довільного набору точок* a_k, *таких, що* $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,3}$, *і довільного набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,3}$, *причому області* B_k, $k = \overline{1,3}$, *симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *і довільного дійсного* γ, *такого, що* $0 < \gamma \leq 1.233$ *правильна нерівність*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27\left(9-2\gamma\right)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}}\left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,3}$, *де* $a_k^{(0)}$ *і* $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,3}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2.$$

[1] Лаврентьев М.А. *К теории конформных отображений* , Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

[2] Дубинин В.Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук., **49**, № 1(295), (1994), 3–76.

[3] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці ін-ту мат-ки НАН Укр., **73** (2008), 308 с.

Диференціювання в просторі симетричних поліномів на ℓ_1

Загороднюк А. В.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

azagorodn@gmail.com

Фуштей В. І.

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. Підстригача

v.i.fushtei@gmail.com

Нехай X комплексний банахів простір. $\mathbf{P}$ поліноми з $X \to \mathbb{C}$, де кожний P_k, k-однорідний, неперервний, $\|P_k\| = 1$. $X = \ell_1$, $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ – алгебра всіх симетричних поліномів на ℓ_1.

Поліноми вигляду:

$$G_n(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n},$$

утворюють алгебраїчний базис $\mathbf{G}$ симетричних поліномів в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Також існують базиси $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n,$$

$$H_n(x) = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}$$

.

Розглянемо наступні оператори диференціювання на H_{bs}:

$$\partial_k f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x \bullet (t\mathbb{I})^{1/k}) - f(x)}{t}, f \in H_{bs}, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Диференіювання ∂_k задовільняють правило Лейбніца:

$$\partial_k(fg) = \partial_k(f)g + f\partial_k(g)$$

$\forall f, g$ у області визначення ∂_k. Також, ∂_k визначені на поліномах у H_{bs}. З того, що

$$F_m(x \bullet (t\mathbb{I})^{1/k}) - F_m(x) = F_m(t\mathbb{I})^{1/k},$$

випливає

$$\partial_k F_m(x) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ k, & k = m \end{cases} \tag{2}$$

Розглянемо композицію відображень $f(g(x))$ де $f \in H_{bs}, g \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$. Виконується наступна теорема

Теорема 1. *Для операторів ∂_k виконується аналог формули диференціювання композиції функцій*

$$\partial_k(f(F_m)) = f^{'}(F_m)m$$

[1] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **55** (2012), 125–142.

[2] I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions*, J. Math. Anal. Appl., **395** 569-577.

Про одне матричне інтегро-квазідиференціальне рівняння високого порядку

Ільків В. С..

Національний університет "Львівська політехніка"

ilkivv@i.ua

Пахолок Б. Б.

Національний університет "Львівська політехніка"

bogdanbp@ukr.net

Пелех Я. М.

Національний університет "Львівська політехніка"

pelekh_ya_m@ukr.net

Розглянемо на проміжку $I \subset \mathbb{R}$ лінійне однорідне матричне квазідиференціальне рівняння $(n+m)$-го порядку

$$K_{mn}[X] := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A_{ij}(t) X^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad (1)$$

де шукана квадратна матриця $X = X(t)$ і задані квадратні матриці $A_{ij} = A_{ij}(t)$ мають порядок l. Припускаємо, що матричні коефіцієнти A_{ij} рівняння (1) задовольняють на проміжку I відповідно умови: (i) A_{00}^{-1} — вимірна й обмежена, (ii) A_{i0} та A_{0j} — сумовні за Лебеґом, (iii) A_{ij} є мірами.

Квазідиференціальний вираз $K_{mn}[X]$ можна багатьма різними способами записати у вигляді суми $K^1_{mn}[X] + K^2_{mn}[X]$, де

$$K^{\gamma}_{mn}[X] := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A^{\gamma}_{ij}(t) X^{(n-i)}\big)^{(m-j)}, \quad A^{\gamma}_{ij} = dB^{\gamma}_{ij}/dt,$$

причому $B^1_{ij} = B^1_{ij}(t)$ та $B^2_{ij} = B^2_{ij}(t)$ є матрицями локально обмеженої на I варіації. Це зображення і позначення $[\cdot]$ для квазіпохідних за змінною t та $\{\cdot\}$ за двоїстими змінними τ і α з роботи [1] використовується нижче у теоремі про розв'язок рівняння (1), де $\mathcal{K}^1(t,\alpha)$ — матриця-функція Коші рівняння $K^1_{mn}[X] = 0$ для всіх $(t,\alpha) \in I^2$, C_i — довільні сталі матриці порядку l, а $*$ означає операцію ермітового спряження.

Теорема 1. *Кожний розв'язок X рівняння* (1) *справджує також систему інтегро-квазідиференціальних рівнянь нижчого порядку n, тобто*

$$X^{[k]}(t) = \sum_{i=1}^{n+m} \Big(\mathcal{K}^1(t,\alpha)\Big)_{t,\alpha}^{[k]*\{n+m-i\}*} C_i + \int_\alpha^t \sum_{j=1}^{m} \Big(\mathcal{K}^1(t,\alpha)\Big)_{t,\tau}^{[k]*\{m-j\}*} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{n-1} dB^2_{n-s,j}(\tau) X^{[s]}(\tau), \qquad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

[1] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. *Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння*, ДАН УРСР, **Сер. А** (4) (1989), 25–28.

Проблеми дослідження властивостей множини неповних сум збіжних додатних рядів

Карвацький Д. М.

Інститут математики НАН України

karvatsky@imath.kiev.ua

Нагадаємо, що якщо $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$ (N — множина натуральних чисел), то число

$$x = x\,(M) = \sum_{n\in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n,$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{ при } & n \in M, \\ 0, \text{ при } & n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою ряду.*

Проблема дослідження властивостей множини неповних сум ряду є досить глибокою в історичному сенсі. Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду суттєво залежать від співвідношення між його членами та залишками.

У 1914 році S. Kakeya довів [1], що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є :

1) досконалою множиною;

2) скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тільки тоді, коли нерівність

$$u_n \leq u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots = r_n$$

виконується для всіх n, починаючи з деякого номера;

3) гомеоморфною до класичної множини Кантора, якщо нерівність

$$u_n > u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots = r_n$$

виконується для всіх n, починаючи з деякого номера.

Ним було висунуте припущення, що якщо для деякого ряду умова $u_n > r_n$ виконується нескінченну кількість разів, то множина неповних сум є ніде не щільною множиною (припущення було неправильним). Довгий період часу вважалося, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є скінченним об'єднанням відрізків або множиною канторівського типу. Як виявилося згодом, множина неповних сум ряду може містити відрізок, але не бути скінченним об'єднанням відрізків. Перші приклади таких рядів були опубліковані на початку 80-х років XX століття у роботах [2] та [3]. Одним з таких прикладів є ряд

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \ldots,$$

множина неповних сум якого дістала назву **канторвал**.

В роботі J. A. Guthrie та J. E. Nymann [4] (узагальнено в [5]) встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, гомеоморфною до множини Кантора або канторвалом.

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною до множини Кантора залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних, рядів з певною умовою однорідності).

У доповіді будуть вивчатися множини неповних сум додатних рядів (канторвали, ніде не щільні множини додатної міри Лебега або нульової міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича), члени яких пов'язані з узагальненими послідовностями Фібоначчі.

[1] Kakeya S. *On the partialsums of an infinite series* / S. Kakeya // Tôhoku Sci. Rep. – 1914. – Vol. 3, № 4. P. 159-164.

[2] Вайнштейн А. Д. *О строении множества $\bar{\alpha}$-представимых чисел* / А. Д. Вайнштейн, Б. З. Шапиро // Известия высших учебных заведений. – 1980. – Vol. 216, № 5. С. 8-11.

[3] Ferens C. *On the range of purely atomic probability measures* / C. Ferense // Studia Mathematica. – 1984. – Vol. 77, № 3. P. 261-263.

[4] Guthrie J. A. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series* / J. A. Guthrie , J. E. Nymann // Colloquium Mathematicum – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.

[5] *Prus-Wisniowski F.* Beyond the sets of subsums / F. Prus-Wisniowski. – 2013, — 37p. (avaible in http://atom.math.uni.lodz.pl)

Обчислювальна схема прямого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Кіндибалюк А. А.

3Shape Ukraine, Kyiv

kindybaliuk.arkadii@outlook.com

Притула М. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка

mykola.prytula@gmail.com

Запропоновано й обгрунтовано прямий метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для чисельного розв'язування задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння з обмеженою часовою межею $T < +\infty$:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(t) \text{ таку, що} \\ \dfrac{du}{dt} = f(u,t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

де функція $f(u,t)$–довільна гладка функція, яка задовольняє додаткові умови:

$$\begin{cases} f(u,t) \text{ обмежена, тобто } \|f(u,t)\|_\infty \le M, \\ f(u,t) \text{ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою } L, \text{ тобто:} \\ |f(u_1(t),t) - f(u_2(t),t)| \le L|u_1 - u_2|. \end{cases}$$

Ідея методу полягає у поєданні методу послідовних наближень [1] та побудови скінченновимірних квазізображень елементів алгебри Лі [2] і використанні підходів з [3].

Обчислювальна схема пропонованого методу - це рекурентне співвідношення
$$u_h^{n+1}(t) = u_0 + Z^{-1}\left(f(u_h^n(t), t)\right),$$
яке є скінченновимірним квазізображенням методу послідовних наближень
$$u^{n+1}(t) = u_0 + \int_0^t \left(f(u^n(\tau), \tau)\right) d\tau.$$

Доведено, що обчислювальна схема збіжна та норма похибки характеризується оцінкою:
$$\|u - u_{n,h}\|_{B_h} \leq \frac{L^n M}{(n+1)!} T^{n+1} + \frac{2L^{n+1}T^{n+2}}{(n+2)!} e^{LT} |u_0|.$$

Зазначимо, що введений нами оператор Z^{-1}, що діє у скінченновимірому просторі поліномів, апросимує оператор інтегрування $\partial^{-1}(u) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ та є оберненим до оператора Z, який є скніченновимірним квазіпредставленням базового елемента алгебри Лі d/dt.

Вивчено апроксимаційні властивості оператора Z^{-1}, а саме доведено теорему, яка характеризує похибку апроксимації при інтерполюванні поліномами Лагранжа.

Теорема 1. *Нехай функція $v = v(t)$ обмежена разом з усіма похідними довільного порядку, а також для неї існує первісна на проміжку $[0, T]$. Функція $v_I = v_I(t)$−інтерполяційний поліном Лагранжа, побудований на сітці вузлів $\{t_i\}_{i=0}^n$. Тоді, справедлива така оцінка:*
$$\|\partial^{-1}(v) - \partial^{-1}(v_I)\|_\infty \leq \frac{2T^{n+2}}{(n+2)!} \|v^{(n+1)}\|_\infty.$$

Обчислювальні експерименти засвідчили ефективність пропонованого підходу як для лінійних так і нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Суттєвою перевагою є те, що інтегрування замінено множенням матриць, що є важливим аспектом при побудові обчислювальних схем для нелінійних задач.

[1] Н.С. Пискунов, *Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов*, **Т2** (13) (1985), 560.

[2] F. Calogero *Interpolation, differentiation and solution of eigen value problems in more than one dimension*, Lett. Nuovo Cimento, **38** (13) (1983), 453–459.

[3] A. Kindybaliuk, M. Prytula *Direct method of Lie-algebraic discrete approximations for advection equation*, Visnyk of the Lviv University, Series Applied Mathematics and Computer Science, **26** (2018) 70–89.

Про поведінку одного класу гомеоморфізмів на нескінченності

Кліщук Б. А.

Інститут математики НАН України

kban1988@gmail.com

Салімов Р. Р.

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \;\geqslant\; 1$$

для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p*–модулем* сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин E, F і G в $\mathbb{R}^n$ через $\Delta(E, F, G)$ позначимо сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ і $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{ x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2 \} ,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r_i \} , \quad i = 1, \, 2 \, .$$

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f \, : \, D \, \to \, \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x) \, \eta^p(|x - x_0|) \, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, и для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) \, dr = 1 \, .$$

Нехай ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \, |x| = 1 \}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} \, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} Q(x) \, d\mathcal{A}$ — середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r \}$, $d\mathcal{A}$ — элемент площі поверхні. Позначимо

$$L(x_0, f, R) = \sup_{|x - x_0| \leqslant R} |f(x) - f(x_0)| \, .$$

Теорема. *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$, де x_0 — деяка точка в $\mathbb{R}^n$ і для деяких чисел $r_0 > 0$, $k > 0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant k \, t^{\alpha}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{L(x_0, f, R)}{R^{\frac{p - n - \alpha}{p - n}}} \geqslant k^{\frac{1}{n - p}} \, \left(\frac{p - n}{p - n - \alpha} \right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0 \, .$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geqslant k^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0\,.$$

Hilbert Nullstellensatz theorem for block-symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Kravtsiv V.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

maksymivvika@gmail.com

Let $n \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, +\infty)$. Let us denote $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ the vector space of all sequences

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \tag{1}$$

where $x_j = (x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}) \in \mathbb{C}^n$ for $j \in \mathbb{N}$, such that the series $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{n} \left|x_j^{(s)}\right|^p$ is convergent. The space $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ with norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \left|x_j^{(s)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

is a Banach space. Let us denote $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ the algebra of all block-symmetric continuous polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$.

Proposition 1. *Let $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ such that* $\ker P_1 \cap \ldots \cap \ker P_m = \varnothing$. *Then there are $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ such that*

$$\sum_{i=1}^{m} P_i Q_i = 1.$$

Theorem 2. *The algebra $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^n))$ is factorial.*

Nonlocal - integral problem for system of partial differential equations of first order

Kuduk G.

Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow, Graduate of University of Rzeszow, Poland

gkuduk@onet.eu

Let $H(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ be a class of entire functions on $\mathbb{R}$, K_L is a class of quasi-polynomials of the form $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) \exp[\alpha_i x]$, where $\alpha_i \in L \subseteq \mathbb{C}$, , $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$, $Q_i(x)$ are given polynomials.

Each quasipolynomial defines a differential operator $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$ of finite order on the class of entire function, in the form

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \exp\left[\alpha_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right] \Big|_{\lambda=0}.$$

In the strip $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in \{[T_1,T_2] \cup [T_3,T_4], x \in \mathbb{R}\}$ we consider of the system of equations

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial U_j}{\partial t}(t,x) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

satysfies nonlocal-integral conditions

$$\int_{T1}^{T_2} U_1(t,x)dt + \int_{T_3}^{T_4} U_1(t,x)dt = \varphi_2(x), \tag{2}$$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U_2(t,x)\Big|_{t=T_1} + R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U_2(t,x)\Big|_{t=T_2} + \int_{T_3}^{T_4} U_2(t,x)dt = \varphi_1(x), \tag{3}$$

$i = 1,2$,

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, are differential expressions with entire functions $a_{ij}(\lambda) \neq 0, b_{ij}(\lambda) \neq 0$, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are given differential polynomials.

Denote be

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\}. \tag{4}$$

Let be $\eta(\lambda) = \int\limits_0^T W'(t, \lambda) dt$ is a certain function,

Theorem. Let $\varphi_i(x) \in K_L$, $i = 1, 2$, then the class $K_{L \setminus P}$ exist and unique solution of the problem (1), (2), (3), where P is set (4). Solution of the problem (1), (2), (3) can be represented in the form

$$U_i(t, x) = \sum_{p=1}^{2} \varphi_{jp}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{\frac{1}{\eta(\lambda)} T_{ip}(t, \lambda) \exp[\lambda x]\right\}\Bigg|_{\lambda=0}, \quad i = 1, 2,$$

where

$T(t, \lambda)$ is a solution of the equation $L\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) T(t, \lambda) = 0$, satisfies conditions $\frac{dT(t,\lambda)}{dt}\Big|_{t=0} = 1$, $T(t, \lambda)\Big|_{t=0} = 0$.

Solution of the problem (1), (2), (3) according to the differential-symbol [1–3] method exists and uniquess in the class of quasipolynomials.

[1] P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych,*Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method.* — Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. —292 p. (in Ukrainian).

[2] P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych, I.V. Kohut, G. Kuduk, *Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions,* Math. Methods and Phys.- Mech. Polia., **58** (1) (2015), 7–19.

[3] P.I. Kalenyuk, G. Kuduk, I.V. Kohut, and Z.M. Nytrebych,*Problem with integral conditiond for differential-operator equation* J. Math. Sci., **208** (3) (2015), 267–276.

Про перше рівномірне найкраще наближення.

Кушнір А.С.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
kigayip500@seo-mailer.com

Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@ukr.net

Мельник В.С.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
windchange7@gmail.com

Розглянемо банаховий простір $C[a,b]$ всіх неперервних функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $||f|| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$, його лінійний підпростір $P_n[a,b]$, що складається з усіх многочленів

$$g(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

степеня $\le n$ з дійсними коефіцієнтами, і для кожної функції $f \in C[a,b]$ її найкраще рівномірне наближення

$$E_n(f) = d(f, P_n[a,b]) = \inf\{||f - g|| : g \in P_n[a,b]\}$$

многочленами з $P_n[a,b]$. Послідовність невід'ємних чисел $\alpha_n = E_n(f)$ спадає і згідно з теоремою Вейєрштрасса прямує до нуля для кожної функції f з $C[a,b]$. Як встановив С.Н. Бернштейн [3] і навпаки: для кожної спадної до нуля послідовності чисел $\alpha_n \ge 0$ існує така неперервна функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, що $E_n(f) = \alpha_n$ для кожного $n = 0, 1, \dots$.

Це твердження, що відоме під назвою обернена теорема Бернштейна, узагальнювалось і модифікувалося багатьма математиками (див., наприклад, [4] і вказану там літературу). Зокрема, для функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно другої змінної, можна ввести функції $\alpha_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha_n(x) = E_n(f^x)$, де $f^x(y) = f(x,y)$ для $x, y \in [0,1]$. Для сукупно неперервної функції f функції α_n неперервні, а для нарізно неперервної — належать до першого класу Бера. У праці [3] було поставлено задачу про опис функціональних послідовностей $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ для сукупно і нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Для сукупно неперервних функцій задача розв'язана лише для скінченного числа функцій [4], а для нарізно неперервних — лише для $n = 0$ [5].

Тут мова йтиме про перше рівномірне наближення $\alpha_1 = E_1(f)$ для неперервної функції f і його функціональний аналог $\alpha_1(x) = E_1(f^x)$ для нарізно неперервної функції f.

Для кожної функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ розглянемо січну $g = S(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка задається формулою $g(x) = f(a)+k(x-a)$, де $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Вона з'єднує кінці $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$ кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Ми кажемо, що функція f ледь опукла /вгнута/, якщо $f(x) \le g(x)$ /$f(x) \ge g(x)$/ на $[a, b]$. Ясно, що опуклі функції будуть і ледь опуклими, а вгнуті — ледь вгнутими.

Теорема 1. *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неперервна і ледь опукла чи вгнута функція, $g = S(f)$, $h = |f - g|$ і $\mu = \frac{1}{2}||h|| = \frac{1}{2}h(c)$, де $c \in [a, b]$. Тоді $E_1(f) = \mu = ||f - g_0||$, де $g_0(x) = f(c) + \mu + k(x - c)$, якщо f ледь опукла, і $g_0(x) = f(c) - \mu + k(x - c)$, якщо f ледь вгнута.*

Приклад функції $f(x) = x^3$ на відрізку $[-1, 1]$ показує, що умова ледь опуклості чи вгнутості в теоремі 1 істотна.

Позначимо символом C_a властивість неперервності і ледь опуклості чи вгнутості. Для прямокутника $P = [a, b] \times [c, d]$ символом $CC_a(P)$ ми позначаємо множину всіх нарізно неперервних функцій $f : P \to \mathbb{R}$, таких, що для кожного $x \in [a, b]$ функція $f^x : [c, d] \to \mathbb{R}$ буде ледь опуклою чи вгнутою. З результатів праці [5] випливає

Теорема 2. *Нехай $f \in CC_a(P)$. Тоді функція $\alpha_1(x) = E_1(f^x)$ напівнеперервна знизу на $[a, b]$.*

Використовуючи ідеї праці [5], можна встановити і обернений результат.

Теорема 3. *Нехай $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ — невід'ємна напівнеперервна знизу функція. Тоді існує така функція $f \in CC_a(P)$, що $E_1(f^x) = \alpha(x)$ на $[a, b]$.*

[1] Bernstein S.N. Sur le proble me inverse de la theorie de la meilleure approximationn des fonctions continues // Comp. Rend. — 1938. — **206**. — P.1520-1523.

[2] Волошин Г., Маслюченко В. Узагальнення однієї теореми Бернштейна // Мат. вісн. НТШ. — 2009. — **6**. — С. 62-72.

[3] Власюк Г.А., Маслюченко В.К. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В.336-337. Математика. — Чернівці: Рута, 2007. — С. 52-59.

[4] Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна // Мат. студії. — 2010. — **33**, №2. — С.220-224.

[5] Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Мельник В.С. Пари Гана і нульова обернена задача // Мат. студії. — 2017. — **48**, №1. — С.74-81.

Функціональне числення в класах поліноміальних ω–ультрарозподілів

Лозинська В. Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

vlozynska@yahoo.com

Робота стосується нескінченновимірного аналізу. Складовою нескінченновимірного аналізу є дослідження різноманітних просторів основних і узагальнених фінкцій нескінченної кількості змінних, а також різних операторів і операцій на цих просторах. В [1], [2] запропоновано новий підхід до дослідження таких просторів. Застосовуючи даний підхід у роботі досліджуються згорткові алгебри поліноміальних ω–ультрарозподілів (нескінченної кількості змінних) типу Бьорлінга і типу Рум'є. В класах Фур'є–образів поліноміальних ω–ультрарозподілів побудовано функціональне числення для зліченого набору генераторів сильно неперервиних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі H.

[1] O. Lopushansky, *Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation*, Banach Center Publications IM PAN. **88** (2010), 195–209.

[2] O. Lopushansky , S. Sharyn, *Polynomial ultradistributions on* $\mathbb{R}^d_+$. Topology. **48**, (2009), 80–90.

Побудова фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для одного класу систем Колмогорова

Малицька Г. П.

ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

malytskagp@gmail.com

Буртняк І. В.

ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

bvanya@meta.ua

Ми розглядаємо задачу Коші для системи рівнянь [1]

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0} x_j \, \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t,x) \partial_{x_1^k}^k u_r(t,x), \tag{1}$$

$\nu = \overline{1,n}, (t,x) \in \Pi_{[0,T]}$.

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u(t,x), \tag{2}$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), t \in (0,T], T > 0, x \in R^{n_0}, n_0 > 1\}$.

$$\partial_t w(t,x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t,x) \partial_{x_1^k}^k w_r(t,x), \tag{3}$$

система (3) є рівномірно параболічною в сенсі І.Г. Петровського в $\Pi_{[0,T]}$, $x^* = x_2, ..., x_{n_0}$- параметри.

Зробимо припущення на коефіцієнти

(A_1) $a_k^{r\nu}(t,x), j = \overline{0,2}, \nu = \overline{1,n}, r = \overline{1,n}$ неперервні та обмежені в $\Pi_{[0,T]}$, крім того, $a_k^{r\nu}, r = 2$ неперервні по t рівномірно відносно (t,x) в $\Pi_{[0,T]}$

(A_2) коефіцієнти $a_k^{r\nu}$ задовольняють умову Гельдера (з показником $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n_0}), 0 < \alpha \le 1, 0 < \alpha_j < \frac{2j-3}{2j-1}), j = \overline{2, n_0})$ по x рівномірно відносно (x,t) в обмежених підмножинах $\Pi_{[0,T]}$, крім того старші похідні задовольняють умову Гельдера (з показником $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n_0}),)$ по x рівномірно відносно (t,x) в $\Pi_{[0,T]}$

Теорема 1. *Нехай виконуються всі вище названі умови для системи рівнянь* (1)*. Тоді існує фундаментальний розв'язок системи* (1) $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$, $t>\tau, \xi \in R^{n_0}, x \in R^{n_0}$

$$\Gamma(t,x;\tau,\xi) = \Gamma_0(t,x;\tau,\xi,\xi^*) + \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{R^{n_0}} \Gamma_0(t,x;\beta,\gamma,\gamma^*) f(\beta,\gamma;\tau,\xi) d\gamma$$

$\Gamma_0(t,x;\tau,\xi,\xi^*)$*–фундаментальний розв'язок системи*

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0} x_j \, \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} a_2^{r\nu}(t,\xi^*) \partial^2_{x_1^2} u_r(t,x),$$

ξ^**–параметрична точка,* f*–шукана функція, що задовольняє відповідну систему інтегральних рівнянь Вольтерри.*

[1] Малицька Г. П., Буртняк І.В. *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для систем Колмогорова другого порядку* Укр. мат. журн., **70** (8) (2018), 1650–1663.

Піфагор і Малевич: модифікації "Чорного квадрата"

Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

vmaslyuchenko@ukr.net

Маслюченко Г-Ж.Я.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

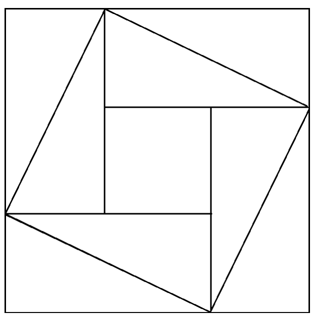
galarta@ukr.net

Перші модифікації знаменитого "Чорного квадрата"Казимира Малевича, цієї ікони супрематизму, що була на покуті у виставковому залі у 1915 році [1, с. 61] поруч з багатьма іншими супрематичними творами, належать самому автору. Наприклад, у нього крім чорного є й червоний квадрат. За Малевичем чорний квадрат концентрує почуття, а біле тло — ніщо поза ним. Певно, те саме виражає і червоний квадрат, тільки почуття вже інше. Можливо, це так як у пісні: "Червоне — то любов, а чорне — то журба."

У К. Малевича, засновника супрематизму, було багато послідовників. Про нього і про них йшлося, зокрема, у попередніх працях авторів [2-7]. Тут ми розглянемо твори відомого чернівецького художника, майстра екслібрису, Ореста Криворучка. У нього є кілька модифікацій картини Малевича. Перша ("Діалектика 2013) експонувалася на Другій всеукраїнській трієнале абстрактного мистецтва [8, с. 29]. Вона являє собою два квадрати з паралельними сторонами, менший вміщений у більший і розділений навпіл на два прямокутники, білий (вгорі) і чорний (внизу), а область між ними розбита на 20 квадратиків, червоних і зелених, що чергуються один за одним. Тлумачення цієї картини дано в [7]. Друга і третя експонувалася на четвертій трієнале абтрактного мистецтва 17 жовтня - 5 листопада 2019 року під назвами "Супрематична імпровізація"і "Супрематична композиція". На другій зображено квадрат, сторони якого послідовно розбиті на два відрізки a і b і точки розбиття з'єднані відрізками так, що утворюється новий квадрат зі стороною c, вписаний у великий квадрат, і чотири прямокутних трикутники з катетами a і b та гіпотенузою c. У внутрішньому квадраті здійснюється така ж побудова і в найменшому третьому квадраті видно число 100 — річниця появи "Чорного квадрата".

Тому, хто знайомий з одним з геометричних доведень теореми Піфагора, зразу стає ясно, що ідея цієї картини взята звідти. Якщо підрахувати площу S великого квадрата, то з одного боку, $S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а з другого: $S = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$. Звідси негайно отримується теорема Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$. На третій, як і на першій, зображено два квадрати з паралельними сторонами і спільним центром, один всередині другого, причому в менший білий квадрат вписано чорний круг. Облямівка — червона. На другій картині трикутники чорні, найменший квадрат червоний, він вписаний у білий квадрат. Скрізь панує червоно-чорна гама кольорів.

Але є ще одне доведення теореми Піфагора, коли всередині квадрата зі стороною c поміщаються чотири прямокутних трикутники з гіпотенузою c і з катетами a і b, де $a \leq b$, так, що всередині утворюється квадрат зі стороною $b-a$. Тут теорема Піфагора виводиться з рівності $c^2 = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$. Розвиваючи і модифіковуючи ідею Криворучка, цю побудову можна здійснити з першим внутрішнім квадратом. Вийде цікава конфігурація, яка



дає одночасно два доведення теореми Піфагора. Трикутники, що з'єднуються попарно в чотири прямокутники, можна розфарбовувати в чорний і червоний кольори відповідно і вийде "Повстанський квадрат". Якщо ж використовувати синій і жовтий кольори, то вийде "Український квадрат". Можна ці кольори і змішати як це робиться на сучасних патріотичних заходах. Отак живопис допамагає і математиці, і патрчотичному вихованню.

[1] Скицька Уляна. # Наші на карті світу. — Львів: вид-во Старого Лева, 2019. — 320 с.

[2] Маслюченко В., Маслюченко Г.-Ж. Математика і Казимир Малевич // Матер. міжнар. наук. конф., присв. 50-річчю фак. мат. та інф. ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. — Чернівці: ЧНУ, 2018. — С.184-186.

[3] Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Математика і живопис // Нелінійні проблеми аналізу: VI Всеукр. конф. ім. Б.В. Василишина. Тези доповідей. (26-28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ- Микуличин). — Івано-Франківськ: Голіней, 2018. — С.35.

[4] Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Про впливи математики на мистецтво // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2018. — **86**. — С. 39-44.

[5] Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Супрематизм і математика // VIII міжнар. конф. "Математика. Інф. технології. Освіта."Луцьк-Світязь, 2-4 червня 2019р. — Тези доповідей. — Луцьк: 2019. — С.102.

[6] Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Математичні мотиви у творах сучасних українських художників // Міжнар. конф. присв. 100-річчю з дня нар. В.К. Дзядика (1919-1998). 20-26 червня 2019р., Світязь. — К.:2019. — С.49-50.

[7] Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Спіралі у творчості сучасних митців // Міжнар. конф. "Теорія наближень і її застосування". Дніпро, 3-5 жовтня 2019. — Дніпро: 2019.

[8] Друга всеукраїнська трієнале абстрактного мистецтва "ART-AKT". 4-26 жовтня 2013 року. — Чернівці: ДрукАрт, 2013. — 40 с.

On the closest to zero roots and the second quotients of Taylor coefficients of entire functions from the Laguerre-Pólya I class

Thu Hien Nguyen

V.N. Karazin National University

nguyen.hisha@gmail.com

Anna Vishnyakova

V.N. Karazin National University

anna.m.vishnyakova@univer.kharkov.ua

Definition. A real entire function f is said to be in the *Laguerre- Pólya class of type I*, written $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}I$, if it can be expressed in the following form

$$f(x) = cx^n e^{\beta x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{x_k}\right), \tag{1}$$

where $c \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, x_k > 0$, n is a nonnegative integer, and $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{-1} < \infty$.

Various properties and characterizations of the Laguerre-Pólya class of type I can be found in [1], [3] and other works.

The following theorem is a new necessary condition for an entire function to belong to the Laguerre-Polýa class of type I in terms of the closest to zero roots.

Theorem 1. *(see [6]). Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k > 0$ for all k, be an entire function. Suppose that the quotients $q_n(f) := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}a_n}$ satisfy the following condition: $q_2(f) \leq q_3(f)$. If the function f belongs to the Laguerre-Pólya class, then there exists $z_0 \in [-\frac{a_1}{a_2}, 0]$ such that $f(z_0) \leq 0$.*

We also present a necessary condition for an entire function to belong to the Laguerre-Polýa class of type I in terms of the second quotients of its Taylor coefficients.

We obtained a sufficient condition for the existence of such a point z_0.

Theorem 2. *(see [6]). Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k > 0$ for all k, be an entire function and $3 \leq q_2(f) < 4, q_3(f) \geq 2$, and $q_4(f) \geq 3$. If $q_3(f) \leq \frac{8}{d(4-d)}$, where $d = \min(q_2(f), q_4(f))$, then there exists $z_0 \in [-\frac{a_1}{a_2}, 0]$ such that $f(z_0) \leq 0$.*

We also present other related results.

[1] I. I. Hirschman and D.V.Widder, *The Convolution Transform*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1955.

[2] O. Katkova, T. Lobova and A. Vishnyakova, *On power series having sections with only real zeros*, Comput. Methods Funct. Theory, **3**, No 2, (2003), 425–441.

[3] G. Pólya and J.Schur, *Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen*, J. Reine Angew. Math., **144** (1914), pp. 89–113.

[4] T. H. Nguyen and A. Vishnyakova, *On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **465**, No. 1 (2018), 348 – 359.

[5] T. H. Nguyen and A. Vishnyakova, *On a necessary condition for an entire function with the increasing second quotients of Taylor coefficients to belong to the Laguerre-Pólya class*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123433.

[6] T. H. Nguyen and A. Vishnyakova, *On the closest to zero roots and the second quotients of Taylor coefficients of entire functions from the Laguerre-Pólya I class*, arXiv:2001.06302.

Hypercyclic behavior of the Dunkl operator

Novosad Z. H.

Lviv University of Trade and Economics

zoryana.math@gmail.com

Let X be a Fréchet linear space. An operator $T : X \to X$ is called *hypercyclic* if there is a vector $x \in X$ whose *orbit* under T

$$\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

is dense in X. Every such vector x is called *hypercyclic* for T.

The *Dunkl operator* on $\mathbb{R}$ has been introduced by C.F. Dunkl [1]. One remarkable example is the *Dunkl operator*

$$\Lambda_\alpha : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}), \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

$$\Lambda_\alpha(f(z)) := \frac{d}{dz} f(z) + \frac{2\alpha + 1}{z} \left(\frac{f(z) - f(-z)}{2} \right).$$

Let E be a Hilbert space and $\mathcal{H}_\eta(E)$ be the Hilbert space of analytic functions. We consider a differentiatial-difference operator $\Lambda_\alpha : \mathcal{H}_\eta(E) \to \mathcal{H}_\eta(E)$ and investigate hypercyclic behavior of an operator e^{Λ_α}.

[1] C. F. Dunkl, *Differential-Difference Operators Associated with Reflections Groups*, Transactions of the American Mathematical Society, **311** (1989), 167–183.

Деякі властивості систем куль, які створюють тінь в точці

Осіпчук Т. М.

Інститут математики НАН України

osipchuk.tania@gmail.com

Починаючи з 2015 року група вчених з Інституту математики НАН України на чолі з Юрієм Борисовичем Зелінським працювала над циклом задач про тінь на основі задачі, поставленої у 1982 році Г. Худайбергановим [9]. Перелік результатів з цього циклу викладено переважно в роботах [3], [5], [6]. Наведемо ряд результатів, які були отримані пізніше та не увійшли до вказаних робіт.

Скажемо, що набір куль у просторі $\mathbb{R}^n$ створює тінь у деякій точці цього простору, якщо довільна пряма, що проходить через дану точку, перетинає хоча б одну з куль. При цьому, в роботі [7] є помилка у формулюванні теореми, яка виправлена тут.

Теорема 1. ([7]) *Нехай $S^2(r)$ сфера з центром в початку координат та радіусом r у просторі $\mathbb{R}^3$. Позначимо через $n_1(x)$ найменше число відкритих куль, що не перетинаються, з центрами на сфері $S^2(r)$ і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^3$ та створюють в цій точці тінь. Тоді $n_1(x) = 3$, для кожної точки $x \in \mathbb{R}^3$ такої, що $\frac{7}{9}r \le \|x\| \le r$.*

В роботі [2] було встановлено, що для початку координат $n_1(0) = 4$. Для інших точок внутрішності сфери це питання залишається відкритим.

В наступній задачі знімаються обмеження на розташування центрів куль, але накладаються на їх радіуси. В роботі [2] ця задача розв'язана для простору $\mathbb{R}^3$. Наступна теорема дає її розв'язок для простору $\mathbb{R}^n$, $3 \le n < \infty$.

Теорема 2. ([8]) *Нехай $n_2(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^n$, $3 \le n < \infty$, та створюють в цій точці тінь. Тоді $n_2(x) = n + 1$.*

При доведенні Теорем 1, 2, як і при розв'язанні низки інших задач про тінь, ключову роль відіграла наступна

Теорема 3. ([6]) *Нехай задано дві відкриті (замкнені) кулі* $\{B_i = B(r_i)\}$, $i = 1, 2$, *у просторі* $\mathbb{R}^n$, *які не перетинаються, з центрами на сфері* $S^{n-1}(r)$ *та радіусами* $r_2 \leq r_1 < r$. *Тоді кожна куля, гомотетична кулі* B_2 *відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії* k_2, *не перетинає кожну кулю, гомотетичну кулі* B_1 *відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії* k_1, *якщо* $k_2 \geq k_1$.

[1] A. Author, *Name of the paper*, Comp. Math., **23** (2) (1971), 185–188.

[2] Ю. Зелинский , И. Выговская , М. Стефанчук, *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени*, Укр. мат. журн, **67** (12) (2015), 1658–1666.

[3] Ю. Зелинский, *Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени*, Укр. мат. вісник, **12** (2) (2015), 278–289.

[4] Ю. Зелинский, И. Выговская, Х.К. Даккхил, *Задача о тени для шаров фиксированного радиуса*, Укр. мат. вісник, **13** (4) (2016), 599–603.

[5] Ю. Зелинский, *Варіації до задачі про тінь*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14** (1) (2017), 163–170.

[6] Т. Осипчук, М. Ткачук, *Задача о тени для областей в евклидовых пространствах*, Укр. мат. вісник, **13** (4) (2016), 278–289.

[7] Т. Осіпчук, *Деякі зауваження про системи куль, які створюють тінь в точці*, Праці ІПММ НАН України, **31** (2017), 109–116.

[8] T. Osipchuk, *Задача о тени для областей в евклидовых пространствах*, Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations, **LXVIII** (2) (2018), 77–84.

[9] Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров*, Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

Про незліченні рівні функції першого класу Бера

Сафонов В.М.

Національний університет харчових технологій, Київ

safonov_v_m@ukr.net

Нехай задана довільна однозначна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Кожну множину $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y, x \in [a, b]\}$ назвемо рівнем функції f, що відповідає значенню y. Як відомо, будучи рівнем функції першого класу Бера, множина $f^{-1}(y)$ є G_δ-множиною. Зокрема, рівні неперервної функції f являють собою замкнені множини в $[a, b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, існують неперервні функції, у яких всі рівні не тільки нескінченні, але і незліченні. Знання властивостей сукупності всіх рівнів функції часто дозволяє охарактеризувати її структурні особливості. Наступне твердження [1] є доповненням до результатів досліджень множини рівнів неперервних дійсних функцій [2].

Теорема 1. *Нехай функція першого класу Бера $f(x)$, $x \in [a, b]$ задовольняє властивість Дарбу. Якщо один будь-який з рівнів функції $f(x)$ – всюди щільна множина на відрізку $[a, b]$, то всі її рівні $f^{-1}(y)$, $y \in Int f([a, b])$ є незліченними.*

[1] Сафонов В.М. *Про функції першого класу Бера з властивістю Дарбу* / В.М. Сафонов // Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2017. – **Т.14**, №1. – С. 222-229.

[2] Сафонов В.М. *Про нескінченні рівні неперервної функції* / В.М. Сафонов // Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2015. – **Т.12** , №3. – С. 220–224.

Про квазінеперервність оберненого відображення

Сафонова О.В.

Державний університет телекомунікацій, Київ

olechkadeadin@ukr.net

Останні десятиліття досліджень аналогів неперервності відзначені глибокими результатами Чернівецької математичної школи, отриманими у працях В.К. Маслюченка та його учнів, зокрема, важливими результатами В.В. Нестеренка про ослаблену неперервність оберненого відображення [1–3]. У наступному твердженні встановлюються умови, за яких обернене відображення є квазінеперервним [4].

Теорема 1. *Нехай X, Y – повні метричні простори (простір X сепарабельний і незліченний) і $f : X \to Y$ – відображення, причому для довільної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ виконується $Intf(A) \neq \varnothing$ та існує множина Q всюди другої категорії в X, така, що звуження відображення $f|_Q$ на множину Q є бієктивним відображенням. Якщо для кожної напіввідкритої множини $V \subseteq Y$ її прообраз $f^{-1}(V)$ є напіввідкритою множиною в просторі X, то обернене відображення f^{-1} – квазінеперервна бієкція.*

Приклади показують, що всі умови в теоремі є істотними.

[1] Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете*: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Маслюченко Володимир Кирилович. – Чернівці, 1999. – 345с.

[2] Михайлюк В.В. *Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень*: дис. ... докт. фіз.–мат. наук: 01.01.01 / Михайлюк Володимир Васильович. — Чернівці, 2008. — 333 с.

[3] Нестеренко В.В. *Аналоги неперервності: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію*: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Нестеренко Василь Володимирович. – Чернівці, 2016. – 320с.

[4] Сафонова О.В. *Ослаблення неперервності та зліченна кратність відображень.* / Сафонова О.В. // Буковинський математичний журнал. – 2018. – **6**, 3-4. – С.127-133.

Uniform approximations by Fourier sums on classes of convolutions of periodic functions

Serdyuk A.S.

Institute of Mathematics NAS of Ukraine

serdyuk@imath.kiev.ua

Stepanyuk T.A.

University of Lubeck, Germany;
Institute of Mathematics NAS of Ukraine

tania_stepaniuk@ukr.net

Let L_1 be the space of 2π–periodic functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ summable on $[0, 2\pi)$, in which the norm is given by the formula $\|f\|_{L_1} = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt$; C be the space of continuous 2π–periodic functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in which the norm is specified by the equality $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Let $\psi(k)$ be an arbitrary fixed sequence of real, nonnegative numbers and let β be a fixed real number.

Further, let $C^{\psi}_{\beta,1}$ be the set of all functions f, which are represented for all x as convolutions of the form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\Psi_\beta(x-t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \in B_1^0,$$

where

$$B_1^0 := \{\varphi :\ ||\varphi||_{L_1} \leq 1,\ \varphi \perp 1\}.$$

and Ψ_β is a fixed kernel of the form

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big),\ \psi(k) \geq 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

For the classes $C^{\psi}_{\beta,1}$ we consider the quantities

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C, \tag{1}$$

where $S_{n-1}(f;\cdot)$ are the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f.

We consider Kolmogorov–Nikolsky problem about finding of asymptotic equalities of the quantity (1) as $n \to \infty$.

The following statement holds.

Theorem 1. *Let* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, ...$ *and* $\beta \in \mathbb{R}$. *Then as* $n \to \infty$ *the following asymptotic equality holds*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{2}$$

where $O(1)$ *is a quantity uniformly bounded in all parameters.*

Formula (2) becomes an asymptotic equality for the sequence $\psi(k)$, which decreases to zero faster than arbitrary power function. In the case, when $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, the equality (2) was established in [1] and [2].

[1] A.S. Serdyuk, Approximation of classes of analytic functions by Fourier sums in uniform metric, Ukr. Math. J. 57 (8) (2005) 1275–1296.

[2] A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk, Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals, Analysis Mathematica 45 (1) (2019), 201–236.

Апроксимація сумами Фур'є класів диференційовних функцій при високих показниках гладкості

Сердюк А. С.

Інститут математики НАН України, Київ

serdyuk@imath.kiev.ua

Соколенко І. В.

Інститут математики НАН України, Київ

sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π-періодичних дійснозначних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Нехай, далі, $W^r_{\beta,p}$— класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)B_{r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з ядрами Вейля-Надя $B_{r,\beta}(\cdot)$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

функцій φ, таких що $\varphi \in U_p^0 = \left\{ \varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1, \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0 \right\}$.

Класи $W^r_{\beta,p}$ називають класами Вейля–Надя. Якщо $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$, то функції вигляду (2) є відомими ядрами Бернуллі, а відповідні класи $W^r_{\beta,p}$ збігаються з відомими класами W^r_p, що складаються з 2π-періодичних функцій f, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і такі, що $\|f^{(r)}\|_p \le 1$. При цьому майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = f^{(r)}(x)$, де φ — функція з (1).

Досліджується задача про знаходження сильної асимптотики величин

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C, \quad 1 \le p \le \infty,$$

де $S_{n-1}(f)$ — частинна сума Фур'є функції f порядку $n-1$, при великих r $(r \ge \sqrt{n}+1)$.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 1$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді за умови* $\sqrt{n}+1 \le r \le n+1$ *при* $p = 1$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C = n^{-r}\Big(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + O(1)nr^{-2}\Big), \tag{3}$$

а при $1 < p \le \infty$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = n^{-r}\Big(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) + O(1)nr^{-2}\Big), \tag{4}$$

де $F(a,b;c;z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса*

$$F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)...(x+k-1), \tag{5}$$

$1/p + 1/p' = 1$, *а* $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 1$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді за умови* $n+1 \le r \le n^2$ *при* $p = 1$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C = n^{-r}\Big(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\Big), \tag{6}$$

а при $1 < p \leq \infty$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = n^{-r}\Big(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}F^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;e^{-2r/n}\Big) + O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\Big), \quad (7)$$

де $F(a,b;c;z)$ *— гіпергеометрична функція Гаусса* (5), $1/p + 1/p' = 1$, *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

При $p = \infty$ теореми 1 і 2 випливають з роботи С.Б. Стєчкіна [1].

Одержані теореми доповнюють результати авторів [2], де, зокрема, для довільних $1 \leq p \leq \infty$ було встановлено сильну асимптотику величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C$ у випадку $r \geq n^2$.

[1] С.Б. Стечкин *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций* // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР. – 1980. – 45. – С. 126–151.

[2] Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness* // Methods of Functional Analysis and Topology. Vol. 25 (2019), № 4, pp. 381-387.

On removability of isolated singularities of homeomorphisms with the inverse Poletsky inequality

Sevost'yanov E. A.

Zhytomyr Ivan Franko State University;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Slavyansk

esevostyanov2009@gmail.com

Skvortsov S. O.

Zhytomyr Ivan Franko State University

serezha.skv@gmail.com

In what follows, M denotes the n-modulus of a family of paths, and the element $dm(x)$ corresponds to a Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. For given sets E and F and a given domain D in $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, we denote by $\Gamma(E, F, D)$

the family of all paths $\gamma : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ joining E and F in D, that is, $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ and $\gamma(t) \in D$ for all $t \in [0,1]$. Let $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$,

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, S_i = S(x_0, r_i)\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,.$$

Let $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a Lebesgue measurable function satisfying the condition $Q(x) \equiv 0$ for $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$. The mapping $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ is called a *ring Q-mapping at the point $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$*, if the condition

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1}$$

holds for all $0 < r_1 < r_2 < d_0 := \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ and all Lebesgue measurable functions $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$

Theorem 1. *Let D and D' be domains in $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, and let g be a homeomorphism of a domain D' onto a domain D, the inverse $f = g^{-1}$ of which satisfies the condition (1) at every point $x_0 \in \partial D$. If $Q \in L^1(D)$ and y_0 is an isolated point of the boundary of the domain D', then the mapping g has a continuous extension $\overline{g} : D' \cup \{y_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ to y_0.*

On removable singularities of mappings in uniform spaces

Sevost'yanov E. A.

Zhytomyr Ivan Franko State University;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Slavyansk
esevostyanov2009@gmail.com

Skvortsov S. O.

Zhytomyr Ivan Franko State University
serezha.skv@gmail.com

Ilkevych N. S.

Zhytomyr Ivan Franko State University
ilkevych@list.ru

In what follows, (X, d, μ) and (X', d', μ') are metric spaces with metrics d and d' and locally finite Borel measures μ and μ', correspondingly; M_p denotes the p-modulus of a family of paths. Given $2 \leqslant \alpha < \infty$ and $1 \leqslant q \leqslant \alpha$, the space $X = (X, d, \mu)$ is called (α, q)**-admissible source**, if (X, d, μ) be locally compact and locally path connected upper Ahlfors α-regular metric space, moreover, for each point $x_0 \in X$ there is $\gamma > 0$ such that $\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{\alpha-2} \frac{1}{r} \cdot \mu(B(x_0, r))$ for some $r_0 > 0$ and for all $r \in (0, r_0)$. Similarly, given $p \geqslant 2$, the space $X' = (X', d', \mu')$ is called p**-admissible target**, if (X', d', μ') admits a weak sphericalization, besides that, $\left(\overline{X'}, h\right)$ be locally connected p-uniform metric space. Let $\overline{X} := X \cup \{\infty\}$, and let $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ be a metric. We say that h satisfies the **weak sphericalization condition,** if $(\overline{X}, h)$ is a compact metric space while h and d generate the same topology on X. A metric space X is called a **space admitting a weak sphericalization**, if there exists a metric $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ satisfying the weak sphericalization condition. Given $p \geqslant 2$, a space $\overline{X}$ is called p**-uniform** if, for each $r > 0$, there is $\delta = \delta(r) > 0$ such that $M_p(\Gamma(F, F^*, \overline{X})) \geqslant \delta$ whenever F and F^* are continua of $\overline{X}$ with $h(F) \geqslant r$ and $h(F^*) \geqslant r$.

Theorem 1. *Fix $2 \leqslant \alpha < \infty$, $2 \leqslant p < \infty$ and $1 \leqslant q \leqslant \alpha$. Let D be a domain in X, let (X, d, μ) be an (α, q)-admissible source and let (X', d', μ') be an p-admissible target. Suppose that $G := D \setminus \{\zeta_0\}$ is a domain in X, which is locally path connected at $\zeta_0 \in D$, $Q \in FMO(\zeta_0)$ and that balls $B_h(A, r) = \{y \in \overline{X'} : h(y, A) < r\}$ do not degenerate into points for each $A \in \overline{X'}$ and every $r > 0$. If $f \colon D \setminus \{\zeta_0\} \to X'$ is an open discrete ring Q-mapping with respect to (p, q)-moduli at ζ_0, and ζ_0 is an essential singularity of f, then $f(U \setminus \{\zeta_0\})$ is dense in X' for an arbitrary neighborhood U of ζ_0.*

Nonlocal problem with integral conditions for linear of system of partial differential equation of second order

Symotyuk M.M.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, (Lviv Ukraine)

quaternion@ukra.net

Kuduk G.

Faculty of Mathematical of Nature Sciences University of Rzeszow, Graduate of University of Rzeszow, Rzeszow Poland

gkuduk@onet.eu

In the strip $\Omega(T) : \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider nonlocal problem with integral conditions

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\overrightarrow{U}(t,x) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}(t,x)}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}(t,x)}{\partial t \partial x} + A_2 \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}(t,x)}{\partial x^2} = \overrightarrow{0}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overrightarrow{U}(t,x)\Big|_{t=T} + \int\limits_0^T \overrightarrow{U}(t,x)dt = \overrightarrow{\varphi}_1(x), \quad (2)$$

$$\overrightarrow{q}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \overrightarrow{U}}{\partial t}\Big|_{t=T} + \int\limits_0^T t\overrightarrow{U}(t,x)dt = \overrightarrow{\varphi}_2(x), \quad (3)$$

where $\overrightarrow{U}(t,x) = col\left(U^1(t,x), ..., U^m(t,x)\right)$, $\overrightarrow{\varphi}_i(x) = col\left(\varphi_i^1, ..., \varphi_i^m\right)$, $i = 1,2$, A_1, A_2 are squert matrix $m \times m$, $\overrightarrow{p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = col\left(p^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), ..., p^m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$, $q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = col\left(q^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), ..., q^m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$,

Assuming that the real parts of roots the polynomial $L(\lambda, i)$.

$$Re\lambda_1 <, ..., < Re\lambda_{2m}, \quad Re\lambda_j \neq, \quad j = 1,2,...,2m. \quad (4)$$

Main determinand of the system (1) in the form

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} h_1^1 \int_0^T e^{\lambda_1 \xi t} dt & \dots & h_{mn}^1 \int_0^T e^{\lambda_{mn} \xi t} dt \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m \int_0^T e^{\lambda_1 \xi t} dt & \dots & h_{mn}^m \int_0^T e^{\lambda_{mn} \xi t} dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^1 \int_0^T t^{n-1} e^{\lambda_1 \xi t} dt & \dots & h_{mn}^1 \int_0^T t^{n-1} e^{\lambda_{mn} \xi t} dt \\ \dots & \dots & \dots \\ h_m^1 \int_0^T t^{n-1} e^{\lambda_1 \xi t} dt & \dots & h_{mn}^m \int_0^T t^{n-1} e^{\lambda_{mn} \xi t} dt \end{vmatrix}$$

Let $H_\alpha, \alpha > 0$ be a Sobolew space with norm

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha} \, |\widetilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi} < \infty$$

where $\widetilde{\varphi}(\xi)$ is a Fourier transformation of the funktion $\varphi(x)$. $\overline{H}_\alpha$ is a vector space of the funktion $\varphi(x)$, with norm

$$\|\varphi(x), \overline{H}_\alpha\| = \max \|\varphi^j(x); H_\alpha\|$$

Theorem. Let conditions occur (4), let $\Delta(\xi) \neq 0$ for everyone $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. If $\overrightarrow{\varphi}_j \in \overline{H}^m_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 + m\left(C_n^2 + 1\right)$, $\alpha_2 > 1$, $j = 1, ..., n$, then the space $C^n([0,T], \overline{H}^m_\alpha)$ exists and unique solution $\overrightarrow{u}(t,x)$ of the problem (1), (2), (3) which still is depending on vector-function $\overrightarrow{\varphi}_j$, $j = 1, ..., n$. Solution is the represented in the form

$$\overrightarrow{u}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \sum_{j,q=1}^{mn} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} e^{\lambda_q \xi} \overrightarrow{h}_q \psi_j(\xi) d\xi, \tag{5}$$

where $\Delta_{j,q}(\xi)$, $j, q = 1, \dots, mn$, $\xi \neq 0$, – algebraic complement the standing element j this poem and q for this column of indicator $\Delta(\xi)$,

$$\mathrm{col}(\psi_1(\xi), \dots, \psi_{mn}(\xi)) = \mathrm{col}(\tilde{\varphi}_1^1(\xi), \dots, \tilde{\varphi}_1^m(\xi); \dots; \tilde{\varphi}_n^1(\xi), \dots, \tilde{\varphi}_n^m(\xi)),$$

i $\tilde{\varphi}_j^q(\xi)$ is a Fourier transformation of the funktion $\varphi_j^q(x)$, $j = 1, ..., n$, $q = 1, ..., m$.

[1] P.I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych. G. Kuduk, M.M. Symotyuk, *Integral problem for partial differential equation of second order in unboudud layer , Bukovinian Mathematical Journal.*, - Vol. 4, No 3-4. (2016) - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., - P. 69 - 74.

[2] P.I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych. G. Kuduk, M.M. Symotyuk, *Integral problem for partial differential equation of higher order in unboudud layer. Methods and Phys.- Mech. Polia.*, **59** (4), (2016) - P. 19 - 28.

Про локальні властивості розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі

Салімов Р. Р.

Інститут математики НАН України

ruslan.salimov1@gmail.com

Стефанчук М. В.

Інститут математики НАН України

stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння виду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z \,, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x та y, відповідно.

Нехай $\sigma\colon D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Враховуючи формули

$$r f_r = z f_z + \overline{z} f_{\overline{z}}\,, \quad f_\theta = i(z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}})\,,$$

рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\, |z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\, |z|\, i |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{3}$$

Відмітимо, що при $m=0$ рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z)=\frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i-1}{\sigma(z)\,|z|\,i+1}.$$

Якщо в (3) покласти $m=0$ і $\sigma=-i/|z|$, то ми приходимо до відомої системи Коші-Рімана. Всюди далі будемо вважати, що $m>0$.

Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння (3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f\colon G\to\mathbb{C}$, який м.с. в G задовольняє рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $\lambda>1$, $\tau>0$ та $C_0>0$ виконана умова*

$$\varepsilon^{\tau}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\right)^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1}}\geqslant C_0$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{m}}}\leqslant C_0^{-\frac{1}{m}}\,m^{-\frac{1}{m}}\,.$$

Наслідок 2. *Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $A>1$ та $c_0>0$ виконана умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\right)^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1}\leqslant c_0\,r^{A}$$

для м.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}}\leqslant\nu_0\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m, c_0 та A.

Наслідок 3. *Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$, $\alpha>\frac{2}{m}$. Якщо*

$$J=\int\limits_{B_{r_0}}\frac{dxdy}{|z|^{\alpha(m+1)}\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma}\right)^{\alpha}}<\infty$$

для деякого $r_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\kappa}} \leqslant \nu_0 J^{\frac{1}{m}},$$

де $\kappa = 1 - \frac{2}{\alpha m}$ *и* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m *та* α.

A mean value characterization for some classes of functions

Trofymenko O. D.

Vasyl' Stus Donetsk National University

odtrofimenko@gmail.com, o.trofimenko@donnu.edu.ua

Kotlubovska A. V.

Vasyl' Stus Donetsk National University

kotlubovska.a@donnu.edu.ua

The classical Gaussian theorem has received further development and elaboration in many papers (see, for example, reviews by I.Netuka and J.Vesely, L.Zalcman and monographs by Volchkov V.V. "Integral Geometry and Convolution Equations" and Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. "Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric spaces and the Heisenberg Group", with extensive bibliography). One of the main ways in this study is a description for classes of functions. This classes satisfy given integral equations, that have certain geometric meaning. There are mean value theorems that characterize harmonic polynomials (see papers by T.Ramsey and Y.Weit), bi-analytic functions (see papers by Maxwell O. Reade), a solution of convolution equations with finite convolver and others. In addition, similar results are very important in integral geometry and various applications. In present work the mean value theorem for polyanalytic functions is studied. There are results for special type of function in terms of mean value formula on the circle domains.

Growth estimates for the maximal term and central exponent of an Dirichlet series and its derivative

Fedynyak S.I.

Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine

napets.fed@gmail.com

Filevych P. V.

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

p.v.filevych@gmail.com

Let $A \in (-\infty, +\infty]$ and $\Phi : [a, A) \to \mathbb{R}$ be a real function. We say that $\Phi \in \Omega_A$ if Φ is continuous on $[a, A)$ and $x\sigma - \Phi(\sigma) \to -\infty$ as $\sigma \uparrow A$ for every $x \in \mathbb{R}$. If $\Phi \in \Omega_A$, then let $\widetilde{\Phi}$ be the Young-conjugate function of Φ, i.e.,

$$\widetilde{\Phi}(x) = \max\{x\sigma - \Phi(\sigma) : \sigma \in [a, A)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note (see for instance [1]), that $\overline{\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}(x)/x$ and $\Gamma(x) = (\widetilde{\Phi}(x) - \ln x)/x$ are continuous functions on $(x_0, +\infty)$ increasing to A.

Suppose that (λ_n) is a nonnegative sequence increasing to $+\infty$, and denote by $\mathcal{D}_A^*$ the class of all Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ such that $F(s) \not\equiv 0$ and its maximal term $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}$ and central index $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 0 : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ are defined for all $\sigma < A$.

For a Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_A^*$ and a function $\Phi \in \Omega_A$ we put

$$t_\Phi(F) = \varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}.$$

The following theorems generalize some results of [2].

Theorem 1. *(i) For each Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_A^*$ with $t_\Phi(F) \leq 1$ we have*

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\mu(\sigma, F')}{\mu(\sigma, F)\overline{\Phi}^{\,-1}(\sigma)} \leq 1.$$

(ii) There exists a Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_A^*$ with $t_\Phi(F) = 1$ such that

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\mu(\sigma, F')}{\mu(\sigma, F)\overline{\Phi}^{\,-1}(\sigma)} = 1.$$

Theorem 2. *(i) For each Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_A^*$ with $t_\Phi(F) \le 1$ we have*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F')}}{\Gamma^{-1}(\sigma)} \le 1.$$

(ii) There exists a Dirichlet series $F \in \mathcal{D}_A^*$ with $t_\Phi(F) = 1$ such that

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F')}}{\Gamma^{-1}(\sigma)} = 1.$$

[1] T.Ya. Hlova, P.V. Filevych, *Generalized types of the growth of Dirichlet series*, Carpathian Math. Publ. **7**(2) (2015), 172–187.

[2] M.N. Sheremeta, *On the maximum term of the derivative of the Dirichlet series*, Russian Math. (Iz. VUZ). **42**(5) (1998), 66–70.

Оцінки апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності в просторі L_q

Федуник-Яремчук О.В.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

fedunyk@ukr.net

Досліджуються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних [1], які є аналогами відомих класів Бєсова. Нехай $\Omega(t)$ – функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}, \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де розглядаються логарифми за основою 2 і $\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}$. Вважаємо також, що $0 < r < l$, $b_j \in \mathbb{R}_+$, $j = \overline{1,d}$. В цьому випадку для функції виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2].

Нехай $L_q(\pi_d)$ – простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum\limits_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i$ – ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$, які визначаються наступним чином

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \Big\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i(\cdot) \Big\|_q. \tag{2}$$

Сформулюємо один із одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$, $q < \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)-$ *функція виду* (1). *Тоді при* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < l$, $b_1 \le \ldots \le b_\nu < \frac{r}{\frac{q}{p} - 1} < b_{\nu+1} \le \ldots \le b_d$, *має місце співвідношення*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \big(\log M \big)^{-b_1 - \ldots - b_\nu + (\nu - 1)\left(r - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Цей результат для класів $H^{\Omega}_p \equiv B^{\Omega}_{p,\infty}$ одержаний М.М. Пустовойтовим [3].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами $p, q, \theta, r, b_1, \ldots, b_d$ [4].

[1] S.Yongsheng, W.Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.

[2] Н.К.Бари, С.Б.Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[3] Н.Н.Пустовойтов, *Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители*, Anal. Math., **34** (2008), 187–224.

[4] O.Fedunyk-Yaremchuk, S.Hembars'ka, *Estimates of approximative characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables with given majorant of mixed moduli of continuity in the space L_q*, Carpathian Math. Publ., **11** (2) (2019), 281–295.

Some relationship between Chebyshev and Fibonacci polynomials

Frontczak R.

Landesbank Baden-Württemberg (LBBW), Stuttgart, Germany

robert.frontczak@lbbw.de

Goy T.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

taras.goy@pnu.edu.ua

The Chebyshev polynomials $T_n(x)$ of the first kind, the Chebyshev polynomials $U_n(x)$ of the second kind, and the Fibonacci polynomials $F_n(x)$ are respectively defined by the recurrence relations as follows [3,4]: for $n \geq 2$,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1, \quad F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x).$$

We establish new connection formulas between Fibonacci polynomials and Chebyshev polynomials of the first and second kinds (see Theorems 1 and 2, respectively). This is achieved by relating the respective generating functions to each other; see [1] and [2] for more details of this method.

Theorem 1. *For $n \geq 1$, the following identities hold:*

$$F_n(x) = T_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-2} \big(xT_{n-k-1}(x) - 2T_{n-k-2}(x)\big) F_k(x);$$

$$x^2 F_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) - T_{2n-1}(x) - (3x^2 - 4) \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1}(x) T_{2(n-k)-1}(x);$$

$$F_{2n}(x) - (2x^2 - 1) F_{2n-2}(x) = xT_{2n-2}(x) - (3x^2 - 4) \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k}(x) T_{2(n-k-1)}(x);$$

$$\begin{aligned} &xF_n(x) + (4x^3 - x^2 - 3x) F_{n-1}(x) \\ &= T_{2n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-2} \big((4x^2 - x - 2) T_{2(n-k)-1}(x) - 2T_{2(n-k)-3}(x)\big) F_k(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F_n(x) + (2x^2 - x - 1) F_{n-1}(x) \\ &= T_{2n-2}(x) - \sum_{k=1}^{n-2} \big((4x^2 - x - 2) T_{2(n-k-1)}(x) - 2T_{2(n-k-2)}(x)\big) F_k(x); \end{aligned}$$

$$F_{2n+1}(x)-(2x^2-1)F_{2n-1}(x)$$
$$=T_{2n}(x)-T_{2n-2}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=0}^{n-1}T_{2(n-k-1)}(x)F_{2k+1}(x);$$

$$x^2F_{2n-1}(x)=xT_{2n-1}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=1}^{n-1}T_{2(n-k)-1}(x)F_{2k}(x).$$

Theorem 2. *For $n\geq 1$, the following identities hold:*

$$F_n(x)+xF_{n-1}(x)=U_{n-1}(x)-\sum_{k=1}^{n-2}\big(xU_{n-k-1}(x)-2U_{n-k-2}(x)\big)F_k(x);$$

$$2xF_{2n+1}(x)=U_{2n+1}(x)-U_{2n-1}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=0}^{n-1}F_{2k+1}(x)U_{2(n-k)-1}(x);$$

$$F_{2n}(x)+F_{2n-2}(x)=xU_{2n-2}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k}(x)U_{2(n-k-1)}(x);$$

$$2xF_n(x)+(8x^3-2x^2-4x)F_{n-1}(x)$$
$$=U_{2n-1}(x)-\sum_{k=1}^{n-2}\big((4x^2-x-2)U_{2(n-k)-1}(x)-2U_{2(n-k)-3}(x)\big)F_k(x);$$

$$F_n(x)+(4x^2-x-1)F_{n-1}(x)$$
$$=U_{2n-2}(x)-\sum_{k=1}^{n-2}\big((4x^2-x-2)U_{2(n-k-1)}(x)-2U_{2(n-k-2)}(x)\big)F_k(x);$$

$$F_{2n+1}(x)+F_{2n-1}(x)$$
$$=U_{2n}(x)-U_{2n-2}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=0}^{n-1}U_{2(n-k-1)}(x)F_{2k+1}(x);$$

$$2xF_{2n}(x)=xU_{2n-1}(x)-(3x^2-4)\sum_{k=1}^{n-1}U_{2(n-k)-1}(x)F_{2k}(x).$$

[1] R. Frontczak, *Some Fibonacci-Lucas-Tribonacci-Lucas identities*, Fibonacci Quart., **56** (3) (2018), 263–274.

[2] R. Frontczak, *Relations for generalized Fibonacci and Tribonacci sequences*, Notes Number Theory Discrete Math., **25** (1) (2019), 178–192.

[3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, 2 ed., Wiley, New York, 2017.

[4] J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2002.

Algebras of analytic functions generated by sequences of polynomials

Chernega I. V.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

icherneha@ukr.net

Let X be a complex Banach space and $P = \{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of complex-valued n-homogeneous polynomials such that $\|P\| = 1$ and $\{P_1, \ldots, P_n\}$ are algebraically independent for every positive integer n. Also we set $P_0 \equiv 1$. Let us denote by $\mathcal{H}$ the closed in $\mathcal{H}_b(X)$ linear span of $\{P_n\}$, that is $\mathcal{H} = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \in \mathcal{H}_b(X)\}$, where $\mathcal{H}_b(X)$ is the algebra of all entire analytic functions of bounded type on X. So $\mathcal{H}$ is a Frechet subspace of $\mathcal{H}_b(X)$. Let us denote by $\mathcal{E} = \{\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n : \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ is a function of exponential type, $t \in \mathbb{C}\}$ and by $\mathcal{H}_b(\mathcal{E})$ the algebra of entire analytic functions of bounded type on $\mathcal{E}$. Also, we denote by $\mathcal{H}_b(\mathbb{P})$ the closed subalgebra of $\mathcal{H}_b(X)$ generated by polynomials in $\mathbb{P}$. The main questions which we consider are: under which conditions $\mathcal{H}_b(\mathcal{E})$ is isomorphic to $\mathcal{H}_b(\mathbb{P})$ and what is the spectrum of $\mathcal{H}_b(\mathbb{P})$?

Задача Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності в просторі поліноміальних ω-ультрадиференційовних функцій

Шарин С. В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

serhii.sharyn@pnu.edu.ua

Лозинська В. Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України

vlozynska@yahoo.com

У роботі [1] було введено простори $\mathcal{E}_{(\omega)}$ та $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ ω-ультрадиференційовних функцій та ω-ультрарозподілів типу Берлінга з компактними носіями відповідно. Відомо, що $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ є ядерним простором Фреше. Тому з результатів статті [2] випливає, що можна побудувати мультиплікативну алгебру $\mathcal{P}(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ неперервних скалярних поліномів на просторі $\mathcal{E}'_{(\omega)}$, а також сильно спряжену до неї згорткову алгебру $\mathcal{P}'(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ поліноміальних ω-ультрарозподілів.

Оператор сліду τ визначимо за формулою

$$\big\langle \tau, \varphi \widehat{\otimes} \psi \big\rangle := \int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi(t)\psi(t)\,dt, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{E}_{(\omega)}.$$

Зрозуміло, що $\tau \in (\mathcal{E}_{(\omega)}^{\widehat{\otimes}2})' \simeq \mathcal{E}'^{\widehat{\otimes}2}_{(\omega)}$.

Лапласіан Ґросса Δ_G за означенням (див., напр., [3]) є наступним оператором

$$\Delta_G : P = \sum_{n=0}^{m} \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \rangle \longmapsto \Delta_G P := \sum_{n=0}^{m-2} (n+2)(n+1)\big\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \big\rangle \big\langle \ \cdot^{\ \otimes n}, \varphi^{\otimes n} \big\rangle,$$

де $\varphi \in \mathcal{E}_{(\omega)}$.

Для довільного поліноміального ω-ультрарозподілу $U \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ визначимо формальний ряд

$$e^{*U} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} U^{*n}, \qquad \text{де} \quad U^{*n} := \underbrace{U * \cdots * U}_{n}.$$

Зауважимо, що кожна частинна сума цього ряду належить простору $\mathcal{P}'(\mathcal{E}'_{(\omega)})$.

Теорема 1. *Задача Коші*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} X_t = \frac{1}{2} \Delta_G X_t, && t \in [0, \alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \\ &X_0 = P, && P \in \mathcal{P}(\mathcal{E}'_{(\omega)}), \end{aligned}$$

для рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Ґросса, має єдиний розв'язок в $\mathcal{P}(\mathcal{E}'_{(\omega)})$, який задається наступним чином

$$X_t = e^{*tU_\tau} * P,$$

де поліноміальний ω-ультрарозподіл $U_\tau \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ може бути записаний у формі $U_\tau = \big(0, 0, \langle \tau, \cdot^{\otimes 2} \rangle, 0, \dots\big)$.

[1] Braun R.W., Meise R., Taylor B.A. *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math., **17** (1990), 206–237.

[2] Lopushansky O., Sharyn S. *Polynomial ultradistributions on* $\mathbb{R}^d_+$, Topology, **48** (2009), 80–90.

[3] Kuo H. *White Noise Distribution Theory.* CRC Press, Boca Ration, FL, 1996.

Властивості симетричних ліпшицевих функцій

Марцінків М.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

mariadubey@gmail.com

Лабачук О.В.

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

olabachuk@gmail.com

Розглянемо симетричні функції такого вигляду $F_n = \sum\limits_k {x_k}^n$, $G_n = \sum\limits_{k_1<k_2<\ldots<k_n} x_{k_1} \cdot x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_n}$, де $\mid x \mid \leq 1$, $x \in X$, $X-$ метричний простір. Встановлено ліпшицієвість відображення F_n та знайдено ліпшицеву константу $L_{F_n} = n$ для нескінченновимірного простору X, а також доведено, що G_2 є ліпшицевим із константою $L_{G_2} = p-1$, для скінченновимірного простору X вимірністю p. У доповіді будуть представлені властивості та взаємозв'язки між ліпшицевими симетричними функціями та їх степенями.

Hermite-Poulain theorems for linear finite difference operators

Anna Vishnyakova

Kharkov National V.N.Karazin University

anna.m.vishnyakova@univer.kharkov.ua

We present some results obtained in the joint with Olga Katkova and Mikhail Tyaglov works [2] and [3].

We establish analogues of the Hermite-Poulain theorem for linear finite difference operators with constant coefficients defined on sets of polynomials with roots on a straight line, in a strip, or in a half-plane. We also consider the central finite difference operator of the form $\Delta_{\theta,h}(f)(z) = e^{i\theta}f(z+h) - e^{-i\theta}f(z-h)$, $\theta \in [0,\pi)$, $h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, where f is a polynomial or an entire function of a certain kind, and prove that the roots of $\Delta_{\theta,h}(f)$ are simple under some conditions. Moreover, we prove that the operator $\Delta_{\theta,h}$ does not decrease the mesh (i.e. the minimal distance between the roots of a polynomial) on the set of polynomials with roots on a line and find the minimal mesh. The asymptotics of the roots of $\Delta_{\theta,h}(p)$ as $|h| \to \infty$ is found for any complex polynomial p.

For example, we obtain the following result.

Theorem 1. *Let $L_{\varphi_1,c_1} = \{ae^{i\varphi_1} + c_1,\ a \in \mathbb{R}\}$ and $L_{\varphi_2,c_2} = \{ae^{i\varphi_2} + c_2,\ a \in \mathbb{R}\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,\pi)$, be two lines on the complex plane. The formula*

$$T(p)(x) = \sum_{k=l}^{m} a_k p(x - kh), \qquad a_m a_l \neq 0,$$

defines operator $T : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$. This operator sends any polynomial with zeros on the line L_{φ_1,c_1} to a polynomial with zeros on the line L_{φ_2,c_2} if and only if the following conditions hold:

1) *$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ for some $\varphi \in [0,\pi)$;*
2) *$(l+m)\,h = 2Im\left(e^{-i\varphi}(c_2 - c_1)\right) \cdot e^{i\left(\pm\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$;*
3) *All the zeros of the generating function $Q(t) = \sum_{k=l}^{m} a_k t^k$ lie on the unit circle $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;*

Some other interesting roots preserving properties of the operator $\Delta_{\theta,h}$ are also studied, and a few examples are presented.

[1] P. Brändén, I. Krasikov, and B. Shapiro, *Elements of Pólya-Schur theory in finite difference settings,* Proc. Amer. Math. Soc., **144**, (11) (2016), 4831–4843.

[2] O. Katkova, M. Tyaglov and A. Vishnyakova, *Linear finite difference operators preserving Laguerre-Pólya class*, Complex Variables and Elliptic Equations, **63**, (11) (2017), 1604–1619.

[3] O. Katkova, M. Tyaglov and A. Vishnyakova, *Hermite-Poulain theorems for linear finite difference operators*, arXiv:1901.06398.

Лінійні і колмогоровські поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних

Гембарський М.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

hembarskyi@gmail.com

Гембарська С.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

gembarskaya72@gmail.com

У доповіді йдеться про точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1,2] періодичних функцій d змінних $(d \geq 2)$ у просторах Лебега L_q за певних обмежень щодо параметрів p, q і θ, а також, у випадку $d = 1$ — про точні за порядком оцінки колмогоровських і лінійних поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$.

Дослідження стосуються класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються за допомогою специфічної функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, а саме $\Omega(t) = \omega\left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\right)$, де $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, а $\omega(\cdot)$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l) [3, 4] (тоді пишемо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$).

Нехай X — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{L}_M(X)$ — сукупність підпросторів в X, розмірність яких не перевищує M, $L(X, L_M)$ — сукупність лінійних неперервних відображень X в $L_M \in \mathcal{L}_M(X)$ і W — центрально–симетрична множина в X.

Величина

$$\lambda_M(W, X) := \inf_{\substack{L_M \in \mathcal{L}_M(X) \\ \Lambda \in L(X, L_M)}} \sup_{w \in W} \|w - \Lambda w\|_X,$$

де нижню грань взято по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(X)$ і всіх лінійних неперервних операторах Λ, що діють з X в L_M, називається *лінійним M–поперечником* множини W у просторі X [5].

Сформулюємо результати, які укладаються у першу із зазначених частин доповіді.

Теорема 1. *Нехай* $d \geq 2$, $1 < p \leq 2$, $\frac{p}{p-1} < q < \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $q < \theta \leq \infty$ *справедливе співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m}) 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})},$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Теорема 2. *Нехай* $d \geq 2$, $2 \leq p < q < \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $q < \theta \leq \infty$ *справедлива оцінка*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

[1] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности*, Anal. Math., **20** (1994), 35–48.

[2] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.

[3] С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **15** (1951), 219–242.

[4] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[5] В. М. Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*, Успехи мат. наук., **15** (3) (1960), 81–120.

Іменний покажчик учасників конференції