Нелокальна крайова задача для гіперболо-еліптичного рівняння в циліндричній області

Савка І.Я.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)
Гой Т.П.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Нехай $\mathcal{D}^p = (-\alpha, \beta) \times \Omega_p$, α, β — додатні числа, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $||k|| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, $(t, x) \in \mathcal{D}^p$, $p \in \mathbb{N}$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва, отриманих поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(1 + \|k\|^2\right)^q |\varphi_k|^2 \right)^{1/2};$$

$\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x)$ таких, що для кожного фіксованого $t \in I$ функції $\dfrac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}$, $0 \le j \le n$, належать до простору $\mathbf{H}_q$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою $\|u; \mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t \in I} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; \mathbf{H}_q \right\|$.

В циліндричній області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу спряження (при $t = 0$) для мішаного рівняння гіперболо-еліптичного типу з нелокальною умовою: знайти функцію $u = u(t, x)$, яка справджує умови

$$u \in \mathbf{C}^1([-\alpha, \beta]; \mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([0, \beta]; \mathbf{H}_q) \tag{1}$$

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_-, \\ u_{tt} + b^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_+, \end{cases} \tag{2}$$

$$u|_{t=-\alpha} + \mu\, u|_{t=\beta} = \varphi(x), \quad x \in \Omega_p, \tag{3}$$

де a, b — додатні числа, $\mathcal{D}^p_- = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}$, $\mathcal{D}^p_+ = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\Delta = \partial/\partial x_1 + \ldots + \partial/\partial x_p$, $\varphi(x)$ — задана функція.

У роботі встановлено умови єдиності та існування розв'язку задачі (1)-(3).

[1] Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, № 1. – С. 190–191.

[2] Демина Т. Н. Критерий единственности решения смешанной задачи для уравнения гиперболо-эллиптического типа в цилиндрической области // Доклады АМАН. – 2005. – Т. 7. – №2. – С. 18–20

e-mail: s-i@ukr.net, tarasgoy@yahoo.com