Прикарпатский национальный университет
имени Василия Стефаника

Львовский государственный университет
безопасности жизнедеятельности

Р. М. Таций, М. Ф. Стасюк,
В. В. Мазуренко, О. О. Власий

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Львов ◦ 2017

ББК 22.161.6
УДК 517.926
MSC 34A30, 34A36, 34A37

Рекомендовано Ученым советом Прикарпатского национального университета имени Василия Стефаника

Рецензенты:

Каленюк П. И., д-р физ.-мат. наук, проф., директор Института прикладной математики и фундаментальных наук Национального университета "Львовская политехника";

Лазакович Н. В., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета;

Радыно Я. В., чл.-кор. НАН Беларуси, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета;

Сухорольский М. А., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Национального университета "Львовская политехника".

Обобщенные квазидифференциальные уравнения: Пер. с укр. / Р. М. Таций, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власий. – Львов: Изд-во ЛГУ БЖД, 2017. – 303 с.

ISBN 978-966-2405-84-2

В монографии впервые систематически изложена теория обобщенных квазидифференциальных уравнений, активно развивающаяся последние несколько десятилетий. В основе теории лежит концепция квазипроизводных, позволяющая свести к минимуму требования гладкости коэффициентов уравнений. Лучшему пониманию теоретического материала способствует большое число детально разобранных примеров, часть из которых имеет явно выраженный прикладной характер.

Для ученых, аспирантов и студентов, специализирующихся в области дифференциальных уравнений, механиков и инженеров, имеющих дело с дискретно-непрерывными моделями.

ISBN 978-966-2405-84-2

Оглавление

Предисловие

Идея создания этой книги возникла у первых двух авторов достаточно давно. Однако сама книга в том виде, который она имеет сейчас, появилась в некоторой степени случайно. Весной 1994 года вышел из печати препринт с одноименным названием [97] как результат работы семинара "Дискретно-непрерывные краевые задачи" при кафедре высшей математики Львовской политехники. В нем, преимущественно в декларативной форме, была изложена концепция квазипроизводных и построена общая теория скалярных и векторных квазидифференциальных уравнений с коэффициентами-мерами и правыми частями — обобщенными производными высших порядков от функций локально ограниченной вариации. Изложенная теория стала фундаментом дальнейших научных исследований в этом направлении [17–20, 58–61, 64–68, 70, 71, 89–97, 99–113, 165, 166], результаты которых докладывались на многочисленных научных конференциях, и была положена в основу лекций, которые в виде специальных курсов читались авторами на протяжении последних десяти лет в Национальном университете "Львовская политехника", Прикарпатском национальном университете имени Василия Стефаника, Львовском государственном университете безопасности жизнедеятельности, Университете Казимира Великого (Польша), Люблинской Политехнике (Польша).

Небольшой тираж (100 экз.) этого препринта быстро разошелся и за короткое время это издание стало библиографической редкостью. Поэтому возникла необходимость опубликовать его расширенный вариант. Однако, по причинам объективного и субъективного характера, такая публикация задерживалась. В то же время за те 17 лет, что прошли с момента опубликования препринта, изложенная в нем теория обогатилась новыми важными результатами, которые гармонично дополняют предыдущие исследования, с учетом чего не включить их в эту монографию было бы неуместным.

Основную часть монографии составляют результаты, полученные авторами самостоятельно или в соавторстве. Из других результатов приведены (порой без строгих математических доказательств, но всегда с указанием источников, где их можно найти) только результаты, имеющие непосредственное отношение к вопросам, которые рассматриваются в этой монографии. Это касается прежде всего параграфа, посвященного мерам Стилтьеса и функциям ограниченной вариации, их порождающим, а также неравенству Гронуолла-Беллмана и его обобщениям.

Монография состоит из введения и пяти глав. Во введении читатель будет иметь первую возможность познакомиться с центральным объектом монографического исследования — *квазидифференциальным уравнением* (КДУ). Надеемся также, что благодаря сделанному там краткому обзору работ, посвященных теории КДУ (начиная от уравнений с непрерывными и суммируемыми по Лебегу коэффициентами и заканчивая уравнениями с распределениями в коэффициентах), читатель сможет лучше сориентироваться в современных вопросах этой теории. Сразу отметим, что из широкого спектра литературы мы сосредоточили внимание лишь на работах, тесно соприкасающихся или идейно близких к тематике этой монографии.

В первой главе дано определение неклассического интеграла Римана–Стилтьеса, изучены его свойства (условие скачка, теорема о подстановке, формула Дирихле и формула интегрирования по частям), на их основе исследованы линейные матричные интегральные уравнения и соответствующие системы дифференциальных уравнений с мерами. Важной проблемой, возникающей при изучении последних, есть тот факт, что пространство обобщенных функций не является алгеброй, — в нем нельзя определить умножение, которое бы унаследовало основные свойства умножения непрерывных функций. Именно поэтому в отдельном параграфе (см. § 6) обсуждается вопрос о произведении меры на функцию ограниченной вариации и выяснены условия, при которых такое произведение корректно в обобщенном смысле. Прямым следствием такого обсуждения является построение специального класса допустимых функций, в котором существует единственное решение начальной задачи для дифференциальной системы с мерами, посредством фундаментальной матрицы представимое в форме Коши и удовлетворяющее определенным условиям скачка в точках разрывов коэффициентов системы.

Вторая глава посвящена развитию концепции квазипроизводных и построению линейной (элементарной) теории КДУ с коэффициентами-мерами и правыми частями — обобщенными производными высших порядков от функций локально ограниченной вариации. Здесь, в частности:

путем наложения определенных условий на коэффициенты уравнения выделен широкий класс корректных обобщенных КДУ, при исследовании которых не возникает проблема умножения функционалов, и указана процедура приведения таких уравнений к дифференциальным системам с мерами;

введено понятие решения исходного и сопряженного с ним КДУ и указан способ определения соответствующих им квазипроизводных, обладающих свойством взаимообусловленности в том смысле, что в случае, если квазипроизводные для одного из уравнений определены, то квазипроизводные для другого уравнения определяются однозначно;

для однородных взаимно сопряженных КДУ с коэффициентами-мерами сформулированы в терминах соответствующих им квазипроизводных и доказаны теоремы о существовании и единственности решений начальных задач, а также указана характеристика их (решений) гладкости;

введено понятие квазивронскиана решений исходного и сопряженного уравнений, для каждого из уравнений получен аналог формулы Лиувилля–Остроградского–Якоби, введено понятие фундаментальной системы решений (ФСР) и выяснена структура общего решения;

установлен максимальный порядок обобщенной производной от функции локально ограниченной вариации в правой части неоднородного КДУ, для которого уравнение остается корректным даже при условии, что точки сингулярности коэффициентов уравнения и правой части совпадают.

Одним из центральных результатов второй главы является структура фундаментальной матрицы, соответствующей КДУ с коефициентами-мерами. Как выяснилось, ее удается построить с помощью лишь одной "функции Коши" и ее смешанных квазипроизводных в смысле исходного и сопряженного уравнений. Это позволило установить тесную связь между решениями этих уравнений, а также получить представление функции Коши и ее смешанных квазипроизводных через ФСР. Отметим, между прочим, тот факт, что поскольку для обыкновенных дифференциальных уравнений (так же, как и для квазидифференциальных) квазипроизводные в смысле исходного и сопряженного уравнений, вообще говоря, не совпадают, то структура фундаментальной матрицы до сих пор не была известна даже для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементы линейной теории обобщенных КДУ в пространстве вектор-функций читатель найдет в третьей главе монографии.

В четвертой главе изучаются обобщенные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ-особенностями и тесно связанные с ними два специальных класса обобщенных КДУ — так называемые вырожденные и частично вырожденные уравнения. Специфическая структура коэффициентов последних позволяет не только явно находить вид соответствующей им матрицы Коши, но и конструктивно представлять решения этих уравнений в виде сплайнов. Практический интерес к таким уравнениям вызван, в частности, их применением для получения приближенного решения КДУ общего вида.

Приближенным методам решения обобщенных КДУ и дифференциальных систем с мерами как раз и посвящена заключительная пятая глава монографии. Сначала для КДУ с обобщенными коэффициентами дано понятие и предложена процедура построения точных рекуррентных соотношений, которые являются аналогами точных разностных схем [**115**, **117**] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее, с использованием одного специального обобщения неравенства Гронуолла–Беллмана, получены условия, при которых приближенное решение дифференциальной системы с мерами можно получить аппроксимацией функций, порождающих эти меры. Наконец, на примере обобщенного КДУ произвольного порядка рассмотрены такие два важные на практике способы аппроксимации коэффициентов, как L-аппроксимация (линеаризация) и D-аппроксимация (дискретизация), которые при относительно незначительной вычислительной трудоемкости позволяют получать результаты с нужной точностью.

Все главы монографии авторы старались изложить достаточно подробно, с полными доказательствами и замечаниями, иллюстративными, контрольными и модельными примерами (в частности, теоретический материал последних двух глав постоянно иллюстрируется примерами) так, чтобы содержание монографии было понятно не только специалистам, но и аспирантам и студентам старших курсов, которые уже занимаются или только интересуются (квази)дифференциальными уравнениями, а также механикам и инженерам, которые на практике имеют дело с подобными задачами.

Следует отметить, что изложенная в этой монографии общая теория обобщенных КДУ легла в основу теории дискретно-непрерывных самосопряженных и несамосопряженных краевых задач [**18**–**20**, **58**–**61**, **64**–**68**, **70**, **71**, **102**, **103**, **106**–**108**, **111**, **112**, **165**, **166**] и построения приближенных методов их решения [**17**, **90**, **99**, **100**, **109**]. Этим проблемам мы надеемся в ближайшее время посвятить отдельные монографии.

Считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность академику НАН Украины *Анатолию Михайловичу Самойленко* и член-корреспонденту НАН Беларуси *Якову Валентиновичу Радыно* за неизменную поддержку этого научного направления.

Львов, февраль 2011 г. *Авторы*

Введение

> A major task of mathematics to-day is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both.
>
> Главная задача математики наших дней состоит в достижении гармонии между континуальным и дискретным, включении их в единое математическое целое и удалении из них всего неясного.
>
> E.T. Bell, Men of Mathematics, I
> Penguin Books, London, 1953.

Исследования различных физических процессов, учитывающих естественное единство дискретного (сосредоточенные величины) и непрерывного (распределенные величины), приводят к необходимости создания адекватных математических моделей. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями, содержащими слагаемые вида $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$ [**22**, **42**, **47**, **76**]. При условии недостаточной гладкости коэффициента $p(x)$ такие уравнения уже нельзя привести (с помощью операции n-кратного дифференцирования) к обыкновенным дифференциальным. Чтобы подчеркнуть этот важный факт, в научной литературе их называют *квазидифференциальными* уравнениями (КДУ).

Впервые термин "*квазидифференциальное уравнение*" встречается в работах Д. Шина [**124**–**126**]. Собственно, ему и принадлежит идея введения квазипроизводных (тем не менее сам термин "*квазипроизводная*" он не употребляет), которая позволяет отказаться от требований гладкости коэффициентов или свести их к минимуму. В своих работах [127, 128] автор рассматривал довольно общие КДУ вида

$$f^{[n]} - lf = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.1}$$

где

$$f^{[0]} = P_{00}f,\ f^{[k]} = iP_{kk}\frac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu}f^{[\nu]},\ k = \overline{1,n},\ i = \sqrt{-1},$$

и сопряженные с ними

$$g^{\{n\}} - lg = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.2}$$

где

$$g^{\{0\}} = Q_{00}g, \quad g^{\{k\}} = iQ_{kk}\frac{d}{dx}g^{\{k-1\}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{k\nu}g^{\{\nu\}},\ k = \overline{1,n},$$

$$Q_{k\nu} = \overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}}, \quad \nu \leqslant k, \quad k,\nu = \overline{0,n},$$

при условии, что комплекснозначные функции $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu = \overline{0,n}$, определены и измеримы на (a,b), а функции $P^{-1}_{kk}(x)$, $k = \overline{0,n}$, и $P_{k\nu}(x)$, $\nu < k$, $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, квадратично суммируемы (по Лебегу[1)]) на каждом конечном замкнутом сегменте $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. При этом функции $f(x)$ и $g(x)$ считаются решениями уравнений (0.1) и (0.2) соответственно, если выражения $f^{[k]}(x)$ и $g^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,n-1}$, являются абсолютно непрерывными и удовлетворяют равенствам (0.1) и (0.2) почти везде на (a,b).

В работе [127] для уравнений (0.1) и (0.2) доказаны теоремы о существовании и единственности решений начальных задач и установлена связь между ними. Показано также, что дифферен-

[1)] Лебег Анри Леон (Lebesgue Henri Leon, 1875–1941) — французский математик, профессор Парижского университета, член Парижской АН (1922), иностранный член-корр. АН СССР (1929).

циальные выражения $f^{[n]}$ и $g^{\{n\}}$ являются самосопряженными (по Лагранжу[2)]), если и только если функции $P_{k\nu}(x)$, $\nu\leqslant k$, $k,\nu=\overline{0,n}$, почти везде на (a,b) удовлетворяют равенствам

$$\overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}}=P_{k\nu},\quad \nu\leqslant k,$$
$$k=\overline{0,n-[n/2]},\ \nu=\overline{0,[n/2]}.$$

Понятно, при таких условиях $Q_{k\nu}=P_{k\nu}$, $\nu\leqslant k$, $k,\nu=\overline{0,n}$, и $f^{[k]}=g^{\{k\}}$. Обобщая известные результаты Г. Вейля[3)] [**183**] и В. Виндау [**186**] о количестве суммируемых с квадратом решений для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков на КДУ вида (0.1), Д. Шин получил следующие результаты:

(А) *количество m линейно независимых решений уравнения* (0.1)*, принадлежащих к $L_2(0,\infty)$, при $n=2k$ и $\operatorname{Im} l\neq 0$ удовлетворяет неравенству $m\geqslant k$.*

(Б) *имеет место альтернатива: $m=k$, либо $m=n$.*

Впоследствии И. М. Глазман [**23**] показал, что результат (Б) как у В. Виндау, так и у Д. Шина является несколько ошибочным и что на самом деле m удовлетворяет неравенству $k\leqslant m\leqslant n$.

В роботе [**128**] дано применение теории неограниченных симметричных операторов к КДУ (0.1) и (0.2) подобно тому, как это ранее сделал М. Стоун[4)] [**178**] для уравнений второго порядка.

[2)] Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) — французский математик и механик, профессор Артиллерийской школы в Турине, Нормальной и Политехнической школ в Париже, член Берлинской АН (1759), Парижской АН (1772), иностранный член Петербургской АН (1776).

[3)] Вейль Герман (Weyl Hermann, 1885–1955) — немецкий математик и физик, ученик Д. Гильберта, профессор Цюрихского технологического института, Геттингенского университета, Принстонского института перспективных исследований, член Национальной АН США, награжден Международной премией им. М. И. Лобачевского (1927).

[4)] Стоун Маршалл Харви (Stone Marshall Harvey, 1903–1989) — американский математик, профессор Колумбийского, Гарвардского, Йельского, Чикагского и Массачусетского университетов, член Национальной АН США (1938), президент Американского математического общества (1943, 1944).

Попутно отметим, что сингулярные КДУ являются не только одной из основных областей применения этой теории, но и одним из источников ее возникновения и развития. Так, исследования Вейля впервые позволили выявить характерные черты будущей теории неограниченных симметричных операторов. После создания этой теории результаты Вейля были истолкованы с более общей точки зрения Стоуном. Как известно, исходным пунктом теории Вейля является альтернатива: случай "предельного круга" (Grenzkreisfall) — случай "предельной точки" (Grenzpunktfall). Аналогичная альтернатива была обнаружена Н. И. Ахиезером[5)] и М. Г. Крейном[6)] при изучении проблемы моментов на оси [**4**, **6**]. С точки зрения теории операторов в гильбертовом пространстве обе эти альтернативы имеют общую природу.

Идеи Шина оказались достаточно плодотворными и впоследствии были развиты в различных аспектах в трудах М. Г. Крейна [**50**, **51**], Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [**5**, **24**], М. А. Наймарка [**72**], С. А. Орлова [**77**–**79**], А. В. Штрауса [**129**–**132**], В. И. Когана, Ф. С. Рофе-Бекетова и А. М. Холькина [**44**, **45**, **82**, **172**] и других авторов.

Так, отдельные главы фундаментальных работ [**5**,**50**,**72**] посвящены самосопряженому квазидифференциальному выражению

[5)] Ахиезер Наум Ильич (1901–1980) — украинский математик, работал в учебных заведениях и научно-исследовательских институтах в Киеве, Нежине, Харькове, Алма-Ате, Москве, профессор Харьковского университета, чл.-корр. АН УССР (1934), председатель Харьковского математического общества (с 1947), лауреат премии им. П. Л. Чебышева АН СССР (1949), награжден медалью Л. Эйлера АН СССР (1957).

[6)] Крейн Марк Григорьевич (1907 –1989) — украинский математик, работал в учебных заведениях и научно-исследовательских институтах в Донецке, Одессе, Куйбышеве, Харькове, Киеве, профессор Одесского инженерно-строительного института, член-корр. АН УССР (1939), член Харьковского, Московского и Американского математических обществ, лауреат премии им. М. М. Крылова.

четного порядка

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k)} \tag{0.3}$$

и соответствующему КДУ

$$l(y) = f(x) \tag{0.4}$$

с измеримыми на интервале (a, b) и локально суммируемыми на этом интервале (т. е. суммируемыми на каждом его компактном подинтервале) коэффициентами $p_0^{-1}(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правой частью $f(x)$. Для выражения (0.3) вводятся квазипроизводные

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k},\ k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n};$$

$$y^{[n+k]} = p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} y^{[n+k-1]},\ k = \overline{1, n-1},$$

и ставится задача с начальными условиями

$$y^{[k]}(x_0) = c_k,\ k = \overline{0, 2n-1} \tag{0.5}$$

для КДУ (0.4), которая имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций вместе со своими производными до $(2n-1)$-го порядка включительно. Доказательство этого факта (который остается верным также для уравнений $l(y) - \lambda y = f(x)$ с произвольным комплексным параметром λ) основывается на приведении задачи (0.4), (0.5) посредством вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right)^\top$ к виду

$$Y' = A(x)\, Y + f(x), \tag{0.6}$$

$$Y(x_0) = Y_0,\ x_0 \in I,$$

с измеримыми и локально суммируемыми на интервале (a, b) матрицей $A(x)$ и вектором $f(x)$, и последующим применением метода последовательных приближений Пикара[7)]. Кроме того, в работах построена теория самосопряженных расширений симметрических операторов, порожденных самосопряженным квазидифференциальным выражением (0.3) и проведен спектральный анализ таких операторов.

Отметим, что теория операторов играет важную роль в современной математике и физике. Спектральный анализ дифференциальных операторов, то есть исследование спектра и разложение заданной функции по собственным функциям дифференциального оператора, является основным математическим аппаратом при решении задач теории колебаний, квантовой механики, атомной физики, акустики, физики твердого тела, механики жидкостей. При этом особенно важным является исследование сингулярных дифференциальных операторов, например, операторов, заданных на бесконечном интервале. Такие операторы могут иметь не только дискретный, но и непрерывный спектр, вследствие чего разложение по их собственным функциям представимо в виде интеграла Стилтьеса[8)] (по спектральной функции распределения).

Вопросы, связанные с конструкцией резольвент и спектральных функций, а также с выяснением кратности спектра самосопряженных квазидифференциальных операторов четного порядка, изучались в работах [**78**, **79**, **129**–**132**].

[7)] Пикар Шарль Емиль (Picard Charles Émile, 1856–1941) — французский математик, профессор Сорбонны и Высшей нормальной школы в Париже, член Парижской АН (1889), иностранный член-корр. Петербургской АН (1895), член Лондонского королевского общества (1909), Французской АН (1924), почетный член АН СССР (1925).

[8)] Стилтьес Томас Иоаннес (Stieltjes Thomas Joannes, 1856–1894) — голландский математик, работник Лейденской обсерватории, профессор университета в Тулузе, чл.-корр. Петербургской АН (1894).

Для дифференциальных уравнений $l(y) = \lambda y$ произвольного четного или нечетного порядка m с непрерывными операторными коэффициентами общий вид самосопряженных краевых задач на конечном промежутке $[0, b]$ получено в статье [**82**]. Примененный в ней метод основывается на понятии эрмитового бинарного отношения, которое задается в произвольном гильбертовом пространстве. Оказывается, что определение такого отношения эквивалентно заданию определенных краевых условий, описывающих самосопряженные расширения для операции $l(y)$. Операции, которые рассматривались в цитированной работе, задаются выражением

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big\{ \big(p_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k)} - \\ - i\Big[\big(q_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k-1)} + \big(q_{n-k}(x) y^{(k-1)}\big)^{(k)}\Big]\Big\} + p_n(x) y$$

в случае четного m и выражением

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big\{ i\Big[\big(q_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k+1)} + \big(q_{n-k}(x) y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big] + \\ + \big(p_{n-k}(x) y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\},$$

если m нечетное. К тому же отмечено, что условия непрерывности коэффициентов можно ослабить, если рассматривать $l(y)$ как квазидифференциальную операцию. Собственно, так она понимается в работе Ф. Уолкера [**182**], где скалярные коэффициенты допускаются суммируемыми, а операция нечетного порядка определяется выражением

$$l(y) = (-1)^n \Big\{ i\Big[q_0(x)\big(q_0(x) y^{(n)}\big)'\Big]^{(n)} + \big(p_0(x) y^{(n)}\big)^n \Big\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big]+ \\ +\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\}.$$

Путем применения теории систем первого порядка в монографии [3] получены двусторонние оценки для размерности $N(\lambda)$ линейного многообразия решений с $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$ уравнения $l(y)=\lambda\omega(x)y$ с локально суммируемой на интервале (a,b) весовой функцией $\omega(x)>0$ почти везде на (a,b), а также установлено, что, если при некотором значении комплексного параметра λ все решения этого уравнения принадлежат к $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$, то этот факт имеет место для всех λ. Подобные вопросы для уравнений с матричными коэффициентами различными методами исследовались в [14,45], а для уравнений с комплексными коэффициентами — в [44].

Монография [172] посвящена, прежде всего, исследованию связей между спектральными и осциляционными свойствами бесконечных систем дифференциальных уравнений произвольного порядка, которые могут быть представлены в форме дифференциального уравнения с операторнозначными (ограниченными) коэффициентами. Вдобавок авторы рассматривают также много вопросов (например, построение фундаментальной системы решений операторного дифференциального уравнения с краевыми условиями на бесконечности, описание самосопряженных расширений для бесконечных систем дифференциальных уравнений на конечном или бесконечном интервале с использованием уже упоминавшегося метода бинарных отношений и т.д.), которые не только играют ключевую роль при исследовании главной проблематики книги, но и представляют самостоятельный интерес.

Среди работ зарубежных математиков по теории квазидифференциальных операторов, кроме цитируемой работы [**182**], отметим также труды К. Кодаиры[9] [**157**], И. Вайдмана [**184**, **185**], А. Зеттла, У. Эверитта, Л. Маркуса [**138**–**144**, **187**].

Так, в [**138**] можно найти обзор ряда результатов по проблеме индексов дефекта операторов, начиная с фундаментальной работы Вейля за 1910 г. и до 1976 г. включительно. В статье [**184**] в гильбертовом пространстве $L_r^2(a, b)$ функций, квадратично интегрируемых на интервале (a, b) относительно веса $r(x)$, изучается спектральная теория операторов, порожденных дифференциальными выражениями вида

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Big\{-\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\Big\}$$

с измеримыми на (a, b) и локально суммируемыми на этом интервале коэффициентами $p^{-1}(x)$, $q(x)$ и $r(x)$, причем $p(x) > 0$ и $r(x) > 0$ почти везде на (a, b). В роботе [**185**] эти исследования развиты на случай формально самосопряженных квазидифференциальных выражений произвольного порядка

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Bigg\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\big(p_j(x)y^{(j)}\big)^{(j)} + \\ + \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j\Big[\big(q_j(x)y^{(j)}\big)^{(j+1)} - \big(q_j^*(x)y^{(j+1)}\big)^{(j)}\Big]\Bigg\}$$

с измеримыми на (a, b) матричными коэффициентами $r(x)$, $p_j(x)$ и $q_j(x)$, где $r(x)$ — положительно определенная для почти всех $x \in (a, b)$ матрица, $p_j(x)$ — эрмитовы матрицы. Кроме того, в

[9] Кодаира Кунихико (Kodaira Kunihiko, 1950 г.р.) — японский математик, профессор Токийского, Гарвардского и Стэнфордского университетов, профессор Принстонского института перспективных исследований, член Национальной АН США (1978), лауреат золотой медали и премии Дж. Филдса (1954).

случае четного $n=2k$ предполагается, что матрицы $p_k(x)$ являются регулярными для всех $x \in (a,b)$, а функции $|p_k^{-1}|$, $|p_{k-1}-q_{k-1}^*p_k^{-1}q_{k-1}|$, $|p_k^{-1}q_{k-1}|$, $|p_j|$, $j=\overline{0,k-2}$, $|q_j|$, $j=\overline{0,k-2}$, $|r|$ — локально суммируемыми на (a,b); в случае нечетного $n=2k+1$ требуется, чтобы матрицы $q_k(x)$ были абсолютно непрерывными на (a,b), $\hat{q}_k(x)=q_k(x)-q_k^*(x)$ — регулярными для всех $x \in (a,b)$, а $|\hat{q}_k^{-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}q_{k-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}(p_k+q_k')|$, $|p_j(x)|$, $j=\overline{0,k-1}$, $|q_j(x)|$, $j=\overline{0,k-1}$, $|r(x)|$ — локально суммируемыми на (a,b).

Для $m=1$ подобный класс квазидифференциальных выражений изучался в работах [**139**, **143**, **187**], где

$$l(y)=\left(y^{[n-1]}\right)'-\sum_{i=1}^{n} f_{ni}(x)y^{[i-1]},$$

причем $y^{[0]}=y$, $y^{[i]}=f_{i,i+1}^{-1}(x)\Big[\left(y^{[i-1]}\right)'-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x)y^{[j-1]}\Big]$, а функции $f_{ij}(x)$ для всех i,j определены и локально суммируемыми на интервале (a,b), $f_{ij}(x)=0$ почти везде на (a,b) при $2\leqslant i+1<j$, и $f_{i,i+1}(x)\neq 0$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$. Некоторые дополнительные замечания относительно линейных КДУ сделаны в [**142**]. Квазидифференциальные выражения, содержащие только члены четного порядка $\left(p_j(x)y^{(j)}\right)^{(j)}$, изучались в [**157**]. Вопросы факторизации (разложения на множители) квазидифференциальных операторов рассмотрены в [**141**]. В статье [**144**] исследованы дифференциальные вектор-операторы, порожденные счетным числом квазидифференциальных выражений на действительной оси. Изучению краевых задач для обыкновенных дифференциальных и квазидифференциальных операторов посвящена работа [**140**].

В роботах В. Я. Дерра [34–36] исследуются близкие к (0.1) КДУ вида

$$q_P^n x \equiv p_{nn}(t)\frac{d}{dt}q_P^{n-1}x + \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk}(t)q_P^k x = f(t), \tag{0.7}$$

где

$$q_P^0 x = p_{00}(t)x, \quad q_P^k x = p_{kk}(t)\frac{d}{dt}q_P^{k-1}x + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(t)q_P^\nu x, \; k = \overline{1,n},$$

$$P = \{p_{ik}\}, \quad p_{ik} = 0, \; k > i,$$

з действительными коэффициентами $p_{ik}(t)$, $k \leqslant i$, и локально суммируемыми на интервале (a,b) функциями $p_{ii}^{-1}(t)$, $p_{ik}(t)p_{ii}^{-1}(t)$, $f(t)p_{nn}^{-1}(t)$. На случай таких уравнений переносятся основные факты теории осцилляции, вводится понятие обобщённой задачи Валле-Пуссена[10)], решение которой ищется в классе функций с кусочно абсолютно непрерывными квазипроизводными. В [37] решение обычного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах определяется как решение соответствующего КДУ. Отметим также, что существенные результаты в теории КДУ на графах получены Ю. В. Покорным и его учениками. Полное представление об их достижениях и актуальные вопросы в этом направлении можно получить из монографии [38].

Поскольку мы затронули уже КДУ с обобщенными функциями[11)] в коэффициентах, то будет уместным вспомнить также о работах по обыкновенным дифференциальным уравнениям с

10) Валле-Пуссен Шарль Жан де Ла (de La Vallee-Poussin Charles Jean, 1866–1962) — бельгийский математик, профессор Лувенского университета, член Бельгийской АН (1909).

11) Локально интегрируемые функции и δ-функции описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и т. п., поэтому обобщенные функции называют еще *распределениями* (Л. Шварц, 1950).

обобщенными коэффициентами. Как известно, краевые задачи для таких уравнений успешно изучаются математиками и механиками издавна. До введения понятия δ-функции точечные сингулярности появлялись в задачах в форме специфических условий сопряжения для решения и его производных в точках, которые с точки зрения современной теории относятся к сингулярным носителям коэффициентов уравнения. Такие исследования, по большому счету, имели частный характер, так как касались уравнений конкретного вида. Уравнения, коэффициенты которых содержат импульсные особенности типа δ-функции и её производных, описывают процессы в физических системах с дискретно-непрерывным распределением параметров — стержни, пластины, оболочки с сосредоточенными в точках, на линиях, отдельных поверхностях массами и моментами инерции, несущими слоями нулевой толщины и т.п.

Существенный толчок для развития эта тематика получила благодаря фундаментальным работам М. Г. Крейна и И. С. Каца (см. приложение II монографии [3] и библиографию там) по дифференциальным уравнениям второго порядка, моделирующие свободные колебания струны, масса которой допускает кроме непрерывного, ещё и точечное распределение. С математической точки зрения исследования связаны с обобщенным дифференциальным выражением

$$l_{MQ}(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^{+}(x) - \int\limits_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s)\right], \tag{0.8}$$

где $M(x)$ — неубывающая на некотором конечном или бесконечном интервале функция, $Q(x)$ — разность двух неубывающих функций, $y^{+}(x)$ — правосторонняя производная функции $y(x)$.

В случае, если $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывные и почти везде на интервале $M'(x) = \rho(x)$, $Q'(x) = q(x)$, дифференциальное уравнение $l_{MQ}(y) - \lambda y = 0$ равносильно уравнению

$$-y'' + q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0.$$

Дифференциальное выражение (0.8) для $Q(x) = \mathrm{const}$ изучалось В. Феллером[12)] [**146–148**]. Его работа [**146**] весьма примечательна тем, что в ней дается внутреннее аксиоматическое определение операции $-\dfrac{d}{dM(x)}y^+(x)$. Благодаря Феллеру такие дифференциальные операции начали применяться в теории марковских процессов. Однако автор определял операцию так, что она теряла смысл при наличии в функции $M(x)$ интервалов постоянства. Вследствие этого его результаты оказались недостаточно общими, потому что не охватывали важный случай дискретных марковских процессов таких, как например, процессы размножения и гибели [**43**] (их исследования приводят к дифференциальной операции, связанной со стилтьесовой струной [**3**, §13]).

Со спектральной теорией неоднородной нагруженной струны тесно связана (см., например, [**75**]) еще одна спектральная теория — теория операторов Шрёдингера[13)] с сингулярными (а именно, сосредоточенными на дискретном множестве точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) потенциалами

[12)] Феллер Вильям (Feller William, 1906–1970) — американский математик, работал в Стокгольме консультантом по математическим методам в статистике, экономике и биологии, профессор Корнеллского и Принстонского университетов, член Национальной АН США (1960), редактор журнала "Mathematical Reviews"(1939–1945).

[13)] Шрёдингер Эрвин (Schrödinger Erwin, 1887–1961) — австрийский физик-теоретик и математик, один из основателей квантовой механики, работал в высших технических школах в Штутгарте, Бреслау, Цюрихе, профессор Венского, Йенского, Берлинского, Оксфордского и Грацкого университетов, директор Института высших исследований в Дублине, почетный член АН СССР (1934), лауреат Нобелевской премии (1933).

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x - x_k),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — интенсивности точечных взаимодействий [14]. Такие операторы являются точно разрешимыми (в том смысле, что их резольвенты строятся в явном виде, следовательно, удается вычислить спектры и характеристики рассеивания) математическими моделями квантово-механических систем [**134**, **180**]. Историю исследования одномерных операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями можно найти в монографиях [**134**, **135**], которые содержат достаточно полную библиографию по этой тематике. Более поздним исследованиям в этом направлении посвящены работы [**26**–**29**, **74**, **149**, **151**, **152**, **156**, **158**, **167**–**169**, **173**–**175**, **188**–**190**].

В последние годы интенсивно растет количество публикаций (как теоретического, так и прикладного характера) по теории дифференциальных уравнений и систем уравнений с распределениями в коэффициентах, что свидетельствует об актуальности постановок задач, сочетающих континуальность с дискретностью. Многие задачи математической физики, электротехники, теории автоматического управления, квантовой механики, атомной физики приводят к необходимости создания достаточно развитой теории таких уравнений. Интерес к дифференциальным уравнениям с обобщенными коэффициентами объясняется еще и тем, что в рамках этой теории представляется возможным с единой точки зрения исследовать как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и дифференциальные уравнения с особенностями импульсного типа и разностные уравнения. В монографии О. Ф. Фи-

[14] В точных моделях квантовой механики относительно производной δ' различают два физических феномены: δ'-взаимодействие и точечное дипольное взаимодействие (δ'-потенциал) [**179**].

липпова [119] сделан обзор работ отечественных и зарубежных авторов, где исследуются различные классы дифференциальных уравнений с обобщенными функциями, входящими в уравнение в виде слагаемых, в том числе дифференциальные уравнения с импульсами, линейные (и простейшие нелинейные) уравнения с обобщенными функциями в правой части, линейные системы, не разрешенные относительно производных и обладающие разрывными решениями, рассматриваются также дифференциальные уравнения, содержащие обобщенные функции в коэффициентах. Указаны некоторые классы уравнений и систем, которые с помощью замены переменных сводятся к системам Каратеодори[15)], что позволяет доказать существование решений и исследовать их свойства. Рассматриваются различные предельные переходы от дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями к уравнениям с обобщенными функциями. В монографии приводится многочисленная библиография, которая дает полное представление о состоянии исследований (разумеется на момент опубликования монографии) в этом направлении. Что касается исследований по общей и спектральной теории обобщенных КДУ, возникших в течение двух-трех последних десятилетий, обратим внимание на работы [17–19, 30, 31, 58, 61, 67, 68, 70, 71, 89, 90, 92, 95, 97, 99, 100, 102–110, 113, 165, 166].

Еще одним важным направлением в плане обобщений обыкновенных дифференциальных уравнений является исследование динамических систем с разрывными траекториями или, как их еще называют, дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Такие задачи возникли на заре нелинейной механики

15) Каратеодори Константин (Caratheodory Constantin, 1873–1950) — немецкий математик, профессор Ганноверского, Геттингенского, Берлинского, Мюнхенского и Афинского (ректор с 1939) университетов.

и заинтересовали физиков возможностью адекватно описывать процессы в нелинейных колебательных системах.

Система уравнений с импульсным воздействием описывается

а) системой дифференциальных уравнений, характеризующей эволюцию рассматриваемого процесса

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.9}$$

б) некоторым множеством $\mathcal{F}_t$ расширенного фазового пространства $M \times \mathbb{R}$;

в) оператором $\mathcal{A}_t$, определенным на множестве $\mathcal{F}_t$ и отображающим его на множество $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t$ расширенного фазового пространства. В более компактной форме это выглядит так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \notin \mathcal{F}_t, \quad \Delta x\big|_{(t,x)\in\mathcal{F}_t} = \mathcal{A}_t x - x. \tag{0.10}$$

Решением задачи (0.10) является функция $x = \varphi(t)$, которая (в обычном смысле) удовлетворяет системе уравнений (0.9) вне множества $\mathcal{F}_t$ и имеет разрывы первого рода в тех точках t, для которых $(t, x) \in \mathcal{F}_t$. Величина скачка решения вычисляется по формуле $\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = \mathcal{A}_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0)$.

За последние 30 лет заметно увеличилось число работ по исследованию дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в разных математических школах как в нашей стране, так и за ее пределами [**40**, **85**, **122**, **145**, **170**]. Однако наиболее систематические и глубокие исследования были проведены киевской школой нелинейной механики, представители которой успешно развивают такие направления, как общие вопросы, теория устойчивости и теория управления, краевые и многоточечные задачи, методы численно-аналитического и асимптотического интегрирования [**7**, **8**, **80**, **83**–**85**, **87**, **88**, **133**].

Известно [98], что любое линейное КДУ с помощью введения квазипроизводных удается свести к линейной дифференциальной системе первого порядка вида

$$Y' = C'(x)\,Y + F'(x). \tag{0.11}$$

Если $C(x)$ и $F(x)$ абсолютно непрерывные [3], то система (0.11) эквивалентна интегральному уравнению

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0) \tag{0.12}$$

с интегралом Лебега. Такая ситуация имеет место для квазидифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами; при этом (0.11) является системой типа Каратеодори и допускает запись в виде (0.6). Эквивалентность сохраняется и тогда, когда $C(x)$ абсолютно непрерывна, а $F(x)$ имеет ограниченную вариацию [122] или, когда $C(x)$ и $F(x)$ непрерывные функции ограниченной вариации [160]. При этом дифференцирование и равенство в (0.11) понимаются в смысле теории обобщенных функций и, кроме того, в последнем из этих случаев в уравнении (0.12) будет фигурировать классический интеграл Римана–Стилтьеса[16].

Все это не обобщается непосредственно на случай, когда $C(x)$ является разрывной функцией ограниченной вариации, даже при условии $F(x) \equiv 0$. В этом случае разрывы матрицы-функции $C(x)$ обязательно порождают разрывы решения $Y(x)$ и к тому же в одних и тех же точках. Поэтому интеграл Стилтьеса в уравнении (0.12) может не существовать (см. [73, с. 214]). Теория обобщенных функций здесь также ничего не дает, потому

[16] Риман Георг Фридрих Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard, 1826–1866) — немецкий математик, профессор Геттингенского университета.

что, например, произведение δ-функции Дирака[17)] на её неопределенный интеграл (функцию Хевисайда[18)]) не существует (см. §6). Следовательно, не определено также произведение матричной меры Стилтьеса [**122**, с. 160] $C'(x)$ на функцию ограниченной вариации.

Однако, если для функций ограниченной вариации различать значения $Y(x)$, $Y(x-0)$, $Y(x+0)$ и по отдельности рассматривать левый $Y(x)-Y(x-0)$ и правый $Y(x+0)-Y(x)$ скачки, то удается определить интеграл в уравнении (0.12), когда $C(x)$ и $Y(x)$ являются разрывными функциями ограниченной вариации. При различных предположениях (например, если $Y(x) = Y(x-0)$, или $Y(x)=Y(x+0)$, или же $Y(x) = [Y(x-0)+Y(x+0)]/2$ и т.д.) получают различные условия существования решения уравнения (0.12) и соответственно системы (0.11), отличаются и сами решения. В книгах [**40**, **119**] отмечено, что известные определения решения системы (0.11) в такой ситуации реализуются в рамках трех основных подходов.

Первый подход связан с попытками формализации этой системы в рамках теории распределений и сводится к проблеме умножения обобщенных функций на разрывные. Сначала на основе секвенциального подхода [**2**] вводится определение произведения меры на функцию ограниченной вариации, а далее соответствующим образом дается определение решения системы (0.11) [**40**, **136**, **160**, **161**]. Весьма интересны также работы

---

17) Дирак Поль Адриен Морис (textsc Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1984) — английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики, профессор Кембриджского университета, член Лондонского королевского общества (1930), иностранный член АН СССР (1931), лауреат Нобелевской премии (1933).

18) Хевисайд Оливер (Heaviside Oliver, 1850–1925) — английский физик и инженер, член Лондонского королевского общества (1891).

[1, 39, 81, 137, 162], в которых исследуются дифференциальные уравнения в пространствах "новых"[19)] обобщенных функций.

Второй подход предложен в работе Я. Курцвейля [159] и предусматривает формальный переход к интегральному уравнению (0.12), в котором интеграл понимается в смысле Перрона–Стилтьеса[20)], Лебега–Стилтьеса или как неклассический интеграл Римана–Стилтьеса [9, 154, 171, 176, 177]. При таком подходе, понятно, скачки решения будут зависеть от значений функции $C(x)$ в точках разрыва.

Третий подход основан на идее аппроксимации элементов матрицы $C(x)$ последовательностями гладких функций [56], [40, с. 148]. При этом решение системы (0.11), которая определяется границей своих гладких приближений, совпадает с решением интегрального уравнения (0.12).

Для иллюстрации описанных выше подходов рассмотрим начальную задачу

$$y' = \frac{1}{2}\delta(x)y, \quad y(-1) = y_0, \tag{0.13}$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака (см. с. 48). На основании результатов работы [40] решение задачи (0.13) имеет вид

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\frac{1}{2}H_+(x)\right\}, \tag{0.14}$$

где $H_+(x)$ — функция Хевисайда, непрерывная слева (разрывная справа) в точке $x = 0$: $\quad H_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

[19)] Новые обобщенные функции, как и распределения, определяются как границы последовательностей гладких функций, однако принципиальное отличие их от распределений заключается в том, что при этом "запоминается" сам способ аппроксимации.

[20)] Перрон Оскар (Perron Oscar, 1880–1975?) — немецкий математик, профессор Мюнхенского и Гейдельберского университетов.

Решением этой же задачи, которое понимается в смысле работ [**136**, **160**, **161**], является функция

$$y(x) = y_0\left[\frac{2}{3}H_+(x) + 1\right],$$

очевидно, не совпадающая с функцией (0.14).

В рамках второго подхода задаче (0.13) следует поставить в соответствие интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} y(t)\; d[\alpha H_+(t) + (1-\alpha)H_-(t)], \qquad (0.15)$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а $H_-(x)$ — функция Хевисайда, разрывная слева в точке $x = 0$: $\quad H_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Понятно, что при разных значениях α решения уравнения (0.15) определяются по-разному: при $\alpha = 1$ (этот случай соответствует тому, что решения задачи (0.13) априори являются непрерывными слева)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_+(x)\right];$$

при $\alpha = 0$ (решения, по определению, должны быть непрерывными справа)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_-(x)\right];$$

если считать, что $\alpha = 1/2$ (например, из соображений симметрии, или принимая, по определению, решения таковыми, что удовлетворяют условию $y(x) = [y(x-0) + y(x+0)]/2$), то

$$y(x) = y_0\left\{1 + \frac{1}{4}[H_+(x) + H_-(x)]\right\}.$$

Наконец, пусть $H_k(x)$ — последовательность абсолютно непрерывных функций, поточечно сходящаяся на промежутке $[-1,1]$ к функции $H_+(x)$. Поставим ей в соответствие последовательность функций $y_k(x) = y_0 \exp\{\frac{1}{2}H_k(x)\}$, которые являются решениями начальных задач

$$y_k' = \frac{1}{2}H_k'(x)y_k, \quad y_k(-1) = y_0. \tag{0.16}$$

Здесь $H_k'(x)$ является δ-последовательностью, аппроксимирующей δ-функцию Дирака, поэтому задачу (0.16) можно считать гладкой аппроксимацией исходной задачи (0.13). Очевидно, что последовательность $y_k(x)$ поточечно сходится к функции (0.14) и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $H_k(x)$.

Как видим, понятие решения для дифференциальных уравнений с распределениями неоднозначно и главной причиной этого является тот факт, что пространство обобщенных функций не является алгеброй — в нем нельзя определить умножение, которое бы унаследовало основные свойства умножения непрерывных функций. Именно поэтому при выборе того или иного определения решения требуется более полно учитывать характер предельного перехода, приводящего к рассматриваемому уравнения. Этого недостатка лишен подход, принятый в работе [**98**] и которого мы будем придерживаться здесь. В рамках этого подхода в качестве решения системы (0.11) понимается вектор-функция ограниченной вариации, удовлетворяющая системе в смысле теории распределений, к тому же указываются эффективные (в терминах матриц $C(x)$ и $F(x)$) условия, при которых система (0.11) является корректной, то есть, при ее исследовании не возникает проблема умножения функционалов.

В заключительной главе монографии рассматриваются также приближенные методы решения обобщенных квазидифференциальных уравнений и дифференциальных систем с мерами. В частности, один из подходов заключается в построении для таких уравнений точных рекуррентных соотношений (ТРС), которые являются аналогами точных разностных схем.

Точные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами впервые были получены А. Н. Тихоновым[21)] и А. А. Самарским[22)] [**114**–**116**]. Ими же был апробирован алгоритм приближенной реализации точных разностных схем — усеченные схемы m-го ранга. Последние имеют максимальный порядок точности $O\big(h^{2(m+1)}\big)$, где h — величина шага сетки. Следовательно, за счет выбора достаточно большого m можно получить трехточечные схемы произвольного порядка.

Впоследствии эти результаты были распространены на системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [**62**], дифференциальные уравнения четвертого порядка [**15**], нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [**53**–**55**, **150**], задачи с вырождением, а также задачи

[21)] Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) — российский математик и геофизик, профессор Московского университета (декан факультета вычислительной математики и кибернетики с 1970 по 1990), работал в Институте теоретической геофизики АН СССР, заместитель директора (с 1953) и директор (с 1978) Института прикладной математики АН СССР, член-корр. (1939) и академик (1966) АН СССР, лауреат Сталинской (1953), Государственной (1976) и Ленинской (1966) премий, премии им. М. В. Ломоносова (1963), награжден золотой медалью М. В. Келдыша (1990).

[22)] Самарский Александр Андреевич (1919–2008) — российский математик, ученик А. Н. Тихонова, зав. отдела в Институте прикладной математики АН СССР, профессор Московского университета, директор Института математического моделирования РАН (с 1990), член-корр. (1966) и академик (1976) АН СССР, лауреат Государственной (1954, 1999) и Ленинской (1962) премий.

Штурма–Лиувилля[23] [10, 11, 63]. В этих работах исследованы вопросы существования и единственности точных схем, их приведение к дивергентной форме и точность усеченных разностных схем для задач с кусочно-гладкими коэффициентами. Точные разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения $2m$-го порядка изучались в работе [49].

В работах [163, 164] рассматривается проблема построения точной двухточечной (компактной) разностной схемы и ее реализации посредством двухточечных схем произвольного порядка точности для системы дифференциальных уравнений первого порядка с дополнительными двухточечными краевыми условиями.

Роботы [25, 117] посвященны построению и исследованию однородных разностных схем для одномерной краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \equiv (0;1), \tag{0.17}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{0.18}$$

где $k(x)$ — измеримая функция и $0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2 < \infty$; $q(x) = Q'(x)$, $Q(x) \in W_p^\lambda(\Omega)$ $(p \geqslant 2,\ 0 < \lambda \leqslant 1)$, причем $\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx \geqslant 0$ для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$; $f(x) = F'(x)$, $F \in W_q^s(\Omega)$ $(q \geqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1)$. Коэффициенты $q(x)$ и $f(x)$ уравнения (0.17) являются обобщенными производными функций из пространства Соболева[24] W_p^λ $(0 < \lambda \leqslant 1,$

---

[23] Штурм Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François, 1803–1885) — швейцарский математик, профессор Сорбонны и Политехнической школы в Париже, член Парижской АН (1836) и иностранный член-корр. Петербургской АН (1836).

Лиувилль Жозеф (Liouville Joseph, 1809–1882) — французский математик, профессор Политехнической школы и Коллеж де Франс в Париже, член Парижской АН (1839) и иностранный член-корр. Петербургской АН (1840). Основатель журнала "Journal de mathématiques pure et appliquée"(1883).

[24] Соболев Сергей Львович (1908–1989) — российский математик, работал в Сейсмологическом институте АН СССР, Математическом институте им.

$2 \leqslant p \leqslant \infty)$. Сюда, в частности, входят случаи, когда коэффициенты есть δ-функции $(p\lambda < 1)$, либо кусочно-непрерывные функции $(p = \infty,\ \lambda = 1)$.

На основе свойств шаблонных функций, являющихся решениями в обобщенном (слабом) смысле определенных задач Коши для уравнения (0.17), в этих работах получено точную трехточечную разностную схему для задачи (0.17), (0.18), установлена ее единственность и возможность представления в дивергентной форме, исследована консервативность разностной схемы, которая является необходимым и достаточным условием ее (схемы) сходимости, предложен алгоритм приближенного отыскания шаблонных функций. Кроме того, с помощью усеченных шаблонных функций построена усеченная трехточечная разностная схема m-го ранга, имеющая точность $O\left(h^{2(m+1)-n}\right)$, причем величина n потери порядка точности зависит от гладкости коэффициентов. По мере роста гладкости коэффициентов растет также и скорость сходимости усеченной схемы. В частности, когда коэффициенты являются кусочно-гладкими, полученные в [**25**, **117**] результаты совпадают с результатами работ [**114**–**116**].

В. А. Стеклова АН СССР, Институте атомной энергии, профессор Московского и Новосибирского университетов, директор Института математики Сибирского отделения АН СССР, академик АН СССР (1939), почетный член Московского математического общества (1987).

Условные обозначения

(i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно.

(ii) $[a, b]$, $I = (\alpha, \beta)$ — соответственно замкнутый и открытый интервалы действительной оси $\mathbb{R}$.

(iii) $\overline{1, n}$ — набор целых чисел от 1 до n: $\{1, 2, \ldots, n\}$

(iv) $\omega_\nu = \{a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu \leqslant b\}$ — сетка на отрезке $[a, b]$; для равномерной сетки $x_k = kh$, $k = \overline{0, \nu}$, $h = \frac{b-a}{\nu}$.

(v) $\mathbb{C}^{p\times q}$ — линейное пространство комплексных $(p \times q)$-матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{p,q}$ с нормой $|A| = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$; $\mathbb{C}^{p\times 1} = \mathbb{C}^p$, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$.

(vi) $A^\top$, $\overline{A}$, A^{-1} — матрицы соответственно транспонированная, комплексно сопряженная и обратная к матрице A.

(vii) $A^* = \big(\overline{A}\big)^\top$ — матрица, эрмитово сопряженная к матрице A.

(viii) $\det A$ — определитель (детерминант) квадратной матрицы A.

(ix) $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{pp}$ — след квадратной матрицы A.

(x) δ_{ij} — символ Кронекера[25]: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(xi) $E = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{p}$ — единичная матрица размера $p \times p$. Если есть необходимость указать порядок матрицы, то используем обозначение E_p.

---

[25] Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold, 1823–1891) — немецкий математик, профессор Берлинского университета, член Берлинской АН (1861), иностранный член-корр. Петербургской АН (1872).

(xii) 0 — нулевой элемент: число, вектор или матрица. При необходимости для нулевой $(p\times p)$-матрицы используем обозначение O_p.

(xiii) $\Theta_M(x)$ — характеристическая функция множества M:

$$\Theta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M;\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

(xiv) $C_{p\times q}(I)$, $AC_{p\times q}(I)$ — пространства матричных функций $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, все элементы $a_{ij}(x)$ которых являются соответственно непрерывными и абсолютно непрерывными на I скалярными функциями; $C_{p\times 1}(I)=C_p(I)$, $AC_{p\times 1}(I)=AC_p(I)$ и $C_1(I)=C(I)$, $AC_1(I)=AC(I)$.

(xv) $\bigvee\limits_a^b(A)$ — полная вариация матрицы-функции $A(x)$, равная сумме полных вариаций всех ее элементов $a_{ij}(x)$:

$$\bigvee_a^b(A)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sup_{\sigma}\sum_{k=1}^{n}\bigl|a_{ij}(x_k)-a_{ij}(x_{k-1})\bigr|$$

(здесь $\sigma\colon a\leqslant x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$ — произвольное разбиение отрезка $[a;b]$). В случае открытого интервала I будем считать, что $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на I, если $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на произвольном замкнутом подинтервале $[a,b]\subset I$ и вариации $\bigvee\limits_a^b(A)$ ограничены в их совокупности: $\bigvee\limits_I(A)=\sup\limits_{b\geqslant a}\bigvee\limits_a^b(A)<\infty$.

(xvi) $BV_{p\times q}[a,b]$ — пространство матриц-функций $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, все компоненты $a_{ij}(x)$ которых являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|A\|_{BV}=|A(a)|+\bigvee\limits_a^b(A)$; $BV_{p\times 1}[a,b]=BV_p[a,b]$ и

$BV_1[a,b] = BV[a,b]$. Если $A(x)$ дополнительно непрерывна справа, то используем обозначения $BV^+_{p\times q}[a,b]$, $BV^+_p[a,b]$, $BV^+[a,b]$.

(xvii) $BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ — пространство матриц-функций $A\colon I \to \mathbb{C}^{p\times q}$, все компоненты $a_{ij}(x)$ которых являются непрерывными справа функциями локально ограниченной на интервале I вариации, т. е. $a_{ij} \in BV^+[a,b]$ для произвольного $[a,b] \subset I$; $BV^{+,loc}_{p\times 1}(I) = BV^+_{loc,p}(I)$ і $BV^+_{loc,1}(I) = BV^+_{loc}(I)$.

(xviii) $\Delta A(x) = A(x) - A(x-0)$ — скачок матрицы-функции $A \in BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ в точке x.

(xix) $L^{2,loc}_{p\times q}(I)$ — пространство матриц-функций $A\colon I \to \mathbb{C}^{p\times q}$, все элементы $a_{ij}(x)$ которых являются локально суммируемыми с квадратом модуля по Лебегу на интервале I скалярными функциями; $L^{2,loc}_{p\times 1}(I) = L^2_{loc,p}(I)$ и $L^2_{loc,1}(I) = L^2_{loc}(I)$.

(xx) $A_\nu(x) \rightrightarrows A(x)$ на $[a,b]$ — равномерная сходимость последовательности матриц-функций $\{A_\nu(x)\}_{\nu=1}^\infty$, которая означает, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |A(x) - A_\nu(x)| = 0$.

(xxi) $\overline{\mathcal{D}}_0(I)$ — пространство непрерывных векторных функций $I \to \mathbb{C}^p$ с компактным носителем (основных функций), сопряженным к которому является пространство $\overline{\mathcal{D}}_0'(I)$ векторных распределений (обобщенных функций).

(xxii) (f,φ) — значение функционала f на основной функции $\varphi(x)$: $(f,\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{p} (f_i, \varphi_i)$ для $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I)$, $f \in \overline{\mathcal{D}}_0'(I)$.

(xxiii) $H(x-x_s)$ — смещенная функция Хевисайда:

$$H(x-x_s) = \begin{cases} 0, & x < x_s, \\ 1, & x > x_s. \end{cases}$$

(xxiv) $\delta(x-x_s)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке x_s.

(xxv) КДР — квазидифференциальное уравнение.

(xxvi) ФСР — фундаментальная система решений.

(xxvii) ТРС — точное рекуррентное соотношение.

(xxviii) ТДФ — точная двухточечная формула.

1

Обобщенные интегральные и дифференциальные системы

§ 1. Функции ограниченной вариации и меры

В этом параграфе кратко представим определения и утверждения, касающиеся двух важных классов функций, которые понадобятся нам при изложении основного материала книги, — это функции ограниченной вариации и меры [**3**, **48**, **73**, **122**].

Определение 1.1. Действительная или комплекснозначная скалярная функция $f(x)$, определенная на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси $\mathbb{R}$, называется *функцией ограниченной вариации* на этом отрезке, если выражение

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1.1}$$

допускает фиксированную верхнюю границу для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного разбиения σ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Наименьшую общую верхнюю границу всех таких выражений называют *полной вариацией* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_\sigma\{V_\sigma(f)\}.$$

Иногда для полной вариации удобно использовать выражение

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |df(x)|,$$

где интеграл в правой части естественно интерпретировать как предел суммы (1.1) при условии $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1} - x_k) \to 0$.

Важным примером функции ограниченной вариации является *смещенная функция Хевисайда* (*единичная ступень*)

$$H(x-x_s) = \begin{cases} 0, & x < x_s, \\ 1, & x > x_s. \end{cases}$$

Наоборот, функция $f(x)=x\sin\frac{\pi}{2x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$ (очевидно, $f(0)=0$) не является функцией ограниченной вариации. Действительно, если в качестве точек разбиения σ отрезка $[0;1]$ выбрать точки

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \ldots < \frac{1}{2} < 1,$$

то, легко видеть, что

$$V_\sigma(f) = \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-3} + \ldots + 2 > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

откуда $\bigvee\limits_0^1(f) = +\infty$.

Следствием ограниченности вариации является тот факт, что для произвольной точки x_s $(a < x_s < b)$ существуют два односторонних предела $f(x_s+0)$ и $f(x_s-0)$. Если при этом

$$f(x_s+0) = f(x_s) = f(x_s-0), \tag{1.2}$$

то, как обычно, в точке x_s функция $f(x)$ непрерывна. Точки, в которых нарушается хотя бы одно из равенств (1.2), образуют счетное множество, поскольку $\sum\limits_s\bigl|\Delta f(x_s)\bigr| \leqslant \bigvee\limits_a^b(f)$, т. е. скачки $\Delta f(x_s) = f(x_s+0)-f(x_s-0)$ функции $f(x)$ образуют абсолютно сходящийся ряд. Следовательно, множество точек непрерывности всюду плотно в том смысле, что любой интервал положительной длины содержит по меньшей мере одну из них.

Линейное пространство функций ограниченной на отрезке $[a, b]$ вариации обозначим $BV[a, b]$. Отметим несколько важных свойств функций из этого пространства [**73**, гл. 8–9]:

1) если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ монотонна, либо удовлетворяет условию Липшица, либо имеет ограниченную производную, то $f \in BV[a, b]$;
2) если $f \in BV[a, b]$, то $f(x)$ ограниченная на $[a, b]$ функция, причем $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \bigl|f(a)\bigr| + \bigvee\limits_a^b(f)$;
3) если $f \in BV[a, b]$ и $a < c < b$, то $\bigvee\limits_a^b(f) = \bigvee\limits_a^c(f) + \bigvee\limits_c^b(f)$;
4) если $f \in BV[a, b]$, то $v(x) = \bigvee\limits_a^x(f) \in BV[a, b]$, причем $v(x)$ неубывающая на $[a, b]$ функция; более того, если $f(x)$ непрерывна справа на $[a, b)$, то $v(x)$ также обладает этим свойством;
5) функция $f \in BV[a, b]$, если и только если ее можно представить в виде разности двух неубывающих функций;
6) если $f \in BV[a, b]$, то почти везде на $[a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$, которая является суммируемой функцией;
7) если $f \in BV[a, b]$, то имеют место разложение Жордана[1)]

$$f(x) = f_c(x) + f_d(x)$$

[1)] Жордан Мари Энмон Камиль (Jordan Marie Ennemond Camille, 1838–1922) — французский математик, член Парижской АН (1881), иностранный член-корр. Петербургской АН (1895), издатель "Journal de mathematiques pures et appliquees" (1885–1921).

и разложение Лебега

$$f(x) = f_{ac}(x) + f_s(x) + f_d(x),$$

где $f_c(x)$ — непрерывная составляющая функции $f(x)$, $f_d(x) = \sum\limits_{x_s \leqslant x} \Delta f(x_s)$ — функция скачков (дискретная составляющая), $f_{ac}(x)$ — абсолютно непрерывная составляющая[2)], $f_s(x)$ — сингулярная составляющая[3)].

В случае, если $f(x)$ имеет разрывы в точках a и b, обычно считают, что $f(a-0) = f(a)$ и $f(b+0) = f(b)$, имея в виду возможность непрерывного продолжения функции $f(x)$ влево от точки a и вправо от точки b. Функции $f, g \in BV[a,b]$ считаются эквивалентными, если они совпадают везде, за исключением не более чем счетного множества точек в интервале (a,b). В каждом классе эквивалентности пространства $BV[a,b]$ существует функция, непрерывная справа на $[a,b]$. Пространство непрерывных справа функций ограниченной на $[a,b]$ вариации обозначим $BV^+[a,b]$.

В случае открытого интервала I будем считать, что $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на I, если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на произвольном компактном подинтервале $[a,b] \subset I$ и все вариации $\bigvee\limits_a^b (f)$ ограничены в их совокупности, т. е. $\bigvee\limits_I (f) = \sup\limits_{b>a} \bigvee\limits_a^b (f) < \infty$. Класс всех таких функций, которые

[2)] Определенную на отрезке $[a,b]$ функцию $f(x)$ называют *абсолютно непрерывной* на этом отрезке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольной конечной системы дизъюнктивных интервалов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, каждый из которых содержится в $[a,b]$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, подтверждается неравенство $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \left[f(b_k) - f(a_k) \right] \right| < \varepsilon$.

[3)] Отличную от постоянной непрерывную функцию ограниченной вариации, производная которой почти везде равна нулю, называют *сингулярной функцией*.

дополнительно непрерывны справа на I, обозначим $BV^+_{loc}(I)$; при этом, очевидно, $BV^+_{loc}(I) \subset BV^+[a,b]$.

Предыдущие определения распространяются также на случай, когда $f(x)$ есть квадратная матрица-функция, или прямоугольная матрица-функция, или вектор-функция. В таком случае, говоря, что $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на интервале I, имеем в виду, что каждый элемент матрицы $f(x)$ является функцией ограниченной вариации в обычном скалярном смысле. При этом полная вариация матрицы-функции $f(x)$ равна сумме полных вариаций всех ее элементов.

Линейное пространство $BV[a,b]$ является банаховым по отношению к норме

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + \bigvee_a^b (f),$$

т. е., если для некоторой последовательности функций $f_n \in BV[a,b]$ имеем $\lim \|f_n - f_m\|_{BV} = 0$, то существует такая функция $f \in BV[a,b]$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$. Вообще говоря, в пространстве $BV[a,b]$ понятие сходимости можно ввести разными способами [**155**]. Мы отметим следующие:

1) Только что упомянутая *сходимость по норме*:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0.$$

Считается *сильным* типом сходимости: из последнего условия и ее очевидного следствия $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ в силу неравенства

$$\begin{aligned}\big|f_n(x) - f(x) - [f_n(a) - f(a)]\big| &\leqslant \\ &\leqslant \big|f_n(a) - f(a)\big| + \int_a^x \big|d\big(f_n(t) - f(t)\big)\big| \leqslant \|f_n - f\|_{BV}\end{aligned}$$

следует, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$; из еще одного неравенства

$$\left|\int\limits_a^x |df_n(t)| - \int\limits_a^x |df(t)|\right| \leqslant \int\limits_a^b \bigl|d\bigl(f_n(x) - f(x)\bigr)\bigr|$$

имеем также, что $\bigvee\limits_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee\limits_a^x(f)$ на $[a,b]$. Однако, возможными являются сходимости $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и $\bigvee\limits_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee\limits_a^x(f)$ на $[a,b]$, вообще говоря, без наличия $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$. Действительно, пусть на отрезке $[0,1]$ имеем

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{m}{n}, & \frac{m-1}{n} < x \leqslant \frac{m}{n} \ (m = \overline{1,n}), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $f_n(x)$ является неотрицательной и монотонно неубывающей на этом отрезке, $\bigvee\limits_0^x(f_n) = \int\limits_0^x |df_n(t)| = f_n(x)$ и $f_n(x) \rightrightarrows x$ на $[0,1]$, но $\bigvee\limits_0^1(f_n - f) = \int\limits_0^1 \bigl|d\bigl(f_n(x) - f(x)\bigr)\bigr| = 1$.

2) *Равномерные сходимости* на $[a,b]$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ и } \bigvee_a^x(f_n) \rightrightarrows \bigvee_a^x(f).$$

Следует отметить, что равномерная сходимость последовательности функций $f_n \in BV[a,b]$ к f, в общем, не предполагает, что f обязательно имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Например, каждая функция из последовательности

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ x \sin\frac{\pi}{2x}, & \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,1]$, $f_n(x)$ сходятся равномерно к $f(x) = x\sin\frac{\pi}{2x}$, которая, однако, не является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$ (см. с. 41).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \ \forall\, x\in[a,b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \bigvee\limits_a^b (f_n) = \bigvee\limits_a^b (f)$, следовательно и $\lim\limits_{n\to\infty} \bigvee\limits_a^x (f_n) = \bigvee\limits_a^x (f)$ для всех $x\in[a,b]$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \ \forall\, x\in[a,b]$ и $\bigvee\limits_a^b (f_n)$ ограничена по n. Последнее условие означает, что последовательность $f_n(x)$ имеет равномерно ограниченную вариацию. В этом типе сходимости предельная функция $f(x)$ обязательно является функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, т.е. этот тип сходимости действует в пределах пространства $BV[a,b]$. Его иногда называют *слабой* сходимостью. В связи с этой сходимостью возникает важная на практике теорема Хелли (см. §33).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ за исключением счетного множества точек из отрезка $[a,b]$; $\bigvee\limits_a^b (f_n)$ ограничена по n и $\bigvee\limits_a^b (f) < \infty$.

С функциями ограниченной вариации тесно связан специальный класс обобщенных функций (распределений Шварца[4)]), порожденных мерами. В теории обобщенных функций[5)] под *мерой*

[4)] Шварц Лоран (Schwartz Laurent, 1915–2002) — французский математик, профессор Парижского университета, профессор Политехнической школы в Париже, член Парижской АН (1975), лауреат золотой медали и премии Дж. Филдса (1950).

[5)] Отметим, что теорию обобщенных функций можно строить на основе различных подходов. Исторически первым был предложенный С. Соболевым (1936) и независимо Л. Шварцом (1950) *функциональный подход* [**16**], который состоит в рассмотрении обобщенных функций как линейных непрерывных функционалов на пространстве "основных" функций. Этот подход требует глубокого знания функционального анализа, что делает теорию труднодоступной для неспециалистов. Развитый позднее Я. Микусинским и Р. Сикорским (1957) *секвенциальный подход* [**2**] состоит в рассмотрении обобщенных функций как слабых границ последовательностей обычных, локально суммируемых, функций. Такой подход (он подобен тому, который используется при расширении множества рациональных чисел до множества действительных чисел по Кантору, но, если целью введения понятия действительного числа есть желание (или необходимость) сделать возможными такие операции над числами, как, например, вычисления корней или логарифмов, то введение понятия обобщенной функции позволяет на $I = (\alpha, \beta)$ понимаем линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{D}^0(I)$ непрерывных функций $I \to \mathbb{C}$ с компактным носителем. Мера Стилтьеса dg [**48**, гл. VI, § 6], порождаемая функцией $g \in BV^+_{loc}(I)$, является мерой именно в таком смысле.

Одновременно, в силу теоремы Рисса[6)] для произвольной меры μ на I существует производящая функция $g \in BV_{loc}(I)$ такая, что имеет место представление

$$(\mu, \varphi) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dg(t), \quad \varphi \in \mathcal{D}^0(I).$$

В качестве $g(x)$ можно взять функцию

$$g(x) = \begin{cases} \mu[x_0, x], & x \in [x_0, \beta), \\ -\mu[x, x_0], & x \in (\alpha, x_0), \end{cases}$$

где $x_0 \in I$ — точка нулевой μ-меры, а $\mu[a, b]$ есть μ-мера отрезка $[a, b]$. Если от функции $g(x)$ требовать дополнительно непрерывности справа на I, т. е. $g \in BV^+_{loc}(I)$, то мера μ будет определять $g(x)$ однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Тесную связь между функциями ограниченной вариации и мерами выявляет

сделать всегда осуществимой операцию дифференцирования функций) является несколько проще и ближе к интуитивным представлениям физиков. В конце концов, общепризнанным считается тот факт, что каждой обобщенной функции в функциональном подходе соответствует единственная обобщенная функция в секвенциальном подходе, и наоборот. Следовательно, каждая теорема об обобщенных функциях, доказана функциональным методом, может быть доказана и секвенциальным методом. Какое из доказательств проще — зависит от конкретного случая. Кроме функционального и секвенциального подходов, существуют и другие возможности введения обобщенных функций (см. [**39**]).

6) Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes, 1880–1956) — венгерский математик, профессор университетов в Клуже, Сегеде, Будапеште, член Венгерской АН (1916).

Лемма 1.2 [122, с. 161]. *Для того, чтобы обобщенная производная g' некоторой функции $g(x)$ была мерой на I, необходимо и достаточно, чтобы $g \in BV^+_{loc}(I)$. Если это условие выполняется, то производная g' есть мера Стилтьеса dg, определяемая функцией $g(x)$; при этом $g(x)$ непрерывна в точке $x_s \in I$ тогда и только тогда, когда dg-мера точки x_s равна нулю.*

Согласно приведенному выше свойству 6) функция $g \in BV^+_{loc}(I)$ почти всюду на I имеет обычную производную (обозначим ее $g'_{кл}(x)$), причем последняя локально суммируема. С другой стороны, на основании леммы 1.2 обобщенная производная g' этой функции является мерой Стилтьеса dg с порождающей ее функцией $g(x)$. Распределения $g'_{кл}$ и g', в общем случае, разные. Например, смещенная функция Хевисайда $H(x-x_s)$ имеет обычную производную $H'_{кл}(x-x_s)=0$ для $x \neq x_s$, так что $H'_{кл}$ — нулевое распределение, и обобщенную производную $H'(x-x_s)=\delta(x-x_s)$, где $\delta(x-x_s)$ — *функция Дирака с носителем в точке* x_s (единичный импульс), которая является мерой на I, к тому же *сингулярной* обобщенной функцией, и действует по правилу

$$\big(\delta(x-x_s), \varphi(x)\big) = \int_I \varphi(x)dH(x-x_s) = \varphi(x_s), \quad \varphi \in \mathcal{D}^0(I).$$

Однако, для абсолютно непрерывных функций обобщенная производная совпадает с обычной производной, точнее говоря, имеет место следующая лемма.

Лемма 1.3 [122, с. 162]. *Производная g' распределения g на I является локально суммируемой на I функцией, если и только если $g(x)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом компактном подинтервале в I. Если это условие выполняется, то $g' = g'_{кл}$.*

Таким образом, приведенные леммы позволяют выяснить структуру меры $g' = dg$, если известна структура функции $g(x)$. В частности, если $g(x)$ есть кусочно непрерывно-дифференцируема на I функция, которая в точках $\{x_s\}$ имеет разрывы первого рода со скачками $\Delta g(x_s)$, и таким образом

$$g(x) = g_c(x) + \sum_s \Delta g(x_s) H(x - x_s),$$

то

$$g' = g_c'(x) + \sum_s \Delta g(x_s) \delta(x - x_s).$$

Здесь $g_c'(x)$ совпадает с обычной производной $g'_{кл}(x)$, которая существует почти везде на I (за исключением точек $\{x_s\}$).

Предыдущие леммы остаются в силе также для векторных распределений со значениями из пространства $\mathbb{C}^p$ [**122**, с. 253].

§ 2. Матричный неклассический интеграл Римана–Стилтьеса

Пусть имеем матрицы-функции $F \in BV^{+,loc}_{m\times k}(I), G \in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Тогда в силу свойства 7) из §1 верными являются представления:

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x), \quad G(x) = G_c(x) + G_d(x),$$

где $F_c(x)$ и $G_c(x)$ — непрерывные составляющие функций $F(x)$ и $G(x)$, а $F_d(x)$ и $G_d(x)$ — их функции скачков (дискретные составляющие):

$$F_d(x) = \sum_{y \leqslant x} [F(y) - F(y-0)], \quad y \in I,$$

$$G_d(x) = \sum_{y \leqslant x} [G(y) - G(y-0)].$$

Для любого замкнутого интервала $[a;b] \subset I$ определим интеграл следующим образом:

$$\int_a^b dF(x)G(x) \stackrel{df}{=} \int_a^b dF_c(x)G(x) + \sum_{a<x\leqslant b} [F(x) - F(x-0)]G(x-0). \tag{2.1}$$

Понятно, что интеграл (2.1) можно определить и как предел интегральной суммы [3], а именно

$$\int_a^b dF(x)G(x) = \lim_{\max|x_k - x_{k-1}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [F(x_k - F(x_{k-1}))]G(x_{k-1}), \tag{2.2}$$

где $\sigma\colon a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leqslant b$ — произвольное разбиение отрезка $[a;b]$.

Отметим, что в связи с некомутативностью операции умножения матриц интеграл

$$\int_a^b G(x)dF(x) \stackrel{df}{=} \int_a^b G(x)dF_c(x) + \sum_{a<x\leqslant b} G(x-0)[F(x) - F(x-0)],$$

вообще говоря, не совпадает с интегралом (2.1).

Укажем некоторые важные свойства интеграла (2.1), которые мы неоднократно будем использовать далее.

1. Имеет место билинейное соотношение

$$\int_a^b [c_1 dF_1 + c_2 dF_2][k_1 G_1 + k_2 G_2] = c_1 k_1 \int_a^b dF_1 G_1 + \\ + c_1 k_2 \int_a^b dF_1 G_2 + c_2 k_1 \int_a^b dF_2 G_1 + c_2 k_2 \int_a^b dF_2 G_2,$$

которое следует из определения интеграла (2.1), либо (2.2).

2. Матрица-функция $\mathcal{I}(x)=\int_a^x dF(t)G(t),\ \ x\in I$ есть непрерывная справа функция ограниченной вариации, которая в точке разрыва x_0 функции $F(x)$ имеет скачек $\Delta\mathcal{I}(x_0)$, равный

$$\Delta\mathcal{I}(x_0)=\Delta F(x_0)G(x_0-0). \tag{2.3}$$

Действительно, для произвольного разбиения σ интервала $[a;b]$ имеем

$$\sum_i \bigl|\mathcal{I}(x_{i+1})-\mathcal{I}(x_i)\bigr|=\sum_i\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dF(t)G(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_i\sup_{t\in[x_i;x_{i+1}]}\bigl|G(t)\bigr|\bigvee_{x_i}^{x_{i+1}}(F)\leqslant\sup_{t\in[a;b]}\bigl|G(t)\bigr|\bigvee_a^b(F),$$

т. е. вариация функции $\mathcal{I}(x)$ ограничена на произвольном замкнутом подинтервале в I. Пусть $x\in I$ и $s<x$. Тогда

$$\bigl|\mathcal{I}(x)-\mathcal{I}(s)\bigr|\leqslant\sup_{t\in[s;x]}\bigl|G(t)\bigr|\bigvee_s^x(F),$$

и поскольку $F(x)$ непрерывна справа, то $\lim\limits_{x\to s+0}\bigvee_s^x(F)=0$. Таким образом, матрица $\mathcal{I}\in BV_{m\times n}^{+,loc}(I)$. Соотношение (2.3) следует из определения интеграла (2.1), или (2.2).

3. *Теорема о подстановке.* Если $\mathcal{I}(x)=\int_a^x dF(t)G(t)$, то

$$\int\limits_a^b d\mathcal{I}(x)K(x)=\int\limits_a^b dF(x)G(x)K(x).$$

Действительно, используя представление

$$\mathcal{I}(x)=\mathcal{I}_c(x)+\sum_{y\leqslant x}\Delta\mathcal{I}(y),\quad y\in I,$$

функции $\mathcal{I}(x)\in BV_{m\times n}^{+,loc}(I)$ через ее непрерывную и дискретную составляющие и формулу (2.3) скачка этой функции в произвольной точке $y \in I$, имеем

$$\int_a^b d\mathcal{I}(x)K(x) = \int_a^b dF_c(x)G(x)K(x) +$$

$$+ \int_a^b d\Big(\sum_{a<y\leqslant x} \Delta F(y)G(y-0)\Big)K(x) = \int_a^b dF_c(x)G(x)K(x) +$$

$$+ \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)G(x-0)K(x-0) = \int_a^b dF(x)G(x)K(x).$$

4. *Формула интегрирования по частям* для интеграла (2.1) имеет вид

$$\int_a^b dF(x)G(x) + \int_a^b F(x)dG(x) = F(x)G(x)\Big|_a^b - \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)\Delta G(x). \tag{2.4}$$

Заметим, что

$$\int_a^b dF(x)G(x) = \int_a^b dF(x)\int_a^x dG(y) + F(b)G(a) - F(a)G(a),$$

$$\int_a^b F(x)dG(x) = -\int_a^b \Big(\int_y^b dF(x)\Big)dG(y) - F(b)G(a) + F(b)G(b).$$

Поэтому формулу (2.4) можно переписать в виде

$$\int_a^b dF(x)\int_a^x dG(y) = \int_a^b \Big(\int_y^b dF(x)\Big)dG(y) - \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)\Delta G(x). \tag{2.5}$$

Запишем левую часть формулы (2.5), представив матрицы-функции F и G в виде суммы непрерывной и дискретной составляющих, что порождает четыре интеграла

$$\int_a^b d\big[F_c(x)+F_d(x)\big]\int_a^x d\big[G_c(y)+G_d(y)\big] = \int_a^b dF_c(x)\int_a^x dG_c(y) + \\ + \int_a^b dF_c(x)\int_a^x dG_d(y) + \int_a^b dF_d(x)\int_a^x dG_c(y) + \int_a^b dF_d(x)\int_a^x dG_d(y). \tag{2.6}$$

По аналогии для интеграла в правой части (2.5) получаем выражение

$$\int_a^b\Big(\int_y^b dF_c(x)\Big)dG_c(y) + \int_a^b\Big(\int_y^b dF_c(x)\Big)dG_d(y) + \\ + \int_a^b\Big(\int_y^b dF_d(x)\Big)dG_c(y) + \int_a^b\Big(\int_y^b dF_d(x)\Big)dG_d(y). \tag{2.7}$$

Первые три интегралы в выражениях (2.6) и (2.7) совпадают, поскольку это классические матричные интегралы Римана–Стилтьеса (на самом деле — совокупности таких скалярных интегралов [**3**, с. 492]) и для них верна формула интегрирования по частям. Запишем четвертый интеграл в формуле (2.6):

$$\int_a^b dF_d(x)\int_a^x dG_d(y) = \sum_{a<x\leqslant b}\Delta F_d(x)\int_a^{x-0} dG_d(y) = \\ = \sum_{a<x\leqslant b}\Delta F_d(x)\sum_{a<y\leqslant x-0}\Delta G_d(y) = \sum_{\substack{a<x\leqslant b\\ a<y\leqslant x-0}}\Delta F_d(x)\Delta G_d(y). \tag{2.8}$$

Заметим, что в последнюю сумму не входят произведения вида $\Delta F_d(x)\Delta G_d(x)$ при $y=x$. Аналогично запишем четвертый интеграл в выражении (2.7)

$$\int\limits_a^b \Big(\int\limits_y^b dF_d(x)\Big) dG_d(y) =$$

$$= \sum_{a<y\leqslant b} \Big(\int\limits_{y-0}^b dF_d(x)\Big)\Delta G_b(y) = \sum_{a<y\leqslant b}\ \sum_{y-0\leqslant x\leqslant b} \Delta F_d(x)\Delta G_d(y) =$$

$$= \sum_{\substack{a<y\leqslant b\\ y<x\leqslant b}} \Delta F_d(x)\Delta G_d(y) + \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F_d(x)\Delta G_d(x). \quad (2.9)$$

Сравнивая (2.8) и (2.9) приходим к формуле (2.5), а затем к формуле интегрирования по частям (2.4).

Очевидно, если сумма в (2.4) исчезает (а это может произойти при условии $\Delta F(x)\Delta G(x) = 0\ \forall x \in (a,b]$), то формула интегрирования по частям приобретает "классический" вид. Отметим также, что формула интегрирования по частям (2.4) является частным случаем следующей формулы Дирихле[7)] [**154**].

4. *Формула Дирихле.* Если квадратная порядка k матрица-функция $K(x,y)$ ограничена в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и является непрерывной справа функцией ограниченной вариации по x для любого $y \in [a;b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b dF(x) \int\limits_a^x K(x,y)dG(y) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_y^b dF(x)K(x,y)\Big) dG(y) -$$

$$- \sum_{a<x\leqslant b} \Delta F(x)K(x-0,x-0)\Delta G(x), \quad (2.10)$$

которая доказывается по аналогии с (2.5). Положив в (2.10) $K(x,y) = E_k$, придем к (2.5).

[7)] Дирихле Петер Густав Лежен (Dirichlet Peter Gustav Lejeune, 1805–1859) — немецкий математик, профессор Берлинского и Геттингенского университетов, член Берлинской АН, иностранный член-корр. Петербургской АН (1837), член Парижской АН (1854) и Лондонского королевского общества(1855).

В завершение параграфа докажем лемму об одном обобщении неравенства Гронуолла–Беллмана[8)], которое понадобится нам в § 33 для доказательства теоремы о сходимости. Напомним классическое неравенство Гронуолла–Беллмана [**33**, **121**].

Лемма 2.1 (Гронуолл-Беллман). *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *неотрицательные функции, непрерывные на* $[a,b]$, $c \geqslant 0$ — *некоторая постоянная, причем*

$$g(x) \leqslant c + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда имеет место неравенство

$$g(x) \leqslant c \cdot \exp \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В частности, если $c = 0$, *то* $g(x) \equiv 0$.

В роботе Ф. Аткинсона [**3**, с. 516] имеется непосредственное обобщение этой леммы на случай интеграла Римана–Стилтьеса.

Лемма 2.2. *Пусть* $g(x) \in BV^{+}_{loc}(I)$, $g(x) \geqslant 0$, *а функция* $f(x)$ *не убывает на* $[a,b] \subset I$. *Если для любого* $x \in [a,b]$ *имеет место неравенство*

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int\limits_{a}^{x} g(t)df(t), \tag{2.11}$$

где c_0, c_1 — *некоторые положительные постоянные, то*

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{c_1\big[f(x) - f(a)\big]\Big\}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

[8)] Гронуолл Томас Хакон (Gronwall Thomas Hakon, 1877–1932) — шведский математик, преподавал в Принстонском университете.

Беллман Ричард Эрнест (Bellman Richard Ernest, 1920–1984) — американский математик, профессор Стэнфордского университета и университета Южной Калифорнии, работал математиком в научных лабораториях в Сан-Диего, Лос-Аламосе, корпорации RAND.

Поскольку разрывы функций $f(x)$ и $g(x)$ могут совпадать, то интеграл в (2.11), вообще говоря, не существует в классическом смысле, но существует в смысле определения (2.1), либо (2.2). Рассмотрим несколько иной вариант этой леммы, который не требует монотонности $f(x)$.

Лемма 2.3. *Пусть $f(x), g(x) \in BV^+_{loc}(I)$ и $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Если для произвольного $x \in [a,b]$ имеет место неравенство*

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int\limits_a^x g(t)\,|df(t)| \tag{2.12}$$

с некоторыми положительными постоянными c_0, c_1, то

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{ c_1 \bigvee_a^x (f) \Big\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Заменив в (2.12) интеграл пределом последовательности интегральных сумм, получим

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \lim \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)\,|f(t_{k+1}) - f(t_k)|, \tag{2.14}$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = x$ — произвольное разбиение отрезка $[a,x]$, а предел берется при $n \to \infty$ и $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |t_{k+1} - t_k| \to 0$.

Вследствие известных свойств вариации имеем

$$|f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leqslant \bigvee_{t_k}^{t_{k+1}} (f) = \bigvee_a^{t_{k+1}} (f) - \bigvee_a^{t_k} (f).$$

Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (2.14), получим неравенство

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \lim \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k) \left[\bigvee_a^{t_{k+1}} (f) - \bigvee_a^{t_k} (f) \right],$$

а после предельного перехода — неравенство

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int\limits_a^x g(t)d\bigvee_a^t(f). \tag{2.15}$$

Поскольку функция $\bigvee\limits_a^t(f)$ неубывающая и непрерывная справа на отрезке $[a,b]$, то из неравенства (2.15) в силу леммы 2.2 следует оценка

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{c_1 \bigvee_a^x(f) - \bigvee_a^a(f)\Big\} = c_0 \cdot \exp\Big\{c_1 \bigvee_a^x(f)\Big\},$$

что и требовалось доказать. ■

Неравенство (2.13) будем называть *обобщенным неравенством Гронуолла–Беллмана*.

§ 3. Однородное матричное интегральное уравнение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Y(x) = Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^x dC(t)Y(t), \tag{3.1}$$

где $Y(x)$ — n-мерный вектор, $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $x_0 \in I$.

Как известно [3], это уравнение имеет единственное решение $Y(x)$, которое принадлежит пространству $BV^{+}_{loc,n}(I)$, и скачки которого определяются формулой

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) \quad \forall x \in I. \tag{3.2}$$

Это утверждение эквивалентно тому, что интегральное уравнение

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} dC(t) Y(t),$$

имеет лишь тривиальное решение.

Введем матрицу-функцию двух переменных $B(x,s)$ как решение матричного интегрального уравнения

$$B(x,s) = E + \int\limits_{s}^{x} dC(t) B(t,s). \tag{3.3}$$

Очевидно, что такое матричное уравнение также имеет единственное решение по переменной x в пространстве $BV^{+}_{loc,n}(I)$, поскольку каждый ее столбец обладает таким свойством. Матрицу $B(x,s)$ будем называть *фундаментальной матрицей*, или *матрицей Коши*[9)], интегрального уравнения (3.1). Ей присущи свойства, выражающиеся следующими теоремами.

Теорема 3.1. *Решение интегрального уравнения* (3.1) *представимо в виде*

$$Y(x) = B(x,x_0) Y(x_0). \tag{3.4}$$

Доказательство. Для доказательства этого факта положим $s = x_0$ в (3.3) и умножим обе части этого уравнения справа на $Y(x_0)$. Тогда получим

$$B(x,x_0)Y(x_0) = Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t) B(t,t_0) Y(x_0),$$

откуда следует представление (3.4). ■

---

9) Коши Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis, 1789–1857) — французский математик, преподавал в Парижском университете, в Политехнической школе и Коллеж де Франс, член Парижской АН (1816), иностранный член Петербургской АН (1831).

Теорема 3.2. *Матрица Коши* $B(x,s)$ *имеет следующие свойства:*

(a) *Для любых* x', x'', $x''' \in I$
$$B(x''',x'')B(x'',x') = B(x''',x');$$

(b) *Для любых* x', $x'' \in I$
$$B(x',x'')B(x'',x') = E;$$

(c) $B(x,s)$ *есть непрерывная справа матрица-функция ограниченной вариации как по переменной* x, *так и по переменной* s;

(d) $B(x,s) = \big[E + \Delta C(x)\big]B(x-0,s)$;

(e) $B(x,s) = B(x,s-0)\big[E + \Delta C(s)\big]^{-1}$.

Доказательство. (a) Покажем, что матрица
$$B(x''',x'')B(x'',x') - B(x''',x')$$
является решением интегрального уравнения
$$Y(x) = \int\limits_{x''}^{x} dC(t)Y(t),$$
т. е. равна нулевой матрице. Действительно
$$B(x''',x'')B(x'',x') - B(x''',x') = B(x'',x')+$$
$$+\left(\int\limits_{x''}^{x'''} dC(t)B(t,x'')\right)B(x'',x') - E - \int\limits_{x'}^{x'''} dC(t)B(t,x') =$$
$$= E + \int\limits_{x'}^{x''} dC(t)B(t,x') + \int\limits_{x''}^{x'''} dC(t)B(t,x'')B(x'',x') -$$

$$- E - \int_{x'}^{x''} dC(t)B(t,x') - \int_{x''}^{x'''} dC(t)B(t,x') =$$

$$= \int_{x''}^{x'''} dC(t)\,[B(t,x'')B(x'',x') - B(t,x')],$$

что и доказывает свойство (a).

(b) Положив в предыдущем свойстве $x''' = x'$, получим

$$B(x',x'')B(x'',x') = B(x',x') = E.$$

(c) Для любых x_1, $x_2 \in I$ имеем

$$\big|B(x_2,s) - B(x_1,s)\big| = \left|\int_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t,s)\right| \leqslant M \bigvee_{x_1}^{x_2}(C),$$

где $M = \prod_x \Big(1 + \big|\Delta C(x)\big|\Big)\exp\Big\{\bigvee_a^b(C_c)\Big\}$ [**154**], а $C_c(x)$ — непрерывная составляющая матрицы-функции $C(x)$, откуда немедленно следует ограниченность вариации $B(x,s)$ по переменной x.

Из интегрального уравнения (3.3) получаем условие скачка по (первой) переменной x

$$\Delta_x B(x,s) = \Delta C(x)B(x-0,s), \tag{3.5}$$

а непрерывность справа следует из свойства 2 §2.

Докажем ограниченность вариации функции $B(x,s)$ по переменной s. Для любых $x_1, x_2 \in I$ рассмотрим равенство

$$B(x,x_2) - B(x,x_1) = \int_{x_2}^{x} dC(t)B(t,x_2) - \int_{x_1}^{x} dC(t)B(t,x_1) =$$

$$= \int_{x_2}^{x} dC(t)\big[B(t,x_2) - B(t,x_1)\big] - \int_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t,x_1)$$

как интегральное уравнение для функции

$$Y(x) = B(x, x_2) - B(x, x_1),$$

где

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t, x_1) = E - E - \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t, x_1) = B(x_2, x_2) -$$

$$-\left(E + \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t, x_1)\right) = B(x_2, x_2) - B(x_2, x_1) = Y(x_2).$$

Следовательно, в силу теоремы 3.1 решение $Y(x)$ можно представить в виде

$$Y(x) = B(x, x_2)Y(x_2) = -B(x, x_2)\int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t)B(t, x_1),$$

откуда имеем

$$\left|B(x, x_2) - B(x, x_1)\right| \leqslant M^2 \bigvee_{x_1}^{x_2}(C).$$

Это и доказывает ограниченность вариации функции $B(x, s)$ по переменной s, а непрерывность справа доказывается по аналогии с предыдущем случаем.

(d) В силу формулы (3.5) имеем

$$B(x, s) - B(x-0, s) = \Delta C(x)B(x-0, s),$$

откуда следует

$$B(x, s) = \left[E + \Delta C(x)\right]B(x - 0, s).$$

(e) Из интегрального уравнения (3.1)

$$Y(x) = Y(x_0-0) + \int\limits_{x_0-0}^{x} dC(t)Y(t),$$

откуда по теореме (3.1) имеем

$$Y(x) = B(x, x_0{-}0)Y(x_0{-}0). \tag{3.6}$$

С другой стороны, в силу (3.2) получим

$$Y(x_0{-}0) = \big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1} Y(x_0). \tag{3.7}$$

Подстановка (3.7) в (3.6) дает

$$Y(x) = B(x, x_0{-}0)\big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1} Y(x_0),$$

поэтому

$$B(x, x_0) = B(x, x_0{-}0)\big[E + \Delta C(x_0)\big]^{-1},$$

откуда после замены x_0 на s получаем свойство (е). ■

Из свойства (е) следует аналогичное (3.5) условие скачка фундаментальной матрицы $B(x, s)$ по (второй) переменной s:

$$\Delta_s B(x, s) = B(x, s{-}0)\Big\{\big[E + \Delta C(s)\big]^{-1} - E\Big\}.$$

Более того, при дополнительном условии $\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0$ для любого $x \in I$ скачок будет вычисляться по формуле

$$\Delta_s B(x, s) = -B(x, s{-}0)\Delta C(s). \tag{3.8}$$

Действительно, при этом условии имеет место тождество

$$\big[E + \Delta C(x)\big]^{-1} \equiv E - \Delta C(x), \tag{3.9}$$

ибо

$$\big[E + \Delta C(x)\big]\cdot\big[E - \Delta C(x)\big] = E - \big[\Delta C(x)\big]^2 \equiv E.$$

Поэтому

$$\Delta_s B(x, s) = B(x, s{-}0)\Big\{\big[E - \Delta C(s)\big] - E\Big\} = -B(x, s{-}0)\Delta C(s).$$

§ 4. Неоднородное матричное интегральное уравнение

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\,Y(t) + U(x), \quad U(x_0) = Y(x_0), \tag{4.1}$$

где $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $U \in BV^{+}_{loc,n}(I)$, $x_0 \in I$.

Теорема 4.1. *Решение неоднородного уравнения* (4.1) *можно представить в виде*

$$Y(x) = B(x,x_0)U(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} B(x,t)dU(t) - \\ - \sum_{x_0<y\leqslant x} B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y), \tag{4.2}$$

где сумма распространяется на все точки $y \in I$, в которых матрицы $C(x)$ и $U(x)$ имеют разрывы одновременно.

Доказательство. Покажем, что выражение в правой части (4.2) удовлетворяет интегральному уравнению (4.1).

Действительно,

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) = \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)B(t,x_0)U(x_0) + \\ + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\int\limits_{x_0}^{t} B(t,s)dU(s) - \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\sum_{x_0<y\leqslant t} B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y). \tag{4.3}$$

Используя уравнение (3.3), получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\,B(t,x_0)U(x_0) = \big[B(x,x_0) - E\big]U(x_0). \tag{4.4}$$

Из формулы Дирихле следует

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\int\limits_{x_0}^{t} B(t,s)dU(s) = \int\limits_{x_0}^{x}\Big(\int\limits_{s}^{x} dC(t)B(t,s)\Big)dU(s) - \\ - \sum_{x_0<y\leqslant x} \Delta C(y)B(y-0,y-0)\Delta U(y). \quad (4.5)$$

К тому же, непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t) \sum_{x_0<y\leqslant t} B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y) = \\ = \sum_{x_0<y\leqslant x}\int\limits_{y}^{x} dC(t)\,B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y). \quad (4.6)$$

В силу соотношений (4.4), (4.5) и (4.6) равенство (4.3) можно записать в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) = [B(x,x_0) - E]U(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x}\Big(\int\limits_{s}^{x} dC(t)B(t,s)\Big)dU(s) - \\ - \sum_{x_0<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y) - \sum_{x_0<y\leqslant x}\int\limits_{y}^{x} dC(t)B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y).$$

Поскольку

$$\int\limits_{y}^{x} dC(t)B(t,y)\Delta C(y)\Delta U(y) = [B(x,y) - E]\Delta C(y)\Delta U(y) = \\ = B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y) - \Delta C(y)\Delta U(y),$$

то

$$\int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) = B(x,x_0)U(x_0) - U(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} B(x,t)dU(t) -$$

$$-U(x)+U(x_0)-\sum_{x_0<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y)-$$
$$-\sum_{x_0<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)+\sum_{x_0<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y),$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x}dC(t)Y(t)=B(x,x_0)U(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}B(x,t)dU(t)-$$
$$-\sum_{x_0<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)-U(x).$$

Следовательно, функция

$$Y(x)=B(x,x_0)U(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}B(x,t)dU(t)-$$
$$-\sum_{x_0<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_{x_0}^{x}dC(t)Y(t)=Y(x)-U(x),$$

что и доказывает теорему. ∎

Замечание 4.2. В формуле (4.2) сумма исчезает не только в случае, когда матрицы $C(x)$ и $U(x)$ имеют разрывы в разных точках, но и тогда, когда

$$\Delta C(x)\Delta U(x)=0\quad\forall x\in I.$$

§ 5. Сопряженное матричное интегральное уравнение

Как известно из § 3, функция Коши $B(x, s)$ по переменной x удовлетворяет уравнению (3.3). Ответ на вопрос, какому уравнению удовлетворяет функция $B(x, s)$ по переменной s, дает следующая

Теорема 5.1. *Функция $B(x, s)$ по переменной s удовлетворяет интегральному уравнению*

$$B(x, s) = E + \int_s^x B(x, t) d\widehat{C}(t), \tag{5.1}$$

где

$$\widehat{C}(x) = C(x) - \sum_{s \leqslant y \leqslant x} \left[E + \Delta C(y)\right]^{-1} \left[\Delta C(y)\right]^2. \tag{5.2}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (3.1) в виде

$$B(x, s) - E = \int_s^x dC(t)\left[B(t, s) - E\right] + C(x) - C(s). \tag{5.3}$$

Применяя к (5.3) формулу (4.2) решения неоднородного уравнения, приходим к равенству

$$B(x, s) = E + \int_s^x B(x, t) dC(t) - \sum_{s \leqslant y \leqslant x} B(x, y)\left[\Delta C(y)\right]^2. \tag{5.4}$$

Перепишем (5.4), используя свойство (e) из теоремы 3.2:

$$B(x, s) = E + \int_s^x B(x, t) dC(t) - \\ - \sum_{s \leqslant y \leqslant x} B(x, y-0)\left[E + \Delta C(y)\right]^{-1}\left[\Delta C(y)\right]^2.$$

Это значит, что функция $B(x, s)$ по переменной s является решением интегрального уравнения (5.1), где $\widehat{C}(t)$ имеет вид (5.2), что и доказывает теорему. ■

Замечание 5.2. В случае, когда

$$\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \quad \forall x \in I,$$

матрица-функция $B(x,s)$ по переменной s удовлетворяет уравнению

$$B(x,s) = E - \int\limits_x^s B(x,t)dC(t),$$

т. е. ее *строки* удовлетворяют векторному интегральному уравнению

$$Z(x) = Z(x_0) - \int\limits_{x_0}^x Z(t)dC(t), \tag{5.5}$$

которое называется *сопряженным* с уравнением (3.1).

Пусть $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальная матрица сопряженного интегрального уравнения (5.5), т. е.

$$\widetilde{B}(x,s) = E - \int\limits_s^x \widetilde{B}(t,s)dC(t). \tag{5.6}$$

Используя очевидное равенство

$$\int\limits_s^x \widetilde{B}(t,s)dB(t,s) + \int\limits_s^x d\widetilde{B}(t,s)B(t,s) = 0$$

и формулу интегрирования по частям (2.4), получим

$$\widetilde{B}(t,s)B(t,s)\Big|_s^x - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \Delta_y\widetilde{B}(y,s)\Delta_y B(y,s) = 0.$$

Далее учтем условие скачка (3.5) и аналогичное условие

$$\Delta_x\widetilde{B}(x,s) = -\widetilde{B}(x-0,s)\Delta C(x),$$

которое следует из интегрального уравнения (5.6). Тогда

$$\widetilde{B}(x,s)B(x,s) = E - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \widetilde{B}(y-0,s)\big[\Delta C(y)\big]^2 B(y-0,s)$$

Наконец, умножая обе части последнего равенства справа на матрицу $B(s,x)$ и используя свойство (b) теоремы 3.2, имеем

$$\widetilde{B}(x,s) = B(s,x) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \widetilde{B}(y-0,s)\big[\Delta C(y)\big]^2 B(y-0,x). \tag{5.7}$$

Формула (5.7) устанавливает связь между $\widetilde{B}(x,s)$ и $B(s,x)$. Если, в частности,

$$\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

то из формулы (5.7) следует, что

$$\widetilde{B}(x,s) = B(s,x). \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) показывает, что интегральное уравнение (3.1) с матрицей-функцией $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$ в случае $\big[\Delta C(x)\big]^2 \equiv 0$ сохраняет свойства, присущие интегральным уравнением с непрерывной матрицей $C(x)$.

При таком условии, в частности, скачок (по переменной s) решения интегрального уравнения (5.1) имеет вид

$$\Delta_s B(x,s) = -B(x,s-0)\Delta C(s)$$

и, как видно, совпадает с полученным ранее результатом (3.8).

§ 6. О произведении распределений и первообразных мер

При исследовании дифференциальных уравнений с мерами в коэффициентах естественным образом возникает проблема умножения обобщенных функций (распределений Шварца). Как известно [16, с. 37], произведение любых двух обобщенных функций f и g не всегда существует.

Для определения такого произведения нужно, чтобы функции f и g, грубо говоря, обладали свойством: насколько f "нерегулярна"в окрестности произвольной точки, настолько g должна быть "регулярной" в этой окрестности, и наоборот. С такой точки зрения неопределено (*некорректно*) произведение функции Хевисайда на ее обобщенную производную — меру Дирака. Согласно секвенциальному подходу [2, с. 274], произведение обобщенных функций f и g существует на интервале I, если последовательность произведений сверток $(f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n)$ сходится (в обобщенном смысле) на I для любой δ-последовательности δ_n. Эта (слабая) граница называется произведением обобщенных функций f и g: $(f\cdot g,\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}\big((f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n);\varphi\big)$, $\quad\varphi\in\mathcal{D}(I)$. В рамках этого определения упомянутое произведение $H(x-x_s)\cdot\delta(x-x_s)$ не существует (некорректно), поскольку его значение зависит от выбора последовательности δ_n.

Для того, чтобы исследовать корректность произведений $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$, где $F'(x)$, $G'(x)$ — обобщенные производные функций $F(x)$ и $G(x)$, предположим, что $F\in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ и $G\in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Запишем их дискретные составляющие в виде

$$\begin{aligned} F_d(x)&=\sum_{x_s\leqslant x}\Delta F(x_s)=\sum_s\Delta F(x_s)H(x-x_s),\\ G_d(x)&=\sum_{x_s\leqslant x}\Delta G(x_s)=\sum_s\Delta G(x_s)H(x-x_s),\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $\Delta F(x_s)$ и $\Delta G(x_s)$ — скачки в точке x_s матриц F и G соответственно. Учитывая представление (6.1) и тот факт, что обобщенная производная функции Хевисайда есть мера Дирака, получим

$$\begin{aligned} F'(x) &= F'_c(x) + \sum_s \Delta F(x_s)\delta(x-x_s), \\ G'(x) &= G'_c(x) + \sum_s \Delta G(x_s)\delta(x-x_s). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Используя равенства (6.2), запишем формально произведения

$$\begin{aligned} F'G &= F'G_c + F'_cG_d + \sum_{r,p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r)H(x-x_p), \\ FG' &= FG'_c + F_cG'_d + \sum_{r,p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p)H(x-x_r). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Произведения под знаками сумм в (6.3), вообще говоря, не существуют в смысле теории обобщенных функций, поскольку

$$\delta(x-x_r)H(x-x_p) = \begin{cases} \delta(x-x_r), & \text{если } x_r > x_p, \\ 0, & \text{если } x_r < x_p. \end{cases}$$

а для $x_r = x_p$ такое произведение не однозначно. Эти соображения требуют следующего определения.

Определение 6.1. Произведения $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$ назовем *корректными*, если для любого $x \in I$ выполняется условие

$$\Delta F(x)\Delta G(x) = 0. \tag{6.4}$$

Учитывая определение 6.1, произведения (6.3) при условии (6.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F'G &= F'G_c + F'_cG_d + \sum_{r>p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r), \\ FG' &= FG'_c + F_cG'_d + \sum_{p>r} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p), \end{aligned} \tag{6.5}$$

где символ $\sum\limits_{r>p} \stackrel{df}{=} \sum\limits_{r}\sum\limits_{p}$ при условии $x_r > x_p$.

Обозначим через $H(x)$ и $Z(x)$ первообразные матричных мер $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$ соответственно, т. е.

$$H'(x)=F'(x)G(x), \quad Z'(x)=F(x)G'(x).$$

Теорема 6.2. *Пусть $F(x)$, $G(x)$ — матрицы-функции согласованных порядков, элементы которых принадлежат пространству $BV^{+}_{loc}(I)$, и произведения $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$ корректны, т. е. представляются в виде* (6.5). *Тогда*

1) $H(x)=\int\limits_{x_0}^{x} dF(t)G(t)+H_0, Z(x)=\int\limits_{x_0}^{x} F(t)dG(t)+Z_0,$ *где* $x_0, x\in I$, H_0 *и* Z_0 *— произвольные постоянные матрицы, а интегралы в правой части понимаются в смысле определения 2.1;*

2) $H(x)$ *и* $Z(x)$ *принадлежат* $\in BV^{+,loc}_{m\times n}(I)$*;*

3) $\Delta H(x)=\Delta F(x)G(x-0)$, $\Delta Z(x)=F(x-0)\Delta G(x)$ $x\in I$.

Доказательство теоремы 6.2 проводится по аналогии с доказательством свойства 2 из §2.

Замечание 6.3. При условии (6.4) корректности произведений $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$ для любых $a, b\in I$ интегралы

$$\int_a^b dF(x)G(x) \text{ и } \int_a^b F(x)dG(x)$$

являются классическими матричными интегралами Римана–Стилтьеса.

§ 7. Линейные дифференциальные системы с мерами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad x \in I, \tag{7.1}$$

где $Y(x)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция, $C(x)$ — матрица-функция из пространства $BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $C'(x)$ — ее обобщенная производная (следовательно дифференцирование и равенство в (7.1) понимаются в обобщенном смысле).

Заметим, что скачки матрицы-функции $C(x)$ порождают также скачки решения $Y(x)$ уравнения (7.1) и к тому же в одних и тех же точках, поэтому произведение $C'(x)Y(x)$, вообще говоря, неоднозначно (см. §6).

Определение 7.1. Будем считать, что вектор Y принадлежит к *допустимому классу* $\mathfrak{D}^n_C(I)$, если:

1) $Y \in BV^+_{loc,n}(I)$,
2) $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \forall x \in I$.

Определение 7.2. *Решением уравнения* (7.1) есть вектор-функция $Y(x)$ из допустимого класса $\mathfrak{D}^n_C(I)$, удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле:

$$(\varphi, Y') = (\varphi, C'Y) \quad \forall \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I).$$

Для системы (7.1) поставим задачу Коши об отыскании решения, удовлетворяющего начальному условию

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I. \tag{7.2}$$

Теорема 7.3. *В классе функций $\mathfrak{D}^n_C(I)$ задача* (7.1), (7.2) *эквивалентна интегральному уравнению*

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \quad x_0, x \in I. \tag{7.3}$$

Доказательство. Действительно, пусть $Y \in \mathfrak{D}_C^n(I)$. Тогда правая часть уравнения (7.1) является мерой, первообразная которой

$$Y(x) = P + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{7.4}$$

где P — произвольный постоянный вектор. Положив в (7.4) $P = Y_0$, удовлетворяем начальное условие (7.2) и получаем интегральное уравнение (7.3).

Пусть теперь вектор-функция $Y \in \mathfrak{D}_C^n(I)$ и удовлетворяет интегральному уравнению (7.3), где начальное условие (7.2) уже выполнено. Тогда правая часть этого уравнения является первообразной меры $C'(x)Y(x)$, что после (обобщенного) дифференцирования приводит к уравнению (7.1). ∎

Согласно результатам работы [**3**] уравнение (7.3) имеет единственное решение $Y(x) \in BV^+_{loc,n}(I)$. Условие же

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) \equiv 0$$

принадлежности этого решения к допустимому классу не является эффективным, поскольку выражено в терминах скачка самого решения. Следующее утверждение представляет эффективный критерий принадлежности решения к классу $\mathfrak{D}_C^n(I)$.

Теорема 7.4. *Для существования решения $Y(x)$ уравнения (7.3) в классе $\mathfrak{D}_C^n(I)$ необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \quad \forall x \in I. \tag{7.5}$$

Доказательство. *Достаточность.* Скачок $\Delta Y(x)$ решения уравнения (7.3) определяется по формуле (см. §3)

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0). \tag{7.6}$$

Умножив обе части (7.6) слева на $\Delta C(x)$, получим

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) = \left[\Delta C(x)\right]^2 Y(x-0), \tag{7.7}$$

откуда в силу (7.5) следует условие $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \;\; \forall x \in I$.

Необходимость. Если

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \; \forall x \in I,$$

то из (7.7) получим

$$0 = \left[\Delta C(x)\right]^2 Y(x-0) = \left[\Delta C(x)\right]^2 B(x-0, x_0)Y_0,$$

где $B(x, x_0)$ — матрица Коши уравнения (7.3), а Y_0 — произвольный начальный вектор. Из произвольности этого вектора следует, что

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 B(x-0, x_0) = 0,$$

откуда в силу оборотности матрицы $B(x-0, x_0)$ следует условие (7.5). ■

Определение 7.5. При выполнении условия (7.5) однородное уравнение (7.1) назовем *корректным*.

Рассмотрим теперь начальную задачу для неоднородной системы

$$Y'(x) = C'(x)Y(x) + F'(x) \tag{7.8}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{7.9}$$

где $F(x) \in BV^+_{loc}(I)$, и соответствующее интегральное уравнение

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0). \tag{7.10}$$

Условие (7.5) еще не обеспечивает принадлежности решения этого уравнения к классу $\mathfrak{D}^n_C(I)$ из-за наличия слагаемого $F(x) - F(x_0)$, но имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.6. *Если однородная система* (7.1) *корректна, то для существования решения уравнения* (7.10) *в классе* $\mathfrak{D}^n_C(I)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\Delta C(x)\Delta F(x)=0 \quad \forall\, x\in I. \tag{7.11}$$

Доказательство. Действительно, скачок решения уравнения (7.10) имеет вид

$$\Delta Y(x)=\Delta C(x)Y(x-0)+\Delta F(x),$$

что после умножения слева на $\Delta C(x)$ приводит к равенству

$$\Delta C(x)\Delta Y(x)=\big[\Delta C(x)\big]^2 Y(x-0)+\Delta C(x)\Delta F(x),$$

откуда и следует доказательство. ■

Замечание 7.7. При выполнении системы условий (7.5), (7.11) неоднородное уравнение (7.8) естественно также назвать *корректным*.

§ 8. Существование и единственность решения начальной задачи

Метод приведения начальных задач для (корректных) систем дифференциальных уравнений с мерамы к эквивалентным интегральным уравнениям позволяет в полной мере использовать полученные в предыдущих параграфах результаты для построения линейной теории: достаточно в соответствующих формулах положить $\Delta C(x)\Delta Y(x)=0$, $[\Delta C(x)]^2=0$ и $\Delta C(x)\Delta F(x)=0$ $\forall x\in I$. Такой подход в некоторой степени является альтернативным к результатам работ [**93**], [**98**].

Теорема 8.1. *При условии* (7.5) *существует единственное решение* $Y \in \mathfrak{D}^n_C(I)$ *начальной задачи* (7.1), (7.2), *скачок которого определяется по формуле*

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x). \tag{8.1}$$

Это решение представимо в виде

$$Y(x) = B(x, x_0) Y(x_0), \tag{8.2}$$

где $B(x,s)$ — *фундаментальная матрица, которая по переменной* x *является решением системы* (7.1) *и при* $x = s$ *удовлетворяет условию* $B(s,s) = E$.

Существование и единственность решения вытекают из теорем 7.3 и 7.4. Представление решения (8.2) является следствием теоремы 3.1. Условие же скачка (8.1) легко получить, если учесть формулы (3.2), (3.7), (3.9) и условие (7.5):

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x-0) = \Delta C(x)\big[E + \Delta C(x)\big]^{-1} Y(x) = \\ = \Delta C(x)\big[E - \Delta C(x)\big] Y(x) = \Delta C(x) \Delta Y(x).$$

Очевидно, фундаментальная матрица $B(x,s)$ системы (7.3) сохраняет свойства, описанные в теореме 3.2, с таким уточнением в силу условия (7.5) последнего свойства:

$$B(x,s) = B(x, s-0)\big[E - \Delta C(s)\big].$$

Теорема 8.2. *Матрица* $B^*(x,s)$ *по переменной* s *является решением сопряженной с* (7.1) *дифференциальной системы*

$$Z'(s) = -[C'(s)]^* Z(s), \quad s \in I. \tag{8.3}$$

Доказательство. В силу замечания 5.2 матрица $B(x,s)$ по переменной s удовлетворяет уравнению

$$B(x,s) = E - \int\limits_x^s B(x,t)dC(t),$$

которое в результате обобщенного дифференцирования по s приводит к системе $B'_s(x,s) = -B(x,s)C'(s)$, а после сопряжения — к системе $B^*(x,s)'_s = -[C'(s)]^* B^*(x,s)$. ■

Следствие 8.3. *Фундаментальная матрица* $\widetilde{B}(x,s)$ *сопряженной дифференциальной системы* (8.3) *удовлетворяет тождеству*

$$\widetilde{B}(x,s) = B^*(s,x) = [B^{-1}(x,s)]^*.$$

Теорема 8.4. *При условиях* (7.5) *и* (7.11) *начальная задача* (7.8), (7.9) *имеет единственное решение* $Y \in \mathfrak{D}^n_C(I)$, *которое представимо в форме Коши*

$$Y(x) = B(x,x_0)Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^x B(x,s)dF(s). \tag{8.4}$$

Доказательство следует из теорем 7.6 и 4.1.

2

Основы концепции квазипроизводных

§ 9. Предварительные замечания

Прежде, чем перейти к определению основных понятий, рассмотрим некоторые примеры скалярных дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - a_1(x)y = 0, \tag{9.1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция действительной переменной $x \in I$, $a_1(x) = b_1'(x)$, причем $b_1 \in BV_{loc}^+(I)$, обычным образом сводится к дифференциальной системе первого порядка

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \tag{9.2}$$

где

$$Y = (y, y')^\top, \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

то, очевидно, $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$ для любого $x \in I$ и, таким образом, система (9.2) корректна. Если под решением дифференциального уравнения (9.1) понимать первую координату $y(x)$ вектора $Y(x)$, то это уравнение и система (9.2) эквивалентны (в обобщенном смысле). Это обстоятельство позволяет не только построить линейную (элементарную) теорию уравнения (9.1), но и изучить локальные свойства его решения $y(x)$ и производной $y'(x)$.

2. Многие задачи математической физики приводят к исследованию дифференциального уравнения

$$l_2[y] \equiv \big(a_0(x)y'\big)' - a_1(x)y = 0, \tag{9.3}$$

где функция $a_0^{-1}(x)$ локально ограничена и измерима на интервале I, а функция $a_1(x) = b_1'(x)$, где $b_1 \in BV_{loc}^+(I)$, является мерой Стилтьеса на этом интервале (обобщенной функцией нулевого порядка).

Внешняя "близость" уравнений (9.1) и (9.3) обманчива. Существенное отличие между ними заключается в том, что при данных условиях на коэффициенты $a_0(x)$ и $a_1(x)$ линейную теорию уравнения (9.3), в отличие от уравнения (9.1), невозможно, оставаясь в рамках классической теории обобщенных функций, построить в терминах решения $y(x)$ и его производной $y'(x)$. Иными словами, в общем случае (когда функция $a_0^{-1}(x)$ ограничена и измерима) с помощью вектора $Y(x) = (y(x), y'(x))^\top$ это уравнение *не приводится к корректной системе первого порядка*.

Действительно, выполняя в (9.3) формально операцию дифференцирования, получаем дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y'' + a_0'(x)y' - a_1(x)y = 0,$$

или

$$y'' + a_0^{-1}(x)a_0'(x)y' - a_0^{-1}(x)a_1(x)y = 0.$$

Пусть, например, $a_0(x)$ — ступенчатая функция, не обращающаяся в нуль на произвольном компакте в I. Тогда $a_0^{-1}(x)$ тоже ступенчатая функция (очевидно, ограниченная и измеримая), точки разрывов которой совпадают с точками разрывов $a_0(x)$. Это значит, что произведения $a_0^{-1}(x)a_0'(x)$ и $a_0^{-1}(x)a_1(x)$ в общем случае не определены. Они существуют, если, скажем, $a_0(x)$ непрерывная функция локально ограниченной на I вариации, но такое предположение сильно ограничивает возможность исследования целых классов реальных физических процессов (продольные колебания стержней с кусочно-переменным сечением, крутильные колебания валов переменной жесткости, температурные задачи с кусочно-переменным коэффициентом теплопроводности и т. п.). Этих осложнений можно избежать, если воспользоваться следующим приемом.

Рассмотрим выражение $y^{[1]} \equiv a_0(x)y'$, которое назовем *квазипроизводной* дифференциального выражения $l_2[y]$. Легко убедиться, что с помощью вектора $Y = (y, y')^\top$ уравнение (9.3) перепишется в виде системы (9.2) с матрицей

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система корректна, поскольку снова

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \quad \forall x \in I.$$

Поэтому мы получили возможность строить линейную теорию уравнения (9.3), которое в дальнейшем будем называть *квазидифференциальным*, в терминах решения $y(x)$ и его квазипроизводной $y^{[1]}(x)$.

3. Идея введения квазипроизводных распространяется также на уравнения высших порядков. Здесь мы ограничимся ее иллю-

страцией в случае КДУ четвертого порядка

$$l_4[y] \equiv \bigl(a_0(x)y''\bigr)'' - \bigl(a_1(x)y'\bigr)' + a_2(x)y = 0. \qquad (9.4)$$

Если от коэффициентов $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, требовать, чтобы они принадлежали к пространству $C^{2-i}(I)$ функций непрерывно дифференцируемых $(2-i)$ раз, то, выполняя операции дифференцирования, получим уравнение четвертого порядка с непрерывными коэффициентами, решение которого следует искать в классе $C^4(I)$. Впрочем, данные требования слишком жесткие, потому как уравнение (9.4) сохраняет смысл и без предположения о гладкости $a_0(x)$, $a_1(x)$ и требования $y \in C^4(I)$.

Обозначим через

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[1]} = y', \; y^{[2]} = a_0(x)y'', \; y^{[3]} = a_1(x)y' - \bigl(a_0(x)y''\bigr)'$$

квазипроизводные функции $y(x)$ в смысле дифференциального уравнения (9.4). Если уравнение (9.4) интерпретировать, скажем, как уравнение поперечного изгиба балки (без учета внешних факторов), получающееся в результате разделения переменных в соответствующем уравнении с частными производными [**76**], то введенные квазипроизводные имеют реальный механический смысл, а именно: $y^{[0]}$ обозначает изгибе балки, $y^{[1]}$ — угол поворота, $y^{[2]}$ — изгибающий момент, $y^{[3]}$ — поперечную силу. В случае, если коэффициенты $a_0^{-1}(x), a_i(x)$, $i = 1, 2$, уравнения (9.4) локально суммируемы по Лебегу на интервале I, то уравнение имеет смысл, если от функции $y(x)$ требовать абсолютной непрерывности на I вместе с квазипроизводными до третьего порядка включительно; при этом, очевидно, $y(x)$ удовлетворяет уравнению (9.4) почти везде на I. Однако, в этом направлении можно пойти еще дальше, если предположить, что $a_0^{-1}(x)$ локально ограничена и измерима на интервале I функция, а коэффициенты $a_i(x) = b_i'(x)$, где $b_i \in BV_{loc}^+(I)$, $i = 1, 2$, являются мерами Стилтьеса на I. Легко видеть, что с помощью вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^\top$ уравнение (9.4) перепишется в виде системы (9.2), причем

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & -1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и потому

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда для любого $x \in I$ следует равенство $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$, т. е. корректность эквивалентной уравнению (9.4) системы первого порядка. Поэтому уравнение (9.4) имеет смысл, если от функции $y(x)$ требовать, чтобы она вместе со своей первой квазипроизводной $y^{[1]}(x)$ принадлежали к $AC(I)$, а квазипризводные $y^{[2]}(x)$ и $y^{[3]}(x)$ были функциями из $BV_{loc}^+(I)$; при этом дифференцирование и равенство в (9.4) понимаются в смысле теории обобщенных функций, т. е. как дифференцирование и равенство функционалов. Этот случай характеризуется тем, что балка несет на себе, кроме непрерывно распределенных, еще и сосредоточенные в некоторых точках x_s, массы и моменты, при переходе через которые (точки) изгибающий момент $y^{[2]}(x)$ и поперечная сила $y^{[3]}(x)$ меняются скачкообразно, в то время как изгиб $y^{[0]}(x)$ и угол поворота $y^{[1]}(x)$ — непрерывны.

Данные примеры показывают, что для каждого конкретного случая следует вводить свои квазипроизводные, которые (за исключением случаев "обычных" производных) тесно связаны с коэффициентами соответствующего дифференциального выражения. В дальнейшем, без ограничения общности, все (обычные) дифференциальные выражения и соответствующие им дифференциальные уравнения будем называть квазидифференциальными. Пусть далее $l_n[y]$ — квазидифференциальное выражение n-го порядка и

$$l_n[y] = 0 \tag{9.5}$$

соответствующее КДУ, которое с помощью вектора

$$Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[n-1]}\right)^{\top}$$

приводится к корректной дифференциальной системе

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \quad \forall x \in I. \tag{9.6}$$

Определение 9.1. Функции $y^{[k]}(x),\ k = \overline{0, n-1}$ $\left(y^{[0]} \overset{\text{def}}{=} y\right)$ назовем *квазипроизводными* в смысле КДУ (9.5).

В частности, квазипроизводными в смысле дифференциального уравнения $y^{(n)} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$ являются обычные производные $y^{(k)}(x),\ k = \overline{0, n-1}$.

Определение 9.2. КДУ (9.5) назовем *корректным*, если корректной является соответствующая ему система (9.6).

Как показывает пример КДУ (9.3), неудачный подход к выбору координат вектора $Y(x)$, т. е. квазипроизводных, может привести к некорректной системе, и наоборот. Более того, этот пример показывает, что в процессе приведения к системе следует избегать выполнения операции дифференцирования коэффициентов.

Определение 9.3. *Решением КДУ* (9.5) называем первую координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ дифференциальной системы (9.6), удовлетворяющую ему *в обобщенном смысле*, т. е., когда дифференцирование и равенство в (9.5) понимаются в смысле теории обобщенных функций: $\big(l_n[y],\varphi\big)=0, \varphi\in D^0(I)$.

Рассмотрим теперь сопряженную с (9.6) обобщенную дифференциальную систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^{*}Z(x). \tag{9.7}$$

Пусть $Z = \big(z^{\{n-1\}}, z^{\{n-2\}}, \dots, z\big)^{\top}$ есть искомая вектор-функция.

Определение 9.4. КДУ $l_n^*[z] = 0$, которому в силу эквивалентной системы (9.7) в обобщенном смысле удовлетворяет последняя координата $z(x)$ вектора $Z(x)$, назовем *сопряженным* с КДУ (9.5). При этом функции $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, n-1}$ $\big(z^{\{0\}}(x) \overset{\text{def}}{=} z(x)\big)$ называются *квазипроизводными* в смысле сопряженного КДУ.

Всюду дальше через $y^{[\cdot]}$ и $z^{\{\cdot\}}$ обозначим *квазипроизводные в смысле исходного и сопряженного КДУ* соответственно. Этим мы придерживаемся обозначений, впервые предложенных Д. Шином [**124–127**]. Заметим, что в случае, если квазипроизводные $y^{[k]}(x)$ в смысле КДУ (9.5) определены, то квазипроизводные $z^{\{k\}}(x)$ в смысле сопряженного КДУ, как дальше будет показано, определяются однозначно и наоборот. Данные квазипроизводные в общем случае не совпадают.

Для иллюстрации рассмотрим КДУ

$$\big(a_0(x)y''\big)' - a_1(x)y' - a_2(x)y = 0, \tag{9.8}$$

для которого квазипроизводные определим следующим образом: $y^{[1]} = y'$, $\quad y^{[2]} = a_0(x)y''$. В результате придем к дифференциальной системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_2(x) & a_1(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

Если предположить, что функция $a_0^{-1}(x)$ ограничена и измерима на интервале I, $a_i(x) = b_i'(x)$, где $b_i \in BV^+_{loc}(I)$, $i = 1, 2$, то для произвольного $x \in I$

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix}^2 = 0,$$

т. е. система (9.6), а вместе с ней и КДУ (9.8), являются корректными.

Сопряженная с (9.9) система имеет вид (здесь для большей общности функции $a_0(x), b_1(x), b_2(x)$ будем считать комплексно-значными)

$$\begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{a}_2(x) \\ 1 & 0 & \overline{a}_1(x) \\ 0 & \overline{a}_0^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}.$$

Из этой системы получаем обобщеннные равенства

$$z' = -\overline{a}_0^{-1} z^{\{1\}}, \quad \left(z^{\{1\}}\right)' = -z^{\{2\}} - \overline{a}_1(x) z, \quad \left(z^{\{2\}}\right)' = -\overline{a}_2(x) z,$$

откуда

$$z^{\{1\}} = -\overline{a}_0(x) z', \quad z^{\{2\}} = -\left(z^{\{1\}}\right)' - \overline{a}_1(x) z$$

и, наконец,

$$\left(\overline{a}_0(x) z'\right)'' - \left(\overline{a}_1(x) z\right)' + \overline{a}_2(x) z = 0. \tag{9.10}$$

Таким образом, $y^{[k]}(x) \neq y^{\{k\}}(x)$, $k = 1, 2$, а сопряженное с (9.8) уравнение имеет вид (9.10).

§ 10. Начальная задача для квазидифференциального уравнения с мерами

Рассмотрим квазидифференциальное выражение $(m, n \in \mathbb{N})$

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}, \tag{10.1}$$

где функция $y(x)$ определена на некотором интервале I действительной оси $\mathbb{R}$. Квазидифференциальные выражения вида (10.1) с достаточно гладкими, а также локально суммируемыми по Лебегу на интервале I коэффициентами $a_{ij}(x)$ в различных аспектах исследовалось многими авторами (см. библиографию в [**72**]).

Мы же ослабляем требования к коэффициентам квазидифференциального выражения (10.1) и всюду далее считаем, что выполняются следующие предположения:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на I функция;

(II) $a_{i0}, a_{0j} \in L^2_{loc}(I)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$;

(III) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, де $b_{ij} \in BV^+_{loc}(I)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Из данных условий видно, что в выражении (10.1) выполнять операцию $(m-j)$-кратного дифференцирования нельзя из-за недостаточной гладкости его коэффициентов. Если даже попробовать и провести дифференцирование в обобщенном смысле, то от решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{10.2}$$

мы вынуждены будем требовать достаточной гладкости для того, чтобы операции умножения в левой части этого уравнения были законными (а не только формальными) с точки зрения теории обобщенных функций. Всех этих трудностей удается избежать, если применить концепцию квазипроизводных.

Определение 10.1. *Квазипроизводными* функции $y(x)$ в смысле КДУ (10.2), назовем функции $y^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,n+m}$, определяемые формулами

$$\begin{gathered} y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i = \overline{0,n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x) y^{(n-i)}; \\ y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x) y^{(n-i)}, \quad j = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{10.3}$$

С помощью квазипроизводных (10.3) квазидифференциальное выражение (10.1) легко записать в виде

$$L_{mn}[y] \equiv y^{[n+m]}. \tag{10.4}$$

По известным уже причинам понятно, что "задачу Коши" для уравнения (10.2) с начальными значениями в точке $x_0 \in I$ есть смысл ставить только в терминах квазипроизводных:

$$y^{[k]}(x_0) = y_0^k, \quad k = \overline{0,q-1}, \tag{10.5}$$

где $q=m+n$, а y_0^k, $k=\overline{0,q-1}$, — заданные числа.

Ответ на вопрос о разрешимости данной задачи дает следующая теорема.

Теорема 10.2. *При условиях* (*I*)–(*III*) *существует единственное решение* $y(x)$ *начальной задачи* (10.2), (10.5) *такое, что квазипроизводные* $y^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,n=1}$, *принадлежат пространству* $AC(I)$, *а квазипроизводные* $y^{[n+j]}(x)$, $j=\overline{0,m-1}$, — *пространству* $BV^{+}_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_{ij}(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta y^{[n+j]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i,j+1}(x_s) y^{(i)}(x_s), \quad j = \overline{0,m-1}. \tag{10.6}$$

Доказательство. Запишем КДУ (10.2) в виде обобщенной дифференциальной системы первого порядка. Из формул для квазипроизводных следуют обобщенные равенства:

$$\begin{aligned}
\left(y^{[i-1]}\right)' &= y^{(i)},\ \ i=\overline{1,n-1};\\
\left(y^{[n-1]}\right)' &= a_{00}^{-1}(x)y^{[n]}-\sum_{i=1}^{n}a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)y^{[n-i]};\\
\left(y^{[n+j-1]}\right)' &= -y^{[n+j]}+a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)y^{[n]}+\\
&\qquad +\sum_{i=1}^{n}\left[a_{ij}(x)-a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)\right]y^{[n-i]},\ \ j=\overline{1,m}.
\end{aligned}$$

Если использовать их вместе с равенством $y^{[n+m]}=0$, которое является очевидным следствием (10.4) и (10.2), то задачу (10.2), (10.5) можно записать в виде

$$Y'(x)=C'(x)Y(x), \tag{10.7}$$

$$Y(x_0)=Y_0. \tag{10.8}$$

Здесь $Y=\left(y,y^{[1]},\ldots,y^{[q-1]}\right)^{\top}$ — неизвестная вектор-функция, $Y_0=\left(y_0,y_0^1,\ldots,y_0^{q-1}\right)^{\top}$ — заданый вектор начальных значений, $C'(x)$ — квадратная порядка q матрица коэффициентов системы, которая имеет блочную структуру, указанную на с. 90.

Отметим, что условия (I)–(III) позволяют интерпритовать $C'(x)$ как матричную меру. Кроме того, эти условия являются достаточными для корректности системы (10.7), поскольку из них следует, что матрица скачков $\Delta\mathcal{C}(x)$ имеет вид

$$\Delta C(x)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\Delta b_{n1} & \Delta b_{n-1,1} & \cdots & \Delta b_{11} & 0 & \cdots & 0\\
\Delta b_{n2} & \Delta b_{n-1,2} & \cdots & \Delta b_{12} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\Delta b_{nm} & \Delta b_{n-1,m} & \cdots & \Delta b_{1m} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}, \tag{10.9}$$

откуда непосредственной проверкой легко видеть, что

$$\big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I. \tag{10.10}$$

Но тогда по теореме 7.3 задача (10.7), (10.8) эквивалентна интегральному уравнению

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{10.11}$$

откуда уже согласно теореме 7.4 следует существование и единственность ее решения $Y(x)$ из допустимого класса

$$\mathfrak{D}_C^q(I) = \Big\{ Y \in BV^+_{loc,q}(I) \,\Big|\, \Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \ \forall x \in I \Big\}.$$

Поскольку в соответствии с определением 9.3 под решением КДУ (10.2) понимаем первую координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ дифференциальной системы (10.7), то отсюда следует, в свою очередь, существование и единственность решения начальной задачи (10.2), (10.5).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Условие скачка решения интегрального уравнения (10.11) в точке $x_s \in I$ имеет вид

$$\Delta Y(x_s) = \Delta C(x_s)Y(x_s). \tag{10.12}$$

Но тогда в силу структуры (10.9) матрицы скачков $\Delta C(x)$ можно сделать вывод, что $\Delta y^{[i]}(x_s) = 0$ при $i = \overline{0, n-1}$, т. е. решение $y(x)$ и его квазипроизводные $y^{[i]}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно по крайней мере непрерывны. Более того, поскольку из (10.11) и (10.3) следуют равенства

$$y^{[i]}(x) = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} y^{[i+1]}(t)dt = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} y^{(i+1)}(t)dt, \quad i = \overline{0, n-2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, то квазипроизводные $y^{[i]}(x)$ при $i = \overline{0, n-2}$ принадлежат пространству $AC(I)$.

$$
C' = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{n} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad \boldsymbol{m} \end{array} \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{n} \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{m} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
a_{n1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{11}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\
a_{nm}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & a_{1m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

При $i = n-1$ аналогичное равенство также имеет место, однако не является столь очевидным, как предыдущие.

Действительно,

$$y^{[n-1]}(x) = y_0^{n-1} - \int\limits_{x_0}^{x} \Big[\tfrac{a_{n0}}{a_{00}} y + \tfrac{a_{n-1,0}}{a_{00}} y^{[1]} + \ldots + \tfrac{a_{10}}{a_{00}} y^{[n-1]}\Big](t)dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} a_{00}^{-1}(t) y^{[n]}(t)dt = y_0^{n-1} - \int\limits_{x_0}^{x} a_{00}^{-1}(t) \sum_{i=1}^{n} a_{i0}(t) y^{(n-i)}(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} a_{00}^{-1}(t) \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(t) y^{(n-i)}(t)dt = y_0^{n-1} + \int\limits_{x_0}^{x} y^{(n)}(t)dt.$$

Кроме того, $Y \in \mathfrak{D}_C^q(I)$, поэтому $y^{[n+j]} \in BV_{loc}^+(I)$ для $j = \overline{0, m-1}$.

Равенства (10.6) вытекают из (10.12), структуры матрицы $\Delta C(x)$ и того факта, что согласно (10.3) квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно совпадают с обычными производными. ■

Следует подчеркнуть то свойство корректных квазидифференциальных уравнений с мерами, что скачки квазипроизводных их решений однозначно диктуются структурой их коэффициентов и этот факт выражается формулами (10.6). Данные формулы можно интерпритировать также как *условия сопряжения* для практического построения решений квазидифференциальных уравнений вида (10.2).

§ 11. Сопряженное квазидифференциальное уравнение с мерами

Чтобы получить вид сопряженного с (10.2) КДУ, а также выражения для его квазипроизводных, рассмотрим согласно определению 9.4 сопряженную с (10.7) обобщенную дифференциальную систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x). \tag{11.1}$$

Используя конкретный вид (с. 90) матрицы $C'(x)$, получаем следующие определения.

Определение 11.1. *Сопряженным* с (10.1) называется квазидифференциальное выражение

$$L^*_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\big(\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}\big)^{(n-i)}. \tag{11.2}$$

Определение 11.2. *Квазипроизводными* функции $z(x)$ в смысле сопряженного уравнения $L^*_{mn}[z] = 0$ назовем функции $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,q}$, определяемые формулами

$$\begin{gathered} z^{\{j\}} = z^{(j)}, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{0j}(x)z^{(m-j)}; \\ z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{11.3}$$

Очевидно, что $z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[z]$. Отметим также, что в случае, если определены квазипроизводные (10.3), квазипроизводные (11.3) определяются однозначно из системы (11.1).

Рассмотрим теперь начальную задачу

$$L^*_{mn}[z] = 0, \tag{11.4}$$

$$z^{\{k\}}(x_0) = z_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{11.5}$$

где z_0^k, $k=\overline{0,q-1}$, — заданные числа. Ответ на вопрос о разрешимости данной задачи дает следующая

Теорема 11.3. *При условиях* (*I*)–(*III*) *существует единственное решение* $z(x)$ *начальной задачи* (11.4), (11.5) *такое, что квазипроводные* $z^{\{j\}}(x)$, $j=\overline{0,m-1}$ *принадлежат пространству* $AC(I)$, *а квазипроизводные* $z^{\{m+i\}}(x)$, $i=\overline{0,n-1}$ — *пространству* $BV^+_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_{ij}(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta z^{\{m+i\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1}\Delta b_{i+1,m-j}(x_s)z^{(j)}(x_s), \quad i=\overline{0,n-1}. \qquad (11.6)$$

Доказательство. Проведем по схеме доказательства теоремы 10.2. Представляется вероятным, что КДУ (11.4) при помощи квазипроизводных (11.3) приводится к системе (11.1), поскольку вид (11.2) сопряженного квазидифференциального выражения $L^*_{mn}[z]$ получался обратным путем. Действительно, из формул (11.3) получаем следующие обобщенные равенства:

$$\left(z^{\{j-1\}}\right)' = z^{(j)},\ j=\overline{1,m-1};$$

$$\left(z^{\{m-1\}}\right)' = -\overline{a}_{00}^{\,-1}(x)z^{\{m\}} - \sum_{j=1}^{m}\overline{a}_{00}^{\,-1}(x)\overline{a}_{0j}(x)z^{\{m-j\}};$$

$$\left(z^{\{m+i-1\}}\right)' = -z^{\{m+i\}} + \overline{a}_{i0}(x)\overline{a}_{00}^{\,-1}(x)z^{\{m\}} - \\ -\sum_{j=1}^{m}\left[\overline{a}_{ij}(x)-\overline{a}_{i0}(x)\overline{a}_{00}^{\,-1}(x)\overline{a}_{0j}(x)\right]z^{\{m-j\}},\ i=\overline{1,n},$$

причем в последнем из них $z^{\{q\}}=0$ в силу (11.4). Таким образом, с помощью вектора $Z=\left(z^{\{q-1\}}, z^{\{q-2\}},\dots,z\right)^\top$ КДУ (11.4) запишем в виде системы (11.1). Начальные же условия (11.5) можно переписать следующим образом:

$$Z(x_0) = Z_0, \qquad (11.7)$$

где $Z_0 = \left(z_0^{q-1}, z_0^{q-2}, \ldots, z_0\right)^{\top}$ — заданный вектор начальных значений. Система (11.1), очевидно, корректна, так как в силу условия (10.10) имеем $\left(\Delta\left[-C^*(x)\right]\right)^2 = \left(\left[\Delta C(x)\right]^2\right)^* \equiv 0$. Поэтому задача (11.1), (11.7) эквивалентна интегральному уравнению

$$Z(x) = Z_0 - \int\limits_{x_0}^{x} dC^*(t)\, Z(t). \tag{11.8}$$

Отсюда в силу замечания 5.2 сразу же вытекает существование и единственность ее решения $Z(x)$ из допустимого класса $\mathfrak{D}_C^q(I)$, а, следовательно, и решения $z(x)$ начальной задачи (11.4), (11.5).

Для доказательства второй части теоремы используем условие скачка решения интегрального уравнения (11.8) в точке $x_s \in I$:

$$\Delta Z(x_s) = -\Delta C^*(x_s) Z(x_s), \tag{11.9}$$

а также структуру (10.9) матрицы скачков $\Delta C(x)$. Тогда $\Delta z^{\{j\}}(x_s) = 0$ для любого $j = \overline{0, m-1}$, т. е. решение $z(x)$ и его квазипроизводные $z^{\{j\}}(x)$ до $(m-1)$-го порядка включительно по крайней мере непрерывны.

Поскольку в силу (11.8) и (11.3) справедливы равенства

$$z^{\{j\}}(x) = z_0^j + \int\limits_{x_0}^{x} z^{(j+1)}(t)dt, \quad j = \overline{0, m-1},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, то квазипроизводные $z^{\{j\}}(x)$ при $j = \overline{0, m-1}$ являются абсолютно непрерывными на I. Кроме этого, $Z(x) \in \mathfrak{D}_C^q(I)$, поэтому квазипроизводные $z^{\{m+i\}}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, принадлежат $BV_{loc}^+(I)$. Равенства (11.6) вытекают из (11.9), структуры матрицы $\Delta C(x)$ и того факта, что согласно (11.3) квазипроизводные (в смысле сопряженного уравнения) до $(m-1)$-го порядка включительно совпадают с обычными производными. ■

В завершение, проиллюстрируем теоремы 10.2 и 11.3 **на примере** КДУ второго порядка

$$L_{11}[y] \equiv -\big(a_{00}(x)y'\big)'+a_{01}(x)y'-\big(a_{10}(x)y\big)'+a_{11}(x)y=0, \quad (11.10)$$

где функция $a_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на интервале I, $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$, $a_{11}(x) = \alpha'_{11}(x)$, $\alpha_{11} \in BV^{+}_{loc}(I)$.

Здесь $m = n = 1$, поэтому в силу формул (10.3) квазипроизводные определяются следующим образом:

$$y^{[0]} \stackrel{\text{def}}{=} y, \quad y^{[1]} = a_{00}(x)y' + a_{10}(x)y,$$

$$y^{[2]} = -\big(y^{[1]}\big)' + a_{01}(x)y' + a_{11}(x)y,$$

причем, действительно, $y^{[2]} \equiv L_{11}[y]$.

Эквивалентная дифференциальная система первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} \\ a_{11} - a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{01}a_{00}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

является системой вида (10.7). Решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию $\big(y(x_0), y^{[1]}(x_0)\big)^{\top} = \big(y_0, y_0^1\big)^{\top}$, является решением векторного интегрального уравнения вида (10.11), точнее, решением следующей системы интегральных уравнений типа Вольтерры-Стилтьеса:

$$y(x) = y_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{a_{10}(t)}{a_{00}(t)}\, y(t)dt + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a_{00}(t)}\, y^{[1]}(t)dt;$$

$$y^{[1]}(x) = y_0^1 - \int_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)a_{10}(t)}{a_{00}(t)}\, y(t)dt + \quad (11.12)$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)}{a_{00}(t)}\, y^{[1]}(t)dt + \int_{x_0}^{x} y(t)d\alpha_{11}(t).$$

Скачок решения в произвольной точке $x_s \in I$ определяется равенством

$$\begin{pmatrix} \Delta y(x_s) \\ \Delta y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta\alpha_{11}(x_s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x_s) \\ y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix}. \tag{11.13}$$

Отсюда $\Delta y(x_s) = 0 \; \forall \, x_s \in I$, поэтому функция $y(x)$ по крайней мере непрерывна. Но с первого уравнения системы (11.12), если учесть вид квазипроизводной $y^{[1]}(x)$, следует, что

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} y'(t)dt.$$

Это значит, что функция $y(x)$ восстанавливается по своей производной и, таким образом, является локально абсолютно непрерывной на интервале I.

Второе же уравнение этой системы можно записать в виде

$$y^{[1]}(x) = y_0^1 + \int\limits_{x_0}^{x} a_{01}(t)y'(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} y(t)d\alpha_{11}(t),$$

откуда следует, что первая квазипроизводная $y^{[1]}$ принадлежит $BV^+_{loc}(I)$. Ее же скачок в точке $x_s \in I$ в силу (11.13) вычисляется по формуле

$$\Delta y^{[1]}(x_s) = \Delta\alpha_{11}(x_s)\, y(x_s).$$

Сопряженная с (11.11) система имеет вид

$$\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \overline{a}_{10}\overline{a}_{00}^{\,-1} & \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{\,-1}\overline{a}_{01} - \overline{a}_{11} \\ -\overline{a}_{00}^{\,-1} & -\overline{a}_{00}^{\,-1}\overline{a}_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}. \tag{11.14}$$

Второе уравнение

$$z' = -\overline{a}_{00}^{\,-1}(x)z^{\{1\}} - \overline{a}_{00}^{\,-1}(x)\overline{a}_{01}(x)z$$

этой системы дает выражение для первой квазипроизводной

$$z^{\{1\}} = -\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z,$$

которое, очевидно, совпадает с выражением (11.3) для $m = 1$. Подставив его вместо $z^{\{1\}}$ в первое уравнение

$$\left(z^{\{1\}}\right)' = \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x)z^{\{1\}} + \left[\overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x)\overline{a}_{01}(x) - \overline{a}_{11}(x)\right]z$$

системы (11.14), имеем

$$\left(-\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z\right)' = -\overline{a}_{10}(x)z' - \overline{a}_{11}(x)z$$

и, следовательно, сопряженное с (11.10) КДУ

$$-\left(\overline{a}_{00}(x)z'\right)' + \overline{a}_{10}(x)z' - \left(\overline{a}_{01}(x)z\right)' + \overline{a}_{11}(x)z = 0$$

является частным случаем (при $m = n = 1$) уравнения (11.2).

Рассуждая, как и выше, видим, что скачок решения системы (11.14) в точке $x_s \in I$ определяется равенством

$$\begin{pmatrix} \Delta z^{\{1\}}(x_s) \\ \Delta z(x_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\bar{b}_{11}(x_s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}}(x_s) \\ z(x_s) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\Delta z^{\{1\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_{11}(x_s)z(x_s)$, а $\Delta z(x_s) = 0$, причем так же, как и прежде для решения $y(x)$, можно показать, что, на самом деле, $z \in AC(I)$.

§ 12. Линейная теория обобщенных квазидифференциальных уравнений

На основе полученных выше результатов теперь можно строить линейную теорию однородных КДУ с мерами аналогично тому, как это делается, например, для определенных классов КДУ с суммируемыми коэффициентами.

Пусть функции $\varphi_k(x), k = \overline{1, q}$, и $\psi_l(x), l = \overline{1, q}$, являются решениями исходного

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{12.1}$$

и сопряженного

$$L^*_{mn}[z] = 0 \tag{12.2}$$

КДУ соответственно. Составим матрицы-функции

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_q(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[q-1]}(x) & \varphi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

и

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_q(x) \\ \psi_1^{\{1\}}(x) & \psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{\{q-1\}}(x) & \psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Определители

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)] = \det \Phi(x)$$

и

$$V(x) \equiv V[\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_q(x)] = \det \Psi(x)$$

назовем *квазивронскианами*[1] решений $\varphi_k(x)$ и $\psi_l(x)$ соответственно.

Имеют место следующие аналоги формул Лиувилля–Остроградского–Якоби[2].

Теорема 12.1. *Для любой точки $x_0 \in I$ квазивронскианы $W(x)$ и $V(x)$ вычисляются по формулам*

$$W(x) = W(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)-a_{10}(t)}{a_{00}(t)}dt\right\}, \tag{12.3}$$

$$V(x) = V(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\overline{a}_{01}(t)-\overline{a}_{10}(t)}{\overline{a}_{00}(t)}dt\right\}. \tag{12.4}$$

Доказательство. Понятно, что $\Phi(x)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\Phi'(x) = C'(x)\Phi(x), \tag{12.5}$$

где матрица $C'(x)$ определена в явном виде на с. 90. Это уравнение в свою очередь эквивалентно матричному интегральному уравнению

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\Phi(t).$$

---

[1] Вронский (Гёне-Вронский) Юзеф Мария (Hoene-Wroński Józef Maria, 1776–1853) — польский математик и философ, профессиональный военный.

[2] Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861) — украинский и российский математик, один из основателей Петербургской математической школы, академик Петербургской АН (1830).

Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804–1851) — немецкий математик, профессор Кенигсбергского университета, иностранный почетный член Петербургской АН (1833), член Лондонского королевского общества (1833), Берлинской АН (1836), Парижской АН(1846).

Пусть $B(x, s)$ — фундаментальная матрица системы (12.5). Тогда произвольное ее решение с начальным значением $\Phi(x_0)$ представимо в виде $\Phi(x) = B(x, x_0)\Phi(x_0)$. Следовательно, согласно результатам работы [**154**]

$$W(x) = W(x_0) \det B(x, x_0) = \\ = W(x_0) \cdot \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\big[dC_c(t)\big] \right\} \cdot \prod_s \det\big[E_q + \Delta C(x_s)\big],$$

где $C_c(x)$ — непрерывная составляющая матрицы-функции $C(x)$. Из структуры (10.9) матрицы $\Delta C(x)$ следует, что для произвольной точки разрыва $x_s \in I$ матрицы $E_q + \Delta C(x_s)$ имеют треугольный вид с единицами на главной диагонали. Поэтому

$$\prod_s \det\big[E_q + \Delta C(x_s)\big] = 1.$$

Кроме того, $\mathrm{tr}\big[C'(x)\big] = a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) - a_{00}^{-1}a_{10}(x)$. Поскольку $a_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на I функция, $a_{01}, a_{10} \in L_2(I)$, то $\mathrm{tr}\big[C'(x)\big] \in L(I)$, и мы получаем формулу (12.3). Доказательство формулы (12.4) аналогично. ■

Следствие 12.2. *Если* $\mathrm{tr}\big[C'(x)\big] = \mathrm{tr}\big[C'(x)\big]^*$, *то*

$$W(x)V(x) = \mathrm{const} \quad \forall x \in I.$$

Определение 12.3. Решения $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, q}$, КДУ (12.1) будем называть *линейно независимыми*, если равенство

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k(x) = 0$$

при некоторых постоянных c_k имеет место только тогда, когда $c_k = 0$ для всех $k = \overline{1, q}$, и *линенйно зависимыми*, если хотя бы одна из постоянных c_k отлична от нуля.

Определение 12.4. Произвольную линейно независимую систему решений $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, КДУ (12.1) называем *фундаментальной системой решений* (ФСР) этого уравнения.

Понятно, что для построения ФСР уравнения (12.1) достаточно решить q "задач Коши" с начальными условиями $\varphi_j^{[i-1]}(x_0) = c_{ij}$, $i,j=\overline{1,q}$, где числа c_{ij} выбраны так, что $\det\{c_{ij}\}\neq 0$.

Теорема 12.5. *Если решения $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, КДУ* (12.1) *линейно зависимы, то квазивронскиан $W(x)$ этих решений тождественно равен нулю на интервале I. Наоборот, если $W(x)=0$ хотя бы в одной точке $x_0\in I$, то решения $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, КДУ* (12.1) *линейно зависимы.*

Доказательство. Если решения $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, уравнения (12.1) линейно зависимы, то среди чисел c_k найдется хотя бы одно отличное от нуля такое, что

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x) = 0$$

для любого $x\in I$. Взяв квазипроизводные от обеих частей этого равенства, приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k:

$$\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k^{[i-1]}(x) = 0, \quad i=\overline{1,q}. \tag{12.6}$$

Поскольку система (12.6) имеет нетривиальное решение (потому что не все постоянные c_k равны нулю), то ее определитель $W(x)\equiv 0$ на I.

Наоборот, пусть $W(x_0)=0$ в какой-нибудь точке $x_0\in I$. Тогда при $x=x_0$ существует нетривиальное решение алгебраической системы (12.6), причем функция

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x)$$

есть решение КДУ (12.1), удовлетворяющее начальным условиям $y^{[i-1]}(x_0) = 0,\ i = \overline{1, q}$.

Поскольку КДУ (12.1) является однородным, то в силу теоремы существования и единственности такое решение тождественно равно нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k(x) \equiv 0.$$

Если принять во внимание, что среди чисел c_k существует хотя бы одно отличное от нуля (поскольку решение системы (12.6) при $x = x_0$ нетривиально), то согласно определению 12.3 решения $\varphi_k(x),\ k = \overline{1, q}$, линейно зависимы. ■

Следствие 12.6. *Если $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in I$, то решения $\varphi_k(x),\ k = \overline{1, q}$, квазидифференциального уравнения* (12.1) *образуют ФСР.*

Следствие 12.7. *Общее решение КДУ* (12.1) *является линейной комбинацией решений $\varphi_k(x), k = \overline{1, q}$, произвольной фиксированной ФСР:*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k(x), \quad c_k = \mathrm{const}\,.$$

Понятно, что все сказанное после следствия 12.2 естественным образом распространяется на случай сопряженного КДУ (12.2) с той лишь разницей, что вместо квазипроизводных $\varphi^{[\cdot]}(x)$ и квазивронскиана $W(x)$ будут фигурировать $\psi^{\{\cdot\}}(x)$ и $V(x)$.

§ 13. Структура фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения с мерами

Приведенные в настоящем параграфе результаты не требуют конкретного вида КДУ и в этом плане есть следствием общих положений концепции квазипроизводных. Более того, полученная далее структура фундаментальной матрицы абстрактного КДУ, убеждает в том, что такая концепция — в самой природе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть

$$l_n\big[y(x)\big] = 0 \tag{13.1}$$

корректное КДУ порядка n, приводящееся к линейной дифференциальной системе первого порядка

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I, \tag{13.2}$$

где $Y = \big(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[n-1]}\big)^\top$ — неизвестная вектор-функция, $y^{[i]}(x)$, $i=\overline{0, n-1}$, — некоторым образом введенные квазипроизводные.

Определение 13.1. Матрицу-функцию $B(x,s)$, которая по переменной x удовлетворяет системе (13.2) и в точке $x=s \in I$ начальному условию $B(s,s)=E_n$, будем называть *фундаментальной матрицей*, соответствующей КДУ (13.1).

Определение 13.2. *Функцией Коши* КДУ (13.1) называем функцию $K(x,s)$, которая по переменной x является решением этого уравнения и в точке $x=s \in I$ удовлетворяет начальным условиям

$$K^{[i]}(s,s) = 0, \ \ i = \overline{0, n-2}, \qquad K^{[n-1]}(s,s) = 1. \tag{13.3}$$

Пусть также

$$l_n^*[z(x)] = 0 \tag{13.4}$$

сопряженное КДУ, а $z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, n-1}$, — квазипроизводные функции $z(x)$ в смысле сопряженного уравнения.

Определение 13.3. Для достаточно гладкой комплекснозначной функции $f(x,s)$, определенной на декартовом произведении $I\times I$, выражение $f^{[i]\{j\}}(x,s)$ называем *смешанной квазипроизводной* $(i+j)$*-го порядка*, если сначала берется квазипроизводная порядка i по (первому аргументу) x в смысле исходного КДУ (13.1), а затем от полученного результата — квазипроизводная порядка j по (второму аргументу) s в смысле сопряженного уравнения (13.4).

Следующая теорема отражает тот факт, что для функции Коши $K(x,s)$ результат смешанного квазидифференцирования не зависит от порядка его выполнения.

Лемма 13.4. *Если* $K(x,s)$ *— функция Коши КДУ* (13.1), *то*

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=K^{\{j\}[i]}(x,s). \tag{13.5}$$

Доказательство. Согласно определению 13.2 функция $K(x,s)$ является решением КДУ (13.1), поэтому имеет место представление

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\varphi_k(x), \tag{13.6}$$

где $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, — некоторая ФСР уравнения (13.1), а $c_k(s)$ — постоянные по переменной x функции, однозначно определяющиеся при фиксированном s начальными условиями (13.3). Учитывая линейность операции вычисления квазипроизводной и выражение (13.6), имеем

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=\left(\sum_{k=1}^{n}c_k(s)\varphi_k^{[i]}(x)\right)^{\{j\}}=\sum_{k=1}^{n}c_k^{\{j\}}(s)\varphi_k^{[i]}(x)=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^{\{j\}}(s)\varphi_k(x)\right)^{[i]}=K^{\{j\}[i]}(x,s).$$

■

Теорема 13.5. *Фундаментальная матрица $B(x,s)$, соответствующая КДУ (13.1), имеет следующую структуру:*

$$B(x,s)=\begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}}(x,s) & K(x,s) \\ K^{\{n-1\}[1]}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}[1]}(x,s) & K^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{\{n-1\}[n-1]}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}[n-1]}(x,s) & K^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

Доказательство. Обозначим элементы матрицы $B(x,s)$ через $\beta_{ij}(x,s)$, $i,j=\overline{1,n}$. Понятно, что в силу определений 13.1 и 13.2 элементами последнего ее столбца есть функция Коши и ее последовательные квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно в смысле КДУ (13.1), т. е. $\beta_{in}=K^{[i-1]}(x,s)$, $i=\overline{1,n}$. Следовательно, имеем

$$B(x,s)=\begin{pmatrix} \beta_{11}(x,s) & \beta_{12}(x,s) & \cdots & \beta_{1,n-1}(x,s) & K(x,s) \\ \beta_{21}(x,s) & \beta_{22}(x,s) & \cdots & \beta_{2,n-1}(x,s) & K^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1}(x,s) & \beta_{n2}(x,s) & \cdots & \beta_{n,n-1}(x,s) & K^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Если далее учесть коммутативность операций комплексного сопряжения и квазидифференцирования, то получим

$$B^*(x,s)=\begin{pmatrix} \overline{\beta}_{11}(x,s) & \overline{\beta}_{21}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n1}(x,s) \\ \overline{\beta}_{12}(x,s) & \overline{\beta}_{22}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n2}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\beta}_{1,n-1}(x,s) & \overline{\beta}_{2,n-1}(x,s) & \cdots & \overline{\beta}_{n,n-1}(x,s) \\ \overline{K}(x,s) & \overline{K}^{[1]}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Но в силу замечания 5.2 матрица $B^*(x,s)$ по переменной s

является решением сопряженной системы

$$\begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\big(C'(s)\big)^{*} \cdot \begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix},$$

а это значит, что все строки этой матрицы (точнее, их элементы), начиная с предпоследней, являются последовательными квазипроизводными последней строки по s в смысле сопряженного уравнения (13.4). Поэтому

$$B^{*}(x,s)=\begin{pmatrix} \overline{K}^{\{n-1\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{n-1\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-1\}}(x,s) \\ \overline{K}^{\{n-2\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{n-2\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-2\}}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{K}^{\{1\}}(x,s) & \overline{K}^{[1]\{1\}}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{1\}}(x,s) \\ \overline{K}(x,s) & \overline{K}^{[1]}(x,s) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix} \tag{13.8}$$

Выполняя повторно операцию сопряжения и учитывая равенство (13.5), получаем формулу (13.7). ■

Следствие 13.6. *Если $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая сопряженному КДУ* (13.4)*, то*

$$\widetilde{B}(x,s) \equiv \big(B^{-1}(x,s)\big)^{*} = B^{*}(s,x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{K}^{\{n-1\}}(s,x) & \overline{K}^{[1]\{n-1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{n-1\}}(s,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{K}^{\{1\}}(s,x) & \overline{K}^{[1]\{1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]\{1\}}(s,x) \\ \overline{K}(s,x) & \overline{K}^{[1]}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{[n-1]}(s,x) \end{pmatrix},$$

если при этом воспользоваться (13.8).

Последний результат позволяет установить тесную связь между решениями исходного и сопряженного КДУ.

Определение 13.7. *Функцией Коши сопряженного КДУ* (13.4) называем функцию $\widetilde{K}(x,s)$, которая по переменной x удовлетворяет этому уравнению и в точке $x=s$ начальным условиям

$$\widetilde{K}_x^{\{j\}}(s,s)=0 \ \ (j=\overline{0,n-2}), \quad \widetilde{K}_x^{\{n-1\}}(s,s)=1.$$

(здесь индекс x указывает на то, что квазипроизводная в смысле сопряженного уравнения берется по переменной x).

Из структуры матрицы-функции $\widetilde{B}(x,s)$ сразу же следует, что

$$\widetilde{K}(x,s)\equiv\overline{K}(s,x).$$

Следствие 13.8. *Функции* $K^{\{j\}}(x,s)$, $j=\overline{0,n-1}$, *образуют нормальную в точке* $x=s$ *фундаментальную систему решений КДУ* (13.1).

Следствие 13.9. *Функция* $\overline{K}(s,x)$ *и ее последовательные квазипроизводные* $\overline{K}^{[i]}(s,x), i=\overline{1,n-1}$, *по переменной* s *в смысле исходного уравнения* (13.1) *образуют нормальную в точке* $x=s$ *фундаментальную систему решений сопряженного КДУ* (13.4).

§ 14. Конструкция элементов фундаментальной матрицы

В предыдущем параграфе для произвольного абстрактного КДУ мы получили с помощью одной лишь функции Коши $K(x,s)$ и ее смешанных квазипризводных в смысле исходного и сопряженного уравнений структуру нормальной при $x=s$ фундаментальной матрицы $B(x,s)$, соответствующей этому уравнению. Однако, при исследовании задач как прикладного, так и теоретического характера не менее важно знать также конструкцию элементов этой матрицы, т. е. уметь строить функцию Коши и ее смешанные квазипроизводные. Способ их построения из ФСР как раз и является предметом рассмотрения настоящего параграфа.

Если пользоваться определением (13.2), то для построения функции Коши $K(x,s)$ КДУ (13.1) необходимо решить неоднородную систему n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[i]}(s) = 0, \quad i=\overline{0,n-2}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[n-1]}(s) = 1, \end{cases}$$

где φ_k, $k=\overline{1,n}$, — произвольная ФСР уравнения (13.1). Если это делать, например, методом Крамера[3)], то необходимо вычислить $n+1$ определителей n-го порядка, что даже при небольших n является процедурой достаточно трудоемкой.

Следующая теорема позволяет свести процесс построения функции Коши (так же ее смешанных квазипроизводных) к вычислению всего лишь двух определителей n-го порядка, что гораздо упрощает трудоемкость данной процедуры.

[3)] Крамер Габриэль (Cramer Gabriel, 1704-1752) — швейцарский математик, ученик И. Бернулли, профессор Женевской академии.

Теорема 14.1. *Пусть* $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, *— произвольная фундаментальная система решений КДУ* (13.1), *а* $W(x)$ *— ее квазивронскиан, т. е.*

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(x) & \varphi_2^{[n-1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда функция Коши $K(x,s)$ *этого уравнения и ее смешанные квазипроизводные* $(i+j)$*-го порядка* $(i,j=\overline{0,n-1})$ *имеют вид*

$$K^{[i]\{j\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-j-2]}(s) & \varphi_2^{[n-j-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j-2]}(s) \\ \varphi_1^{[i]}(x) & \varphi_2^{[i]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[i]}(x) \\ \varphi_1^{[n-j]}(s) & \varphi_2^{[n-j]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j]}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(s) & \varphi_2^{[n-1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(s) \end{vmatrix}, \qquad (14.1)$$

где строка $\left(\varphi_1^{[i]}(x)\ \ \varphi_2^{[i]}(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_n^{[i]}(x)\right)$ *имеет номер* $n-j$ *(или* $j+1$, *считая снизу).*

Доказательство. Пусть

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(x) & \varphi_2^{[n-1]}(x) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(x) \end{pmatrix}$$

— интегральная матрица дифференциальной системы (13.2), соответствущая КДУ (13.1). Тогда, как известно [**52**, с. 271], фундаментальная матрица этой системы имеет вид

$$B(x,s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s) = \Phi(x)\frac{A(s)}{W(s)}, \tag{14.2}$$

где

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{21}(s) & \cdots & A_{n1}(s) \\ A_{12}(s) & A_{22}(s) & \cdots & A_{n2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(s) & A_{2n}(s) & \cdots & A_{nn}(s) \end{pmatrix}$$

— матрица, составленная из алгебраических дополнений $A_{ik}(s)$, $i,k=\overline{1,n}$, к элементам $\varphi_k^{[i-1]}(s)$ интегральной матрицы $\Phi(s)$. Выполняя умножение матриц в правой части равенства (14.2) и используя структуру (13.7) фундаментальной матрицы, имеем

$$K^{[i]\{j\}}(x,s) = \frac{1}{W(s)}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{[i]}(x)A_{n-j,k}(s), \quad i,j=\overline{0,n-1}.$$

Выражение справа в последнем равенстве как раз и есть разложение определителя (14.1) по элементам $(n-j)$-ой строки. ■

Из равенства (14.1) следует, что функция Коши КДУ (13.1)

$$K(x,s) = \frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-2]}(s) & \varphi_2^{[n-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-2]}(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{14.3}$$

Это выражение является "квазидифференциальным" аналогом известной формулы для функции Коши обыкновенного дифференциального уравнения [**46**, с. 100].

Из следствия 13.8 и равенства (14.1) выплывает также, что функции

$$K^{\{j\}}(x,s)=\frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_n(s)\\ \varphi_1^{[1]}(s) & \varphi_2^{[1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[1]}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{[n-j-2]}(s) & \varphi_2^{[n-j-2]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j-2]}(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ \varphi_1^{[n-j]}(s) & \varphi_2^{[n-j]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-j]}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{[n-1]}(s) & \varphi_2^{[n-1]}(s) & \cdots & \varphi_n^{[n-1]}(s) \end{vmatrix},$$

где $j=\overline{0,n-1}$, образуют нормальную в точке $x=s$ фундаментальную систему решений КДУ (13.1).

Пример 14.2. Построим функцию Коши обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0. \tag{14.4}$$

▼ Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

а его дискриминант $D=p^2-4q$. Таким образом, рассмотрим три случая:

1) $p^2-4q<0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\mp i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, поэтому фундаментальную систему решений уравнения (14.4) образуют функции

$$\varphi_1(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}x,\quad \varphi_2(x)=e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}x.$$

На уравнение (14.4) можно посмотреть как на КДУ, для которого квазипроизводные являются обычными производными. Следовательно, (квази)вронскиан решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеет вид (здесь для удобства записи обозначено $\alpha \equiv -p/2$, $\beta \equiv \sqrt{4q-p^2}/2$)

$$W(x) = e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}.$$

Тогда по формуле (14.3) имеем

$$K(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\beta e^{2\alpha s}} \begin{vmatrix} e^{\alpha s}\cos\beta s & e^{\alpha s}\sin\beta s \\ e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \end{vmatrix} = \frac{e^{\alpha(x-s)}\sin\beta(x-s)}{\beta}$$

или окончательно

$$K(x,s) = \frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}. \qquad (14.5)$$

2) $p^2 - 4q = 0$. В этом случае достаточно выполнить граничный переход при $p^2 - 4q \to 0$ в формуле (14.5) и использовать первый замечательный предел. В результате функция Коши будет выглядеть так:

$$K(x,s) = (x-s)e^{-\frac{p}{2}(x-s)}.$$

3) $p^2 - 4q > 0$. Для получения вида функции Коши в этом случае модифицируем формулу (14.5), используя известное равенство $\sin ix = i\,\mathrm{sh}\,x$. Тогда

$$K(x,s) = \frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\sin i\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s)}{i\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}} = \frac{e^{-\frac{p}{2}(x-s)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}(x-s)}{\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}}.$$

▲

§ 15. Неоднородное квазидифференциальное уравнение с распределениями

Рассмотрим однородное КДУ

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \\ = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x), \quad (15.1)$$

коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого удовлетворяют указанным в § 10 предположениям (I)–(III), а правая часть удовлетворяет условию

(IV) $f_k \in BV^+_{loc}(I)$, $k = \overline{0, l}$.

Прежде всего зададимся целью выяснить, при каком максимальном значении l уравнение (15.1) является корректным. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 15.1. *Если* $l \leqslant m-1$, *то при условиях* (*I*)–(*IV*) *КДУ* (15.1) *корректное, т. е. приводится к корректной обобщенной дифференциальной системе.*

Доказательство. Считая, что $0 \leqslant l \leqslant m-1$, введем квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = \overline{0, q}$, в смысле КДУ (15.1) следующим образом:

$$y^{[i]} = y^{(i)},\ i = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x) y^{(n-i)};$$
$$y^{[n+j]} = -\big(y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x) y^{(n-i)},\ j = \overline{1, m-l-1};$$
$$y^{[n+j]} = -\big(y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x) y^{(n-i)} + f'_{m-j}(x),\ j = \overline{m-l, m}. \quad (15.2)$$

Заметим, что при этом $y^{[q]} \equiv L_{mn}[y] - \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x)$.

Как и в доказательстве теоремы 10.2, с помощью вектора $Y = \bigl(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[q-1]}\bigr)^{\top}$ приведем теперь уже неоднородное КДУ (15.1) к обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$Y'(x) = C'(x)Y(x) + F'(x), \tag{15.3}$$

где матрица-мера $C'(x)$ та же самая, что и прежде (см. с. 90),

$$F'(x) = \bigl(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{q-l-1}, f_l'(x), f_{l-1}'(x), \ldots, f_0'(x)\bigr)^{\top}. \tag{15.4}$$

Поскольку соответствующая однородная дифференциальная система (10.7) корректна (так как исполняется условие (10.10)), то по теореме 7.6 для корректности системы (15.3) достаточно выполнения условия

$$\Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall\, x \in I, \tag{15.5}$$

которое проверяется непосредственно с учетом структуры (10.9) матрицы скачков $\Delta C(x)$, вектора скачков

$$\Delta F(x) = \bigl(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{q-l-1}, \Delta f_l(x), \Delta f_{l-1}(x), \ldots, \Delta f_0(x)\bigr)^{\top} \tag{15.6}$$

и того факта, что $l \leqslant m-1$.

Если теперь попытаться увеличить верхнюю границу для l хотя бы на единицу и положить $l=m$, то модифицировав для этого случая квазипроизводные (15.2) по правилу

$$\begin{gathered} y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x) y^{(n-i)} + f_m'(x); \\ y^{[n+j]} = -\bigl(y^{[n+j-1]}\bigr)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x) y^{(n-i)} + f_{m-j}'(x), \ j = \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{15.7}$$

получим систему вида (15.3), где вектор

$$F'(x) = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, -a_{00}^{-1}(x) f_m'(x), f_{m-1}'(x), \ldots, f_0'(x)\big)^{\top}.$$

Тогда вектор скачков $\Delta F(x)$ имеет вид

$$\Delta F(x) = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, -a_{00}^{-1}(x) \Delta f_m(x), \Delta f_{m-1}(x), \ldots, \Delta f_0(x)\big)^{\top}$$

и, очевидно, без дополнительных ограничений на функцию $f_m(x)$ или коэффициенты $a_{1j}(x)$, $j = \overline{1, m}$, условие корректности (15.5) выполняться уже не будет. ■

Из этой теоремы следует, что порядок старшей производной в правой части КДУ (15.1) не может превышать числа m. Иначе (т. е., когда $l > m$) для справедливости условия (15.5) необходимо наложить дополнительные ограничения (типа непрерывности) или на функции $f_k(x)$, или на коэффициенты $a_{ij}(x)$. Поэтому квазидифференциальные уравнения вида (10.1) при $l > m$ являются *условно корректными*.

Для примера рассмотрим КДУ 3-го порядка

$$y''' + \big(a_{10}(x) y'\big)' - a_{11}(x) y' + \big(a_{20}(x) y\big)' - a_{21}(x) y = \\ = f_0'(x) - f_1''(x), \quad (15.8)$$

где $a_{i1}(x) = b_{i1}'(x)$, $b_{i1}, f_{i-1} \in BV_{loc}^{+}(I)$, $a_{i0} \in L(I)$, $i = 1, 2$.

Перепишем уравнение (15.8) в виде

$$\big(y'' + a_{10}(x) y' + a_{20}(x) y + f_1'(x)\big)' - \big(a_{11}(x) y' + a_{21}(x) y + f_0'(x)\big) = 0.$$

Отсюда видно, что квазипроизводные целесообразно ввести следующим образом (см. также (15.7)):

$$y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = y'' + a_{10}(x) y' + a_{20}(x) y + f_1'(x).$$

С их помощью уравнение (15.8) запишем в виде обобщенной дифференциальной системы первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{20}(x) & -a_{10}(x) & 1 \\ a_{21}(x) & a_{11}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1'(x) \\ f_0'(x) \end{pmatrix}.$$

Далее в силу наложенных на коэффициенты требований имеем

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_{21}(x) & \Delta b_{11}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta f_1(x) \\ \Delta f_0(x) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условие (10.10) имеет место, а условие (15.5) выполняется, если и только если $\Delta b_{11}(x) \cdot \Delta f_1(x) = 0\ \forall x \in I$, т. е., когда по крайней мере одна из двух функций $b_{11}(x)$ и $f_1(x)$ непрерывна.

Начальную задачу для уравнения (15.1) нужно ставить в терминах квазипроизводных (15.2):

$$y^{[\nu]}(x_0) = y_0^{\nu}, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I, \tag{15.9}$$

где y_0^{ν}, $\nu = \overline{0, q-1}$, — заданные числа.

Теорема 15.2. *При условиях (I)–(IV) для любого $0 \leqslant l \leqslant m-1$ существует единственное решение начальной задачи (15.1), (15.9), представимое в виде*

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} K^{\{\nu\}}(x, x_0) y_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{l} \int_{x_0}^{x} K^{\{k\}}(x, s) df_k(s) \tag{15.10}$$

где $K(x, s)$ — функция Коши однородного КДУ $L_{mn}[y] = 0$, и такое, что квазипроизводные $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, принадлежат пространству $AC(I)$, а квазипроизводные $y^{[n+j-1]}(x)$, $j = \overline{1, m}$, — пространству $BV_{loc}^{+}(I)$ и в точках x_s разрывов *функций* $b_{ij}(x)$ *и* $f_k(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\begin{gathered}\Delta y^{[n+j-1]}(x_s)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j}(x_s)y^{(i)}(x_s),\ j=\overline{1,m-l-1},\\ \Delta y^{[n+j-1]}(x_s)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j}(x_s)y^{(i)}(x_s)+\Delta f_{m-j}(x_s),\ j=\overline{m-l,m}.\end{gathered}\tag{15.11}$$

Доказательство. Начальная задача (15.1), (15.9) эквивалентна начальной задаче для неоднородной обобщенной дифференциальной системы первого порядка (15.3) с начальным условием $Y(x_0)=Y_0$, где $Y_0=\left(y_0,y_0^1,\ldots,y_0^{q-1}\right)^\top$ — заданный вектор начальных значений. При условиях (10.10) и (15.5) последняя задача в свою очередь эквивалентна (см. §7) неоднородному интегральному уравнению

$$Y(x)=Y_0+\int_{x_0}^{x}dC(t)\,Y(t)+F(x)-F(x_0),\tag{15.12}$$

решение которого по теореме 4.1 (с учетом при этом условия (15.5)) единственным образом представимо в виде

$$Y(x)=B(x,x_0)Y_0+\int_{x_0}^{x}B(x,s)dF(s),\tag{15.13}$$

где $B(x,s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая КДУ $L_{mn}[y]=0$.

Если учесть структуру (13.7) фундаментальной матрицы, вид (15.4) вектора $F(x)$, а также следствие 13.8, то равенство (15.13) для первой координаты $y(x)$ вектора $Y(x)$ совпадает с (15.10).

Попутно заметим, что равенство (15.13) для остальных координат вектора $Y(x)$ дает представления для квазипроизводных решения (15.10).

Поскольку, кроме того,

$$\Delta Y(x_s) = \Delta C(x_s)Y(x_s) + \Delta F(x_s), \tag{15.14}$$

то, используя (10.9) и (15.6), после покоординатной записи матричного равенства (15.14) приходим к условиям скачков (15.11) и условиям непрерывности квазипроизводных $y^{[i]}(x)$ для $i = \overline{0, n-1}$.

Наконец, в силу (15.12), (15.4) и (15.2) для l $(0 \leqslant l \leqslant m-1)$ справедливы равенства

$$y^{[i]}(x) = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} y^{(i+1)}(t)dt, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, и, таким образом, квазипроизводные $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, являются абсолютно непрерывными на интервале I функциями. ■

Важным с прикладной точки зрения является однородное КДУ

$$L_{mn}[y] = (-1)^{k+1}\delta^{(k+1)}(x - x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{15.15}$$

где $\delta^{(k+1)}(x - x_0)$ — обобщенная производная порядка $(k+1)$ от δ-функции Дирака с носителем в точке $x_0 \in I$.

Теорема 15.3. *При условиях (I)–(III) на коэффициенты решение КДУ (15.15), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид*

$$y(x) = K^{\{k\}}(x, x_0)H(x - x_0). \tag{15.16}$$

где $H(x - x_0)$ — смещенная функция Хевисайда.

Доказательство. В рассматриваемом случае вектор-функция $F(x)$, фигурирующая в обобщенной дифференциальной системе (15.3), имеет вид

$$F(x) = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{q-k-1}, H(x-x_0), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}\big)^{\top}.$$

Поскольку при $Y_0 = 0$ решение (15.13) этой системы

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} B(x,s)dF(s) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} K^{\{q-1\}}(x,s) & \cdots K^{\{k\}}(x,s) \cdots & K(x,s) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ K^{[q-1]\{q-1\}}(x,s) & \ldots & K^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ \vdots \\ dH(s-x_0) \\ \vdots \\ dc_q \end{pmatrix},$$

то первая координата $y(x)$ вектора $Y(x)$ имеет вид

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{\{k\}}(x,s)dH(s-x_0) \equiv K^{\{k\}}(x,x_0)H(x-x_0),$$

что и доказывает теорему. ∎

По аналогии доказываются два следующих утверждения, доказательства которых мы оставляем читателю.

Теорема 15.4. *При условиях (I)–(III) неоднородное КДУ*

$$L^*_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\big(\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}\big)^{(n-i)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+1} g_k^{(k+1)}(x), \quad (15.17)$$

где $g_k \in BV^+_{loc}(I)$, $k = \overline{0, l}$, *корректно, если* $l \leqslant n-1$.

Теорема 15.5. *При условиях (I)–(III) для любого* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *существует единственное решение КДУ (15.17), удовлетворяющее начальным условиям*

$$z^{\{\nu\}}(x_0) = z_0^\nu, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I,$$

где z_0^ν, $\nu = \overline{0, q-1}$, *— заданные числа.*

Это решение представимо в виде

$$z(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \overline{K}^{[\nu]}(x_0, x) z_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}^{[k]}(s, x) dg_k(s),$$

причем квазипроизводные $z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, m-1}$, *принадлежат пространству* $AC(I)$, *а квазипроизводные* $z^{\{m+i-1\}}(x)$, $i = \overline{1, n}$, *— пространству* $BV^+_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_{ij}(x)$ *и* $g_k(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta z^{\{m+i-1\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \bar{b}_{i,m-j}(x_s) z^{(j)}(x_s), \ i = \overline{1, n-l-1},$$

$$\Delta z^{\{m+i-1\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \bar{b}_{i,m-j}(x_s) z^{(j)}(x_s) + \Delta g_{n-i}(x_s),$$
$$i = \overline{n-l, n}.$$

Отметим лишь, что квазипроизводные $z^{\{\nu\}}(x), \nu = \overline{0, q}$, в случае КДУ (15.17) целесообразно вводить следующим образом:

$$z^{\{j\}} = z^{(j)}, \ j = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{0j}(x) z^{(m-j)};$$

$$z^{\{m+i\}} = -\left(z^{\{m+i-1\}}\right)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}, \ i = \overline{1, n-l-1};$$

$$z^{\{m+i\}} = -\left(z^{\{m+i-1\}}\right)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)} + g'_{n-i}(x), \ i = \overline{n-l, n}.$$

§ 16. Обобщенное обыкновенное дифференциальное уравнение

Для математиков интересным (как с теоретической, так и с практической точек зрения) является обыкновенное дифференциальное выражение

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.1}$$

с обобщенными коэффициентами

$$a_i(x) = b_i'(x),\ b_i \in BV_{loc}^{+}(I),\ i = \overline{1, n}.$$

На первый взгляд кажется, что дифференциальное выражение $L_n[y]$ является частным случаем квазидифференциального выражения $L_{mn}[y]$ вида (10.1), если в последнем положить $m = 0$, $a_{00}(x) \equiv 1$, $a_{i0}(x) \equiv -a_i(x)$ $\forall\, i = \overline{1, n}$. Однако, в таком частном случае мы бы получили дифференциальное выражение с суммируемыми[4)] по Лебегу коэффициентами, в то время, как в дифференциальном выражении (16.1) условия на коэффициенты существенно ослаблены. Тем не менее, результаты §§ 10–15 легко адаптировать для случая дифференциального выражения (16.1), принимая во внимание, что в силу (10.3) квазипроизводные $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, дифференциального выражения $L_n[y]$ совпадают с обычными производными $y^{(i)}(x)$.

Прежде всего выясним, какое дополнительное ограничение нужно наложить на функцию $b_1(x)$, чтобы дифференциальное уравнение

$$L_n[y] = 0 \tag{16.2}$$

было корректным.

---

4) Из структуры матрицы $C'(x)$ (см. с. 90) видно, что за счет гладкости функции $a_{00} \equiv 1$ условие (II) можно заменить условием $a_{i0} \in L(I), i=\overline{1,n}$.

Теорема 16.1. *Для корректности дифференциального уравнения* (16.2) *необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\Delta b_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{16.3}$$

Доказательство достаточности. Уравнение (16.2) обычным образом приводится к эквивалентной обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n(x) & a_{n-1}(x) & a_{n-2}(x) & \cdots & a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{16.4}$$

Матрица скачков для этой системы имеет вид

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_n(x) & \Delta b_{n-1}(x) & \Delta b_{n-2}(x) & \cdots & \Delta b_1(x) \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

и, очевидно, при выполнении условия (16.3) удовлетворяет равенству

$$\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0 \ \forall\, x \in I, \tag{16.6}$$

т. е. является корректной (вместе с уравнением (16.2)).

Доказательство необходимости. Наоборот, из условия (16.6) в соответствии со структурой (16.5) матрицы скачков $\Delta C(x)$ следуют равенства

$$\Delta b_1(x)\Delta b_i(x) = 0 \quad \forall\, i = \overline{1, n}, \quad \forall\, x \in I, \tag{16.7}$$

откуда с необходимостью $\Delta b_1(x) \equiv 0$ на I. ■

Из этой теоремы следует, что мера $a_1(x)$ не должна содержать дискретной компоненты, игаче говоря, $b_1(x)$ — непрерывная функция локально ограниченной на I вариации. Всюду далее условие (16.3) считаем выполненным.

Для дифференциального уравнения (16.2) имеет смысл задача Коши, поставленная в точке $x_0 \in I$ в терминах обычных производных:

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^i, \quad y_0^i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{0, n-1}, \tag{16.8}$$

Теорема 16.2. *При условии* (16.3) *существует единственное решение $y(x)$ задачи Коши* (16.2), (16.8) *такое, что производные $y^{(i)}(x)$, $i = \overline{0, n-2}$, принадлежат пространству $AC(I)$, а производная $y^{(n-1)}(x)$ — пространству $BV^+_{loc}(I)$ и в точках $x_s \in I$ разрывов функций $b_i(x)$, $i = \overline{2, n}$, имеет скачки, определяемые формулой*

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) y^{(i)}(x_s).$$

Доказательство этого утверждения практически идентично доказательству теоремы 10.2, поэтому мы его не приводим.

Для получения вида сопряженного с (16.2) уравнения, попрежнему (см. §§ 9, 11), сначала построим сопряженную с (16.4) обобщенную дифференциальную систему первого порядка:

$$\begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ z^{\{n-2\}} \\ z^{\{n-3\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_n(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_{n-1}(x) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \overline{a}_{n-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \overline{a}_2(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{a}_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{n-1\}} \\ z^{\{n-2\}} \\ z^{\{n-3\}} \\ \vdots \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}. \tag{16.9}$$

Покоординатная запись приводит к следуещей системе обобщенных равенств:

$$
\begin{aligned}
z' &= -z^{\{1\}} - \overline{a}_1(x)z \\
\big(z^{\{1\}}\big)' &= -z^{\{2\}} - \overline{a}_2(x)z \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad , \\
\big(z^{\{n-2\}}\big)' &= -z^{\{n-1\}} - \overline{a}_{n-1}(x)z \\
\big(z^{\{n-1\}}\big)' &= -\overline{a}_n(x)z
\end{aligned}
\tag{16.10}
$$

откуда получаем выражения для квазипроизводных $z^{\{i\}}(x)$, $i=\overline{1,n-1}$, в смысле сопряженного уравнения $\big(z^{\{0\}} \overset{\text{def}}{=} z\big)$:

$$
z^{\{i\}} = -\big(z^{\{i-1\}}\big)' - \overline{a}_i(x)z, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{16.11}
$$

Последнее равенство в (16.10)

$$
\big(z^{\{n-1\}}\big)' + \overline{a}_n(x)z = 0,
$$

записанное в развернутом виде

$$
L_n^*[z] \equiv (-1)^n z^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\big(\overline{a}_i(x)z\big)^{(n-i)} = 0, \tag{16.12}
$$

как раз и является сопряженным с (16.2) КДУ.

Попутно заметим, что в отличие от квазипроизводных $y^{[i]}=y^{(i)}$, $i=\overline{0,n-1}$, в смысле исходного уравнения (16.2), квазипроизводные $z^{\{i\}}$, $i=\overline{0,n-1}$, в смысле сопряженного уравнения (16.12), очевидно, не равны $z^{(i)}$. Кроме того, положив в КДУ (11.2) $m=0$, $a_{00}\equiv 1$, $a_{i0}\equiv -a_i$, $i=\overline{1,n}$, получим уравнение с суммируемыми по Лебегу коэффициентами, которое, как мы видим, лишь формально совпадает с КДУ (16.12).

Если к уравнению (16.12) присоединить начальные условия

$$
z^{\{i\}}(x_0) = z_0^i, \quad i = \overline{0,n-1}, \tag{16.13}
$$

где z_0^i — заданные числа, то имеет место аналог теоремы 11.3.

Теорема 16.3. *При условии* (16.3) *существует единственное решение* $z(x)$ *начальной задачи* (16.12), (16.13), *которое является непрерывной на интервале* I *функцией локально ограниченной вариации, а его квазипроизводные* $z^{\{i\}}(x)$, $i=\overline{1,n-1}$, *принадлежат пространству* $BV^+_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_i(x)$, $i=\overline{2,n}$, *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta z^{\{i\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_{i+1}(x_s)z(x_s), \quad i=\overline{1,n-1}.$$

Замечание 16.4. Для дифференциального уравнения (16.2) с суммируемыми по Лебегу коэффициентами выражения (16.11) для квазипроизводных $z^{\{i\}}(x)$, фактически, встречаются в [**52**, с. 277], где показано также связь сопряженного уравнения с сопряженной системой первого порядка.

Замечание 16.5. Если $b_1 \in AC(I)$ (т. е. функция $a_1(x)$ локально суммируемая по Лебегу), то решение сопряженного КДУ $z\in AC(I)$. В общем случае (когда $a_1(x)$ содержит сингулярную составляющую) решение $z(x)$ является лишь непрерывной функцией локально ограниченной на I вариации.

Пусть $\det W(x)$ — (квази)вронскиан дифференциального уравнения (16.2), а $\det V(x)$ — (квази)вронскиан сопряженного уравнения (16.12). Из структуры матрицы $C'(x)$ дифференциальной системы (16.4) видим, что

$$\operatorname{tr} C'(x) = a_1(x), \quad \operatorname{tr}\bigl(-C^{*\prime}(x)\bigr) = -\bar{a}_1(x),$$

$$\det\bigl[E_n + \Delta C(x_s)\bigr] = \det\bigl[E_n - \Delta C^*(x_s)\bigr] \equiv 1 \quad \forall\, x_s \in I,$$

поэтому, аналоги формул Лиувилля–Остроградского–Якоби (12.3) и (12.4) в этом случае имеют вид

$$\det W(x) = \det W(x_0) \cdot \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} db_1(x) \right\},$$

$$\det V(x) = \det V(x_0) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{x_0}^{x} d\bar{b}_1(x) \right\}.$$

Далее, пусть $K(x,s)$ — классическая функция Коши дифференциального уравнения (16.2). Согласно результатам §12, которые имеют место для корректного КДУ произвольного вида, справедливы следующие теоремы.

Теорема 16.6. *Фундаментальная матрица $B(x,s)$, соответствующая дифференциальному уравнению* (16.2), *имеет следующую структуру:*

$$B(x,s) = \begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{\{1\}}(x,s) & K(x,s) \\ K^{(1)\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{(1)\{1\}}(x,s) & K^{(1)}(x,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^{(n-1)\{n-1\}}(x,s) & \cdots & K^{(n-1)\{1\}}(x,s) & K^{(n-1)}(x,s) \end{pmatrix},$$

где квазипроизводные в смысле сопряженного КДУ (16.12) *определяются выражениями* (16.11).

Следствие 16.7. *Функция Коши $K(x,s)$ и ее последовательные квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно в смысле сопряженного уравнения* (16.12) *образуют нормальную в точке $x=s$ фундаментальную систему решений дифференциального уравнения* (16.2).

Следствие 16.8. *Фундаментальная матрица $\widetilde{B}(x,s)$, соответствующая сопряженному КДУ* (16.12), *имеет следующую структуру:*

$$\widetilde{B}(x,s)=\begin{pmatrix} \overline{K}^{\{n-1\}}(s,x)\,\overline{K}^{(1)\{n-1\}}(s,x)\cdots\overline{K}^{(n-1)\{n-1\}}(s,x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{K}^{\{1\}}(s,x) & \overline{K}^{(1)\{1\}}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{(n-1)\{1\}}(s,x)\\ \overline{K}(s,x) & \overline{K}^{(1)}(s,x) & \cdots & \overline{K}^{(n-1)}(s,x) \end{pmatrix}.$$

Следствие 16.9. *Функция $\overline{K}(s,x)$ и ее последовательные производные по переменной s образуют нормальную в точке $x=s$ ФСР сопряженного КДУ* (16.12).

Рассмотрим теперь неоднородное дифференциальное уравнение

$$L_n[y] = f^{(k)}(x) \tag{16.14}$$

и выясним, при каком значении k гарантируется корректность этого уравнения.

Положим $k=1$. Тогда дифференциальное уравнение (16.14) обычным образом приводится к неоднородной обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ y^{(n-2)}\\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ y^{(n-2)}\\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f' \end{pmatrix}. \tag{16.15}$$

Поскольку $\Delta F(x) = \left(0,0,\ldots,0,\Delta f(x)\right)^{\top}$, а матрица скачков $\Delta C(x)$ имеет вид (16.5), то при условии (16.3) имеет место равенство

$$\Delta C(x)\Delta F(x)=0\ \forall\, x\in I. \tag{16.16}$$

Это равенство вместе с (16.6) означают, что система (16.15), а следовательно, и уравнение (16.14), являюся корректными. Покажем, что без дополнительных ограничений значение $k=1$ нельзя увеличить.

Для этого рассмотрим **пример** дифференциального уравнения четвертого порядка

$$y^{(4)} - a_2(x)y'' - a_3(x)y' - a_4(x)y = f''(x),$$

где

$$a_i(x) = b_i'(x), \; b_i, f \in BV_{loc}^+(I), \; i = 2, 3, 4.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\big(y''' - f'(x)\big)' - a_2(x)y'' - a_3(x)y' - a_4(x)y = 0$$

и введем квазипроизводные следующим образом:

$$y^{[1]} = y', \qquad y^{[2]} = y'', \qquad y^{[3]} = y'''' - f'.$$

В результате получим дифференциальную систему первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4(x) & a_3(x) & a_2(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, вследствие наложенных на коэффициенты требований имеем

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_4(x) & \Delta b_3(x) & \Delta b_2(x) & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta f(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условие (16.6) имеет место, а условие (16.16) выполняется, если и только если

$$\Delta b_2(x)\Delta f(x) = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

т. е., если хотя бы одна из двух функций $b_2(x)$ и $f(x)$ непрерывна.

Из этого примера видно, что значение $k = 1$ в (16.14) нельзя увеличить без дополнительных ограничений на коэффициенты $a_i(x)$ или функцию $f(x)$. Поэтому далее рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$L_n[y] = f'(x) \tag{16.17}$$

с начальными условиями (16.8). Для нее имеет место аналог теоремы 15.2.

Теорема 16.10. *При условии* (16.3) *существует единственное решение* $y(x)$ *задачи Коши* (16.17), (16.8), *представимое в виде*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} K^{\{n-i-1\}}(x, x_0) y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} K(x, s)df(s)$$

и такое, что производные $y^{(i)}(x)$, $i = \overline{0, n-2}$, *принадлежат пространству* $AC(I)$, *а производная* $y^{(n-1)}(x)$ *— пространству* $BV^+_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_i(x)$, $i = \overline{2, n}$, *и* $f(x)$ *имеет скачки, определяемые формулой*

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) y^{(i)}(x_s) + \Delta f(x_s).$$

Интересным в плане ограничений на правые части является также неоднородное КДУ

$$L_n^*[z] = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+1} g_k^{(k+1)}, \tag{16.18}$$

где $g_k \in BV^+_{loc}(I)$, $k = \overline{1, l}$.

Как и раньше, выясним, при каком значении l уравнение (16.18) остается корректным. Для этого введем квазипроизводные $z^{\{i\}}(x)$, $i=\overline{0,n}$ $\big(z^{\{0\}}(x)\overset{\text{def}}{=}z(x)\big)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} z^{\{i\}} &= -\big(z^{\{i-1\}}\big)' - \overline{a}_i(x)z, \quad i=\overline{1,n-l-1}; \\ z^{\{i\}} &= -\big(z^{\{i-1\}}\big)' - \overline{a}_i(x)z + g'_{n-i}(x), \quad i=\overline{n-l,n}; \end{aligned} \tag{16.19}$$

Понятно, что при этом

$$z^{\{q\}} \equiv L_n^*[z] - \sum_{k=1}^{l}(-1)^k g_k^{(k)}.$$

Далее, уравнение (16.18) с помощью квазипроизводных (16.19) приведем к однородной обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x) + G'(x),$$

где вектор $Z(x)$ и матрица $-\big(C^*(x)\big)'$ те же, что и в уравнении (16.9), а

$$G'(x) = \big(g'_0(x), g'_1(x), \ldots, g'_l(x), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-l-1}\big)^\top.$$

Сразу же заметим, что в силу равенства (16.6)

$$\Big(\Delta\big[-C^*(x)\big]\Big)^2 = \Big(\big[\Delta C(x)\big]^2\Big)^* \equiv 0.$$

Поскольку

$$\Delta G(x) = \big(\Delta g_0(x), \Delta g_1(x), \ldots, \Delta g_l(x), 0, 0, \ldots, 0\big)^\top,$$

а матрица $\Delta C(x)$ имеет вид (16.5), то условие

$$\Delta\big[-C^*(x)\big]\cdot\Delta G(x) = 0$$

будет выполняться для любого $x\in I$, если $l\leqslant n-2$.

Таким образом, КДУ (16.18) корректно при $l \leqslant n-2$, т. е., если порядок старшей производной в правой части уравнения не превосходит $n-1$. Из приведенных соображений понятно также, что КДУ (16.18) при $l = n-1$ будет корректным только лишь при дополнительных условиях

$$\Delta\bar{b}_i(x)\Delta g_{n-1}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I, \ i = \overline{2,n}. \tag{16.20}$$

Поскольку выражения $L_n[y]$ и $L_n^*[z]$ являются взаимно сопряженными, то интересно сравнить полученный результат с соответствующим результатом (см. с. 129) для дифференциального уравнения (16.14), а также с аналогичными результатами для КДУ (15.1) и (15.17).

В завершение этого параграфа рассмотрим начальную задачу для уравнения (16.18) с начальными условиями (16.13).

Теорема 16.11. *При условии* (16.3) *начальная задача* (16.18), (16.13) *при* $l < n-1$ *имеет единственное решение* $z(x)$, *представимое в виде*

$$z(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}^{(i)}(x_0, x) z_0^{n-i} + \sum_{k=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{x} \overline{K}^{(k)}(s, x)\, dg_k(s)$$

и являющееся непрерывной на I *функцией локально ограниченной вариации, а его квазипроизводные* $z^{\{i-1\}}(x)$, $i = \overline{2,n}$, *принадлежат пространству* $BV^+_{loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $b_i(x)$, $i = \overline{2,n}$, *и* $g_k(x)$, $k = \overline{0,l}$, *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta z^{\{i-1\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_i(x_s) z(x_s), \quad i = \overline{2, n-l-1};$$
$$\Delta z^{\{i-1\}}(x_s) = -\Delta\bar{b}_i(x_s) z(x_s) + \Delta g_{n-i}(x_s), \quad i = \overline{n-l, n}.$$

Доказательство этой теоремы оставляем читателю в качестве упражнения.

3

Векторные и матричные обобщенные квазидифференциальные уравнения

§ 17. Начальные задачи для векторных квазидифференциальных уравнений с мерами

Рассмотрим однородное векторное КДУ

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.1)$$

где $\bar{Y}: I \to \mathbb{C}^p$ — неизвестная вектор-функция, $A_{ij}: I \to \mathbb{C}^{p\times p}$ есть заданные матричные функции, в отношении которых требуем выполнения следующих условий:

(V) $A_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на I;

(VI) $A_{i0}, A_{0j} \in L_{p\times p}^{2,loc}(I)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$;

(VII) $A_{ij}(x)=B'_{ij}(x)$, где $B_{ij}\in BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Вместе с векторным уравнением (17.1) рассмотрим также операторное (матричное) КДУ

$$L_{mn}[Y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)Y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.2)$$

где теперь $Y: I \to \mathbb{C}^{p\times p}$. Это КДУ назовем *ассоциированным* с уравнением (17.1).

Заметим, что операторное уравнение (17.2) является, фактически, системой p квазидифференциальных уравнений порядка q (напомним, что $q = n + m$). Между векторным уравнением (17.1) и ассоциированным с ним уравнением (17.2) существует тесная связь, а именно: если матрица-функция $Y(x)$ является решением операторного уравнения (17.2), а c — произвольный постоянный вектор, то положив $\bar{Y}(x) = Y(x)c$, получим решение векторного уравнения (17.1).

В прикладных задачах, как правило, встречаются векторные КДУ. В то же время линейную теорию матричных уравнений строить проще, так как она в определенной мере аналогична соответствующей теории для скалярных КДУ. Поэтому указанная выше связь между векторными и ассоциированными с ними матричными уравнениями позволяет распространить все результаты данной теории на случай векторных КДУ.

Определение 17.1. *Квазипроизводными* матричной функции $Y(x)$, которые соответствуют матричному квазидифференциальному выражению $L_{mn}[Y]$, назовем матрицы-функции $Y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0, q}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &Y^{[i]} = Y^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad Y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}(x) Y^{(n-i)}; \\ &Y^{[n+j]} = -\big(Y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} A_{ij}(x) Y^{(n-i)}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{17.3}$$

причем $Y^{[q]} \equiv L_{mn}[Y]$.

Как и в скалярном случае, с помощью квазипроизводных (17.3) матричное КДУ (17.2) запишем в виде обобщенной дифференциальной системы первого порядка

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x), \tag{17.4}$$

где $\mathcal{Y} = \big(Y, Y^{[1]}, \ldots, Y^{[q-1]}\big)^{\top} : I \to \mathbb{C}^{qp\times p}$, а $\mathcal{C}'(x)$ — матрица коэффициентов системы, имеющая блочную структуру (см. с. 135). Отметим, что условия (V)–(VII) на коэффициенты позволяют интерпретировать $\mathcal{C}'(x)$ как матричную меру Стилтьеса.

Кроме того, эти условия являются достаточными для корректности системы (17.4), поскольку из них следует, что матрица скачков $\Delta\mathcal{C}(x)$ имеет вид

$$\Delta\mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & \cdots & O_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & \cdots & O_p \\ \Delta B_{n1} & \Delta B_{n-1,1} & \cdots & \Delta B_{11} & O_p & \cdots & O_p \\ \Delta B_{n2} & \Delta B_{n-1,2} & \cdots & \Delta B_{12} & O_p & \cdots & O_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta B_{nm} & \Delta B_{n-1,m} & \cdots & \Delta B_{1m} & O_p & \cdots & O_p \end{pmatrix}, \qquad (17.5)$$

откуда в соответствии с правилом умножения блочных матриц [**21**, с. 54] имеем

$$\big[\Delta\mathcal{C}(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I. \qquad (17.6)$$

Определение 17.2. Под *решением матричного КДУ* (17.2) понимаем первый блок $Y(x)$ прямоугольной блочной матрицы $\mathcal{Y}(x)$, удовлетворяющий этому уравнению в обобщенном смысле.

Понятно, что начальную задачу для уравнения (17.2) в произвольной точке $x_0 \in I$ имеет смысл ставить лишь в терминах квазипроизводных:

$$Y^{[k]}(x_0) = Y_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \qquad (17.7)$$

где Y_0^k, $k = \overline{0, q-1}$, — заданные постоянные $(p \times p)$-матрицы.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{np} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{mp} \end{array} \\
C' = \begin{array}{c} \boldsymbol{np} \\ \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{mp} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
O_p & E_p & \cdots & O_p & O_p & O_p & \cdots & O_p \\
O_p & O_p & \cdots & O_p & O_p & O_p & \cdots & O_p \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O_p & O_p & \cdots & E_p & O_p & O_p & \cdots & O_p \\
-A_{00}^{-1}A_{n0} & -A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & -A_{00}^{-1}A_{10} & A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & O_p \\
\hline
A_{n1}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,1}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{11}-A_{01}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{01}A_{00}^{-1} & -E_p & \cdots & O_p \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{n,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{1,m-1}-A_{0,m-1}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{0,m-1}A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & -E_p \\
A_{nm}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{n0} & A_{n-1,m}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{n-1,0} & \cdots & A_{1m}-A_{0m}A_{00}^{-1}A_{10} & A_{0m}A_{00}^{-1} & O_p & \cdots & O_p
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Как и в скалярном случае, имеет место следующая теорема о существовании и единственности решения начальной задачи (17.2), (17.7).

Теорема 17.3. *При условиях* (*V*)–(*VII*) *существует единственное решение* $Y(x)$ *начальной задачи* (17.2), (17.7) *такое, что квазипроизводные* $Y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, *принадлежат пространству* $AC_{p\times p}(I)$, *а квазипроизводные* $Y^{[n+j]}(x)$, $j = \overline{0, m-1}$, — *пространству* $BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $B_{ij}(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta Y^{[n+j]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,j+1}(x_s) Y^{(i)}(x_s), \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{17.8}$$

Доказательство. Начальная задача (17.2), (17.7), очевидно, эквивалентна дифференциальной системе (17.4) с начальным условием

$$\mathcal{Y}(x_0) = \mathcal{Y}_0, \tag{17.9}$$

где $\mathcal{Y}_0 = \bigl(Y_0, Y_0^1, \ldots, Y_0^{q-1}\bigr)^{\top}$ — заданная $(qp \times p)$-матрица начальных значений, а далее в силу теоремы 7.3 и матричному интегральному уравнению

$$\mathcal{Y}(x) = \mathcal{Y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} d\mathcal{C}(t)\mathcal{Y}(t). \tag{17.10}$$

Вследствие условия (17.6) по теореме 7.4 уравнение (17.10) имеет единственное решение в допустимом классе

$$\mathfrak{D}^{p\times p}_{\mathcal{C}}(I) = \Bigl\{ \mathcal{Y} \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I) \Bigm| \Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{Y}(x) = 0 \ \forall x \in I \Bigr\},$$

что и доказывает существование и единственность решения исходной задачи (17.2), (17.7). Условие скачка решения интегрального уравнения (17.10) в точке $x_s \in I$ имеет вид

$$\Delta\mathcal{Y}(x_s) = \Delta\mathcal{C}(x_s)\mathcal{Y}(x_s), \tag{17.11}$$

откуда с учетом структуры (17.5) матрицы скачков $\Delta\mathcal{C}(x)$ следует, что $\Delta Y^{[i]}(x_s) = 0$ для любого $i = \overline{0, n-1}$. Это значит, что решение $Y(x)$ и его квазипроизводные $Y^{[i]}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно по крайней мере непрерывны.

Кроме того, в силу формул (17.10) и (17.3) справедливы равенства

$$Y^{[i]}(x) = Y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} Y^{(i+1)}(t)dt, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, поэтому квазипроизводные $Y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, являются абсолютно непрерывными на I, т. е. принадлежат пространству $AC_{p\times p}(I)$.

Наконец, записывая равенства (17.11) покомпонентно, получаем формулы (17.8). ■

Рассмотрим теперь сопряженное с (17.2) матричное КДУ

$$L^*_{mn}[Z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\Big(A^*_{ij}(x)Z^{(m-j)}\Big)^{(n-i)} = 0. \tag{17.12}$$

Определение 17.4. *Квазипроизводными* матричной функции $Z(x)$ в смысле сопряженного уравнения (17.12) назовем матрицы-функции $Z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, q}$, определяемые следующим образом:

$$\begin{gathered} Z^{\{j\}} = Z^{(j)},\ j = \overline{0, m-1};\ Z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} A^*_{0j}(x)z^{(m-j)}; \\ Z^{\{m+i\}} = -\left(Z^{\{m+i-1\}}\right)' - \sum_{j=0}^{m} A^*_{ij}(x)Z^{(m-j)},\ i = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{17.13}$$

причем $Z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[Z]$.

По аналогии со скалярным случаем квазипроизводные (17.13) определяются однозначно, если определены квазипроизводные (17.3), и наоборот. Отметим также, что для векторного КДУ (17.1) квазипроизводные получаем в результате формальной замены $Y^{[k]}$ на $\bar{Y}^{[k]}$ в выражениях (17.3) (см. §21). Это замечание касается также квазипроизводных (17.13).

Рассмотрим далее начальную задачу об отыскании решения уравнения (17.12), удовлетворяющего начальным условиям

$$Z^{\{k\}}(x_0) = Z_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{17.14}$$

где Z_0^k, $k = \overline{0, q-1}$, — заданные постоянные $p\times p$-матрицы.

Теорема 17.5. *При условиях* (*V*)–(*VII*) *существует единственное решение* $Z(x)$ *начальной задачи* (17.12), (17.14) *такое, что квазипроизводные* $Z^{\{j\}}(x)$, $j=\overline{0, m-1}$, *принадлежат пространству* $AC_{p\times p}(I)$, *а квазипроизводные* $Z^{\{m+i\}}(x)$, $i=\overline{0, n-1}$, *— пространству* $BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$ *и в точках* x_s *разрывов функций* $B_{ij}^*(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta Z^{\{m+i\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta B_{i+1,m-j}^*(x_s) Z^{(j)}(x_s), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Доказательство этой теоремы, которая, очевидно, является обобщением на матричный случай теоремы 11.3, проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы 17.3, поэтому мы оставляем его читателю.

В завершение, отметим, что после формальной замены $Y^{[k]}$ на $\bar{Y}^{[k]}$ и $Z^{[k]}$ на $\bar{Z}^{[k]}$ теоремы 17.3 и 17.5 о существовании и единственности решений начальных задач имеют место также для соответствующих векторных КДУ.

§ 18. Линейная теория матричных обобщенных квазидифференциальных уравнений

Пусть матрицы-функции $\Phi_i(x)$, $k=\overline{1,q}$, и матрицы-функции $\Psi_j(x)$, $l=\overline{1,q}$, являются решениями исходного

$$L_{mn}[Y]=0 \tag{18.1}$$

и сопряженного $L^*_{mn}[Z]=0$ матричных КДУ соответственно. Составим блочные матрицы

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x) \\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

и

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \cdots & \Psi_q(x) \\ \Psi_1^{\{1\}}(x) & \Psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{\{q-1\}}(x) & \Psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Определители $\mathcal{W}(x)=\det\Phi(x)$ и $\mathcal{V}(x)=\det\Psi(x)$ этих матриц назовем *квазивронскианами* решений $\Phi_k(x)$ и $\Psi_l(x)$ соответственно.

Теорема 18.1. *Для произвольной точки $x_0\in I$ квазивронскианы $\mathcal{W}(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ удовлетворяют равенствам*

$$\mathcal{W}(x)=\mathcal{W}(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A_{01}(t)A_{00}^{-1}(t)-A_{00}^{-1}(t)A_{10}(t)\right]dt\right\}, \tag{18.2}$$

$$\mathcal{V}(x)=\mathcal{V}(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A_{10}^{*}(t)A_{00}^{*-1}(t)-A_{00}^{*-1}(t)A_{10}^{*}(t)\right]dt\right\}. \tag{18.3}$$

Доказательство. Докажем лишь формулу (18.2), так как доказательство формулы (18.3) аналогично. Блочная матрица $\mathcal{W}(x)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\Phi'(x) = \mathcal{C}'(x)\Phi(x), \tag{18.4}$$

где матрица $\mathcal{C}'(x)$ определена в явном виде на с. 135. Это уравнение в свою очередь эквивалентно матричному интегральному уравнению

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} d\mathcal{C}(t)\Phi(t).$$

Пусть $B(x, s)$ — фундаментальная матрица системы (18.4). Тогда произвольное решение этой системы с начальным значением $\Phi(x_0)$ представимо в виде $\Phi(x) = B(x, x_0)\Phi(x_0)$, причем [**154**]

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(x) &= \mathcal{W}(x_0) \det B(x, x_0) = \\ &= \mathcal{W}(x_0) \cdot \exp\Big\{ \int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr}\big[d\mathcal{C}_c(t)\big] \Big\} \cdot \prod_s \det\big[E_{qp} + \Delta\mathcal{C}(x_s)\big],\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_c(x)$ — непрерывная составляющая блочной матрицы $\mathcal{C}(x)$. Из структуры (17.5) матрицы $\Delta\mathcal{C}(x)$ следует, что для произвольной точки разрыва $x_s \in I$ все матрицы $E_{qp} + \Delta\mathcal{C}(x_s)$ имеют треугольный вид с единицами на главной диагонали. Поэтому

$$\prod_s \det\big[E_{qp} + \Delta\mathcal{C}(x_s)\big] = 1.$$

Непрерывная же составляющая $\mathcal{C}_c(x)$ матрицы $\mathcal{C}(x)$ содержит на главной диагонали только элементы главных диагоналей матриц $A_{01}(x)A_{00}^{-1}(x)$ и $-A_{00}^{-1}A_{10}(x)$. Таким образом, мы получаем формулу (18.2). ■

Следствие 18.2. *Если матрицы-функции* $A_{01}(x), A_{10}(x)$ *и* $A_{00}^{-1}(x)$ *таковы, что выполняются условия*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\bigl[A_{01}(x)A_{00}^{-1}(x)\bigr] &= \operatorname{tr}\bigl[A_{00}^{*-1}(x)A_{01}^{*}(x)\bigr], \\ \operatorname{tr}\bigl[A_{00}^{-1}(x)A_{10}(x)\bigr] &= \operatorname{tr}\bigl[A_{10}^{*}(x)A_{00}^{*-1}(x)\bigr], \end{aligned} \tag{18.5}$$

то

$$\mathcal{W}(x)\mathcal{V}(x) = \mathrm{const} \quad \forall x \in I.$$

Сразу же заметим, что условия (18.5) выполняются по крайней мере, когда матрицы-функции $A_{01}(x), A_{00}(x), A_{10}(x)$ вещественны.

Определение 18.3. Решения $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, матричного КДУ (18.1) называем *линейно независимыми*, если матричное равенство

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x)C_k = O_p$$

при некоторых постоянных матрицах C_k имеет место только тогда, когда $C_k = O_p \;\; \forall\, k = \overline{1,q}$, и *линейно зависимыми*, если хотя бы одна из этих матриц отлична от нулевой.

Определение 18.4. Любую линейно независимую систему решений $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, матричного КДУ (18.1) называем *фундаментальной системой решений* (ФСР) этого уравнения.

Для того, чтобы построить произвольную ФСР достаточно для уравнения (12.1) решить q "задач Коши" с начальными условиями

$$\Phi_j^{[i-1]}(x_0) = C_{ij}, \quad i,j = \overline{1,q},$$

где постоянные $(p \times p)$-матрицы C_{ij} вибраны так, что определитель блочной матрицы $\left(C_{ij}\right)_{i,j=1}^{q}$ отличен от нуля.

Теорема 18.5. *Если решения $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, матричного КДУ* (18.1) *линейно зависимы, то квазивронскиан $\mathcal{W}(x)$ этих решений тождественно равен нулю на интервале I. Наоборот, если $\mathcal{W}(x) = 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in I$, то решения $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, уравнения* (18.1) *линейно зависимы.*

Доказательство. Действительно, если решения $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, линейно зависимы, то согласно определению 18.3

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k = 0 \quad \forall x \in I,$$

причем хотя бы одна из постоянных матриц C_k отлична от нулевой. Взяв квазипроизводные от обеих частей этого равенства, приходим к однородной системе линейных матричных уравнений относительно неизвестных C_k:

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k^{[i-1]}(x) C_k = 0, \quad i = \overline{1,q}. \tag{18.6}$$

Поскольку система (18.6) имеет нетривиальное решение (потому что не все C_k являются нулевыми матрицами), то ее определитель $\mathcal{W}(x) \equiv 0$ на I.

Наоборот, пусть существует точка $x_0 \in I$, в которой $\mathcal{W}(x_0) = 0$. Тогда при $x = x_0$ существует нетривиальное решение алгебраической системы (18.6), причем функция

$$Y(x) = \Phi_1(x) C_1 + \Phi_2(x) C_2 + \ldots + \Phi_q(x) C_q$$

есть решение матричного КДУ (18.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y^{[i-1]}(x_0) = 0, \quad i = \overline{1,q}.$$

Поскольку уравнение (18.1) однородное, то в силу теоремы существования и единственности такое решение тождественно равно нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k \equiv 0.$$

Если принять во внимание, что среди постоянных матриц C_k существует хотя бы одна ненулевая матрица (так как решение системы (18.6) при $x = x_0$ нетривиально), то согласно определению 18.3 решения $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1, q}$, линейно зависимы. ■

Следствие 18.6. *Если $\mathcal{W}(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in I$, то решения $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1, q}$, матричного КДУ* (18.1) *образуют ФСР.*

Следствие 18.7. *Если матрицы-функции $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1, q}$, образуют ФСР матричного КДУ* (18.1)*, то его общее решение представимо в виде*

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) C_k,$$

где C_k — произвольные постоянные матрицы.

Следствие 18.8. *Если $\bar{C}_k$ — произвольные постоянные векторы, то общее решение векторного КДУ* (17.1) *представимо в виде*

$$\bar{Y}(x) = \sum_{k=1}^{q} \Phi_k(x) \bar{C}_k.$$

Эта формула показывает, что для получения общего решения векторного КДУ (17.1) в первую очередь нужно построить любую ФСР ассоциированного с ним матричного уравнения (17.2).

Все сказанное выше естественным образом распространяется и на случай сопряженных матричного и векторного КДУ с той лишь разницей, что вместо квазипроизводных $\Phi^{[\cdot]}$ и квазивронскиана $\mathcal{W}(x)$ будут фигурировать $\Psi^{\{\cdot\}}$ и $\mathcal{V}(x)$.

§ 19. Структура фундаментальной матрицы

Пусть

$$L_{mn}\big[Y(x)\big] = 0 \tag{19.1}$$

и

$$L^*_{mn}\big[Z(x)\big] = 0 \tag{19.2}$$

— корректные матричные КДУ, которые с помощью некоторым образом введенных квазипроизводных $Y^{[k]}$, $k = \overline{0, q}$, и однозначно определенных при этом квазипроизводных $Z^{\{k\}}$ (или наоборот) приводятся к эквивалентным обобщенным линейным дифференциальным системам первого порядка

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) \tag{19.3}$$

и

$$\mathcal{Z}'(x) = -\big(\mathcal{C}'(x)\big)^*\mathcal{Z}(x)$$

соответственно, где

$$\mathcal{Y} = \big(Y, Y^{[1]}, \dots, Y^{[q-1]}\big)^\top, \quad \mathcal{Z} = \big(Z^{\{q-1\}}, \dots, Z^{\{1\}}, Z\big)^\top,$$

причем $Y, Z : I \to \mathbb{C}^{p\times p}$.

Определение 19.1. Матрицу-функцию $\mathcal{B}(x, s)$, которая по переменной x удовлетворяет системе (19.3) и при $x = s \in I$ начальному условию $\mathcal{B}(s, s) = E_{qp}$, называем *фундаментальной матрицей, соответствующей матричному КДУ* (19.1).

Определение 19.2. *Матричной функцией Коши* операторного КДУ (19.1) называем матрицу-функцию $\mathcal{K}(x, s)$, которая по переменной x является решением этого уравнения и в точке $x = s \in I$ удовлетворяет начальным условиям

$$\mathcal{K}^{[i]}(s, s) = O_p \ \ (i = \overline{0, n-2}), \quad \mathcal{K}^{[n-1]}(s, s) = E_p. \tag{19.4}$$

Лемма 19.3. *Если $\mathcal{K}(x,s)$ — матричная функция Коши операторного КДУ* (19.1)*, то*

$$\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s) = K^{*\{j\}*[i]}(x,s), \tag{19.5}$$

где выражение $\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s)$ означает, что над матрицей $\mathcal{K}(x,s)$ выполняются операции в следуещем порядке (слева направо): квазидифференцирование i раз по первому аргументу x в смысле уравнения (19.1)*, эрмитово сопряжение, квазидифференцирование j раз по второму аргументу s в смысле сопряженного уравнения* (19.2) *и снова сопряжение.*

Доказательство. Если $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,q}$, — произвольная ФСР матричного КДУ (19.1), то в соответствии со следствием 18.7 имеет место представление $\mathcal{K}(x,s) = \sum\limits_{k=1}^{q} \Phi_k(x)C_k(s)$, где $C_k(s)$ — постоянные по переменной x матрицы-функции, однозначно определяющиеся при фиксированном s начальными условиями (19.4). Но тогда с одной стороны

$$\mathcal{K}^{[i]*\{j\}*}(x,s) = \left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{q} \Phi_k^{[i]}(x)C_k(s)\right)^{*}\right]^{\{j\}}\right\}^{*} =$$

$$= \left\{\left[\sum_{k=1}^{q} C_k^{*}(s)\Phi_k^{[i]*}(x)\right]^{\{j\}}\right\}^{*} = \sum_{k=1}^{q}\Phi_k^{[i]}(x)C_k^{*\{j\}*}(s),$$

а с другой стороны

$$\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s) = \left\{\left[\left(\sum_{k=1}^{q} C_k^{*}(s)\Phi_k^{*}(x)\right)^{\{j\}}\right]^{*}\right\}^{[i]} =$$

$$= \left\{\left[\sum_{k=1}^{q} C_k^{*\{j\}}(s)\Phi_k^{*}(x)\right]^{*}\right\}^{[i]} = \sum_{k=1}^{q}\Phi_k^{[i]}(x)C_k^{*\{j\}*}(s),$$

что и доказывает равенство (19.5). ■

Теорема 19.4. *Фундаментальная матрица $\mathcal{B}(x,s)$, соответствующая КДУ (19.1), имеет следующую блочную структуру:*

$$\mathcal{B}(x,s)=\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}*}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s) & \mathcal{K}(x,s)\\ \mathcal{K}^{*\{q-1\}*[1]}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathcal{K}^{*\{q-1\}*[q-1]}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{*\{1\}*[q-1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix}. \quad (19.6)$$

Доказательство. Обозначим $(p\times p)$-блоки матрицы $\mathcal{B}(x,s)$ через $\beta_{ij}(x,s)$, $i,j=\overline{1,q}$. В силу определений 19.1 и 19.2 легко понять, что

$$\beta_{iq}=K^{[i-1]}(x,s),\quad i=\overline{1,q},$$

т. е.

$$\mathcal{B}(x,s)=\begin{pmatrix} \beta_{11}(x,s) & \beta_{12}(x,s) & \cdots & \beta_{1,q-1}(x,s) & \mathcal{K}(x,s)\\ \beta_{21}(x,s) & \beta_{22}(x,s) & \cdots & \beta_{2,q-1}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \beta_{q1}(x,s) & \beta_{q2}(x,s) & \cdots & \beta_{q,q-1}(x,s) & \mathcal{K}^{[q-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{B}^*(x,s)=\begin{pmatrix} \beta^*_{11}(x,s) & \beta^*_{21}(x,s) & \cdots & \beta^*_{q1}(x,s)\\ \beta^*_{12}(x,s) & \beta^*_{22}(x,s) & \cdots & \beta^*_{q2}(x,s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta^*_{1,q-1}(x,s) & \beta^*_{2,q-1}(x,s) & \cdots & \beta^*_{q,q-1}(x,s)\\ \mathcal{K}^*(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Но согласно замечанию 5.2 матрица $\mathcal{B}^*(x,s)$ по переменной s является решением сопряженной системы

$$\begin{pmatrix} Z^{\{q-1\}} \\ \vdots \\ Z^{\{1\}} \\ Z \end{pmatrix}' = -\big(\mathcal{C}'(s)\big)^{*}\cdot\begin{pmatrix} Z^{\{q-1\}} \\ \vdots \\ Z^{\{1\}} \\ Z \end{pmatrix},$$

а это значит, что все блочные строки этой матрицы (точнее говоря сами их блоки), начиная с предпоследней, являются последовательными квазипроизводными последней блочной строки по s в смысле сопряженного матричного КДУ (19.2). Поэтому

$$\mathcal{B}^{*}(x,s) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-1\}}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-1\}}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*\{q-2\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-2\}}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-2\}}(x,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}^{*\{1\}}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*\{1\}}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{1\}}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]*}(x,s) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Выполняя повторно операцию сопряжения и учитывая равенство (19.5), приходим к формуле (19.6). ■

Следствие 19.5. *Фундаментальная матрица $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, соответствующая сопряженному матричному КДУ* (19.2), *имеет вид*

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x,s) \equiv \big(\mathcal{B}^{-1}(x,s)\big)^{*} = \mathcal{B}^{*}(s,x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{q-1\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-1\}}(s,x) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-1\}}(s,x) \\ \mathcal{K}^{*\{q-2\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{q-2\}}(s,x) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{q-2\}}(s,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}^{*\{1\}}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*\{1\}}(s,x) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*\{1\}}(s,x) \\ \mathcal{K}^{*}(s,x) & \mathcal{K}^{[1]*}(s,x) & \cdots & \mathcal{K}^{[q-1]*}(s,x) \end{pmatrix},$$

где квазидифференцирование в смысле уравнения (19.1) *проводится по переменной s, а в смысле уравнения* (19.2) *— по переменной x.*

Следствие 19.6. *Матричные функции* $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,s)$ *для* $j=\overline{0,q-1}$ *образуют нормальную в точке* $x=s$ *ФСР матричного КДУ* (19.1).

Следствие 19.7. *Матрица-функция* $\widetilde{\mathcal{K}}(x,s) \equiv \mathcal{K}^{*}(s,x)$ *и ее квазипроизводные* $\widetilde{\mathcal{K}}^{*[i]*}(x,s) \equiv \mathcal{K}^{[i]*}(s,x)$, $i=\overline{1,q-1}$, *по* s *в смысле исходного уравнения* (19.1) *образуют нормальную в точке* $x=s$ *ФСР сопряженного матричного КДУ* (19.2).

Из схемы доказательства теоремы 19.4 видно, что конкретный вид (17.2) КДУ (19.1) никоим образом не влияет на структуру фундаментальной матрицы (19.6). Другими словами, утверждение этой теоремы остается в силе для любого корректного матричного КДУ порядка q. Важно только уметь строить матричную функцию Коши $\mathcal{K}(x,s)$ данного уравнения. Способ ее построения как раз и станет предметом рассмотрения следующего параграфа. Мы же в завершение этого параграфа остановимся на вопросе о гладкости элементов матриц $\mathcal{B}(x,s)$ и $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, а также в качестве простого примера построим фундаментальную матрицу для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Утверждение 19.8. *Фундаментальные матрицы* $\mathcal{B}(x,s)$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, *соответствующие матричным КДУ* (19.1) *и* (19.2), *по каждой из переменных* x,s *принадлежат пространству* $BV^{+,loc}_{qp\times qp}(I)$. *Более того, к пространству* $AC_{p\times p}(I)$ *принадлежат по переменной* x *елементы блочных строк матрицы* $\mathcal{B}(x,s)$ *до* n*-го порядка включительно и элементы блочных строк матрицы* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, *начиная с* $(n+1)$*-го, а также элементы блочных столбцов матрицы* $\mathcal{B}(x,s)$, *начиная с* $(n+1)$*-го, и элементы блочных столбцов матрицы* $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$ *до* n*-го включительно.*

Доказательство. Действительно, поскольку "порождающими" блоками фундаментальных матриц $\mathcal{B}(x,s)$ и $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$ являются соответственно матрицы $\mathcal{K}(x,s)$ и $\widetilde{\mathcal{K}}(x,s) \equiv \mathcal{K}^*(s,x)$, которые являются решениями матричных КДУ (19.1) и (19.2), то в силу теорем 17.3 и 17.5 можно утверждать, что по переменной x матричные функции $\mathcal{K}^{[i]}(x,s)$, $i=\overline{0,n-1}$, и $\widetilde{\mathcal{K}}^{\{j\}}(x,s)$, $j=\overline{0,m-1}$, локально абсолютно непрерывны на I. С другой стороны, по переменной s таким свойством обладают матрицы-функции $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,s)$, $j=\overline{0,m-1}$, и $\widetilde{\mathcal{K}}^{*[i]*}(x,s)$, $i=\overline{0,n-1}$. Остальные квазипроизводные по x и s принадлежат пространству $BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$. ■

Пример 19.9. При исследовании проблемы устойчивости (на изгиб) вала длиной l с постоянной жесткостью α под действием сжимающей силы P и крутящего момента M возникает система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [**47**, с. 27]

$$\begin{cases} -\alpha z'' = Pz - My', \\ -\alpha y'' = Py + Mz'. \end{cases} \tag{19.7}$$

▼ С помощью вектора $\bar{Y} = (z,y)^\top$ и матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{M}{\alpha} \\ \frac{M}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{P}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{P}{\alpha} \end{pmatrix}$$

систему (19.7) запишем в виде

$$\bar{Y}'' + A_1\bar{Y}' + A_2\bar{Y} = 0. \tag{19.8}$$

Это векторное обыкновенное дифференциальное уравнение и его первая квазипроизводная совпадает с обычной производной, т. е. $\bar{Y}^{[1]} = \bar{Y}'$. Однако, квазипроизводная в смысле сопряженного уравнения

$$\bar{Z}'' - (A_1^*\bar{Z})' + A_2^*\bar{Z} = 0 \tag{19.9}$$

имеет вид $\bar{Z}^{\{1\}} = A_1^*\bar{Z} - \bar{Z}'$ и, очевидно, не равна $\bar{Z}'$.

Матричная функция Коши ассоциированного с (19.8) операторного уравнения, как будет показано в следующем параграфе (на данный момент в этом легко убедиться непосредственной проверкой), определяется выражением

$$\mathcal{K}(x,s) = \frac{2\alpha}{\sqrt{M^2+4P\alpha}} \sin\left\{\frac{\sqrt{M^2+4P\alpha}}{2\alpha}(x-s)\right\} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{M}{2\alpha}(x-s) & \sin\frac{M}{2\alpha}(x-s) \\ -\sin\frac{M}{2\alpha}(x-s) & \cos\frac{M}{2\alpha}(x-s) \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица $\mathcal{B}(x,s)$, отвечающая уравнению (19.8), имеет следующую блочную структуру:

$$\mathcal{B}(x,s) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s) & \mathcal{K}(x,s) \\ \mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s) & \mathcal{K}^{[1]}(x,s) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{K}(x,s)A_1 - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s) & \mathcal{K}(x,s) \\ \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s)A_1 - \frac{\partial^2}{\partial s\partial x}\mathcal{K}(x,s) & \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Если принять во внимание, что

$$A_1^* = -A_1, \quad \mathcal{K}^*(s,x) = -\mathcal{K}(x,s),$$

то фундаментальная матрица $\widetilde{\mathcal{B}}(x,s)$, соответствующая сопряженному уравнению (19.9), будет выглядеть таким образом:

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x,s) = \mathcal{B}^*(s,x) =$$
$$= \begin{pmatrix} A_1\mathcal{K}(x,s) + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}^*(x,s) & A_1\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial s}\mathcal{K}(x,s) \\ -\mathcal{K}(x,s) & -\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(x,s) \end{pmatrix}.$$

▲

§ 20. Конструкция элементов фундаментальной матрицы

Для матричного КДУ (19.1) произвольного порядка q опишем аналогичный предложенному в §14 способ построения матрицы-функции Коши $\mathcal{K}(x,s)$ и ее смешанных квазипроизводных посредством ФСР $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, данного уравнения.

Теорема 20.1. *Пусть* $\varphi_{kl}^{ij}(x)$, $k,l=\overline{1,p}$, $i,j=\overline{1,q}$ *— это элемент, расположенный на пересечении* k*-й строки и* l*-го столбца в* $(p\times p)$*-матрице* $\Phi_j^{[i-1]}(x)$, *а*

$$\mathcal{W}(x)=\det\left(\Phi_j^{[i-1]}(x)\right)_{i,j=1}^{q}\equiv\det\left(\left(\varphi_{kl}^{ij}(x)\right)_{k,l=1}^{p}\right)_{i,j=1}^{q}$$

есть квазивронскиан ФСР. Тогда функция Коши $\mathcal{K}(x,s)$ *матричного КДУ* (19.1) *и ее смешанные квазипроизводные* $\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)$ *являются матрицами размера* $p\times p$, *каждый элемент которых представим в виде отношения двух функциональных определителей*

$$K_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)},\quad k,l=\overline{1,p},\quad i,j=\overline{0,q-1},$$

где каждый из определителей $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ *отличается от квазивронскиана* $\mathcal{W}(s)$ *одной лишь строкой*

$$\left(\varphi_{k1}^{i+1,1}(x)\ \ldots\ \varphi_{kp}^{i+1,1}(x)\ \ldots\ldots\ \varphi_{k1}^{i+1,q}(x)\ \ldots\ \varphi_{kp}^{i+1,q}(x)\right),$$

которая имеет номер $(q-j-1)p+l$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x)\\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x)\end{pmatrix}$$

— интегральная матрица дифференциальной системы (19.3), соответствующая матричному КДУ (19.1). Тогда фундаментальная матрица системы (19.3) вычисляется по формуле

$$\mathcal{B}(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s). \tag{20.1}$$

Учитывая блочную структуру (19.6) этой матрицы, соотношение (20.1) можно записать в виде q^2 матричных равенств

$$\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\sum_{\nu=1}^{q}\Phi_{\nu}^{[i]}(x)\mathcal{A}_{q-j,\nu}(s),\quad i,j=\overline{0,q-1}, \tag{20.2}$$

где

$$\mathcal{A}_{ij}(s)=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{21}^{ij}(s) & \ldots & \mathcal{A}_{p1}^{ij}(s)\\ \mathcal{A}_{12}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{22}^{ij}(s) & \ldots & \mathcal{A}_{p2}^{ij}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{A}_{1p}^{ij}(s) & \mathcal{A}_{2p}^{ij}(s) & \ldots & \mathcal{A}_{pp}^{ij}(s)\end{pmatrix},\quad i,j=\overline{1,q},$$

есть матрица, составленная из алгебраических дополнений $\mathcal{A}_{kl}^{ij}(s)$, $k,l=\overline{1,p}$, к элементам $\varphi_{kl}^{ij}(s)$ матрицы $\Phi_j^{[i-1]}(s)$ в определителе $\mathcal{W}(s)$.

Записывая матричные равенства (20.2) поэлементно в результате получим

$$\mathcal{K}_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{1}{\mathcal{W}(s)}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{p}\varphi_{k\mu}^{i+1,\nu}(x)\mathcal{A}_{l\mu}^{q-j,\nu}(s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)}, \tag{20.3}$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 20.2. Из формулы (20.3) видно, что для построения функционального определителя $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ нужно заменить l-ую строку $(q-j)$-ой полосы (которая имеет размер $p\times q$) квазивронскиана $\mathcal{W}(s)$ "нестандартной" зависимой от x k-ой строкой $(i+1)$-ой полосы квазивронскиана $\mathcal{W}(x)$.

Для примера построим различными способами (а затем убедимся в тождественности полученных результатов) фундаментальную матрицу, соответствующую матричному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y'' - Y = 0, \tag{20.4}$$

где Y — матрица размера 2×2. Это уравнение, очевидно, является частным случаем $(m=n=1,\ \ p=q=2)$ матричного КДУ (19.1).

Уравнение (20.4) обычным образом приводим к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{C}\mathcal{Y},$$

где $\mathcal{Y} = (Y, Y')^{\top}$, а блочная матрица $\mathcal{C}$ имеет вид

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ E_2 & O_2 \end{pmatrix}.$$

Интегральную матрицу $\Phi(x)$ этой системы можно вычислить с помощью матричной экспоненты

$$\Phi(x) = e^{\mathcal{C}x} = E_4 + \mathcal{C}x + \frac{\mathcal{C}^2}{2!}x^2 + \frac{\mathcal{C}^3}{3!}x^3 + \frac{\mathcal{C}^4}{4!}x^4 + \ldots .$$

Поскольку

$$\mathcal{C}^2 = E_4, \mathcal{C}^3 = \mathcal{C}^2\mathcal{C} = \mathcal{C}, \mathcal{C}^4 = (\mathcal{C}^2)^2 = E_4, \mathcal{C}^5 = \mathcal{C}^4\mathcal{C} = \mathcal{C}, \ldots,$$

то

$$\Phi(x) = E_4 + \mathcal{C}x + \frac{E_4}{2!}x^2 + \frac{\mathcal{C}}{3!}x^3 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{\mathcal{C}}{5!}x^5 + \ldots = \\ = E_4 \operatorname{ch} x + \mathcal{C} \operatorname{sh} x. \tag{20.5}$$

Тогда

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-\mathcal{C}s} = E_4 - \mathcal{C}s + \frac{E_4}{2!}s^2 - \frac{\mathcal{C}}{3!}s^3 + \frac{E_4}{4!}s^4 - \ldots = E_4 \operatorname{ch} s - \mathcal{C} \operatorname{sh} s.$$

Следовательно, фундаментальная матрица

$$\mathcal{B}(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s)=E_4\operatorname{ch}x\operatorname{ch}s-\mathcal{C}^2\operatorname{sh}x\operatorname{sh}s+$$
$$+\mathcal{C}(\operatorname{sh}x\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}s)=E_4\operatorname{ch}(x-s)+\mathcal{C}\operatorname{sh}(x-s)=$$
$$=\begin{pmatrix}E_2 & O_2\\ O_2 & E_2\end{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s)+\begin{pmatrix}O_2 & E_2\\ E_2 & O_2\end{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s)=$$
$$=\begin{pmatrix}E_2\operatorname{ch}(x-s) & E_2\operatorname{sh}(x-s)\\ E_2\operatorname{sh}(x-s) & E_2\operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix} \tag{20.6}$$

Из вида (20.5) интегральной матрицы $\Phi(x)$ следует, что матрицы-функции

$$\Phi_1(x)=E_2\operatorname{ch}x,\quad \Phi_2(x)=E_2\operatorname{sh}x$$

образуют ФСР уравнения (20.4). (Квази)вронскиан этой системы

$$\mathcal{W}(s)=\begin{vmatrix}\Phi_1(s) & \Phi_2(s)\\ \Phi_1'(s) & \Phi_2'(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=1.$$

Далее, по теореме 20.1 матрица-функция Коши имеет вид

$$\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s) & \mathcal{W}_{12}^{00}(x,s)\\ \mathcal{W}_{21}^{00}(x,s) & \mathcal{W}_{22}^{00}(x,s)\end{pmatrix}.$$

Для вычисления функционального определителя $\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)$ воспользуемся замечанием 20.2, в силу которого $\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)$ получается из определителя $\mathcal{W}(s)$, если в последнем первую строку 2-ой полосы $(l=1,\ q-j=2)$ заменить первой строкой первой полосы $(k=1,\ i+1=1)$ определителя $\mathcal{W}(x)$.

В результате имеем

$$\mathcal{W}_{11}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=\operatorname{ch}x\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sh}s & 0\\ \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}+$$

$$+\operatorname{sh}x\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & \operatorname{sh}s\\ 0 & \operatorname{sh}s & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=\operatorname{ch}x(-\operatorname{sh}s)+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}s=\operatorname{sh}(x-s).$$

По аналогии

$$\mathcal{W}_{12}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathcal{W}_{21}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ 0 & \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathcal{W}_{22}^{00}(x,s)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}x & 0 & \operatorname{sh}x\end{vmatrix}=\operatorname{sh}(x-s).$$

Итак,

$$\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Подобным образом вычисляем смешанную квазипроизводную

$$\mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s & 0\\ 0 & \operatorname{ch}s & 0 & \operatorname{sh}s\\ \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s & 0\\ 0 & \operatorname{sh}s & 0 & \operatorname{ch}s\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Чтобы не составлять и вычислять еще восемь определителей для отыскания матриц $\mathcal{K}^{[1]}(x,s)$ та $\mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s)$, воспользуемся тем, что роль квазипроизводных в смысле уравнения (20.4) играют обычные производные. Следовательно,

$$\mathcal{K}^{[1]}(x,s)=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}^{*\{1\}*[1]}(x,s)=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}^{*\{1\}*}(x,s)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s)\end{pmatrix}.$$

Учитывая блочную структуру (19.6) фундаментальной матрицы, окончательно получаем следующий результат:

$$\mathcal{B}(x,s)=\left(\begin{array}{cc|cc}\operatorname{ch}(x-s) & 0 & \operatorname{sh}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(x-s) & 0 & \operatorname{sh}(x-s)\\ \hline \operatorname{sh}(x-s) & 0 & \operatorname{ch}(x-s) & 0\\ 0 & \operatorname{sh}(x-s) & 0 & \operatorname{ch}(x-s)\end{array}\right),$$

который, очевидно, совпадает с (20.6).

§ 21. Неоднородное векторное квазидифференциальное уравнение с распределениями

Рассмотрим векторный аналог неоднородного КДУ

$$L_{mn}[\bar Y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)\bar Y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \\ = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\bar F_k^{(k+1)}(x), \quad (21.1)$$

где матричные коэффициенты $A_{ij}(x)$ удовлетворяют указанным в §17 условиям (V)–(VII), а правая часть удовлетворяет условию

(VIII) $\bar F_k \in BV^+_{loc,p}(I)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Определение 21.1. *Квазипроизводными* векторной функции $\bar Y(x)$ в смысле КДУ (21.1) назовем вектор-функции $\bar Y^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,q}$, определяемые формулами

$$\bar Y^{[i]} = \bar Y^{(i)},\ i = \overline{0,n-1}; \quad \bar Y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}(x)\bar Y^{(n-i)};$$

$$\bar Y^{[n+j]} = -\big(\bar Y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} A_{ij}(x)\bar Y^{(n-i)} + \bar F'_{m-j}(x), j=\overline{1,m}.$$

С помощью квазипроизводных векторное КДУ записывается в эквивалентном виде

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) + \mathcal{F}'(x), \quad (21.2)$$

где $\mathcal{Y} = \big(\bar Y, \bar Y^{[1]}, \dots, \bar Y^{[q-1]}\big)^{\top}$, блочная матрица-мера $\mathcal{C}'(x)$ та же, что и раньше (см. с. 135), а

$$\mathcal{F}' = \big(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n}, \bar F'_{m-1}(x), \bar F'_{m-2}(x), \dots, \bar F'_0(x)\big)^{\top}.$$

Понятно, что обобщенная дифференциальная система (21.2) является корректной, так как выполняются условия (17.6) и

$$\Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Теорема 21.2. *При условиях* (V)–($VIII$) *векторное КДУ* (21.1) *имеет единственное решение* $\bar{Y}(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\bar{Y}^{[\nu]}(x_0) = \bar{Y}_0^{\nu}, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I, \tag{21.3}$$

с заданными постоянными векторами $\bar{Y}_0^{\nu}$ $(\nu = \overline{0, q-1})$; *это решение представимо в виде*

$$\bar{Y}(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \mathcal{K}^{*\{\nu\}*}(x, x_0)\bar{Y}_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_0}^{x} \mathcal{K}^{*\{k\}*}(x, s)d\bar{F}_k(s), \tag{21.4}$$

где $\mathcal{K}(x, s)$ — *матричная функция Коши ассоциированного с* (21.1) *однородного КДУ* (17.2), *причем квазипроизводные* $\bar{Y}^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, *принадлежат пространству* $AC_p(I)$, *а квазипроизводные* $\bar{Y}^{[n+j-1]}(x)$, $j = \overline{1, m}$, — *пространству* $BV^{+}_{loc,p}(I)$ *и в точках разрывов* x_s *матриц-функций* $B_{ij}(x)$ *и вектор-функций* $\bar{F}_k(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta\bar{Y}^{[n+j-1]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,j}(x_s)\bar{Y}^{(i)}(x_s) + \Delta\bar{F}_{m-j}(x_s), \ j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Существование и единственность решения $\bar{Y}(x)$ начальной задачи (21.1), (21.3) следует из того факта, что данная задача эквивалентна соответствующей задаче для обобщенной дифференциальной системы (21.2), для которой имеет место теорема о существовании и единственности решения (см. § 7).

Первое слагаемое в формуле (21.4) является линейной комбинацией фундаментальной системы решений, которая согласно следствию 19.6 состоит из функций $\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x, s)$, $j = \overline{0, q-1}$. Наличие второго слагаемого следует из принципа суперпозиции (наложения) для линейных неоднородных уравнений [**86**, с. 227].

Поскольку частное решение дифференциальной системы (21.2) представимо в интегральной форме $\mathcal{Y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{B}(x,s)d\mathcal{F}(s)$, то, записывая ее поэлементно, используя при этом структуру (19.6) блочной матрицы $\mathcal{B}(x,s)$ и указанный выше вид блочных векторов $\mathcal{Y}(x)$ и $\mathcal{F}(x)$, получим второе слагаемое в выражении (21.4).

Наконец, доказательство теоремы в части, касающейся степени гладкости квазипроизводных и формулы для вычисления скачков, проводится по аналогии с тем, как это делалось при доказательстве теоремы 17.3. ■

Теорема 21.3. *При условиях* (*V*)–(*VIII*) *существует единственное решение сопряженного векторного КДУ*

$$L^*_{mn}[\bar{Z}] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\Big(A^*_{ij}(x)\,\bar{Z}^{(m-j)}\Big)^{(n-i)} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\bar{G}_k^{(k+1)}(x), \tag{21.5}$$

где $\bar{G}_k \in BV^+_{loc,p}(I)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\bar{Z}^{\{\nu\}}(x_0) = \bar{Z}_0^{\nu}, \quad \nu = \overline{0, q-1}, \quad x_0 \in I;$$

это решение представимо в виде

$$\bar{Z}(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1}\mathcal{K}^{[\nu]*}(x_0,x)\bar{Z}_0^{q-\nu-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_0}^{x}\mathcal{K}^{[k]*}(s,x)d\bar{G}_k(s),$$

причем квазипроизводные $\bar{Z}^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, m-1}$, *принадлежат пространству* $AC_p(I)$, *а квазипроизводные* $\bar{Z}^{\{m+i-1\}}(x)$, $i = \overline{1,n}$, — *пространству* $BV^+_{loc,p}(I)$ *и в точках разрывов* x_s *матриц-функций* $B_{ij}(x)$ *и вектор-функций* $\bar{G}_k(x)$ *имеют скачки, определяемые формулами*

$$\Delta\bar{Z}^{\{m+i-1\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1}\Delta B^*_{i,m-j}(x_s)\bar{Z}^{(j)}(x_s) + \Delta\bar{G}_{n-i}(x_s), i = \overline{1,n}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии, поэтому мы оставляем его читателю; отметим лишь, что квазипроизводные $\bar{Z}^{\{\nu\}}(x)$, $\nu = \overline{0,q}$, для сопряженного уравнения (21.5) целесообразно ввести следующим образом:

$$\bar{Z}^{\{j\}} = \bar{Z}^{(j)},\ j = \overline{0, m-1}; \quad \bar{Z}^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} A^*_{0j}(x)\bar{Z}^{(m-j)};$$

$$\bar{Z}^{\{m+i\}} = -\big(\bar{Z}^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} A^*_{ij}(x)\bar{Z}^{(m-j)} + \bar{G}'_{n-i}(x),\ i = \overline{1,n}.$$

Понятно, что подобные к 21.2 и 21.3 теоремы имеют место и для соответствующих ассоциированных КДУ

$$L_{mn}[Y] = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} F_k^{(k+1)}(x)$$

и

$$L^*_{mn}[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} G_k^{(k+1)}(x),$$

где теперь $F_k, G_k \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$, и в этом смысле они обобщают результаты §17.

Практический интерес, в частности, составляет однородное матричное КДУ

$$L_{mn}[Y] = (-1)^{k+1} E_p \delta^{(k+1)}(x - x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{21.6}$$

где $\delta^{(k+1)}(x - x_0)$ — обобщенная производная порядка $(k+1)$ от δ-функции Дирака с носителем в точке $x_0 \in I$. В силу теоремы 21.2 решение уравнения (21.6), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$Y(x) = \mathcal{K}^{*\{k\}*}(x, x_0) H(x - x_0).$$

Стоит отметить, что приведенные выше результаты для квазидифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций, особенно в части выполнения критерия корректности, не отличаются слишком существенно от их скалярных аналогов. Однако, векторное обычное дифференциальное уравнение

$$L_n[\bar{Y}] \equiv \bar{Y}^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\bar{Y}^{(n-i)} = 0 \tag{21.7}$$

с обобщающими матричными коэффициентами $A_i(x) = B_i'(x)$, где $B_i(x) \in BV^{+,loc}_{p\times p}(I)$, $i = \overline{1,n}$, все же имеет некоторую специфику. Раньше было показано, что его скалярный аналог — дифференциальное уравнение (16.1) — является корректным, если и только если выполняется условие (16.3), т. е. $b_1(x)$ есть непрерывная функция локально ограниченной на I вариации. Вследствие формальной замены $b_i(x)$ на $B_i(x)$ из структуры матрицы (16.5) и условия (16.6) легко получаем необходимое и достаточное условие корректности векторного дифференциального уравнения (21.7):

$$\Delta B_1(x)\Delta B_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \quad (i = \overline{1,n}). \tag{21.8}$$

Однако, благодаря тому, что эти равенства матричные, а не числовые, условие (21.8), в отличие от его скалярного аналога (16.7), не требует от матрицы-функции $B_1(x)$ ее непрерывности. Таким образом, имея дело с векторным дифференциальным уравнением, получаем возможность допустить в коэффициенте $A_1(x)$ наличие дискретной компоненты (меры).

Интересным по этой причине становится и сопряженное дифференциальное уравнение

$$L_n^*[\bar{Z}] \equiv (-1)^n \bar{Z}^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\big(A_i^*(x)\bar{Z}\big)^{(n-i)} = 0, \tag{21.9}$$

решение которого является, вообще говоря, разрывной вектор-функцией, причем скачки в точках x_s разрывов матрицы-функции $B_1(x)$ равны

$$\Delta\bar{Z}(x_s) = -\Delta B_1^*(x_s)\bar{Z}(x_s). \tag{21.10}$$

На первый взгляд это кажется маловероятным, потому что в уравнении (11.12) присутствуют произведения матриц-мер $A_i^*(x)$ на разрывную вектор-функцию $\bar{Z}(x)$, которые могут иметь особенности в одних и тех же точках $x_s \in I$. На самом деле, с точки зрения теории обобщенных функций здесь все законно. Действительно, произведения $A_i^*(x)\bar{Z}(x)$ существуют, если и только если

$$\Delta B_i^*(x_s)\Delta\bar{Z}(x_s) = 0 \quad \forall x_s \in I.$$

Но это равенство непосредственно следует из (21.10) и (21.8):

$$\Delta B_i^*(x_s)\Delta\bar{Z}(x_s) = -\Delta B_i^*(x_s)\Delta B_1^*(x_s)\bar{Z}(x_s) = \\ = -\big(\Delta B_1(x_s)\Delta B_i(x_s)\big)^*\bar{Z}(x_s) = 0. \tag{21.11}$$

Что касается порядка обобщенных вектор-функций в правых частях неоднородных КДУ

$$L_n[\bar{Y}] = \bar{F}^{(k)}(x) \tag{21.12}$$

и

$$L_n^*[\bar{Z}] = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\bar{G}_k^{(k+1)}, \tag{21.13}$$

то здесь кроме аналогии со скалярным случаем также есть свои особенности. Так, для корректности векторного КДУ (21.12) при $k=1$, в отличие от его скалярного аналога (16.14), необходимо дополнительно (кроме условия (21.8)) требовать выполнения равенства $\Delta B_1(x)\Delta\bar{F}(x) = 0 \ \forall x \in I$. Это обусловлено тем, что условие (21.8) является более слабым в сравнении с условием (16.7), поэтому не обеспечивает корректности сразу неоднородного уравнения.

Аналогичная ситуация имеет место для $k>1$. Для иллюстрации рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\bar{Y}'' - B_2'(x)\bar{Y} = \bar{F}''(x), \tag{21.14}$$

где $\bar{Y} \in \mathbb{C}^p$, $B_2 \in BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$, $\bar{F} \in BV_{loc,p}^{+}(I)$.

Обозначив

$$\bar{Y}^{[1]} = \bar{Y}' - \bar{F}'(x),$$

перепишем уравнение (21.14) в виде дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Y}^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O_p & E_p \\ B_2'(x) & O_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Y}^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{F}(x) \\ \bar{0} \end{pmatrix}',$$

которая, очевидно, является корректной, если и только если

$$\Delta B_2(x)\Delta\bar{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Что касается корректности уравнения (21.13) при $l=n-1$, то она имеет место только при следующих дополнительных условиях (сравните с условиями (16.20)):

$$\Delta B_i^*(x)\Delta\bar{G}_{n-1}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \quad (i=\overline{1,n}).$$

4

Структура решений обобщенных квазидифференциальных уравнений

§ 22. Системы дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ-особенностями

Пусть на интервале I задано некое конечное упорядоченное множество точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Рассмотрим неоднородную обобщенную дифференциальную систему вида

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x-x_k)\right)Y = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} S_k\delta(x-x_k), \quad (22.1)$$

где $Y(x)$ — неизвестная p-мерная вектор-функция, $\Theta_k(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $I_k = [x_k, x_{k+1})$, а коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

(I) $A_k(x) \in C_{p\times q}(I_k), \quad k = \overline{0, N-1};$

(II) $C_k \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad k = \overline{1, N};$

(III) $R_k(x) \in C_p(I_k), \quad k = \overline{0, N-1};$

(IV) $S_k \in \mathbb{C}^p, \quad k = \overline{1, N}.$

Через ω^* обозначим множество носителей обобщенных коэффициентов системы (22.1). Для этой системы поставим начальное условие

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{22.2}$$

Отметим, что система (22.1) является системой вида (7.8). Таким образом, для нее справедлива теорема 8.1, которую теперь можно переформулировать следующим образом.

Теорема 22.1. *Для существования единственного решения $Y(x)$ из допустимого класса $\mathfrak{D}^p_C(I)$ начальной задачи* (22.1), (22.2) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$C_k^2 \equiv 0, \quad C_k S_k \equiv 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{22.3}$$

Это решение представимо в форме Коши (8.2)*, а его скачки в точках $x_k \in \omega^*$ определяются формулой*

$$\Delta Y(x_k) = C_k Y(x_k - 0) + S_k = C_k Y(x_k) + S_k. \tag{22.4}$$

В дальнейшем будем рассматривать только корректные системы вида (22.1), т. е. будем считать условия (22.3) выполненными.

§ 23. Построение фундаментальной матрицы

Определение 23.1. Однородную систему

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) \Theta_k(x) \right) Y(x),$$

которая соответствует системе (22.1), назовем *определяющей*.

Фундаментальную матрицу определяющей системы на полуинтервале I_k, т. е. матрицу Коши системы $Y' = A_k(x)Y$, будем обозначать $\widetilde{B}_k(x,s)$ и считать *известной* для любого $k = \overline{0, N-1}$. Следует заметить, что в дальнейшем мы часто будем пользоваться непрерывным продолжением вправо матрицы $\widetilde{B}_k(x,s)$ для $x = x_{k+1}$, т. е. следующим равенством

$$\widetilde{B}_k(x_{k+1}, s) = \widetilde{B}_k(x_{k+1} - 0, s). \tag{23.1}$$

Для удобства введем обозначение $\widetilde{C}_k = E + C_k$.

Теорема 23.2. *Фундаментальная матрица $B(x,s)$ однородной обобщенной дифференциальной системы*

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k \delta_k(x) \right) Y(x) \tag{23.2}$$

для $x \in [x_0, x_N)$, $s = x_0$ имеет вид

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k(x, x_0)\Theta_k(x), \tag{23.3}$$

где матрицы $B_k(x, x_0)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$B_0(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0), \ \ x \in I_0,$$
$$B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\widetilde{C}_k B_{k-1}(x_k - 0, x_0), \ \ x \in I_k, \ \ k = \overline{1, N-1}; \tag{23.4}$$

а при $x = x_N$:

$$B(x_N, x_0) \equiv B_N(x_N, x_0) = \widetilde{C}_N B_{N-1}(x_N - 0, x_0). \tag{23.5}$$

Доказательство. Используем метод математической индукции по N. Проверим правильность утверждения для $N = 1$, т. е. для случая, когда множество носителей обобщенных коэффициентов дифференциальной системы (23.2) содержит только одну точку: $\omega^* = \{x_1\}$.

На промежутке $I_0 = [x_0, x_1)$ уравнение (23.2) не имеет обобщенных коэффициентов, а поэтому $B(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0)$, т. е. справедливы формулы (23.3), (23.4) при $N = 1$. Для значения фундаментальной матрицы $B(x, x_0)$ в точке $x = x_1$ в силу свойства (d) матрицы Коши (см. теорему 3.2) и равенства $\Delta C(x_1) = C_1$, имеем формулу вида (23.5)

$$B(x_1, x_0) = (E + C_1)B(x_1 - 0, x_0) = \widetilde{C}_1 B_0(x_1 - 0, x_0).$$

Далее допустим, что формулы (23.3)–(23.4) справедливы для некоторого $N = q > 1$, т. е. пусть для произвольного $x \in [x_0, x_q)$ имеет место представление

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{q-1} B_k(x, x_0)\Theta_k(x),$$

где

$$B_0(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0), \ \ x \in I_0,$$
$$B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\widetilde{C}_k B_{k-1}(x_k - 0, x_0), \ \ x \in I_k, \ \ k = \overline{1, q-1}, \tag{23.6}$$

а при $x = x_q$

$$B(x_q, x_0) = B_q(x_q, x_0) = \widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0). \tag{23.7}$$

Докажем их справедливость для $N = q + 1$. Для продолжения фундаментальной матрицы на полуинтервал $I_q = [x_q, x_{q+1})$ воспользуемся свойством (a) из теоремы 3.2:

$$B_q(x, x_0) = B_q(x, x_q)B_q(x_q, x_0).$$

При $x \in I_q$ имеем $B_q(x, x_q) = \widetilde{B}_q(x, x_q)$, а согласно допущению (23.7)

$$B_q(x_q, x_0) = \widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0),$$

поэтому для $x \in I_q$ получим

$$B_q(x, x_0) = \widetilde{B}_q(x, x_q)\widetilde{C}_q B_{q-1}(x_q - 0, x_0). \tag{23.8}$$

В таком случае фундаментальную матрицу $B(x, x_0)$ на полуинтервале $[x_0, x_{q+1})$ можно представить в виде

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{q} B_k(x, x_0)\Theta_k(x), \tag{23.9}$$

где матрицы $B_k(x, x_0)$ для $k = \overline{1, q-1}$ вычисляются по рекуррентным формулам (23.6), а $B_q(x, x_0)$ — по формуле (23.8). Таким образом, формулы (23.3)–(23.4) верны и для $N = q + 1$. Понятно, что формула (23.9) не охватывает значения фундаментальной матрицы в точке $x = x_{q+1}$. Формулу

$$B(x_{q+1}, x_0) = \widetilde{C}_{q+1} B_q(x_{q+1} - 0, x_0)$$

для вычисления данного значения получаем, использовав непосредственно свойство (d) матрицы Коши.

Следовательно, в силу принципа математической индукции утверждение теоремы имеет место для произвольного натурального N, что и требовалось доказать. ■

Замечание 23.3. Заметим, что в случае, если $x_N \notin \omega^*$, имеем $C_N = 0$ и по формуле (23.5) получим

$$B(x_N, x_0) = (E + C_N)B_{N-1}(x_N - 0, x_0) = B_{N-1}(x_N - 0, x_0).$$

Это значит, что фундаментальная матрица $B(x, x_0)$ непрерывна слева в точке $x = x_N \notin \omega^*$. Следовательно, ее значение в этой точке можно включить в выражение (23.3), интерпретируя $\Theta_{N-1}(x)$ как характеристическую функцию отрезка $[x_{N-1}, x_N]$.

Следствие 23.4. *Для фундаментальной матрицы* $B_k(x, s)$ *дифференциальной системы* (23.2) *при* $s = x_0$, $x \in I_k = [x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, N-1}$, *имеет место мультипликативное представление*

$$B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} \widetilde{C}_{k-j} \widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j}, x_{k-j-1}). \qquad (23.10)$$

Следствие 23.5. *Для любого* $x \in I_k$, $k = \overline{1, N-1}$, *при* $x_q < x_k$ *имеет место представление*

$$B_k(x, x_q) = \widetilde{B}_k(x, x_k) \prod_{j=0}^{k-q-1} \widetilde{C}_{k-j} \widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j}, x_{k-j-1}), \qquad (23.11)$$

откуда

$$B_k(x_k, x_q) = \prod_{j=0}^{k-q-1} \widetilde{C}_{k-j} \widetilde{B}_{k-j-1}(x_{k-j}, x_{k-j-1})$$

и, следовательно,

$$B_k(x, x_q) = \widetilde{B}_k(x, x_k) B_k(x_k, x_q). \qquad (23.12)$$

Пример 23.6. На отрезке $[0, 1]$ построим фундаментальную матрицу $B(x, 0)$ однородной обобщенной дифференциальной системы

$$Y' = \begin{pmatrix} \Theta_0(x) - \Theta_1(x) & \delta\left(x - \frac{1}{4}\right) \\ -\delta(x-1) & 2\Theta_0(x) + \Theta_1(x) \end{pmatrix} Y, \qquad (23.13)$$

где $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — характеристические функции полуинтервалов $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ и $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ соответственно.

▼ Данная система является системой вида (23.2) с матричными коэффициентами

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и множеством $\omega^* = \left\{x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1\right\}$ носителей обобщенных коэффициентов. Убедимся в корректности данной системы, т. е. в выполнении условий $C_k^2 = 0, k = 1, 2$:

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0, \quad C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Определяющая система для системы (23.13) имеет вид

$$Y' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Theta_0(x) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta_1(x)\right] Y. \tag{23.14}$$

Найдем фундаментальные матрицы этой системы $\widetilde{B}_0(x,s)$ и $\widetilde{B}_1(x,s)$ на полуинтервалах $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ и $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ соответственно.

На полуинтервале $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ имеем систему

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y. \tag{23.15}$$

Это обычная дифференциальная система с постоянными коэффициентами, фундаментальную матрицу которой ищем методом Эйлера в матричной форме (см., например, [**41**, с. 156]). Составим характеристическое уравнение для системы (23.15)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

и найдем его решения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Для корня $\lambda_1 = 1$ ищем решение системы в виде

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^x.$$

После подстановки $Y_1(x)$ в исходную систему (23.15) и умножения обоих ее частей на e^{-x} получим

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_2 \end{pmatrix},$$

откуда C_1 — произвольная постоянная, а $C_2 = 0$. Положим, например, $C_1 = 1$, тогда

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По аналогии ищем решение, соответствующее корню $\lambda_2 = 2$:

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Запишем интегральную матрицу системы (23.15):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Для построения фундаментальной матрицы этой системы воспользуемся формулой [**52**, с. 271]

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s). \tag{23.16}$$

Поскольку $\det \Phi(x) = e^{3x}$, то

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-3s} \begin{pmatrix} e^{2s} & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix},$$

и согласно формуле (23.16) фундаментальная матрица определяющей системы (23.14) на полуинтервале $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ имеет вид

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-s} & 0 \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix}. \tag{23.17}$$

На полуинтервале $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ определяющая система (23.14) имеет вид

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y. \tag{23.18}$$

Матрицу Коши $\widetilde{B}_1(x, s)$ данной системы ищем по аналогии с тем, как это делалось на предыдущем полуинтервале. Легко видеть, что

$$\widetilde{B}_1(x, s) = \begin{pmatrix} e^{-(x-s)} & 0 \\ 0 & e^{x-s} \end{pmatrix}. \tag{23.19}$$

Для построения фундаментальной матрицы $B(x,s)$ исходной системы (23.13) воспользуемся теоремой 23.2. В силу рекуррентных формул (23.4) имеем

$$B_0(x,0)=\widetilde{B}_0(x,0)=\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x\in\left[0,\tfrac14\right),$$

$$\begin{aligned} B_1(x,0)=\widetilde{B}_1\left(x,\tfrac14\right)\widetilde{C}_1B_0\left(\tfrac14,0\right) &= \\ = \begin{pmatrix} e^{-\left(x-\frac14\right)} & 0 \\ 0 & e^{x-\frac14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac14} & 0 \\ 0 & e^{\frac12} \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} e^{-x+\frac12} & e^{-x+\frac34} \\ 0 & e^{x+\frac14} \end{pmatrix}&, \quad x\in\left[\tfrac14,1\right). \end{aligned}$$

Следовательно, фундаментальная матрица $B(x,0)$ исходной системы (23.13) на полуинтервале $[0,1)$ имеет вид

$$B(x,0)=\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\Theta_0(x)+\begin{pmatrix} e^{-x+\frac12} & e^{-x+\frac34} \\ 0 & e^{x+\frac14} \end{pmatrix}\Theta_1(x). \tag{23.20}$$

Заметим, что в связи с наличием в исходной системе (23.13) коэффициента $-\delta(x-1)$ с носителем $x=1\in\omega^*$, фундаментальную матрицу этой системы в точке $x=1$ нужно вычислять по формуле (23.5), т. е.

$$\begin{aligned} B(1,0)=\widetilde{C}_2B_1(1-0,0) &= \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1+\frac12} & e^{-1+\frac34} \\ 0 & e^{1+\frac14} \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} e^{-\frac12} & e^{-\frac14} \\ -e^{-\frac12} & e^{\frac54}-e^{-\frac14} \end{pmatrix}&. \end{aligned} \tag{23.21}$$

▲

§ 24. Структура решения неоднородной дифференциальной системы

Теорема 24.1. *Решение задачи* (22.1), (22.2) *на полуинтервале* $[x_0, x_N)$ *представимо в виде*

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k} B_k(x, x_j) Z_j + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s) R_k(s) ds \right\} \Theta_k(x), \quad (24.1)$$

где

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_j = \widetilde{C}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{B}_{j-1}(x_j, s) R_{j-1}(s) ds + S_j, \;\; j \geq 1. \quad (24.2)$$

В точке $x = x_N$ *значение решения вычисляется по формуле*

$$Y(x_N) = \sum_{j=0}^{N} B_N(x_N, x_j) Z_j. \quad (24.3)$$

Доказательство. Решение начальной задачи (22.1), (22.2) на полуинтервале $[x_0, x_N)$ ищем в виде

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(x) \Theta_k(x), \quad (24.4)$$

где $Y_k(x)$ есть решение этой задачи на частном полуинтервале $I_k = [x_k, x_{k+1})$. На интервале (x_k, x_{k+1}) система (22.1) имеет вид

$$Y_k' = A_k(x) Y_k + R_k(x). \quad (24.5)$$

Соответствующая ей фундаментальная матрица есть $\widetilde{B}_k(x, s)$. Решение системы (24.5) запишем в форме Коши (8.4):

$$Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k) P_k + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s) R_k(s) ds, \quad (24.6)$$

где P_k — некоторый неизвестный p-мерный вектор.

По аналогии, на интервале (x_{k-1}, x_k) решение системы (24.5) представимо в виде

$$Y_{k-1}(x) = \widetilde{B}_{k-1}(x, x_{k-1})P_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x} \widetilde{B}_{k-1}(x, s)R_{k-1}(s)ds \tag{24.7}$$

с неизвестным вектором P_{k-1}. В силу теоремы 22.1 решение задачи Коши (22.1), (22.2) принадлежит пространству $BV^{+}_{loc,p}(I)$ и в точке $x = x_k$ удовлетворяет условию скачка (22.4), откуда

$$Y(x_k) = (E + C_k)Y(x_k - 0) + S_k = \widetilde{C}_k Y(x_k - 0) + S_k. \tag{24.8}$$

Учитывая равенство (24.7), а также тот факт, что $Y(x_k)$ и $Y(x_k - 0)$ вычисляются по формулам (24.6) и (24.7) соответственно, после упрощения имеем

$$P_k = \widetilde{C}_k \widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})P_{k-1} + \widetilde{C}_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{B}_{k-1}(x_k, s)R_{k-1}(s)ds + S_k$$

или с учетом обозначения (24.2)

$$P_k = \widetilde{C}_k \widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})P_{k-1} + Z_k, \quad 1 \le k \le N - 1.$$

Выбирая в этом рекуррентном соотношении начальное значение $P_0 = Y_0$ и учитывая мультипликативное представление (23.10), методом математической индукции получим искомый вектор

$$P_k = B_k(x_k, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x_k, x_j)Z_j, \quad 1 \le k \le N - 1.$$

Более того, если положить $Z_0 = Y_0$, то будем иметь

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} B_k(x_k, x_j)Z_j, \quad 0 \le k \le N - 1.$$

Подставив полученное выражение в формулу (24.6), с учетом равенства (23.12) имеем решение начальной задачи (22.1), (22.2) на полуинтервале I_k:

$$Y_k(x) = \sum_{j=0}^{k} B_k(x, x_j) Z_j + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s) R_k(s) ds. \qquad (24.9)$$

После его подстановки в (24.4) получим нужное нам представление (24.1), (24.2).

Поскольку в точке $x = x_N$ решение системы имеет разрыв, то формула (24.1) не охватывает значение решения в этой точке. Формула (24.4) для вычисленния данного значения следует из равенства (24.8) при $k = N$, если принять во внимание уже полученное нами представление (24.1), (24.2) и равенства

$$B_N(x_N, x_j) = \widetilde{C}_N B_{N-1}(x_N - 0, x_j), \quad j = \overline{0, N-1}, \qquad (24.10)$$

которые являются следствиями свойства (d) матрицы Коши (см. теорему 3.2). Действительно, тогда

$$\begin{aligned} Y(x_N) &= \widetilde{C}_N Y(x_N - 0) + S_N = \\ &= \widetilde{C}_N \left[\sum_{j=0}^{N-1} B_{N-1}(x_N - 0, x_j) Z_j + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} \widetilde{B}_{N-1}(x_N, s) R_{N-1}(s) ds \right] + \\ &\qquad + S_N = \sum_{j=0}^{N-1} B_N(x_N, x_j) Z_j + Z_N = \sum_{j=0}^{N} B_N(x_N, x_j) Z_j. \end{aligned}$$

■

Замечание 24.2. Если $x = x_N \notin \omega^*$, то значение решения в этой точке вычисляется по формуле

$$Y(x_N) = \widetilde{C}_N Y(x_N - 0) + S_N = Y(x_N - 0).$$

Таким образом, решение $Y(x)$ непрерывно слева в точке x_N, следовательно, его значение в этой точке можно включить в выражение (24.1), если $\Theta_{N-1}(x)$ интерпретировать как характеристическую функцию отрезка $[x_{N-1}, x_N]$.

Следствие 24.3. *Решение задачи* (22.1), (22.2) *на полуинтервале* $[x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, N-1}$, *можно представить также в виде*

$$Y_k(x) = B_k(x, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right] + \mathcal{I}_k(x), \tag{24.11}$$

где $\mathcal{I}_k(x) = \displaystyle\int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds.$

Следствие 24.4. *Решение однородной* ($R_k \equiv 0$ *и* $S_k \equiv 0$ *для всех* k) *задачи* (22.1), (22.2) *имеет вид*

$$Y^0(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} B_k(x, x_0)Y_0\Theta_k(x), & x \in [x_0, x_N); \\ B_N(x_N, x_0)Y_0, & x = x_N. \end{cases}$$

Следствие 24.5. *Решение задачи Коши* (22.1), (22.2) *при нулевом начальном условии* ($Y_0 = 0$) *имеет вид*

$$Y^*(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)Z_j + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds \right\}\Theta_k(x), \\ \qquad\qquad x \in [x_0, x_N), \\ \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j, \qquad x = x_N. \end{cases}$$

или, учитывая (24.11), *вид*

$$Y^*(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right] + \mathcal{I}_k(x) \right\}\Theta_k(x); \\ \qquad\qquad x \in [x_0, x_N); \\ \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)\left[\widetilde{C}_j \mathcal{I}_{j-1}(x_j) + S_j\right], \qquad x = x_N. \end{cases}$$

Следствие 24.6. *Решение исходной задачи* (22.1), (22.2) *допускает представление* $Y(x) = Y^0(x) + Y^*(x)$.

Пример 24.7. На отрезке $[0,1]$ найдем решение начальной задачи для неоднородной системы:

$$Y' - \begin{pmatrix} \delta\left(x-\frac{1}{2}\right) & \delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ -\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) & -\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -2\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ 2\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{24.12}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{24.13}$$

▼ Для системы (24.12) имеем

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{24.14}$$

Поскольку

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то система (24.12) корректна. Для ее коэффициентов множество $\omega^* = \left\{x_1 = \frac{1}{2}\right\}$.

Определяющая система для (24.12) на всем рассматриваемом отрезке имеет вид $Y' = 0$. Следовательно, фундаментальная матрица вычисляется по формуле

$$\widetilde{B}(x,s) = \widetilde{B}_0(x,s) = \widetilde{B}_1(x,s) = E_2. \tag{24.15}$$

Решение исходной задачи (24.12), (24.13) на отрезке $[0,1]$ (правый конец включаем в силу замечания 24.2) ищем в виде (24.4), т. е.

$$Y(x) = Y_0(x)\Theta_0(x) + Y_1(x)\Theta_1(x),$$

где $\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ — характеристические функции промежутков $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ соответственно.

На полуинтервале $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ решение задачи (24.12), (24.13) вычисляем по формуле $Y_0(x) = \widetilde{B}(x,0)Y(0)$, следовательно,

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Тогда по формуле (24.9) с учетом мультипликативного представления (23.11) запишем решение

$$Y_1(x) = \left[B_1\left(x,0\right) Z_0 + B_1(x, \tfrac{1}{2})Z_1\right] =$$
$$= \widetilde{B}\left(x, \tfrac{1}{2}\right)\left[\widetilde{C}_1\widetilde{B}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) Y(0) + S_1\right],$$

откуда в силу (24.14), (24.15) и равенства $\widetilde{C}_1 = E + C_1$, имеем

$$Y_1(x) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В завершение убедимся, что выполняется условие (22.4) скачка решения задачи (24.12), (24.13) в точке $x = \frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\Delta Y\left(\tfrac{1}{2}\right) = Y_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - Y_0\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C_1Y\left(\tfrac{1}{2}-0\right) + S_1 = C_1Y_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + S_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

то в точке $x = \frac{1}{2}$ выполняется условие

$$\Delta Y\left(\tfrac{1}{2}\right) = C_1Y\left(\tfrac{1}{2}-0\right) + S_1.$$

▲

§ 25. Рекуррентное представление решения

Отметим, что на практике для отыскания решения задачи (22.1), (22.2) вместо громоздких формул (24.1)–(24.3) целесообразнее пользоваться полученными ниже, в теореме 25.1, рекуррентными формулами, которые для построения решения на каждом следующем полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$ требуют дополнительного вычисления предельного значения решения на предыдущем полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ в единственной точке x_k.

Теорема 25.1. *Решение начальной задачи (22.1), (22.2) можно найти по следующим рекуррентным формулам:*

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x, x_0)Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds, \;\; x \in [x_0, x_1), \tag{25.1}$$

$$Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\big[\widetilde{C}_k Y_{k-1}(x_k - 0) + S_k\big] + \\ + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds, \;\; x \in [x_k, x_{k+1}), \;\; k = \overline{1, N-1}, \tag{25.2}$$

$$Y_N(x_N) = \widetilde{C}_N Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N. \tag{25.3}$$

Доказательство. Для $k = 0$, т. е. на полуинтервале $[x_0, x_1)$, система (22.1) не содержит никаких обобщенных компонент и, таким образом, представляет собой систему с непрерывными коэффициентами. Следовательно, ее решение на данном полуинтервале представимо в форме Коши (25.1).

Для $k = 1$, т. е. на $[x_1, x_2)$, решение системы (22.1) можно записать в форме Коши с некоторым начальным вектором Y_1:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1(x, x_1)Y_1 + \int\limits_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s)R_1(s)ds. \tag{25.4}$$

Используем условие сопряжения (22.4) для решения обобщенной системы (22.1) в точке $x = x_1$, т. е. условие

$$Y(x_1) = \widetilde{C}_1 Y(x_1-0) + S_1.$$

Учитывая, что $Y(x_1) = Y_1(x_1) = Y_1$, а $Y(x_1-0) = Y_0(x_1-0)$, имеем, фактически, выражение для начального вектора Y_1 решения системы (22.1) на полуинтервале $[x_0, x_1)$. После его подстановки в (25.4) получаем формулу (25.2) для $k=1$:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_k(x, x_1)\big[\widetilde{C}_1 Y_0(x_1-0) + S_1\big] + \int\limits_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s) R_1(s) ds.$$

Для произвольного $k>1$ доказательство проводится с использованием метода математической индукции. ■

Замечание 25.2. Теперь формулу (24.1) легко получить как следствие из теоремы 25.1.

Замечание 25.3. В случае, если $x_N \notin \omega^*$, имеем $C_N = 0$, $S_N = 0$ и, следовательно, по формуле (25.3)

$$Y_N(x_N) = (E + C_N) Y_{N-1}(x_N-0) + S_N = Y_{N-1}(x_N-0),$$

т. е. решение $Y(x)$ непрерывно слева в точке x_N (сравн. с замечанием 24.2).

Пример 25.4. На отрезке $[0, 1]$ найдем решение неоднородной начальной задачи

$$Y' - \begin{pmatrix} \Theta_0(x) - \Theta_1(x) & \delta\left(x-\frac{1}{4}\right) \\ -\delta(x-1) & 2\Theta_0(x) + \Theta_1(x) \end{pmatrix} Y =$$

$$= \begin{pmatrix} \Theta_1(x) + \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{4}\right) \\ x\Theta_0(x) + e^x\Theta_1(x) + \frac{1}{4}\delta(x-1) \end{pmatrix}, \tag{25.5}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \tag{25.6}$$

где $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — характеристические функции полуинтервалов $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ и $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$ соответственно.

▼ Система (25.5) является системой вида (22.1) с коэффициентами

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ R_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \ R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

и множеством носителей $\omega^* = \left\{x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1\right\}$. Нетрудно убедиться в корректности данной системы.

Заметим, что соответствующая ей определяющая система совпадает с определяющей системой (23.18), рассмотренной в примере 23.6. Поэтому фундаментальная матрица системы (25.5) на полуинтервале $[0, 1)$ имеет вид (23.20), а в точке $x = 1$ приобретает значение (23.21).

Первый способ. Найдем решение задачи (25.5), (25.6) на полуинтервале $[0, 1)$ по формуле (24.1):

$$Y(x) = \left[B_0(x, 0)Z_0 + \int_0^x \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds\right]\Theta_0(x) +$$

$$+ \left[B_1(x, 0)Z_0 + B_1\left(x, \tfrac{1}{4}\right)Z_1 + \int_{1/4}^x \widetilde{B}_1(x, s)R_1(s)ds\right]\Theta_1(x).$$

В силу формул (23.17), (23.19), (23.20) имеем

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \begin{pmatrix} e^{x-s} & 0 \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_1(x, s) = \begin{pmatrix} e^{-(x-s)} & 0 \\ 0 & e^{x-s} \end{pmatrix},$$

$$B_0(x, 0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad B_1(x, 0) = \begin{pmatrix} e^{-x+\frac{1}{2}} & e^{-x+\frac{3}{4}} \\ 0 & e^{x+\frac{1}{4}} \end{pmatrix},$$

$$B_1(x,\tfrac14)=\widetilde{B}_1(x,\tfrac14)=\begin{pmatrix} e^{-x+\frac14} & 0\\ 0 & e^{x-\frac14}\end{pmatrix},$$

а в соответствии с (24.2):

$$Z_0=Y_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad Z_1=\widetilde{C}_1\int\limits_{x_0}^{x_1}\widetilde{B}_0(x_1-0,s)R_0(s)ds+S_1=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\int\limits_0^{\frac14}\begin{pmatrix}e^{\frac14-s}&0\\0&e^{2\left(\frac14-s\right)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}\frac12\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\int\limits_0^{\frac14}se^{\frac12-2s}ds+\frac12\\ \int\limits_0^{\frac14}se^{\frac12-2s}ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{(1+2s)}{4}e^{\frac12-2s}\Big|_0^{\frac14}+\frac12\\ -\frac{(1+2s)}{4}e^{\frac12-2s}\Big|_0^{\frac14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14e^{\frac12}+\frac18\\ \frac14e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}.$$

Запишем формулу для вычисления решения:

$$Y(x)=\left[\begin{pmatrix}e^x&0\\0&e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int\limits_0^x\begin{pmatrix}e^{x-s}&0\\0&e^{2(x-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}ds\right]\Theta_0(x)+$$

$$+\left[\begin{pmatrix}e^{-x+\frac12}&e^{-x+\frac34}\\0&e^{x+\frac14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{-x+\frac14}&0\\0&e^{x-\frac14}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14e^{\frac12}+\frac18\\ \frac14e^{\frac12}-\frac38\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/4}^x\begin{pmatrix}e^{-(x-s)}&0\\0&e^{x-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\e^s\end{pmatrix}ds\right]\Theta_1(x)=\begin{pmatrix}0\\ e^{2x}+\int\limits_0^x se^{2(x-s)}ds\end{pmatrix}\Theta_0(x)+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac54e^{-x+\frac34}+\frac18e^{-x+\frac14}+\int\limits_{1/4}^x e^{-x+s}ds\\ \frac54e^{x+\frac14}-\frac38e^{x-\frac14}+\int\limits_{1/4}^x e^x ds\end{pmatrix}\Theta_1(x).$$

Отсюда после вычисления интегралов и приведения подобных слагаемых получим

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\left[\frac{5}{4}e^{-x+\frac{3}{4}}-\frac{7}{8}e^{-x+\frac{1}{4}}+1\right]\Theta_1(x)\\ \left[\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right]\Theta_0(x)+\left[\frac{5}{4}e^{x+\frac{1}{4}}-\frac{3}{8}e^{x-\frac{1}{4}}+\left(x-\frac{1}{4}\right)e^{x}\right]\Theta_1(x)\end{pmatrix}.$$

Значение решения задачи (25.5), (25.6) в точке $x=1$ вычислим по формуле (24.3):

$$Y(1)=B_2(1,0)Z_0+B_2\left(1,\tfrac{1}{4}\right)Z_1+B_2(1,1)Z_2.$$

Учтем, что $B_2(1,1)=E_2$, и найдем по формуле (24.10)

$$B_2(1,0)=\widetilde{C}_2B_1(1-0,0)=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}}&e^{-\frac{1}{4}}\\0&e^{\frac{5}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}}&e^{-\frac{1}{4}}\\-e^{-\frac{1}{2}}&e^{\frac{5}{4}}-e^{-\frac{1}{4}}\end{pmatrix},$$

$$B_2\left(1,\tfrac{1}{4}\right)=\widetilde{C}_2B_1\left(1-0,\tfrac{1}{4}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{3}{4}}&0\\0&e^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-\frac{3}{4}}&0\\-e^{-\frac{3}{4}}&e^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}$$

и по формуле (24.2)

$$Z_2=\widetilde{C}_2\int\limits_{x_1}^{x_2}\widetilde{B}_1(x_2,s)R_1(s)ds+S_2=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\int\limits_{1/4}^{1}\begin{pmatrix}e^{-1+s}&0\\0&e^{1-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\e^{s}\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\int\limits_{1/4}^{1}e^{s-1}ds\\ \int\limits_{1/4}^{1}\left(e-e^{s-1}\right)ds+\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-e^{-\frac{3}{4}}\\ \frac{3}{4}(e-1)+e^{-\frac{3}{4}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, значение решения задачи (25.5), (25.6) в точке $x=1$ равно

$$Y(1)=\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{4}} \\ -e^{-\frac{1}{2}} & e^{\frac{5}{4}}-e^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ -e^{-\frac{3}{4}} & e^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{8} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 1-e^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{4}(e-1)+e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}}-\frac{7}{8}e^{-\frac{3}{4}}+1 \\ \frac{5}{4}e^{\frac{5}{4}}+\frac{3}{4}e-\frac{3}{8}e^{\frac{3}{4}}-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{7}{8}e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Найдем решение задачи (25.5), (25.6) на отрезке $[0,1]$, используя рекуррентные формулы (25.1)–(25.3).

На полуинтервале $[0,\frac{1}{4})$ решение имеет вид

$$Y_0(x)=\widetilde{B}_0(x,0)Y_0+\int\limits_0^x \widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds=$$

$$=\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\int\limits_0^x \begin{pmatrix} e^{x-s} & 0 \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

на полуинтервале $[\frac{1}{4},1)$ — вид

$$Y_1(x)=\widetilde{B}_1(x,\tfrac{1}{4})\left[\widetilde{C}_1Y_0(\tfrac{1}{4}-0)+S_1\right]+\int\limits_{1/4}^x \widetilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-x+\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & e^{x-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{8} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]+$$

$$+\int\limits_{1/4}^x \begin{pmatrix} e^{-(x-s)} & 0 \\ 0 & e^{x-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-x+\frac{3}{4}}-\frac{7}{8}e^{-x+\frac{1}{4}}+1 \\ \frac{5}{4}e^{x+\frac{1}{4}}-\frac{3}{8}e^{x-\frac{1}{4}}+(x-\frac{1}{4})e^x \end{pmatrix},$$

а в точке $x=1$ вычисляется следующим образом:

$$Y_2(1)=\widetilde{C}_2Y_1(1-0,\tfrac{1}{4})+S_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}}-\frac{7}{8}e^{-\frac{3}{4}}+1 \\ \frac{5}{4}e^{\frac{5}{4}}-\frac{3}{8}e^{\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}e \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

откуда

$$Y(1) = Y_2(1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}} - \frac{7}{8}e^{-\frac{3}{4}} + 1 \\ \frac{5}{4}e^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4}e - \frac{3}{8}e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{7}{8}e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}. \tag{25.7}$$

Таким образом, решение начальной задачи (25.5), (25.6) на всем полуинтервале $[0,1)$ представляется в виде

$$Y(x)=\begin{pmatrix} \left[\frac{5}{4}e^{-x+\frac{3}{4}}-\frac{7}{8}e^{-x+\frac{1}{4}}+1\right]\Theta_1(x) \\ \left[\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right]\Theta_0(x)+\left[\frac{5}{4}e^{x+\frac{1}{4}}-\frac{3}{8}e^{x-\frac{1}{4}}+\left(x-\frac{1}{4}\right)e^{x}\right]\Theta_1(x) \end{pmatrix},$$

а в точке $x=1$ приобретает значение (25.7). ▲

Пример 25.5. На отрезке $[0,\pi]$ найдем решение начальной задачи

$$Y' - \begin{pmatrix} \Theta_1(x) & 2\Theta_0(x) - \Theta_1(x) & -\Theta_1(x) \\ \Theta_1(x) - \delta(x-\pi) & \Theta_0(x) + \Theta_1(x) & \Theta_0(x) \\ 3\Theta_1(x) & \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \Theta_0(x) + \Theta_1(x) \end{pmatrix} Y =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\Theta_0(x) - \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ (x+1)\Theta_0(x) - \Theta_1(x) + \delta(x-\pi) \\ \Theta_0(x) + \Theta_1(x) + \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 2\delta(x-\pi) \end{pmatrix}, \tag{25.8}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{25.9}$$

где $\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ — характеристические функции полуинтервалов $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ соответственно.

▼ Система (25.8) является системой вида (22.1) со следующими коэффициентами:

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_0=\begin{pmatrix} 2 \\ x+1 \\ 1 \end{pmatrix}, R_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

для которой множество $\omega^* = \left\{x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi\right\}$. Легко видеть, что данная система является корректной.

Найдем решение задачи (25.8), (25.9) на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, на котором определяющая система имеет вид

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \tag{25.10}$$

и является системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для отыскания ее фундаментальной матрицы снова (см. пример 23.6) воспользуемся методом Эйлера в матричной форме. Составим характеристическое уравнение для системы (25.10)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

и найдем его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (собственные значения матрицы A_0).

Для простого корня $\lambda_1 = 0$ частное решение ищем в виде

$$\widehat{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

с неопределенными коэффициентами $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,3}$. После подстановки его в определяющую систему (25.10) получим систему алгебраических уравнений

$$2\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

которая имеет решение вида $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Выбрав $\alpha_1 = 1$, получим собственный вектор $(1, 0, 0)$ матрицы A_0 и соответствующее частное решение системы (25.10):

$$\widehat{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для двукратного корня $\lambda_{2,3} = 1$ частные решения будем искать в виде

$$\widehat{Y}_{2,3}(x) = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} x \right] e^x.$$

После подстановки в уравнение (25.10), сокращения на e^x и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 = 0, \quad \beta_1 - 2\beta_2 = 0, \quad \alpha_3 - \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

Из этой системы имеем

$$\alpha_1 = 2(C_1 - C_2), \ \ \alpha_2 = C_1, \ \ \alpha_3 = \beta_2 = C_2, \ \ \beta_1 = 2C_2, \ \ \beta_3 = 0,$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Выбрав сначала $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, а потом наоборот, получим еще два частные решения определяющей системы (25.10):

$$\widehat{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \quad \widehat{Y}_3(x) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Для проверки того факта, что векторы $\widehat{Y}_1(x), \widehat{Y}_2(x), \widehat{Y}_3(x)$ образуют линейно независимую систему, достаточно вычислить их вронскиан в любой точке, например, при $x=0$:

$$W(0)=\begin{vmatrix}1 & 2e^x & 2(x-1)e^x\\ 0 & e^x & xe^x\\ 0 & 0 & e^x\end{vmatrix}_{x=0}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Таким образом, интегральная матрица $\Phi(x)$ определяющей системы (25.10) имеет вид

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}1 & 2e^x & 2(x-1)e^x\\ 0 & e^x & xe^x\\ 0 & 0 & e^x\end{pmatrix}.$$

Построим фундаментальную матрицу системы (25.10) [**52**]:

$$\widetilde{B}_0(x,s)=\Phi(x)\Phi^{-1}(s)=\begin{pmatrix}1 & 2e^x & 2(x-1)e^x\\ 0 & e^x & xe^x\\ 0 & 0 & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & e^{-s} & -se^{-s}\\ 0 & 0 & e^{-s}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\left(e^{x-s}-1\right) & 2(x-s)e^{x-s}-2\left(e^{x-s}-1\right)\\ 0 & e^{x-s} & (x-s)e^{x-s}\\ 0 & 0 & e^{x-s}\end{pmatrix}.$$

Найдем теперь решение $Y_0(x)$ задачи (25.8), (25.9) на полуинтервале $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ по формуле

$$Y_0(x)=\widetilde{B}_0(x,0)Y_0+\int\limits_0^x\widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds.$$

Таким образом, получим

$$Y_0(x)=\begin{pmatrix}1 & 2\left(e^x-1\right) & 2xe^x-2\left(e^x-1\right)\\ 0 & e^x & xe^x\\ 0 & 0 & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+$$

$$
+\int_0^x \begin{pmatrix} 1 & 2\bigl(e^{x-s}-1\bigr) & 2(x-s)e^{x-s}-2\bigl(e^{x-s}-1\bigr) \\ 0 & e^{x-s} & (x-s)e^{x-s} \\ 0 & 0 & e^{x-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ s+1 \\ 1 \end{pmatrix} ds =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1+2xe^x \\ (x+1)e^x \\ e^x \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 2xe^{x-s}-2s+2 \\ (x+1)e^{x-s} \\ e^{x-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 4xe^x - x^2+1 \\ 2(x+1)e^x - x - 1 \\ 2e^x - 1 \end{pmatrix}.
$$

Следовательно,

$$
Y_0(x) = \begin{pmatrix} 4xe^x - x^2 + 1 \\ 2(x+1)e^x - x - 1 \\ 2e^x - 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \bigl[0, \tfrac{\pi}{2}\bigr). \tag{25.11}
$$

Найдем решение $Y_1(x)$ начальной задачи (25.8), (25.9) для $x \in \bigl[\frac{\pi}{2}, \pi\bigr)$. Определяющая система на этом полуинтервале

$$
Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \tag{25.12}
$$

является системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее характеристическое уравнение

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\bigl[(1-\lambda)^2 + 4\bigr] = 0
$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, которым соответствуют (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно) частные решения

$$
\widehat{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \widehat{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 2\sin 2x \\ -\cos 2x \\ -3\cos 2x \end{pmatrix} e^x, \widehat{Y}_3(x) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} e^x.
$$

Далее строим фундаментальную матрицу определяющей системы (25.12):

$$\widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}0 & 2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x\\ e^x & -e^x\cos 2x & e^x\sin 2x\\ -e^x & -3e^x\cos 2x & 3e^x\sin 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2e^s\sin 2s & 2e^s\cos 2s\\ e^s & -e^s\cos 2s & e^s\sin 2s\\ -e^s & -3e^s\cos 2s & 3e^s\sin 2s\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x\\ e^x & -e^x\cos 2x & e^x\sin 2x\\ -e^x & -3e^x\cos 2x & 3e^x\sin 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{4}e^{-s} & -\frac{1}{4}e^{-s}\\ \frac{1}{2}e^{-s}\sin 2s & -\frac{1}{4}e^{-s}\cos 2s & -\frac{1}{4}e^{-s}\cos 2s\\ \frac{1}{2}e^{-s}\cos 2s & \frac{1}{4}e^{-s}\sin 2s & \frac{1}{4}e^{-s}\sin 2s\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}e^{x-s}\cos 2(x-s) & -\frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & -\frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s)\\ \frac{1}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & \frac{1}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)+3] & \frac{1}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)-1]\\ \frac{3}{2}e^{x-s}\sin 2(x-s) & \frac{3}{4}e^{x-s}[\cos 2(x-s)-1] & \frac{1}{4}e^{x-s}[3\cos 2(x-s)+1]\end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (25.2) запишем решение исходной задачи (25.8), (25.9) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$:

$$Y_1(x)=\widetilde{B}_1\left(x,\tfrac{\pi}{2}\right)\left[\widetilde{C}_1Y_0\left(\tfrac{\pi}{2}-0\right)+S_1\right]+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\widetilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds \qquad (25.13)$$

Напомним, что $\widetilde{C}_1=E_4+C_1$. Подставив в (25.13) соответствующие матрицы и выполнив все необходимые вычисления, получим

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix}\left[-2\pi\cos 2x+(\pi+3)\sin 2x\right]e^x+\\ +\left[\frac{\pi^2}{4}\cos 2x-\frac{\pi+2}{2}\sin 2x\right]e^{x-\frac{\pi}{2}};\\[2ex] \left[-\frac{\pi+3}{2}\cos 2x-\pi\sin 2x+\frac{\pi+1}{2}\right]e^x+\\ +\left[\frac{\pi+2}{4}\cos 2x+\frac{\pi^2}{8}\sin 2x-\frac{\pi+6}{4}\right]e^{x-\frac{\pi}{2}}+1;\\[2ex] \left[-\frac{3\pi+9}{2}\cos 2x-3\pi\sin 2x-\frac{\pi+1}{2}\right]e^x+\\ \left[\frac{3\pi+6}{4}\cos 2x+\frac{3\pi^2}{8}\sin 2x+\frac{\pi+6}{4}\right]e^{x-\frac{\pi}{2}}-1\end{pmatrix} \qquad (25.14)$$

Окончательно, решение начальной задачи (25.8), (25.9) на полуинтервале $[0,\pi)$ представляется в виде

$$Y(x)=Y_0(x)\Theta_0(x)+Y_1(x)\Theta_1(x),$$

где $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ выражены формулами (25.11) и (25.14).

В точке $x = \pi \in \omega^*$ значение решения следует вычислять по отдельной формуле (25.3):

$$Y(\pi) = \widetilde{C}_2 Y_1(\pi - 0) + S_2 = \begin{pmatrix} -2\pi e^{\pi} + \frac{\pi^2}{4} e^{\frac{\pi}{2}} \\ (2\pi - 1)e^{\pi} - \frac{\pi^2+4}{4} e^{\frac{\pi}{2}} + 2 \\ -(2\pi+5)e^{\pi} + (\pi+3)e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \end{pmatrix}.$$

▲

§ 26. Приведение краевой задачи к начальной

Докажем утверждение, которое лежит в основе одного специального метода решения краевых задач для дифференциальной системы (22.1), заключающегося в приведении краевой задачи к начальной.

Систему (22.1) рассмотрим вместе с краевыми условиями:

$$PY(x_0) + QY(x_N) = U, \tag{26.1}$$

где $P, Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $U \in \mathbb{C}^p$.

Теорема 26.1. *Если*

$$\det\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right] \neq 0, \tag{26.2}$$

то при условиях корректности (22.3) *существует единственное решение краевой задачи* (22.1), (26.1), *которое представимо в виде* (24.1)–(24.3) *или* (25.1)–(25.3), *где начальный вектор вычисляется по формуле*

$$Y_0 = \left[P + QB_N(x_N, x_0)\right]^{-1} \left[U - Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j) Z_j\right]. \tag{26.3}$$

Доказательство. Согласно (24.3) имеем

$$Y(x_N) = B_N(x_N, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

откуда

$$QY(x_N) = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j.$$

Учитывая краевое условие (26.1), получим равенство

$$U - PY_0 = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

из которого следует формула (26.3). Условие (26.2) обеспечивает существование обратной матрицы $\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right]^{-1}$, а, следовательно, и начального вектора Y_0.

Таким образом, решение краевой задачи (22.1), (26.1) приведено к нахождению решения начальной задачи (22.1), (26.3), которое согласно теореме 22.1 существует и единственно. ■

Пример 26.2. Пусть задана обобщенная диференциальная система

$$Y' - \begin{pmatrix} 0 & 4\Theta_0(x)+2\Theta_1(x) \\ -\Theta_0(x)-2\Theta_1(x)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} Y =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5\Theta_0(x) + \sin x\Theta_1(x) - 20\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}, \qquad (26.4)$$

где $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ — характеристические функции промежутков $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ соответственно. Найдем решение этой системы, удовлетворяющее краевым условиям

$$PY(0) + QY(1) = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (26.5)$$

▼ Система (26.4) является системой вида (22.1) со следующими коэффициентами:

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ A_1(x)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R_0(x)=\begin{pmatrix}0\\ 5\end{pmatrix},\ R_1(x)=\begin{pmatrix}0\\ \sin x\end{pmatrix},\ S_1=\begin{pmatrix}0\\ -20\end{pmatrix},\ S_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $C_1^2=C_2^2=0,\quad C_1S_1=C_2S_2=0,$ то система (26.4) является корректной. Заметим, что $\omega^*=\left\{x_1=\frac{\pi}{2}\right\}$.

Для системы (26.4) определяющая система

$$Y'=\left[\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Theta_0(x)+\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Theta_1(x)\right]Y$$

на каждом из промежутков $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ является дифференциальной системой с постоянными коэффициентами. Нетрудно убедиться, что соответствующие фундаментальные матрицы имеют вид

$$\widetilde{B}_0(x,s)=\begin{pmatrix}\cos 2(x-s) & 2\sin 2(x-s)\\ -\frac{1}{2}\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}\cos 2(x-s) & \sin 2(x-s)\\ -\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s)\end{pmatrix}.$$

Проверим условие (26.2) существования единственного решения для задачи (26.4), (26.5). Учитывая, что $x=\pi\notin\omega^*$, в силу замечания 23.3 и следствия 23.4 имеем

$$B_2(\pi,0)=B_1(\pi-0,0)=\widetilde{B}_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right)\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0\left(\tfrac{\pi}{2}-0,0\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

$$B_2\left(\pi,\tfrac{\pi}{2}\right)=B_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right)=\widetilde{B}_1\left(\pi-0,\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель

$$\det\left[P+QB_2(\pi,0)\right]=\det\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\right]=\begin{vmatrix}0&1\\4&1\end{vmatrix}=-4.$$

Поскольку $\det\left[P+QB_2(\pi,0)\right]\neq 0$, то по теореме 26.1 решение краевой задачи (26.4), (26.5) будем вычислять по формулам (24.1)–(24.3) или (25.1)–(25.3), начальный вектор в которых определяется согласно (26.3). Таким образом, имеем

$$Y_0=-\left[P+QB_2(\pi,0)\right]^{-1}Q\left[B_2(\pi,\tfrac{\pi}{2})Z_1+Z_2\right].$$

Для отыскания векторов Z_1 и Z_2 используем соотношение (24.2):

$$Z_1=\widetilde{C}_1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\widetilde{B}_0(\tfrac{\pi}{2},s)R_0(s)ds+S_1=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\cos(\pi-2s)&2\sin(\pi-2s)\\-\frac{1}{2}\sin(\pi-2s)&\cos(\pi-2s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}0\\-20\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi-2s)ds\\5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi-2s)ds\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix},$$

$$Z_2=\widetilde{C}_2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\widetilde{B}_1(\pi,s)R_1(s)ds+S_2=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\begin{pmatrix}\cos 2(\pi-s)&\sin 2(\pi-s)\\-\sin 2(\pi-s)&\cos 2(\pi-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\sin s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2s\sin s ds\\\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2s\sin s ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{61}{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теперь рекуррентными формулами (25.1)–(25.3) с начальным вектором Y_0, запишем решение краевой задачи (26.4), (26.5).

На полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ решение имеет вид

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x,0)Y_0 + \int_0^x \widetilde{B}_0(x,s)R_0(s)ds = \begin{pmatrix} \cos 2x & 2\sin 2x \\ -\frac{\sin 2x}{2} & \cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{61}{12} \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^x \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & 2\sin 2(x-s) \\ -\frac{\sin 2(x-s)}{2} & \cos 2(x-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Запишем решение краевой задачи при $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1\left(x, \tfrac{\pi}{2}\right)\left[\widetilde{C}_1 Y_0\left(\tfrac{\pi}{2} - 0\right) + S_1\right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \widetilde{B}_1(x,s)R_1(s)ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2x-\pi) & \sin(2x-\pi) \\ -\sin(2x-\pi) & \cos(2x-\pi) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} \right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \begin{pmatrix} \cos 2(x-s) & \sin 2(x-s) \\ -\sin 2(x-s) & \cos 2(x-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - 5\cos 2x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + 5\sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x \\ \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение краевой задачи (26.4), (26.5) представимо в виде

$$Y(x) = Y_0(x)\Theta_0(x) + Y_1(x)\Theta_1(x), \tag{26.6}$$

где
$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix},$$
$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$
▲

§ 27. Квазидифференциальные уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ -особенностями

Рассмотрим обобщенное КДУ
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (27.1)$$
с коэффициентами вида

1) $a_{00}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\Theta_k(x),$

2) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)\Theta_k(x),\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i\cdot j=0;$

3) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^{k}\delta_k(x),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$

4) $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_r^{\,k}(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\delta_k(x),\ r=\overline{0,m-1},$

где $y\colon I\to\mathbb{C}$ — неизвестная функция, $\widetilde{a}_{ij}^{k}(x)$, $\widetilde{f}_r^{\,k}(x)$ — непрерывные на полуинтервале $I_k=[x_k,x_{k+1})$ функции, a_{ij}^k, f_r^k — действительные числа. Для КДУ (27.1) квазипроизводные вводятся по формулам (15.2) с учетом случая $l=m-1$, а именно:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ \ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(x)y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}.$$

Тогда КДУ (27.1) приводится к системе вида (22.1):

$$Y'-\left(\sum_{k=0}^{N-1}A_k(x)\Theta_k(x)+\sum_{k=1}^{N}C_k\delta(x-x_k)\right)Y=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}R_k(x)\Theta_k(x)+\sum_{k=1}^{N}S_k\delta(x-x_k),$$

где $Y(x)=\big(y(x),y^{[1]}(x),\ldots,y^{[q-1]}(x)\big)^{\top}$ — неизвестная вектор-функция, векторы R_k и S_k имеют вид

$$R_k(x)=\big(0,\ldots,0,\widetilde{f}^{\,k}_{m-1}(x),\ldots,\widetilde{f}^{\,k}_1(x),\widetilde{f}^{\,k}_0(x)\big)^{\top},\tag{27.2}$$

$$S_k=\big(0,\ldots,0,f^k_{m-1},\ldots,f^k_1,f^k_0\big)^{\top},\tag{27.3}$$

а матрицы $A_k(x)$ и C_k порядка q имеют следующую блочную структуру:

$$A_k(x)=\begin{pmatrix}A^k_{11}(x)&A^k_{12}(x)\\A^k_{21}(x)&A^k_{22}(x)\end{pmatrix},\qquad C_k=\begin{pmatrix}O_{nm}&O_n\\C^k_{21}&O_{mn}\end{pmatrix},\tag{27.4}$$

где

$$A^k_{11}(x)=\begin{pmatrix}0&1&\ldots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\ldots&1\\ -\frac{\widetilde{a}^k_{n0}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)}&-\frac{\widetilde{a}^k_{n-1,0}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)}&\ldots&-\frac{\widetilde{a}^k_{10}(x)}{\widetilde{a}^k_{00}(x)}\end{pmatrix},\tag{27.5}$$

$$A_{12}^k(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{27.6}$$

$$A_{21}^k(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{n1}^k(x) - \frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)\widetilde{a}_{n0}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & \dots & \widetilde{a}_{11}^k(x) - \frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)\widetilde{a}_{10}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,m}^k(x) - \frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)\widetilde{a}_{n0}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & \dots & \widetilde{a}_{1,m}^k(x) - \frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)\widetilde{a}_{10}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} \end{pmatrix}, \tag{27.7}$$

$$A_{22}^k(x) = \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{a}_{01}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widetilde{a}_{0,m-1}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & -1 \\ \frac{\widetilde{a}_{0,m}^k(x)}{\widetilde{a}_{00}^k(x)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{27.8}$$

$$C_{21}^k = \begin{pmatrix} a_{n1}^k & a_{n-1,1}^k & \dots & a_{11}^k \\ a_{n2}^k & a_{n-1,2}^k & \dots & a_{12}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm}^k & a_{n-1,m}^k & \dots & a_{1m}^k \end{pmatrix}. \tag{27.9}$$

Заметим, что вид матриц C_k и векторов S_k, $k=\overline{1,N}$, гарантирует выполнение условий корректности (22.3) для системы (22.1). Соответствующая ей определяющая система эквивалентна КДУ

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x)\; y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = 0. \tag{27.10}$$

КДУ (27.10) естественно назвать *определяющим* для соответствующего КДУ (27.1).

Отметим, что фундаментальную матрицу $\widetilde{B}_k(x,s)$ определяющей системы на I_k, $k=\overline{0,N-1}$, можно найти по формуле (13.7), если только будет известна функция Коши КДУ (27.10) на этом полуинтервале, т. е. функция Коши $\widetilde{K}_k(x,s)$ уравнения

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(\widetilde{a}^k_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}=0.$$

Для КДУ (27.1) поставим начальные условия

$$y^{[\nu]}(x_0)=y_0^\nu,\ \ y_0^\nu\in\mathbb{R},\ \ \nu=\overline{0,q-1}. \tag{27.11}$$

Если условия (27.11) записать в векторном виде

$$Y(x_0)=\Big(y_0,y_0^1,\ldots,y_0^{q-1}\Big)^\top, \tag{27.12}$$

то начальная задача (27.1), (27.11) будет эквивалентна задаче (22.1), (22.2) с начальным вектором (27.12). Решив последнюю, получим выражение для решения $y(x)$ начальной задачи (27.1), (27.11) и его квазипроизвдных.

Пример 27.1. Рассмотрим задачу о вынужденных продольных колебаниях закрепленного на концах стержня длиной π кусочно-постоянного сечения $f(x)$ с сосредоточенной массой и обобщенной внешней нагрузкой:

$$\begin{aligned}\big(f(x)y'\big)'+4\big[f(x)-\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big)\big]y&=\\&=5\Theta_0(x)+\sin x\Theta_1(x)-20\delta\big(x-\tfrac{\pi}{2}\big),\end{aligned} \tag{27.13}$$

$$y'(0)=y^{[1]}(\pi)=0, \tag{27.14}$$

где $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристические функции промежутков $\big[0,\frac{\pi}{2}\big)$ и $\big[\frac{\pi}{2},\pi\big]$ соответственно,

$$f(x)=\frac{1}{4}\Theta_0(x)+\frac{1}{2}\Theta_1(x), \tag{27.15}$$

а $y^{[1]}(x)=f(x)y'(x)$ — квазипроизводная решения $y(x)$.

▼ Запишем для КДУ (27.13) множество носителей его обобщенных коэффициентов: $\omega^*=\big\{x_1=\frac{\pi}{2}\big\}$. При помощи вектора

$Y = \left(y, y^{[1]}\right)^\top$ КДУ (27.13) приводим к системе

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & f^{-1}(x) \\ -4\left[f(x) - \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] & 0 \end{pmatrix} Y + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 5\Theta_0(x) + \sin x\Theta_1(x) - 20\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (27.16)$$

Учитывая (27.15), имеем $f^{-1}(x) = 4\Theta_0(x) + 2\Theta_1(x)$. Следовательно, система (27.16) является системой вида (26.4). Краевые условия (27.14) запишем в векторном виде

$$PY(0) + QY(1) = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили задачу (26.4), (26.5), решение которой представляется сплайном (26.6), а его первая координата есть решение задачи (27.13), (27.14):

$$y(x) = \left(5 + \tfrac{1}{12}\cos 2x\right)\Theta_0(x) + \\ + \left(-\tfrac{1}{6}\sin 4x - \tfrac{1}{8}\cos^2 2x - \tfrac{13}{3}\cos 2x + \tfrac{2}{3}\sin x + \tfrac{1}{24}\right)\Theta_1(x).$$

▲

Пример 27.2. Найдем решение краевой задачи

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k(x)\Theta_k(x)\, t'\right)' = \sum_{k=0}^{N-1} r_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N-1} s_k\delta(x - x_k), \quad (27.17)$$

$$t(x_0) = t_0, \quad t(x_N) = t_N, \quad (27.18)$$

где $t(x)$ — искомая функция, $\Theta_k(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $I_k = [x_k, x_{k+1})$[1], $\lambda_k, r_k \in C[x_k, x_{k+1})$, $s_k \in \mathbb{R}$.

▼ Задача (27.17), (27.18) является математической моделью распределения одномерного стационарного температурного поля

[1] $\Theta_{N-1}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[x_{N-1}, x_N]$.

в многослойной бесконечной плите с *кусочно-непрерывным* коэффициентом теплопроводности при наличии непрерывно распределенных и точечных источников тепла. Следовательно, $\lambda_k(x)$ — коэффициент теплопроводности на полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$, $r_k(x)$ — функция распределения источника тепла на $[x_k, x_{k+1})$, s_k — интенсивности точечных источников тепла. Краевые условия означают, что на внешней поверхности плиты задан температурный режим.

Квазипроизводная в этом случае определяется выражением

$$t^{[1]}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k(x)\Theta_k(x) \cdot t'(x).$$

С помощью вектора $Y = \left(t, t^{[1]}\right)^\top$ задачу (27.17), (27.18) запишем в матричной форме

$$Y' - \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{\Theta_k(x)}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} r_k(x)\Theta_k(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N-1} s_k\delta(x-x_k) \end{pmatrix}, \tag{27.19}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(x_0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(x_N) = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_N \end{pmatrix}. \tag{27.20}$$

Последняя задача является задачей вида (22.1), (26.1), если обозначить

$$A_k(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_k(x) \end{pmatrix}, \; S_k = \begin{pmatrix} 0 \\ s_k \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_N \end{pmatrix}.$$

Определяющей для дифференциальной системы (27.19) является система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\Theta_k(x)}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что фундаментальная матрица $\widetilde{B}_k(x,s)$ этой системы на полуинтервале I_k, т. е. фундаментальная матрица системы

$$Y_k' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y_k, \quad k = \overline{0, N-1},$$

имеет вид

$$\widetilde{B}_k(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_k(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27.21}$$

где для удобства записи обозначено

$$b_k(x,s) = \int\limits_s^x \frac{d\tau}{\lambda_k(\tau)}.$$

Сразу заметим, что произведение матриц вида (27.21) является матрицей такого же вида:

$$\widetilde{B}_k(x,s) \cdot \widetilde{B}_l(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & [b_k + b_l](x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27.22}$$

Тогда фундаментальная матрица $B(x,x_0)$ системы (27.19) строится по формулам (23.3), (23.4), причем согласно замечанию 23.3

$$B_N(x_N, x_0) = B_{N-1}(x_N - 0, x_0),$$

а в силу (23.1) имеем $b_k(x-0,s) = b_k(x,s)$.

Далее, учитывая формулу (23.10), вид матриц P, Q, C_k, $\widetilde{B}_k(x,s)$, а также свойства (27.22), вычислим

$$\det\bigl[P + QB_N(x_N, x_0)\bigr] = \det\bigl[P + QB_{N-1}(x_N - 0, x_0)\bigr] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\prod_{i=0}^{N-1}\begin{pmatrix}1 & b_{N-i-1}(x_{N-i}, x_{N-i-1})\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sum\limits_{i=0}^{N-1} b_{N-i-1}(x_{N-i}, x_{N-i-1})\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i(x_{i+1}, x_i)\end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)}.$$

Следовательно,

$$\det\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right] = \sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)}. \tag{27.23}$$

Таким образом, в силу теоремы 26.1 при условии

$$\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}-0}\frac{d\tau}{\lambda_i(\tau)} \neq 0$$

существует единственное решение краевой задачи (27.19), (27.20), представимое в виде (24.1), т. е.

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} B_k(x, x_j)Z_j + \int\limits_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds\right\}\Theta_k(x). \tag{27.24}$$

Прежде всего вычислим интеграл в правой части (27.24):

$$\int\limits_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds = \int\limits_{x_k}^{x}\begin{pmatrix}1 & b_k(x, s)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ r_k(s)\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix}\mathcal{I}_k(x)\\ \mathcal{I}_k^{[1]}(x)\end{pmatrix}, \tag{27.25}$$

где для удобства записи обозначено

$$\mathcal{I}_k(x) = \int\limits_{x_k}^{x} b_k(x, s)r_k(s)ds, \quad \mathcal{I}_k^{[1]}(x) = \int\limits_{x_k}^{x} r_k(s)ds.$$

Теперь, учитывая (27.25), найдем Z_j, $j\geq 1$, согласно (24.2):

$$Z_j=\widetilde{C}_j\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{B}_{j-1}(x_j,s)R_{j-1}(s)ds+S_j=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{j-1}(x_j)\\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ s_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{j-1}(x_j)\\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\end{pmatrix}. \qquad (27.26)$$

Используя мультипликативное представление (23.11), свойство (27.22) и вид (27.26) векторов Z_j, вычислим теперь сумму $\sum\limits_{j=1}^{k}B_k(x,x_j)Z_j$ для $k=\overline{1,N-1}$:

$$\sum_{j=1}^{k}B_k(x,x_j)Z_j=\sum_{j=1}^{k}\widetilde{B}_k(x,x_k)\prod_{i=0}^{k-j-1}\widetilde{C}_{k-i}\widetilde{B}_{k-i-1}(x_{k-i},x_{k-i-1})Z_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}1\,b_k(x,x_k)\\0\qquad 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\sum\limits_{i=0}^{k-j-1}b_{k-i-1}(x_{k-i},x_{k-i-1})\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{j-1}(x_j)\\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{j-1}(x_j)+\Big[\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\Big]\Big[b_k(x,x_k)+\sum\limits_{i=j}^{k-1}b_i(x_{i+1},x_i)\Big]\\ \mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\end{pmatrix}.$$

Наконец, найдем начальный вектор $Z_0=Y_0$ по формуле (26.3), приняв во внимание (27.23) и только что полученное представление для $\sum\limits_{j=1}^{k}B_k(x,x_j)Z_j$:

$$Z_0'\Big[P+QB_N(x_N,x_0)\Big]^{-1}\Big[U-QZ_N-Q\sum_{j=1}^{N-1}B_{N-1}(x_N-0,x_j)Z_j\Big]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&\sum\limits_{i=0}^{N-1}b_i(x_{i+1},x_i)\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}t_0\\t_N\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{I}_{N-1}(x_N)\end{pmatrix}-\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{N-1}\left(\begin{matrix} 0 \\ \mathcal{I}_{j-1}(x_j)+\left[\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\right]\sum\limits_{i=j}^{N-1} b_i(x_{i+1},x_i)\end{matrix}\right)\Bigg].$$

После несложных преобразований, связанных с вычислением обратной матрицы и матричного произведения, имеем

$$Z_0=\left(\begin{matrix} t_0 \\ \dfrac{t_N-t_0-\sum\limits_{j=1}^{N}\mathcal{I}_{j-1}(x_j-0)-\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left(\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j-0)+s_j\right)\sum\limits_{i=j}^{N-1} b_i(x_{i+1}-0,x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i(x_{i+1}-0,x_i)}\end{matrix}\right). \tag{27.27}$$

Подставив выражения (27.25)–(27.27) в формулу (27.24) и упростив, получим решение краевой задачи (27.19), (27.20), первая координата которого есть решение $y(x)$ краевой задачи (27.17), (27.18), а вторая — его квазипроизводная. ▲

§ 28. Частично вырожденные квазидифференциальные уравнения

Рассмотрим один специальный класс КДУ.

Определение 28.1. *Частично вырожденным КДУ* назовем уравнение вида (27.1)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \tag{28.1}$$

со следующими предположениями относительно коэффициентов и правой части:

1) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1} a_{ij}^k\Theta_k(x),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i\cdot j=0;$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N} a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

3) $f_r(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_r^k \Theta_k(x),\ f_r^k \in \mathbb{R},\ r = \overline{0, m-1}.$

Очевидно, частично вырожденное КДУ указанным выше способом приводится к обобщенной дифференциальной системе с кусочно-постоянными коэффициентами

$$Y'(x) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k\Theta_k + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta_k(x)\right) Y(x) = \sum_{k=1}^{N} S_k\delta_k(x), \qquad (28.2)$$

где матрицы A_k, C_k и векторы S_k определяются в соответствии с формулами (27.4)–(27.7) и (27.3) с учетом равенств

$$\widetilde{a}_{ij}^{k}(x) = \begin{cases} a_{ij}^{k}, & i\cdot j = 0; \\ 0, & i\cdot j \neq 0, \end{cases} \qquad \widetilde{f}_r^{k}(x) = 0.$$

По теореме 24.1 решение системы (28.2), удовлетворяющее начальному условию $Y(x_0) = Y_0$, имеет вид

$$Y(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1}\Big(B_k(x, x_0)Y_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)S_j\Big)\Theta_k(x),\ x \in [x_0, x_N), \\ B_N(x_N, x_0)Y_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)S_j,\ x = x_N, \end{cases}$$

в частности, в силу замечания 24.2 в случае, если $x = x_N \notin \omega^*$, решение для $x \in [x_0, x_N]$ запишется в виде

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(B_k(x, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{k} B_k(x, x_j)S_j\right)\Theta_k(x), \qquad (28.3)$$

здесь $\Theta_{N-1}(x)$ является характеристической функцией отрезка $[x_{N-1}, x_N]$.

Тогда решение соответствующего частично вырожденного КДУ с начальным условием

$$y^{[\nu]}(x_0) = y_0^{\nu},\ \nu = \overline{0, q-1},$$

представляется в форме

$$y(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{q-1}K_k^{\{i\}}(x,x_0)y_0^{[q-i-1]}+\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=0}^{m+1}K_k^{\{i\}}(x,x_j)f_i^j\right)\Theta_k(x),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in[x_0,x_N),\\ \sum\limits_{i=0}^{q-1}K_k^{\{i\}}(x,x_0)y_0^{[q-i-1]}+\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=0}^{m+1}K_k^{\{i\}}(x,x_j)f_i^j,\ x=x_N.\end{cases}$$

где $K_k^{\{i\}}(x,x_j)$ — квазипроизводная порядка i (в смысле сопряженного уравнения) функции Коши данного частично вырожденного КДУ для $x\in I_k$.

Пример 28.2. На отрезке $[0,\pi]$ найдем решение начальной задачи для частично вырожденного КДУ

$$y''+\left[1+\tfrac{1}{6}\delta\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+\tfrac{1}{8}\delta\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)\right]y=\delta\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+2\delta\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right),\quad(28.4)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.\quad(28.5)$$

▼ Для частично вырожденного КДУ (28.4) множество носителей обобщенных коэффициентов $\omega^*=\left\{x_1=\frac{\pi}{4};x_2=\frac{\pi}{2}\right\}$, а квазипроизводная $y^{[1]}$ совпадает с обычной производной y'.

Задача (28.4), (28.5) эквивалентна начальной задаче

$$Y'-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left[1+\frac{1}{6}\delta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8}\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] & 0\end{pmatrix}Y=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \delta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix},\quad(28.6)$$

$$Y_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad(28.7)$$

которая является задачей вида (22.1), (22.2), где $Y=(y,y')^{\top}$,

$$A_0=A_1=A_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},C_1=\begin{pmatrix}0&0\\-\frac{1}{6}&0\end{pmatrix},C_2=\begin{pmatrix}0&0\\-\frac{1}{8}&0\end{pmatrix},C_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$R_0 = R_1 = R_2 = S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Дифференциальная система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y \tag{28.8}$$

является определяющей для системы (28.6).

Покажем, как можно построить фундаментальную матрицу системы (28.8), используя теорему 13.5. С учетом вида вектора Y и квазипроизводной $y^{[1]} = y'$, получается, что эта система равносильна определяющему КДУ для исходного уравнения (28.4), т. е. уравнению $y''+y = 0$. Поскольку квазипроизводная в смысле исходного уравнения совпадает с обычной производной, то функцию Коши $\widetilde{K}(x, s)$ этого уравнения можно найти классическим способом:

$$\widetilde{K}(x, s) = \sin(x-s)$$

Учитывая вид квазипроизводных в смысле исходного и сопряженного уравнений, имеем

$$\widetilde{K}^{[1]}(x, s) = \frac{\partial \widetilde{K}(x, s)}{\partial x} = \cos(x-s),$$

$$\widetilde{K}^{\{1\}}(x, s) = -\frac{\partial \widetilde{K}(x, s)}{\partial s} = \cos(x-s),$$

$$\widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x, s) = -\frac{\partial^2 \widetilde{K}(x, s)}{\partial x \partial s} = -\sin(x-s),$$

Следовательно, по теореме 13.5 фундаментальная матрица определяющей системы на каждом из полуинтервалов $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $[0, \pi]$ имеет вид

$$\widetilde{B}_k(x, s) = \begin{pmatrix} \cos(x-s) & \sin(x-s) \\ -\sin(x-s) & \cos(x-s) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{28.9}$$

Запишем решение задачи (28.6), (28.7) по формуле (28.3):

$$Y(x)=B_0(x,0)Y_0\Theta_0(x)+\bigl[B_1(x,0)Y_0+B_1\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)S_1\bigr]\Theta_1(x)+$$
$$+\bigl[B_2(x,0)Y_0+B_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)S_1+B_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{2}\bigr)S_2\bigr]\Theta_2(x). \quad (28.10)$$

Используя выражения (23.4), (23.11) и (28.9), вычислим необходимые значения фундаментальной матрицы:

$$B_0(x,0)=\widetilde{B}_0(x,0)=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix},$$

$$B_1\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)=\widetilde{B}_1\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)=\begin{pmatrix}\cos\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr) & \sin\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr)\\ -\sin\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr) & \cos\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\end{pmatrix},$$

$$B_1(x,0)=\widetilde{B}_1\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0\bigl(\tfrac{\pi}{4},0\bigr)=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr) & \sin\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr)\\ -\sin\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr) & \cos\bigl(x-\frac{\pi}{4}\bigr)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{6} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{13}{12}\cos x-\frac{1}{12}\sin x & \frac{1}{12}\cos x+\frac{11}{12}\sin x\\ -\frac{1}{12}\cos x-\frac{13}{12}\sin x & \frac{11}{12}\cos x-\frac{1}{12}\sin x\end{pmatrix},$$

$$B_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{2}\bigr)=\widetilde{B}_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{2}\bigr)=\begin{pmatrix}\cos\bigl(x-\frac{\pi}{2}\bigr) & \sin\bigl(x-\frac{\pi}{2}\bigr)\\ -\sin\bigl(x-\frac{\pi}{2}\bigr) & \cos\bigl(x-\frac{\pi}{2}\bigr)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{pmatrix},$$

$$B_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{4}\bigr)=\widetilde{B}_2\bigl(x,\tfrac{\pi}{2}\bigr)\widetilde{C}_2\widetilde{B}_1\bigl(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}\bigr)=$$
$$=\begin{pmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{8} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}}{16}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x & -\frac{7\sqrt{2}}{16}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{9\sqrt{2}}{16}\sin x & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{7\sqrt{2}}{16}\sin x \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,0) = \widetilde{B}_2(x,\tfrac{\pi}{2})\widetilde{C}_2\widetilde{B}_1(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4})\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0(\tfrac{\pi}{4},0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{103}{96}\cos x - \frac{1}{12}\sin x & \frac{19}{96}\cos x + \frac{11}{12}\sin x \\ -\frac{1}{12}\cos x - \frac{103}{96}\sin x & \frac{11}{12}\cos x - \frac{19}{96}\sin x \end{pmatrix}.$$

После подстановки этих матриц в (28.10) имеем решение начальной задачи (28.6), (28.7)

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\Theta_0(x) + \begin{pmatrix} \frac{1-6\sqrt{2}}{12}\cos x + \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x \\ \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\cos x - \frac{1-6\sqrt{2}}{12}\sin x \end{pmatrix}\Theta_1(x) +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{173+42\sqrt{2}}{96}\cos x + \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x \\ \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\cos x + \frac{173+42\sqrt{2}}{96}\sin x \end{pmatrix}\Theta_2(x).$$

Понятно, что первая координата вектора $Y(x)$ является решением начальной задачи (28.4), (28.5), т. е.

$$y(x) = \sin x\,\Theta_0(x) + \left(\frac{1-6\sqrt{2}}{12}\cos x + \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\right)\Theta_1(x) +$$

$$+ \left(-\frac{173+42\sqrt{2}}{96}\cos x + \frac{11+6\sqrt{2}}{12}\sin x\right)\Theta_2(x).$$

▲

§ 29. Вырожденные квазидифференциальные уравнения

Рассмотрим еще один специальный класс КДУ.

Определение 29.1. *Вырожденным КДУ* назовем уравнение вида

$$(-1)^m\Big(a_{00}(x)y^{(n)}\Big)^{(m)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}= \\ =\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (29.1)$$

со следующими предположениями относительно его коэффициентов и правой части:

1) $a_{00}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x), a_{00}^k(x)\in C(I_k),\ k=\overline{0,N-1};$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

3) $f_r(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\Theta_k(x),\ f_r^k\in\mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1}.$

Пользуясь формулами (15.2), запишем квазипроизводные, соответствующие вырожденному КДУ (29.1), с учетом специфики его коэффициентов:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)'+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}. \quad (29.2)$$

С их помощью вырожденное КДУ (29.1) обычным образом приводится к обобщенной дифференциальной системе вида (28.2), причем матрицы C_k и векторы S_k остаются теми же, а матрицы

$A_k(x)$ имеют следующую структуру:

$$A_k(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \left(\widetilde{a}_{00}^{k}(x)\right)^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Лемма 29.2. *Функция Коши $\widetilde{K}(x,s)$ определяющего для (29.1) КДУ имеет вид*

$$\widetilde{K}(x,s)=\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{K}_k(x,s)\Theta_k(x), \tag{29.3}$$

где

$$\widetilde{K}_k(x,s)=\frac{(-1)^{m-1}}{(n-1)!(m-1)!}\int_s^x\frac{(x-t)^{n-1}(t-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^{k}(t)}\,dt,\quad x\in I_k.$$

Доказательство. Запишем определяющее КДУ для уравнения (29.1) на полуинтервале I_k:

$$\left(\widetilde{a}_{00}^{k}(x)y^{(n)}\right)^{(m)}=0, \tag{29.4}$$

Сначала убедимся, что функция $\widetilde{K}_k(x,s)$ по переменной x удовлетворяет уравнению (29.4). Применяя n раз формулу дифференцирования по параметру [**120**, с. 667], имеем

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{(n)}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^{k}(x)}.$$

Подставим найденное значение в левую часть уравнения (29.4), тогда

$$\left(\widetilde{a}_{00}^k(x)\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^k(x)}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\Big((x-s)^{m-1}\Big)^{(m)} \equiv 0.$$

Полученное тождество означает, что функция $\widetilde{K}_k(x,s)$ по переменной x удовлетворяет КДУ (29.4).

Далее покажем, что функция $\widetilde{K}_k(x,s)$ удовлетворяет также начальным условиям (13.3). Следует подчеркнуть, что КДУ (29.4) рассматривается не как самостоятельное уравнение, а как определяющее для КДУ (29.1). Именно поэтому квазипроизводные для КДУ (29.4) вводятся в контексте квазипроизводных соответствующего вырожденного КДУ, которые определяются формулами (29.2), а именно для КДУ (29.4) квазипроизводные вводим следующим образом:

$$y^{[i]} = y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}; \quad y^{[n]} = a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)',\ j=\overline{1,m}.$$

Следовательно, функция $K(x,s)$ как решение уравнения (29.4) имеет квазипроизводные

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{[i]} = \frac{(-1)^{m-1}}{(n-i-1)!(m-1)!}\int\limits_s^x \frac{(x-t)^{n-i-1}(t-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^k(t)}dt,$$
$$i=\overline{1,n-1};$$

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{[n]} = \widetilde{a}_{00}^k(x)\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{(n)}(x,s) =$$
$$= \widetilde{a}_{00}^k(x)\left(\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{\widetilde{a}_{00}^k(x)}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(x-s)^{m-1};$$

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)_x^{[n+j]} = \frac{(-1)^{m-1+j}}{(m-j-1)!}(x-s)^{m-j-1}, \quad j=\overline{1,m-1};$$

$$\left(\widetilde{K}_k(x,s)\right)^{[n+m-1]} \equiv 1.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{K}_k^{[i]}(s,s)=0,\ i=\overline{0,q-1},\quad \widetilde{K}_k^{[n+m-1]}(s,s)=1.$$

Таким образом, $\widetilde{K}_k(x,s)$ согласно определению 13.2 действительно является функцией Коши КДУ (29.4). ■

Пусть

$$\mathcal{I}_{ij}\equiv\frac{1}{i!\,j!}\int\limits_s^x\frac{(x-t)^i(t-s)^j}{a_{00}(t)}dt,\quad i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m-1}.$$

Тогда из теоремы 13.5 и леммы 29.2 утверждение.

Лемма 29.3. *Фундаментальная матрица системы, соответствующая однородному вырожденному КДУ* (29.1)*, имеет вид*

$$\widetilde{B}(x,s)=\begin{pmatrix}1 & x-s & \dots & \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} & \mathcal{I}_{n-1,0} & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{n-1,m-1}\\ 0 & 1 & \dots & \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!} & \mathcal{I}_{n-2,0} & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{n-2,m-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \mathcal{I}_{00} & \dots & (-1)^{m-1}\mathcal{I}_{0,m-1}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & (-1)^{m-1}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 29.4. Найти решение краевой задачи

$$y^{IV}-\Big(\delta\big(x-\tfrac12\big)y'\Big)'+2\delta(x-1)y=-5\delta\big(x-\tfrac12\big)+2\delta'(x-1),\quad (29.5)$$

$$y(0)=y'(0)=y''(1)=0,\quad y'''(1)-2\delta\big(\tfrac12\big)y'(1)=2\delta(0),\quad (29.6)$$

которая моделирует вынужденные поперечные колебания стержня с сосредоточенными дисками и массами и с обобщенной внешней нагрузкой без учета распределенной массы.

▼ Заметим, что для этой задачи множество носителей обобщенных коэффициентов $\omega^*=\big\{x_1=\frac12;x_2=1\big\}$.

Введем квазипроизвдные функции $y(x)$ таким образом:

$$y^{[1]}(x) = y'(x), \quad y^{[2]}(x) = y''(x),$$
$$y^{[3]}(x) = 2\delta(x-1) - y'''(x) + 2\delta\big(x-\tfrac{1}{2}\big)y'.$$

Тогда краевые условия (29.6) можно записать в виде

$$y(0) = y^{[1]}(0), \quad y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0. \tag{29.7}$$

С помощью вектора $Y = \big(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\big)^\top$ задачу (29.5), (29.7) приводим к краевой задаче

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta\big(x-\frac{1}{2}\big) & 0 & -1 \\ 2\delta(x-1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\eta(x-1) \\ 5\eta\big(x-\frac{1}{2}\big) \end{pmatrix}, \tag{29.8}$$

$$\begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix} Y(0) + \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix} Y(1) = 0. \tag{29.9}$$

Последняя является задачей вида (22.1), (26.1) с коэффициентами

$$A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_0 = R_1 = 0, \ S_1 = \big(0, 0, 0, 5\big)^\top, S_2 = \big(0, 0, 2, 0\big)^\top$$

и краевыми матрицами $P = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix}$, $U = 0$.

Определяющей системой для (29.8) является система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

эквивалентная дифференциальному уравнению $y^{IV}=0$. Функция Коши этого уравнения в силу леммы 29.2 имеет вид

$$\widetilde{K}(x,s) = -\frac{(x-s)^3}{6}.$$

В соответствии с леммой 29.3 построим фундаментальную матрицу определяющей системы:

$$\widetilde{B}(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} & -\frac{(x-s)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-s & -\frac{(x-s)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -(x-s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим начальный вектор, соответствующий краевой задаче (29.8), (29.9), используя теорему 26.1. Проверим выполнение условия (26.2). Для этого вычислим $B(1,0)$. По теореме 23.2 имеем

$$B(1,0) = \widetilde{C}_2\widetilde{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)\widetilde{C}_1\widetilde{B}\left(\frac{1}{2},0\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{48} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{48} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{35}{192} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{16} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{8} \\ 2 & \frac{9}{4} & \frac{9}{8} & \frac{61}{96} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия (26.2):

$$P+QB(1,0)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{9}{8}&\frac{9}{16}&-\frac{35}{192}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&-\frac{9}{16}\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{pmatrix},$$

откуда

$$\det\big(P+QB(1,0)\big)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{vmatrix}=\frac{71}{32}\neq 0.$$

Вычислим начальный вектор по формуле (26.3):

$$Y_0=-\big(P+QB(1,0)\big)^{-1}Q\left[B_2\Big(1,\frac{1}{2}\Big)Z_1+B_2(1,1)Z_2\right].$$

В соответствии с (24.2) имеем $Z_1=S_1$, $Z_2=S_2$. Если учесть, что $B_2(1,1)=E_2$ по определению, а $B_2\left(1,\frac{1}{2}\right)=\widetilde{C}_2\widetilde{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ в силу следствия 23.5, то

$$Y_0=-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{9}{8}\\2&\frac{9}{4}&\frac{9}{8}&\frac{61}{96}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{48}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\right].$$

После вычислений получим

$$Y_0=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{487}{213}&-\frac{248}{71}\end{pmatrix}^{\top}.$$

Заметим, что мы получили вектор, первые две компоненты которого удовлетворяют краевым условиям $y(0)=y^{[1]}(0)=0$. На практике это дает возможность убедиться в правильности расчетов. Записав решение задачи (29.8), (29.9) в соответствии с теоремой 25.1 и выписав первую строку, получим решение краевой задачи (29.5), (29.6).

На полуинтервале $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ имеем

$$Y_0(x) = \widetilde{B}(x,0)Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} \\ 0 & 1 & x & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{487}{213} \\ -\frac{248}{71} \end{pmatrix},$$

откуда

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{124}{213}x^3 - \frac{487}{426}x^2 \\ \frac{124}{71}x^2 - \frac{487}{213}x \\ \frac{248}{71}x - \frac{487}{213} \\ -\frac{248}{71} \end{pmatrix}.$$

Если $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, то

$$Y_1(x) = \widetilde{B}\left(x, \frac{1}{2}\right)\left(\widetilde{C}_1 Y_0\left(\frac{1}{2} - 0\right) + S_1\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x - \frac{1}{2} & \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2} & -\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{6} \\ 0 & 1 & x - \frac{1}{2} & -\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{124}{213}\cdot\frac{1}{8} - \frac{487}{426}\cdot\frac{1}{4} \\ \frac{124}{71}\cdot\frac{1}{4} - \frac{487}{213}\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{248}{71}\cdot\frac{1}{2} - \frac{487}{213} \\ -\frac{248}{71} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right],$$

откуда после вычислений получим

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{107}{426}x^3 - \frac{35}{142}x^2 - \frac{463}{1704}x + \frac{9}{568} \\ -\frac{107}{142}x^2 - \frac{355}{71}x - \frac{463}{1704} \\ -\frac{107}{71}x - \frac{35}{71} \\ \frac{107}{71} \end{pmatrix}.$$

Поскольку точка $x=1$ принадлежит множеству ω^*, то решение задачи (29.8), (29.9) нужно искать в этой точке отдельно. Чтобы записать решение краевой задачи (29.5), (29.6) для уравнения, можно воспользоваться только свойством непрерывности этого решения. Для наглядности запишем решение краевой задачи (29.8), (29.9) для системы в точке $x = 1$:

$$Y_2(1)=\widetilde{C}_2 Y_1(1-0)+S_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{107}{426}-\frac{35}{142}-\frac{463}{1704}+\frac{9}{568}\\-\frac{107}{142}-\frac{355}{71}-\frac{463}{1704}\\-\frac{107}{71}-\frac{35}{71}\\\frac{107}{71}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Y_2(1)=\begin{pmatrix}-\frac{107}{142} & -\frac{2587}{1704} & 0 & 0\end{pmatrix}^{\top}.$$

По аналогии с начальным вектором на правильность расчетов указывает то, что две последние компоненты вектора $Y_2(1)$ удовлетворяют краевому условию $y^{[2]}(1)=y^{[3]}(1)=0$.

Таким образом, решение исходной задачи (29.5), (29.6) запишем в виде

$$y(x)=\frac{248x^3-487x^2}{426}\Theta_0(x)-\frac{428x^3+420x^2+463x-27}{1704}\Theta_1(x),$$

где $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристические функции промежутков $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$ соответственно. Заметим, что правый конец интервала для функции $\Theta_1(x)$ включен из соображений непрерывности решения в этой точке. ▲

5

Приближенное решение обобщенных квазидифференциальных уравнений

§ 30. Точное рекуррентное соотношение для обобщенного квазидифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим начальную задачу

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}(x)y' - a_{11}(x)y = f'(x), \qquad (30.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (a_{00}y' + a_{10}y)\Big|_{x=x_0} = y_0^1, \quad x_0 \in I, \qquad (30.2)$$

считая, что коэффициенты КДУ (30.1) удовлетворяют следующим условиям:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — ограничена и измерима на I функция;

(II) $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$;

(III) $a_{11}(x) = \alpha_{11}'(x)$, где функция $\alpha_{11}(x)$ принадлежит пространству $BV_{loc}^{+}(I)$ и имеет разрывы первого рода в конечном числе точек;

(IV) $f(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$.

Введем произвольным образом сетку

$$\omega_\nu = \left\{x_k \in I,\ k = \overline{0, \nu}\ :\ x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu\right\}. \qquad (30.3)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что множество ω^* носителей обобщенного коэффициента $a_{11}(x)$ содержится во множестве ω_ν, иначе к последнему можно присоединить точки из ω^* и упорядочить узлы новой сетки по возрастанию.

Построим некоторое трехточечное рекуррентное соотношение (трехчленную рекуррентную формулу) для начальной задачи (30.1), (30.2):

$$\alpha_k u(x_{k+1}) + \beta_k u(x_k) + \gamma_k u(x_{k-1}) = \eta_k, \quad k = \overline{1, \nu-1}, \tag{30.4}$$

$$u(x_0) = \varphi, \quad u(x_1) = \psi, \tag{30.5}$$

где $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ — некоторые фунукционалы на пространстве $BV^+_{loc}(I)$, а φ, ψ — некоторые сеточные[1)] функции.

Определение 30.1. *Точным рекуррентным соотношением* (ТРС), или *эквивалентной рекуррентной формулой*, для начальной задачи (30.1), (30.2) назовем соотношение вида (30.4), (30.5), удовлетворяющее условиям:

1) $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ есть функционалы от коэффициентов уравнения (30.1), причем η_k — линейный относительно $f(x)$ функционал;
2) $u(x) = y(x)$, $x \in \omega_\nu$, где $y(x)$ — решение исходной задачи (30.1), (30.2), а $u(x)$ — решение задачи (30.4), (30.5).

Представим функцию $\alpha_{11} \in BV^+_{loc}(I)$ в виде суммы непрерывной $\alpha^c_{11}(x)$ и дискретной $\alpha^d_{11}(x) = \sum\limits_{y \leqslant x} \Delta\alpha_{11}(y)$, $y \in \omega^*$, составляющих, т. е. $\alpha_{11}(x) = \alpha^c_{11}(x) + \alpha^d_{11}(x)$.

Через $\widetilde{K}(x, s)$ обозначим функцию Коши определяющего для (30.1) КДУ

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}y' - (\alpha^c_{11})'\, y = 0. \tag{30.6}$$

1) *Сеточной* функцией называют функцию, определенную в узлах сетки [**118**, с. 67].

Пусть
$$M_k = \begin{cases} \Delta\alpha_{11}(x_k), & x_k \in \omega^*; \\ 0, & x_k \in \omega_\nu \backslash \omega^*. \end{cases} \tag{30.7}$$

Выберем любые три последовательные узлы $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ сетки ω_ν. При этом, как было оговорено выше, на интервале (x_{k-1}, x_{k+1}) отсутствуют разрывы функции $\alpha_{11}(x)$, кроме разве что точки x_k.

Теорема 30.2. *При условиях (I)–(IV) ТРС для начальной задачи (30.1), (30.2) имеет вид*
$$\begin{gathered} \frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}} u_{k+1} - \left(M_k + \frac{\widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} + \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \right) u_k + \\ + \left(\frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1} \widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} - \widetilde{K}^{[1]\{1\}}_{k,k-1} \right) u_{k-1} = \frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}} \mathcal{I}_{k,k+1} - \\ - \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \mathcal{I}_{k-1,k} + \mathcal{I}^{[1]}_{k-1,k}, \quad k = \overline{1, \nu-1}, \end{gathered} \tag{30.8}$$
$$u_0 = y_0, \quad u_1 = \widetilde{K}^{\{1\}}_{10} y_0 + \widetilde{K}_{10} y_0^1 + \mathcal{I}_{01}, \tag{30.9}$$
где $u_k = u(x_k)$ *и*
$$\widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k,k-1} = \widetilde{K}^{[i]\{j\}}(x_k - 0, x_{k-1}), \quad i, j \in \{0, 1\}, \tag{30.10}$$
$$\mathcal{I}^{[i]}_{k-1,k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}^{[i]}(x_k - 0, t) df(t), \quad i \in \{0, 1\}. \tag{30.11}$$

Доказательство. С помощью вектора $Y = \left(y, y^{[1]}\right)^\top$, где квазипроизводная $y^{[1]} = a_{00}(x) y' + a_{10}(x) y$, начальная задача (30.1), (30.2) приводится к задаче вида (7.8), (7.9):
$$Y' = \begin{pmatrix} -a_{00}^{-1} a_{10} & a_{00}^{-1} \\ a_{11} - a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} & a_{01} a_{00}^{-1} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix}, \tag{30.12}$$
$$Y(x_0) = \left(y_0, y_0^1\right)^\top.$$

Пусть $B(x,s)$ — фундаментальная матрица однородной $(f\equiv 0)$ системы (30.12). Тогда справедлива формула Коши (8.2), положив в которой $x=x_k$, $s=x_{k-1}$, получим

$$Y(x_k)=B(x_k,x_{k-1})Y(x_{k-1})+\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}B(x_k,s)dF(s). \qquad (30.13)$$

По свойству (d) фундаментальной матрицы (см. теорему 3.2):

$$B(x_k,x_{k-1})=\big[E+\Delta C(x_k)\big]\,B(x_k-0,x_{k-1})=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ M_k & 1\end{pmatrix}\widetilde{B}(x_k-0,x_{k-1}), \qquad (30.14)$$

где $\widetilde{B}(x,s)$ — фундаментальная матрица определяющей системы для (30.12), т. е. системы, эквивалентной уравнению (30.6). Если учесть структуру (13.7) этой матрицы, то в обозначениях (30.10) равенство (30.14) запишется в виде

$$B(x_k,x_{k-1})=\begin{pmatrix}\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1} & \widetilde{K}_{k,k-1}\\ \widetilde{K}^{\{1\}[1]}_{k,k-1}+M_k\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1} & \widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}+M_k\widetilde{K}_{k,k-1}\end{pmatrix}. \qquad (30.15)$$

Пусть $y_k=y(x_k)$. Подставим (30.15) в формулу (30.13) и запишем последнюю покоординатно, а также учтем обозначения (30.11). Тогда получим рекуррентные соотношения

$$y_k=\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}y_{k-1}+\widetilde{K}_{k,k-1}y^{[1]}_{k-1}+\mathcal{I}_{k-1,k}, \qquad (30.16)$$

$$y^{[1]}_k=\Big(\widetilde{K}^{\{1\}[1]}_{k,k-1}+M_k\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}\Big)y_{k-1}+\Big(\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}+M_k\widetilde{K}_{k,k-1}\Big)y^{[1]}_{k-1}+$$
$$+\mathcal{I}^{[1]}_{k-1,k}+M_k\mathcal{I}_{k-1,k} \qquad (30.17)$$

для $k=\overline{1,\nu}$. Из соотношения (30.16) находим

$$y^{[1]}_{k-1}=\frac{y_k-\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}y_{k-1}-\mathcal{I}_{k-1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}},\quad k=\overline{1,\nu}. \qquad (30.18)$$

Далее, заменяя k на $k+1$, имеем также

$$y_k^{[1]} = \frac{y_{k+1} - \widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k} y_k - \mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}}, \quad k = \overline{0, \nu-1}. \tag{30.19}$$

В результате подстановки выражений (30.18) и (30.19) в равенство (30.17), получим для $k = \overline{1, \nu - 1}$ соотношение

$$\frac{y_{k+1} - \widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k} y_k - \mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} = \left(\widetilde{K}^{\{1\}[1]}_{k,k-1} + M_k \widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}\right) y_{k-1} +$$
$$+ \left(\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1} + M_k \widetilde{K}_{k,k-1}\right) \frac{y_k - \widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1} y_{k-1} - \mathcal{I}_{k-1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} +$$
$$+ \mathcal{I}^{[1]}_{k-1,k} + M_k \mathcal{I}_{k-1,k}.$$

В обозначениях

$$u_k = y_k, \quad \alpha_k = \frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}}, \ \beta_k = -M_k - \frac{\widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} - \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}},$$
$$\gamma_k = \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1} \widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} - \widetilde{K}^{[1]\{1\}}_{k,k-1},$$
$$\eta_k = \frac{\mathcal{I}_{k,k+1}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} - \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} \mathcal{I}_{k-1,k} + \mathcal{I}^{[1]}_{k-1,k}$$

имеем трехточечное рекуррентное соотношение вида (30.4). Поскольку функция Коши $\widetilde{K}(x,s)$ зависит от коэффициентов уравнения (30.1), то $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k$ есть функционалы от этих коэффициентов, причем η_k зависит линейно от функции $f(x)$. Начальные условия (30.9) легко получить, если учесть начальные условия (30.2) и соотношения (30.16). Следовательно, в силу определения 30.1 полученное рекуррентное соотношение является точным для задачи (30.1), (30.2), что и требовалось доказать. ■

Следствие 30.3. *ТРС для однородной* $(f \equiv 0)$ *начальной задачи* (30.1), (30.2) *имеет вид*

$$\frac{1}{\widetilde{K}_{k+1,k}}u_{k+1} - \left(M_k + \frac{\widetilde{K}^{\{1\}}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k+1,k}} + \frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k+1,k}}{\widetilde{K}_{k,k-1}}\right)u_k + \\ + \left(\frac{\widetilde{K}^{[1]}_{k,k-1}\widetilde{K}^{\{1\}}_{k,k-1}}{\widetilde{K}_{k,k-1}} - \widetilde{K}^{[1]\{1\}}_{k,k-1}\right)u_{k-1} = 0,\ k = \overline{1,\nu-1}, \quad (30.20)$$

$$u_0 = y_0, \quad u_1 = \widetilde{K}^{\{1\}}_{10}y_0 + \widetilde{K}_{10}y_0^1\,. \quad (30.21)$$

Замечание 30.4. Если (30.1) является КДУ с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ-особенностями, т. е. имеет вид (27.1) при $n = m = 1$, то в выражениях (30.10), (30.11) $\widetilde{K}^{[i]\{j\}}(x_k - 0, x_{k-1}) = \widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k-1}(x_k, x_{k-1})$, где $\widetilde{K}_{k-1}(x_k, x_{k-1})$ — функция Коши определяющего для (30.1) КДУ на полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$, а $\widetilde{K}^{[i]\{j\}}_{k-1}(x_k, x_{k-1})$ — ее смешанные квазипроизводные.

Замечание 30.5. Поскольку $u_k = u(x_k) = y(x_k) = y_k$, то всюду далее в ТРС будем записывать y_k вместо u_k, потому что это, собственно, и есть значение решения начальной задачи в точке x_k.

Пример 30.6. Построим ТРС для следующих задач:

$$y'' + \sum_{j=1}^{N} c_j\delta(x - x_j^*)y = c_0e^x, \quad y(a) = 0,\ y'(a) = 1; \quad (30.22)$$

$$\left(\sqrt{1+x}y'\right)' + \sum_{j=1}^{N} c_j\delta(x - x_j^*)y = 0, \quad y(a) = 1,\ y'(a) = 0, \quad (30.23)$$

где $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,N}$, $x_j^* \in (a,b]$, $a \geqslant -1$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

▼ Введем сетку $\omega_\nu = \{x_k \in [a,b] : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu = b\}$ так, чтобы $x_j^* \in \omega_\nu$. Выберем любые три ее последовательные узлы $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ и построим ТРС вида (30.8), (30.9).

Для обеих начальных задач по формуле (30.7) находим

$$M_k = \begin{cases} -c_j, & x_k = x_j^*; \\ 0, & x_k \neq x_j^*, \end{cases} \qquad k = \overline{0, \nu}, \ j = \overline{1, N}. \tag{30.24}$$

Сначала для задачи (30.22) вычислим функцию Коши определяющего уравнения $y' = 0$ и ее смешанные квазипроизводные. Для этого используем теорему 14.1. Отметим, что для определяющего уравнения квазипроизводная $y^{[1]}(x)$ совпадает с обычной производной $y'(x)$, а ФСР образуют функции $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$. Вычислим (квази)вронскиан решений

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда по формуле (14.1) имеем

$$\widetilde{K}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - s$$

Заметим, что идентичное выражение для функции Коши можно получить, если воспользоваться леммой 29.2.

По той же формуле (14.1) находим

$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Далее по формуле (30.11) вычисляем

$$I_{k-1,k} = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t)\, d(c_0 e^t) = c_0 \big[e^{x_k} - (1 + h_k) e^{x_{k-1}} \big],$$

$$I_{k,k+1} = c_0\big[e^{x_{k+1}} - (1 + h_{k+1})e^{x_k}\big],$$

$$I^{[1]}_{k-1,k} = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} 1\, d(c_0 e^t) = c_0\big[e^{x_k} - e^{x_{k-1}}\big],$$

где $h_k = x_k - x_{k-1},\ k = \overline{1,\nu}$.

Начальные значения y_0, y_1 для ТРС находим, воспользовавшись формулами (30.21):

$$y_0 = y(a) = 0, \quad y_1 = \widetilde{K}^{\{1\}}(x_1,a)y(a) + \widetilde{K}(x_1,a)y'(a) = x_1 - a\,.$$

Следовательно, ТРС (30.8), (30.9) для задачи (30.22) имеет вид

$$y_{k+1} - \left[M_k h_{k+1} + \frac{h_{k+1}+h_k}{h_k}\right]y_k + \frac{h_{k+1}}{h_k}y_{k-1} =$$

$$= c_0\left[e^{x_{k+1}} - \frac{h_{k+1}+h_k}{h_k}e^{x_k} + \frac{h_{k+1}}{h_k}e^{x_{k-1}}\right],\ k=\overline{1,\nu-1},$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = x_1 - a.$$

Если носители обобщенного коэффициента КДР в задачи (30.22) размещены так, что на отрезке $[a,b]$ можно построить равномерную сетку $\omega_\nu = \{x_k = kh,\ \ k=\overline{0,\nu}\}$ с шагом $h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{\nu}$, то в таком случае $h_1 = \ldots = h_\nu = h$ и ТРС запишется в виде

$$y_{k+1} - (2+M_k h)y_k + y_{k-1} = c_0\big[e^{x_{k+1}} - 2e^{x_k} + e^{x_{k-1}}\big], \qquad (30.25)$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = h,$$

где $k=\overline{1,\nu-1}$. В частном случае, когда ω^* совпадает с множеством внутренних узлов равномерной сетки ω_ν, $c_0=0$, а c_j равны λh ($\lambda \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,\nu}$), соотношение (30.25) совпадает с конечно-разностным уравнением

$$y_{k+1} - (2 - \lambda h^2)y_k + y_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1,\nu-1},$$

которое является классической разностной аппроксимацией (второго порядка) на трехточечном шаблоне $x_k - h$, x_k, $x_k + h$ обыкновенного дифференциального уравнения $y'' + \lambda y = 0$ [**118**, с. 112].

Для задачи (30.23) функцию Коши определяющего уравнения

$$\left(\sqrt{1+x}y'\right)' = 0 \tag{30.26}$$

и ее смешанные квазипроизводные (квазипроизводная функции $y(x)$ в смысле уравнения (30.26) определяется теперь выражением $y^{[1]} = \sqrt{1+x}y'$) вычисляем по аналогии. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что

$$\widetilde{K}(x,s) = 2\big(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+s}\big),$$

$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = 1, \quad \widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s) = 0.$$

Из вида квазипроизводной $y^{[1]}(x)$ следует, что для задачи (30.23) второе начальное условие $y'(a)=0$ эквивалентно условию $y^{[1]}(a) = 0$. Таким образом, ТРС (30.20), (30.21) для задачи (30.23) запишется в виде

$$y_{k+1} - \left[2M_k\big(\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_k}\,\big) + \frac{\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_{k-1}}}{\sqrt{1+x_k} - \sqrt{1+x_{k-1}}}\right] y_k +$$

$$+ \frac{\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k} - \sqrt{1+x_{k-1}}} y_{k-1} = 0 \ (k = \overline{1,\nu-1}), \quad y_0 = y_1 = 1.$$

▲

Пример 30.7. Вычислим значение $y(e)$ решения начальной задачи

$$(a_0(x)y')' + 2\delta(x-2)y = 0, \tag{30.27}$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 3, \tag{30.28}$$

где $a_0(x)$ равно 1 при $x \in [1,2)$ и x при $x \in [2,e]$.

▼ *Первый способ.* Вычислим значения $y(e)$, построив ТРС для задачи (30.27), (30.28). Для обобщенного КДУ (30.27) множество носителей $\omega^* = \{x_1^* = 2\}$. Построим сетку

$$\omega_2 = \{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = e\}.$$

Вычислим функцию Коши определяющего для (30.27) КДУ

$$\big(a_0(x)y'\big)' = 0$$

и ее смешанные квазипроизводные. На интервале $x \in [1,2)$ определяющим является уравнение $y'' = 0$, функция Коши которого, а также ее смешанные квазипроизводные найдены в предыдущем примере:

$$\widetilde{K}_0(x,s) = x - s, \ \widetilde{K}_0^{[1]}(x,s) = \widetilde{K}_0^{\{1\}}(x,s) = 1, \ \widetilde{K}_0^{[1]\{1\}}(x,s) = 0.$$

На отрезке $[2,e]$ определяющее уравнение имеет вид:

$$(xy')' = 0. \tag{30.29}$$

Поскольку это уравнение является вырожденным КДУ, то его функцию Коши легко вычислить в соответствии с леммой 29.2, используя формулу (29.3) при $k = m = n = 1$, $\widetilde{a}^k_{00}(x) = x$:

$$\widetilde{K}_1(x,s) = \int\limits_s^x \frac{dt}{t} = \ln\frac{x}{s}.$$

Если далее учесть, что квазипроизводная в смысле исходного уравнения (30.27), а, следовательно, и определяющего уравнения (30.29), вычисляется по формуле $y^{[1]} = xy'$, а функции $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \ln x$ образуют ФСР уравнения (30.29), то по формуле (14.1) можно найти

$$\widetilde{K}_1^{[1]}(x,s) = \widetilde{K}_1^{\{1\}}(x,s) = 1, \quad \widetilde{K}_1^{[1]\{1\}}(x,s) = 0.$$

Таким образом, для любого $s \in [1,e]$ имеем

$$\widetilde{K}(x,s) = \begin{cases} x - s, & x \in [1,2); \\ \ln\frac{x}{s}, & x \in [2,e], \end{cases} \tag{30.30}$$

$$\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = 1, \quad \widetilde{K}^{[1]\{1\}}(x,s) = 0. \tag{30.31}$$

Очевидно, для задачи (30.27), (30.28) второе начальное условие эквивалентно условию $y^{[1]}(1) = 3$, а $M_1 = -2$. Поэтому, в силу замечания 30.4, ТРС (30.20), (30.21) для данной задачи запишется в виде

$$\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}y_2+\left(1-\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}\right)y_1+y_0=0,\quad y_0=0,\ y_1=3,$$

откуда легко вычислить $y(e)=y_2=3\ln\frac{e}{2}\left(\frac{1}{\ln\frac{e}{2}}-1\right)=3\ln 2.$

Второй способ. Найдем решение задачи (30.27), (30.28), используя теорему 25.1. С помощью вектора $Y=\left(y,y^{[1]}\right)^{\top}$ приводим начальную задачу к виду(22.1), (22.2):

$$Y'=\begin{pmatrix}0 & \Theta_0(x)+\frac{1}{x}\Theta_1(x)\\ -2\delta(x-2) & 0\end{pmatrix}Y, \tag{30.32}$$

$$Y(1)=\left(0,3\right)^{\top}, \tag{30.33}$$

где $\Theta_0(x),\Theta_1(x)$ — характеристические функции промежутков $[1,2)$ и $[2,e]$ соответственно. Для этой задачи имеем

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_1(x)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{x}\\0&0\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}0&0\\-2&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$R_0(x)=R_1(x)=S_1=S_2=0.$$

С учетом выражений (30.30), (30.31), полученных для функции Коши $\widetilde{K}(x,s)$ и ее смешанных квазипроизводных, находим фундаментальные матрицы определяющей для (30.32) системы $Y'=A_k(x)Y$ на каждом из промежутков:

$$\widetilde{B}_0(x,s)=\begin{pmatrix}1&x-s\\0&1\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}1&\ln\frac{x}{s}\\0&1\end{pmatrix}.$$

Далее для нахождения решения задачи (30.32), (30.33) воспользуемся рекуррентными формулами (25.1)–(25.3):

$$Y_0(x)=\widetilde{B}_0(x,1)Y_0=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3\\3\end{pmatrix},\ x\in[1,2),$$

$$Y_1(x)=\widetilde{B}_1(x,2)\widetilde{C}_0Y_0(2-0)=\begin{pmatrix}1&\ln\frac{x}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3\ln\frac{x}{2}\\-3\end{pmatrix}$$

при $x\in[2,e]$, откуда $y(e)=y_1(e)=3-3\ln\frac{e}{2}=3\ln 2.$ ▲

§ 31. Точное рекуррентное соотношение для обобщенного квазидифференциального уравнения произвольного порядка

Рассмотрим начальную задачу для КДУ порядка $q\ (= m+n)$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \quad (31.1)$$

$$y^{[r]}(x_0) = y_0^r, \quad r=\overline{0,q-1}, \quad x_0\in I, \quad (31.2)$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $f_k(x)$ удовлетворяют указанным в § 10 и §15 условиям (I)–(IV), а квазипроизводные $y^{[r]}(x)$ определяются выражениями (15.2).

Введем сетку ω_ν вида (30.3) и построим для начальной задачи (31.1), (31.2) некоторое $(q+1)$-точечное рекуррентное соотношение

$$\alpha_k^0 u(x_k)+\alpha_k^1 u(x_{k+1})+\ldots+\alpha_k^q u(x_{k+q}) = \eta_k, \quad k=\overline{0,\nu-q}, \quad (31.3)$$

$$u(x_0)=\varphi_0,\ u(x_1)=\varphi_1,\ \ldots\ ,\ u(x_{q-1})=\varphi_{q-1}, \quad (31.4)$$

где α_k^i, $i=\overline{0,q}$, η_k — некоторые функционалы на пространстве $BV_{loc}^+(I)$, а φ_j, $j=\overline{0,q-1}$, — некоторые сеточные функции.

Определение 31.1. Соотношение вида (31.3), (31.4) назовем *точным рекуррентным соотношением* (ТРС), или эквивалентной рекуррентной формулой для начальной задачи (31.1), (31.2), если выполняются следующие условия:

1) α_k^j, $j=\overline{0,q}$, η_k — функционалы от коэффициентов уравнения (31.1);

2) $u(x) = y(x)$, $x\in\omega_\nu$, де $y(x)$ — точное решение начальной задачи (31.1), (31.2), а $u(x)$ — решение задачи (31.3), (31.2).

Введем следующие обозначения:

$$\beta^{ij}_{p,r} = K^{[i-1]\{q-j\}}(x_p, x_r),\ i,j=\overline{1,q},\ x_p, x_r \in I;$$
$$\beta^{i0}_{p,r} = \sum_{j=k+1}^{q} \int\limits_{x_p}^{x_r} K^{[i-1]\{q-j\}}(x,t)df_{q-j}(t). \tag{31.5}$$

Теорема 31.2. *Пусть выполняются условия (I)–(IV). Тогда для начальной задачи (31.1), (31.2) существует единственное ТРС, которое имеет вид*

$$\Delta^0_k \cdot u_k + \Delta^1_k \cdot u_{k+1} + \ldots + \Delta^q_k \cdot u_{k+q} = \Delta^{q+1}_k, \tag{31.6}$$

$$y_0 = y^0_0, \quad y_s = \sum_{j=1}^{q} \beta^{1j}_{s0} y^{j-1}_0 + \beta^{10}_{0s} \ \ (s=\overline{1,q}), \tag{31.7}$$

где $u_j = u(x_j)$,

$$\Delta^0_k = \begin{vmatrix} \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \ldots & \beta^{1,q}_{k+1,k} \\ \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \ldots & \beta^{1,q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \ldots & \beta^{1,q}_{k+q,k} \end{vmatrix}, \tag{31.8}$$

$$\Delta^{q+1}_k = -\begin{vmatrix} \beta^{10}_{k,k+1} & \beta^{12}_{k+1,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ \beta^{10}_{k,k+2} & \beta^{12}_{k+2,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{10}_{k,k+q} & \beta^{12}_{k+q,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix}, \tag{31.9}$$

а Δ^i_k, $i=\overline{1,q}$, *— взятые с обратным знаком алгебраические дополнения к элементам первого столбца в определителе* Δ^0_k.

Доказательство. Начальную задачу (31.1), (31.2) с помощью вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[q-1]}\right)^\top$ из квазипроизводных (15.2) приведем к начальной задаче (7.8), (7.9), где матрица-мера $C'(x)$ определена на с. 90, $F'(x)$ имеет вид (15.4), а $Y_0 = \left(y_0, y^1_0, \ldots, y^{q-1}_0\right)^\top$. Решение последней задачи допускает представление в форме Коши (см. (15.13) или (8.4)):

$$Y(x) = B(x, x_0)Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} B(x,t)dF(t).$$

Выберем любые $q+1$ последовательных узлов сетки ω_ν:

$$x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{k+s-1} < x_{k+s} < \ldots < x_{k+q}.$$

Положив в формуле Коши $x = x_{k+s}$, $x_0 = x_k$, в обозначениях $Y_k = Y(x_k)$, $B_{k+s,k} = B(x_{k+s}, x_k)$ получим

$$Y_{k+s} = B_{k+s,k}Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+s}} B(x_{k+s}, t)dF(t), \quad s = \overline{1,q}. \tag{31.10}$$

Учитывая структуру (13.7) фундаментальной матрицы, первые уравнения систем (31.10) в обозначениях (31.5) запишем следующим образом (обращаем внимание, что вектор $F'(x)$ имеет вид (15.4)):

$$y_{k+s} = \sum_{j=1}^{q} \beta^{1j}_{k+s,k} y_k^{[j-1]} + \beta^{10}_{k,k+s}, \quad s = \overline{1,q}. \tag{31.11}$$

Образуем определитель

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} y_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_{k+1} - \beta^{10}_{k,k+1} & \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ y_{k+2} - \beta^{10}_{k,k+2} & \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+q} - \beta^{10}_{k,k+q} & \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \ldots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix}.$$

Умножив j-ый столбец этого определителя на $y_k^{[j-2]}$ для $j = \overline{2, q+1}$, в силу (31.11) получим, что первый столбец этого определителя является линейной комбинацией остальных столбцов и, следовательно, $\Delta_k = 0$. Отсюда следует равенство

$$\begin{vmatrix} y_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ y_{k+1} & \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ y_{k+2} & \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+q} & \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^{10}_{k,k+1} & \beta^{11}_{k+1,k} & \beta^{12}_{k+1,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+1,k} \\ \beta^{10}_{k,k+2} & \beta^{11}_{k+2,k} & \beta^{12}_{k+2,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{10}_{k,k+q} & \beta^{11}_{k+q,k} & \beta^{12}_{k+q,k} & \dots & \beta^{1q}_{k+q,k} \end{vmatrix}.$$

Если теперь определитель в левой части разложить по элементам первого столбца и использовать обозначение (31.8)–(31.9), то получим рекуррентное соотношение (31.6). В обозначениях

$$u_k = u(x_k) = y(x_k) = y_k, \;\; k = \overline{0,\nu},$$

$$\alpha^j_k = \Delta^j_k, \quad \eta_k = \Delta^{q+1}_k, \;\; k = \overline{0,\nu-q}, \;\; j = \overline{0,q},$$

соотношение (31.6) является $(q+1)$-точечной рекуррентной формулой вида (31.3). Поскольку функции (31.5) зависят от коэффициентов уравнения (31.1), то для $i = \overline{0,q+1}$ определители Δ^i_k, являются функционалами от этих коэффициентов.

Для отыскания явного вида сеточных функций φ_j, $j = \overline{0,q-1}$, в условиях (31.4) мы используем начальные условия (31.2) и равенства (31.11) при $k = 0$. В результате получим формулы (31.7). Таким образом, в силу определения 31.1 полученное рекуррентное соотношение (единственность которого вытекает из построения) является точным для задачи (31.1), (31.2), что и требовалось доказать. ■

Следствие 31.3. *Для однородной* $(f_r(x) \equiv 0, r = \overline{0,m-1})$ *начальной задачи* (31.1), (31.2) *ТРС имеет вид*

$$\Delta^0_k y_k + \Delta^1_k y_{k+1} + \ldots + \Delta^q_k y_{k+q} = 0, \;\; k = \overline{0,\nu-q}. \tag{31.12}$$

$$y_0 = y^0_0, \quad y_s = \sum_{j=1}^{q} \beta^{1j}_{s0} y^{j-1}_0, \;\; s = \overline{1,q}. \tag{31.13}$$

В завершение заметим, что k-точечные рекуррентные соотношения для обобщенных КДУ являются аналогами разностных схем[2)] для обычных дифференциальных уравнений. Однако, если в классической теории разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений строятся путем замены коэффициентов уравнения, неизвестной функции и ее производных как функций непрерывного аргумента x значениями этих[3)] функций в узлах сетки, то в случае обобщенных КДУ такой подход к построению рекуррентных соотношений принципиально невозможен по той причине, что обобщенные функции, вобще говоря, не имеют значений в отдельных точках [**2**, с. 46], [**16**, с. 25].

Пример 31.4. В качестве иллюстративного примера построим ТРС для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \quad x \geqslant 0. \tag{31.14}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1. \tag{31.15}$$

▼ Посмотрим на уравнение (31.14) как на КДУ

$$(y'')'' - (5y')' + 4y = 0$$

и введем квазипроизводные по формулам (10.3):

$$y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = y'', \quad y^{[3]} = -y''' + 5y'. \tag{31.16}$$

Фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (31.14) образуют функции

$$\varphi_1(x) = e^x,\ \varphi_2(x) = e^{-x},\ \varphi_3(x) = e^{2x},\ \varphi_4(x) = e^{-2x}.$$

[2)] *Разностной схемой* называют совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих заданное дифференциальное уравнение и дополнительные условия (начальные, краевые и т. д.) [**118**, с. 86].

[3)] При этом производные неизвестной функции аппроксимируются с определенным порядком значениями самой неизвестной функции в узлах сетки.

Функцию Коши этого уравнения и ее смешанные квазипроизводные найдем, используя формулу (14.3). Сначала вычислим квазивронскиан решений

$$W(s) = \begin{vmatrix} e^s & e^{-s} & e^{2s} & e^{-2s} \\ e^s & -e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s} \\ e^s & e^{-s} & 4e^{2s} & 4e^{-2s} \\ 4e^s & -4e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s} \end{vmatrix} = -72.$$

Тогда для функции Коши имеем формулу

$$K(x,s) = -\frac{1}{72}\begin{vmatrix} e^s & e^{-s} & e^{2s} & e^{-2s} \\ e^s & -e^{-s} & 2e^{2s} & -2e^{-2s} \\ e^s & e^{-s} & 4e^{2s} & 4e^{-2s} \\ e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{2\,\mathrm{sh}(x-s) - \mathrm{sh}\,2(x-s)}{6}.$$

Другие квазипроизводные функции $K(x,s)$ вычисляем по аналогии:

$$K^{\{1\}}(x,s) = \frac{-\,\mathrm{ch}(x-s) + \mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{\{2\}}(x,s) = \frac{-\,\mathrm{sh}(x-s) + 2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{\{3\}}(x,s) = \frac{4\,\mathrm{ch}(x-s) - \mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]}(x,s) = \frac{\mathrm{ch}(x-s) - \mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{1\}}(x,s) = \frac{-\,\mathrm{sh}(x-s) + 2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{2\}}(x,s) = \frac{-\,\mathrm{ch}(x-s) + 4\,\mathrm{ch}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[1]\{3\}}(x,s) = \frac{4\,\mathrm{sh}(x-s) - 2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]}(x,s) = \frac{\mathrm{sh}(x-s) - 2\,\mathrm{sh}\,2(x-s)}{3},$$

$$K^{[2]\{1\}}(x,s) = \frac{-\operatorname{ch}(x-s) + 4\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[2]\{2\}}(x,s) = \frac{-\operatorname{sh}(x-s) + 8\operatorname{sh}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[2]\{3\}}(x,s) = \frac{4\operatorname{ch}(x-s) - 4\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[3]}(x,s) = \frac{4\operatorname{ch}(x-s) - \operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[3]\{1\}}(x,s) = \frac{-4\operatorname{sh}(x-s) + 2\operatorname{sh}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[3]\{2\}}(x,s) = \frac{-4\operatorname{ch}(x-s) + 4\operatorname{ch}2(x-s)}{3},$$
$$K^{[3]\{3\}}(x,s) = \frac{16\operatorname{sh}(x-s) - 2\operatorname{sh}2(x-s)}{3}.$$

Если для удобства записей обозначить $t=x-s$, то фундаментальная матрица, соответствующая дифференциальному уравнению (31.14), запишется в виде $B(x,s) = B(x-s) = B(t)$, причем по теореме (13.5) получим

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{4\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{-\operatorname{sh}t+2\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{-\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{2\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}2t}{3} \\ \frac{4\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{-\operatorname{ch}t+4\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{-\operatorname{sh}t+2\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}2t}{3} \\ \frac{4\operatorname{ch}t-4\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{-\operatorname{sh}t+8\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{-\operatorname{ch}t+4\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}2t}{3} \\ \frac{16\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{4\operatorname{ch}t+4\operatorname{ch}2t}{3} & \frac{-4\operatorname{sh}t+2\operatorname{sh}2t}{3} & \frac{4\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}2t}{3} \end{pmatrix}.$$

На полуоси $\mathbb{R}_+$ построим равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_k = kh,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

и выберем любые пять последовательных узлов

$$x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4}.$$

Положив $s = x_k$, $x = x_{k+i}$, получим, что

$$B(x_{k+i}, x_k) = B(x_{k+i} - x_k) = B(ih),\ i = \overline{1,4}.$$

Далее из первых строк матриц $B(ih)$, $i=\overline{1,4}$, образуем определитель Δ_k^0 и вычислим его, а следовательно, — и определители $\Delta_k^i, i=\overline{1,4}$ (см. теорему 31.2). Получим следующие коэффициенты ТРС (31.12) для дифференциального уравнения (31.14):

$$\Delta_k^0=\Delta_k^4=\frac{3\operatorname{ch}h-2\operatorname{ch}2h-2\operatorname{ch}3h+2\operatorname{ch}6h-\operatorname{ch}7h}{72},$$

$$\Delta_k^1=\Delta_k^3=\frac{-2+\operatorname{ch}h-\operatorname{ch}2h-\operatorname{ch}3h+2\operatorname{ch}4h+\operatorname{ch}5h}{72}+$$
$$+\frac{\operatorname{ch}6h-2\operatorname{ch}7h-\operatorname{ch}8h+\operatorname{ch}9h}{72},$$

$$\Delta_k^2=\frac{2+2\operatorname{ch}h-4\operatorname{ch}3h+\operatorname{ch}6h-\operatorname{ch}8h+2\operatorname{ch}9h-\operatorname{ch}10h}{72}.$$

Разделив обе части полученного ТРС на Δ_k^0, имеем следующее соотношение:

$$y_{k+4}-2(\operatorname{ch}h+\operatorname{ch}2h)y_{k+3}+2(1+\operatorname{ch}h+\operatorname{ch}3h)y_{k+2}-$$
$$-2(\operatorname{ch}h+\operatorname{ch}2h)y_{k+1}+y_k=0,\ \ k=0,1,2\ldots \quad (31.17)$$

Из начальных условий (31.15) в силу (31.13) имеем

$$\begin{gathered}y_0=0,\quad y_1=-\frac{e^h}{3}+\frac{e^{2h}}{4}+\frac{e^{-2h}}{12},\\ y_2=-\frac{e^{2h}}{3}+\frac{e^{4h}}{4}+\frac{e^{-4h}}{12},\quad y_3=-\frac{e^{3h}}{3}+\frac{e^{6h}}{4}+\frac{e^{-6h}}{12}.\end{gathered}\quad (31.18)$$

Для контроля предлагаем читателю найти значение решения задачи (31.14), (31.15), например, в точках $x_1=0.04$ и $x_2=1$ любым из известных методов, а также с помощью ТРС (31.17), (31.18) (*совет: для этого достаточно найти* y_4, *выбрав* $h_1=0.01$ *и* $h_2=1$). ▲

Пример 31.5. Построим ТРС для начальной задачи

$$y^{IV} - 5\left(\sum_{j=1}^{N} h\delta(x-x_j^*)y'\right)' + 4\sum_{j=1}^{N} h\delta(x-x_j^*)y = 0, \tag{31.19}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \;\; y''(0) = y'''(0) = 1. \tag{31.20}$$

где $N \in \mathbb{N},\; 0 \leqslant x_1^* < x_2^* < \ldots < x_N^*,\; h = x_{j+1}^* - x_j^* = \mathrm{const}\,.$

▼ Уравнение (31.19) является вырожденным КДР с множеством носителей обобщенных коэффициентов

$$\omega^* = \left\{x_j^*,\; j = \overline{1,N}\right\}.$$

Введем квазипроизводные в соответствии с формулами (29.2) при $n=m=2$:

$$y^{[1]} = y',\; y^{[2]} = y'',\; y^{[3]} = -y''' + 5\sum_{k=1}^{k} h\delta(x-x_k)y'. \tag{31.21}$$

Далее уравнение (31.19) приведем к дифференциальной системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{N} 5h\delta(x-x_k) & 0 & -1 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} 4h\delta(x-x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}. \tag{31.22}$$

Запишем матрицу скачков ее коэффициентов

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5h & 0 & 0 \\ 4h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Определяющее для (31.17) дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{IV} = 0. \tag{31.23}$$

Заметим, что уравнение (31.23) нужно рассматривать как КДУ, квазипроизводные для которого вводятся в контексте формул (31.21).

Вычислим функцию Коши $\widetilde{K}(x,s)$ определяющего уравнения (31.23) и ее смешанные квазипроизводные. Для этого в который раз воспользуемся теоремой 14.1, где ФСР определяющего уравнения состоит, очевидно, из функций $\varphi_1(x)=1, \varphi_2(x)=x, \varphi_3(x)=x^2, \varphi_4(x)=x^3$. Легко убедиться, что

$$\widetilde{K}(x,s) = -\frac{(x-s)^3}{6}, \quad \widetilde{K}^{\{1\}}(x,s) = -\widetilde{K}^{[1]}(x,s) = \frac{(x-s)^2}{2}$$

$$\widetilde{K}^{\{2\}}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}[1]}(x,s) = x-s, \quad \widetilde{K}^{[2]}(x,s) = -(x-s)$$

$$\widetilde{K}^{\{3\}}(x,s) = \widetilde{K}^{\{2\}[1]}(x,s) = \widetilde{K}^{\{1\}[2]}(x,s) = \widetilde{K}^{[3]}(x,s) = 1,$$

все остальные смешанные квазипроизводные равны нулю. Тогда по теореме 13.5 фундаментальная матрица, соответствующая определяющему уравнению (31.23), имеет вид

$$\widetilde{B}(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & x-s & \frac{(x-s)^2}{2} & -\frac{(x-s)^3}{6} \\ 0 & 1 & x-s & -\frac{(x-s)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -(x-s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На полуоси $\mathbb{R}_+$ построим равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_k = kh, \ k = 0,1,2,\ldots\} \ni x_j^*, \ j = \overline{1,N},$$

и выберем любые пять последовательных узлов

$$x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4}.$$

В силу свойства (d) (см. теорему 3.2) для фундаментальной матрицы системы (31.22) имеет место равенство

$$B(x_{k+1},x_k)=(E+C_k)\widetilde{B}(x_{k+1},x_k),$$

откуда

$$B(x_{k+1},x_k)=\begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix}. \tag{31.24}$$

Поскольку матрица $B(x_{k+i},x_k)$ не зависит от k, то по свойству (a) из той же теоремы имеем

$$B(x_{k+i},x_k)=\prod_{r=0}^{i-1}B(x_{k+i-r},x_{k+i-r-1})=\big(B(x_{k+1},x_k)\big)^i,\ \ i=\overline{1,4}.$$

Вычислим определители Δ_k^i, $i=\overline{0,4}$, воспользовавшись теоремой 31.2:

$$\Delta_k^0=\Delta_4^0=-h^6-\frac{5}{3}h^8-\frac{25}{48}h^{10},$$

$$\Delta_k^1=\Delta_k^3=4h^6+\frac{35}{3}h^8+\frac{39}{4}h^{10}+\frac{215}{144}h^{12}-\frac{25}{72}h^{14},$$

$$\Delta_k^2=-6h^6-20h^8-\frac{539}{24}h^{10}-\frac{815}{72}h^{12}-\frac{25}{6}h^{14}-\frac{125}{144}h^{16}.$$

Начальные условия для рекуррентного соотношения вычислим по формулам (31.13). Тогда ТРС (31.12), (31.13) для начальной задачи (31.19), (31.20) запишется в следующем виде:

$$y_{k+4}-\left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)y_{k+3}+\left(6+10h^2+\frac{8}{3}h^4+\frac{5}{3}h^6\right)y_{k+2}-$$
$$-\left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)y_{k+1}+y_k=0,\quad k=0,1,\ldots,$$

$$y_0=0,\quad y_1=\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6},\quad y_2=2h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{2}+\frac{5h^5}{4}-\frac{h^6}{3}-\frac{h^7}{9},$$

$$y_3=\frac{9h^2}{2}+\frac{9h^3}{2}+15h^4+10h^5+\frac{17h^6}{2}+$$
$$+\frac{161h^7}{36}-\frac{25h^8}{6}-\frac{5h^9}{3}+\frac{2h^{10}}{9}+\frac{2h^{11}}{27}.$$

▲

§ 32. Точная двухточечная рекуррентная формула

Рассмотрим теперь начальную задачу (7.8), (7.9). Выбрав два произвольных узла $x_k < x_{k+1}$ сетки (30.3) и используя представление (8.4) решения начальной задачи в форме Коши, получим двухточечную рекуррентную формулу вида (31.10):

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1}, t)dF(t), \;\; k = \overline{0, \nu - 1}, \tag{32.1}$$

где Y_0 определяется исходя из начального условия (7.9). Рекуррентная формула (32.1) является точной для задачи (7.8), (7.9) в том смысле, что вычисленные по этой формуле значения Y_k, $k=\overline{0,\nu}$, совпадают со значениями точного решения $Y(x)$ начальной задачи (7.8), (7.9) в узлах x_k сетки ω_ν.

Очевидно, для однородной начальной задачи (7.1), (7.2) точная двухточечная (двучленная) формула (ТДФ) имеет вид

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k, \;\; k=\overline{0, \nu-1}. \tag{32.2}$$

Замечание 32.1. Стоит отметить, что двухточечная рекуррентная формула (32.1) является точной также для начальной задачи (31.1), (31.2) (которая эквивалентна задаче (7.8), (7.9)), причем в том смысле, что компоненты $y_k^{[i]}$, $i=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{0,\nu}$, вектора Y_k совпадают со значениями точного решения $y(x)$ этой задачи и его квазипроизводных $y^{[i]}(x)$, $i=\overline{1,q-1}$, в узлах сетки $x_k \in \omega_\nu$.

Построим ТДФ (32.1) для неоднородного частично вырожденного КДУ (28.1) с начальными условиями

$$y^{[i]}(x_0) = y_0^i, \quad y_0^i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{0, q - 1}, \tag{32.3}$$

Поскольку $f_r(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} f_r^j \Theta_j(x)$, $f_r^j \in \mathbb{R}$, $r = \overline{0, m-1}$, то вектор

$F'(x)$ имеет вид

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{N} S_j \delta(x - x_j),$$

где $S_j = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, f^j_{m-1}, f^j_{m-2}, \ldots, f^j_0\Big)^{\top}$. Тогда

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k} Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1}, t)\, d\Big\{\sum_{j=1}^{N} S_j \Theta_j(t)\Big\}$$

и поскольку

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1}, t)\, d\Big\{\sum_{j=1}^{N} S_j \Theta_j(t)\Big\} = B(x_{k+1}, x_{k+1}) S_{k+1} = S_{k+1},$$

то ТДФ для частично вырожденного КДУ (28.1) с начальными условиями (32.3) будет выглядеть следующим образом:

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k} Y_k + S_{k+1}, \quad Y_0 = (y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^{q-1})^{\top}.$$

Напоследок, стоит отметить, что использование ТДФ, в отличие от $(q+1)$-точечного ТРС, позволяет получать не только значение решения начальной задачи для обобщенного КДУ в узлах сетки, но и значение его (решения) квазипроизводных в этих точках.

Пример 32.2. Построим ТДФ для начальной задачи

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{N} h\delta(x - x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{N} h\delta(x - x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

$$Y_0 = (0, 0, 1, -1)^{\top}.$$

▼ Для вычисления $B_{k+1,k} = B(x_{k+1}, x_k)$ в формуле (32.1) воспользуемся выражением (31.24). Тогда

$$Y_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_k, \; k = \overline{0, \nu-1}, \qquad (32.4)$$

$$Y_0 = (0, 0, 1, -1)^{\top}. \qquad (32.5)$$

Заметим также, что ТДФ (32.4), (32.5) является точной и для начальной задачи (31.5), (31.19) в силу замечания 32.1. ▲

§ 33. Аппроксимация решений квазидифференциальных уравнений

В задачах аппроксимации и, в частности, при приближенном решении интегральных и дифференциальных уравнений важную роль играют теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Римана–Стилтьеса. Напомним некоторые известные результаты. Как и в случае интегралов Римана, имеет место

Теорема 33.1 [**155**, с. 69]**.** *Пусть* $g \in BV[a,b]$, *а последовательность функций* $f_n(x)$ *такова, что интеграл* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *существует для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *также существует и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Другой вариант теоремы, не требующий равномерной сходимости $f_n(x)$ на отрезке $[a,b]$ выглядит так.

Теорема 33.2 [155, с. 71]. *Пусть $g \in BV[a,b]$, а последовательность функций $f_n(x)$ имеет равномерно ограниченную вариацию на $[a,b]$, т. е. $\bigvee\limits_a^b (f_n) \leqslant V$ при $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $x \in [a,b]$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Если существуют интегралы $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Относительно интеграла Римана–Стилтьеса интересна и другая постановка вопроса: задана последовательность функций $g_n(x)$ с ограниченной вариацией на отрезке $[a,b]$; при каких условиях для фиксированной функции $f(x)$ под знаком интеграла $\int\limits_a^b f(x)dg_n(x)$ возможен предельный переход?

Здесь имеют место следующие теоремы [48, 73].

Теорема 33.3 (Первая теорема Хелли). *Пусть функции $g_n(x)$ с ограниченной на $[a,b]$ вариацией сходятся в каждой точке этого отрезка к некоторой функции $f(x)$, причем полные вариации функций $g_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. $\bigvee\limits_a^b (g_n) \leqslant V$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда предельная функция $g(x)$ также имеет ограниченную вариацию и для произвольной непрерывной функции $f(x)$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dg_n(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Если первая теорема Хелли дает условия, при которых под знаком интеграла Римана–Стилтьеса возможен предельный переход по некоторой последовательности функций $g_n(x)$ с ограниченной вариацией, то вторая теорема выясняет, когда можно гарантировать само существование последовательности $\{g_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям первой. Точнее говоря, вторая теорема Хелли позволяет обойти вопрос о сходимости последовательности функций ограниченной вариации, опираясь при этом на простые свойства равномерной ограниченности и равномерно ограниченной вариации.

Теорема 33.4 (Вторяя теорема Хелли). *Пусть на отрезке $[a,b]$ задано бесконечное множество функций $G=\{g(x)\}$. Если все функции множества равномерно ограничены и равномерно ограничены их вариации, т. е.*

$$|g(x)| \leqslant M, \quad \bigvee_a^b(g) \leqslant V$$

(постоянные M и V одинаковы для всех $g \in G$), то из множества G можно выделить последовательность $\{g_n(x)\}$, которая в каждой точке отрезка $[a,b]$ сходится к некоторой функции $g(x)$ с ограниченной вариацией.

Рассмотрим несколько иные варианты первой теоремы Хелли, которые не требуют непрерывности функции f и в какой-то степени являются "симметричными" к теоремам 33.2 и 33.1.

Теорема 33.5. *Пусть $f \in BV[a,b]$, а последовательность функций $g_n(x)$ такова, что $\bigvee_a^b(g_n) \leqslant V$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ для каждого $x \in [a,b]$. Тогда при условии существования интегралов $\int_a^b f(x)dg_n(x)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\int_a^b f(x)dg(x)$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства первой теоремы Хелли [**48**, с. 366] с использованием того факта [**181**], что для произвольной функции $f \in BV[a,b]$ существует последовательность ступенчатых функций $f_n^d(x)$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n^d - f^d\|_{BV} = 0$, а следовательно, (см. с. 44) $f_n^d(x) \rightrightarrows f^d(x)$ на $[a,b]$, где $f^d(x)$ — дискретная составляющая функции $f(x)$.

Теорема 33.6. *Пусть функции* $g_n \in BV[a,b]$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и* $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда для произвольной функции* $f \in BV[a,b]$ *при условии существования интегралов* $\int\limits_a^b f(x)dg_n(x)$ *для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_a^x f(t)dg_n(t) \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dg(t) \text{ на } [a,b].$$

Что касается доказательства этой теоремы, то мы сошлемся на работу [**153**], где аналогичный результат получен для интеграла Курцвейля–Стилтьеса, который является более общей конструкцией, чем интеграл Римана–Стилтьеса, и охватывает его [**57**].

Рассмотрим возможность отыскания приближенных решений задачи Коши для обобщенных дифференциальных систем первого порядка вида

$$Y' = C'(x)Y + F'(x), \tag{33.1}$$

$$Y(a) = Y_0, \tag{33.2}$$

где $Y(x)$ — p-мерная вектор-функция, $C \in BV^+_{p\times p}[a,b]$, $F \in BV^+_p[a,b]$, а дифференцирование и равенство понимаются в обобщенном смысле. По этой причине будем рассматривать только корректные системы вида (33.1), для которых выполняются условия

$$[\Delta C(x)]^2 = 0, \quad \Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b], \tag{33.3}$$

гарантирующие, что при исследовании таких систем не будет возникать проблема умножения распределений.

Пусть в результате некоторой аппроксимации коэффициентов системы (33.1) имеем приближенную обобщенную дифференциальную систему

$$Y_\nu' = C_\nu'(x)Y_\nu + F_\nu'(x) \tag{33.4}$$

с начальным условием

$$Y_\nu(a) = Y(x_0) = Y_0. \tag{33.5}$$

Если предположить, что начальная задача (33.4), (33.5) может быть эффективно решена, то естественно возникает вопрос, при каких условиях ее решение "близко" к решению задачи (33.1), (33.2) и в каком смысле понимается эта близость.

Теорема 33.7. *Пусть для матриц* $C(x) = \big(c_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^p$, $C_\nu(x) = \big(c_{ij}^\nu(x)\big)_{i,j=1}^p$ *и векторов* $F(x) = \big(f_1, f_2, \ldots, f_p,\big)^\top(x)$, $F_\nu(x) = \big(f_1^\nu, f_2^\nu, \ldots, f_p^\nu,\big)^\top(x)$ *выполняются следующие условия:*

1) *Для каждого фиксированного* ν *и любого* $x \in [a, b]$

$$[\Delta C_\nu(x)]^2 = 0, \quad \Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x) = 0;$$

2) *Для каждого фиксированного* ν *и любого* $x \in [a, b]$

$$\Delta C_\nu(x)\Delta C(x) = 0, \quad \Delta C_\nu(x)\Delta F(x) = 0;$$

3) $f_j^\nu(x) \rightrightarrows f_j(x)$ *на* $[a, b]$ *для* $j = \overline{1, p}$;

4) $c_{ij}^\nu(x) \rightrightarrows c_{ij}(x)$ *на* $[a, b]$ *для* $1, j = \overline{1, p}$;

5) *Для каждого фиксированного* ν

$$\bigvee_a^b (C_\nu) \leqslant V = const.$$

Тогда $Y_\nu(x) \rightrightarrows Y(x)$ *на* $[a, b]$.

Доказательство. При выполнении условий корректности (33.3) начальная задача (33.1), (33.2) в классе функций $\mathfrak{D}^p_C(I)$ эквивалентна интегральному уравнению (см. §7)

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_a^x dC(t)Y(t) + F(x) - F(a), \tag{33.6}$$

причем интеграл в правой части в силу замечания 6.3 является классическим матричным интегралом (на самом деле, набором скалярных интегралов) Римана–Стилтьеса. Первое условие теоремы обеспечивает корректность систем (33.4) для каждого фиксированного ν, а потому задача (33.4), (33.5) в $\mathfrak{D}^p_C(I)$ эквивалентна интегральному уравнению

$$Y_\nu(x) = Y_0 + \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y_\nu(t) + F_\nu(x) - F_\nu(a).$$

Рассмотрим разность

$$Y(x) - Y_\nu(x) = \int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t) +$$
$$+ \int\limits_a^x dC_\nu(t)[Y(t) - Y_\nu(t)] + F(x) - F_\nu(x) + F_\nu(a) - F(a),$$

которая, очевидно, будет иметь смысл (а не будет лишь формальной!) при условии существования интеграла $\int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)$. Для получения этого факта достаточно показать, что произведение $C'_\nu(x)Y(x)$ корректно в обобщенном смысле. Действительно, в силу второго условия теоремы имеем

$$\Delta C_\nu(x)\Delta Y(x) = \Delta C_\nu(x)\big[\Delta C(x)Y(x) + \Delta F(x)\big] = 0.$$

Переход к нормам приводит к неравенству

$$\big|Y(x)-Y_\nu(x)\big| \leqslant \left|\int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)\right| +$$
$$+\int\limits_a^x \big|dC_\nu(t)\big|\big|Y(t)-Y_\nu(t)\big| + \big|F(x)-F_\nu(x)\big| + \big|F(a)-F_\nu(a)\big|. \tag{33.7}$$

Из третьего условия теоремы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N_1(\varepsilon)$, что для всех $\nu > N_1(\varepsilon)$ и любого $x \in [a,b]$ выполняются неравенства

$$\big|f_j(x) - f_j^\nu(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3p}, \quad j = \overline{1,p}.$$

Тогда, учитывая вид нормы вектора, получим

$$\big|F(x)-F_\nu(x)\big| = \sum_{j=1}^{p}\big|f_j(x)-f_j^\nu(x)\big| < p\cdot\frac{\varepsilon_1}{3p} = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33.8}$$

По аналогии имеем

$$\big|F(a)-F_\nu(a)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33.9}$$

Оценим первое слагаемое в неравенстве (33.7):

$$\left|\int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)\right| = \sum_{i=1}^{p}\left|\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{p} y_j(t)dc_{ij}(t) -\right.$$
$$\left.-\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{p} y_j(t)dc_{ij}^\nu(t)\right| \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left|\int\limits_a^x y_j(t)dc_{ij}(t) - \int\limits_a^x y_j(t)dc_{ij}^\nu(t)\right|.$$

В силу теоремы 33.6 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N_2(\varepsilon)$, что для всех $\nu > N_2(\varepsilon)$ и любого $x \in [a,b]$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_{x_0}^x d[c_{ij}(t) - c_{ij}^\nu(t)]y_j(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3p^2}, \quad i,j = \overline{1,p},$$

тогда

$$\left|\int\limits_a^x dC(t)Y(t) - \int\limits_a^x dC_\nu(t)Y(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33.10}$$

Таким образом, если учесть оценки (33.8)–(33.10) и выбрать $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, то из неравенства (33.7) получим

$$|Y(x) - Y_\nu(x)| \leqslant \varepsilon + \int\limits_{x_0}^x |dC_\nu(t)||Y(t) - Y_\nu(t)|.$$

В силу обобщенной леммы Гронуолла–Беллмана (см. §2) для $\nu > N(\varepsilon)$ и $x \in [a,b]$ имеем оценку

$$|Y(x) - Y_\nu(x)| \leqslant \varepsilon \exp\left(\bigvee_a^x (C_\nu)\right),$$

откуда согласно пятому условию теоремы следует

$$\sup_{x\in[a,b]} |Y(x) - Y_\nu(x)| \leqslant \varepsilon e^V.$$

Последнее неравенство вследствие произвольности выбора ε как раз и означает равномерную сходимость $Y_\nu(x)$ до $Y(x)$ на $[a,b]$.

■

Только что полученный результат можно использовать и для приближенного решения КДУ. На отрезке $[a,b]$ рассмотрим начальную задачу для КДУ порядка $q\ (= m+n)$:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x), \tag{33.11}$$

$$y^{[r]}(a) = y_0^r, \quad r = \overline{0, q-1}, \tag{33.12}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $f_k(x)$ удовлетворяют указанным в § 10 и §15 предположеним (I)–(IV), а квазипроизводные $y^{[r]}(x)$ определяются выражениями (15.2).

Пусть в результате некоторой аппроксимации коэффициентов уравнения (33.11) получено обобщенное КДУ

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}^{\nu}(x)y_{\nu}^{(n-i)})^{(m-j)}=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}(f_k^{\nu})^{(k+1)}(x) \tag{33.13}$$

с начальными условиями

$$y_{\nu}^{[r]}(a)=y_0^r,\quad r=\overline{0,q-1}, \tag{33.14}$$

С помощью векторов

$$Y=\left(y,y^{[1]},\ldots,y^{[q-1]}\right)^{\top},\quad Y_{\nu}=\left(y_{\nu},y_{\nu}^{[1]},\ldots,y_{\nu}^{[q-1]}\right)^{\top},$$

начальные задачи (33.11), (33.12) и (33.13), (33.14) можно привести к задачам вида (33.1), (33.2) и (33.4), (33.5) соответственно. В этом случае теорема 33.7 будет обеспечивать сходимость не только решения $y_{\nu}(x)$ к $y(x)$, но и всех его квазипроизводных $y_{\nu}^{[k]}(x), k=\overline{0,q-1}$, к $y^{[k]}(x)$.

В завершение, рассмотрим два важных на практике способа аппроксимации функций $c_{ij}, f_j\in BV^{+}[a,b]$ из теоремы 33.7.

Пусть $g\in BV^{+}[a,b]$, тогда $g(x)=\varphi(x)+h(x)$, где $\varphi(x)$ есть непрерывная составляющая функции $g(x)$, а $h(x)$ — ее функция скачков (дискретная составляющая). Выберем произвольное разбиение ω_{ν} отрезка $[a,b]$, т. е. сетку на $[a,b]$:

$$\omega_{\nu}=\left\{a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{\nu}=b\right\}.$$

На каждом отрезке $[x_k,x_{k+1}]$ применим к $\varphi(x)$ *линеаризацию*:

$$\varphi(x)\approx\varphi_{\nu}^{k}(x)=\frac{\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)}{x_{k+1}-x_k}x+\varphi(x_k),\quad k=\overline{0,\nu-1}. \tag{33.15}$$

Тогда на целом отрезке $[a,b]$ функция $\varphi(x)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} x + \varphi(x_k) \right). \tag{33.16}$$

Такую апроксимацию назовем *L-аппроксимацией.* Тогда

$$g'(x) \approx \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \Theta_k(x) + h'(x). \tag{33.17}$$

Следовательно, при такой аппроксимации функций $c_{ij}(x)$ и $f_j(x)$ дифференциальное уравнение (33.4) будет в худшем случае уравнением с кусочно-постоянными коэффициентами и δ-особенностями.

В рамках альтернативного способа аппроксимации, применим к $\varphi(x)$ *дискретизацию*, т. е. на каждом полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$ приблизим $\varphi(x)$ постоянной функцией

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu^k(x) = \varphi(x_k), \quad k = \overline{0, \nu-1}; \tag{33.18}$$

Таким образом, на всем заданном отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ аппроксимируется кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией

$$\varphi(x) \approx \varphi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \varphi(x_k)\Theta_k(x). \tag{33.19}$$

Заметим, что для строгости дальнейших записей аппроксимирующая функция продлена справа от точки b на интервал $(b, x_{\nu+1})$. Такую аппроксимацию назовем *D-аппроксимацией.* Тогда, учитывая, что функция $\varphi_\nu(x)$ в точке x_k имеет скачок $\Delta\varphi_\nu(x_k) = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})$, получим

$$g'(x) \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} \Delta\varphi_\nu(x_k)\delta(x - x_k) + h'(x), \tag{33.20}$$

Следовательно, в результате такой аппроксимации дифференциальное уравнение (33.4) будет уравнением только с δ-функциями в коэффициентах.

Следует иметь в виду, что D-аппроксимацию можно осуществить только при условиях $[\Delta C_\nu(x)]^2 = 0$, $\Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x) = 0$ на $[a, b]$, т. е., в общем, не для всех элементов $c_{ij}(x)$, $f_j(x)$.

В предыдущем разделе приведены конструктивные формулы для отыскания решений обобщенных дифференциальных систем вида (22.1), однако при условии, если известна фундаментальная матрица соответствующей определяющей системы. Понятно, что такую матрицу не всегда удается построить точным способом. Следовательно, применяя к элементам матриц $A_k(x)$ описанные выше L- и D-аппроксимации или, возможно, некоторые другие способы аппроксимации (важным при этом является соблюдение условий теоремы 33.7), можно при относительно незначительной вычислительной трудоемкости получать (что, собственно, и проиллюстрировано на конкретных примерах в последнем параграфе монографии) приближенные решения с нужной точностью.

§ 34. Примеры построения приближенных решений

Пример 34.1. Для иллюстрации метода D-апроксимации построим приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0 \tag{34.1}$$

и начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1, \tag{34.2}$$

и вычислим приближенное значение решения этой задачи в точке $x = 1$.

▼ *Первый способ.* Сначала найдем приближенное значение $y(1)$ решения задачи Коши (34.1), (34.2) с помощью ТДФ, в процессе построения которой как раз и используем D-аппроксимацию коэффициентов (точнее, их первообразных) дифференциального уравнения (34.1).

С помощью вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\top}$, где квазипроизводные введены, как и раньше в примере 31.4, по формулам (31.16), задача Коши (34.1) (34.2) легко приводится к исходной задаче

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{34.3}$$

$$Y(0) = (0, 0, 1, -1)^{\top}. \tag{34.4}$$

Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$\omega_{\nu} = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

с шагом $h = x_{k+1} - x_k = 1/\nu$. Применим D-аппроксимацию к коэффициентам $C_{32} = 5$ и $C_{41} = 4$ (точнее, к их первообразным $c_{32} = 5x + \mathrm{const}$ и $c_{41} = 4x + \mathrm{const}$). Тогда по формуле (33.20) имеем

$$C_{32} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (5x_k - 5x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 5\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k),\ \ x \in [0,1],$$

$$C_{41} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (4x_k - 4x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 4\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k),\ \ x \in [0,1].$$

Таким образом, обобщенная дифференциальная система

$$Y_{\nu}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\nu} \tag{34.5}$$

является приближенной к дифференциальной системе (34.3).

Начальный вектор для приближенной системы выбираем в соответствии с начальным условием (34.4), т. е. $Y_\nu(0) = Y(0)$.

Система (34.5) является системой вида (31.22) и, следовательно, для нее имеет место ТДФ (см. пример 32.2)

$$Y_\nu(x_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_\nu(x_k),$$

$k = \overline{0, \nu-1}$, причем

$$Y_\nu(0) = (0, 0, 1, -1)^\top. \tag{34.6}$$

Выбирая разное число точек деления, найдем приближенное значение решения задачи (34.1), (34.2) в точке $x = 1$, которое будет первой координатой вектора $Y_\nu(x_\nu)$. Полученные значения приведены во 2-м столбце таблицы 1.

Второй способ. Решим приближенно задачу (34.1), (34.2) при помощи ТРС. Полученной вследствие применения D-апроксимации обобщенной дифференциальной системе (34.5) соотвествует вырожденное КДУ

$$y_\nu^{IV} - 5\left(\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*)y_\nu'\right)' + 4\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*)y_\nu = 0, \tag{34.7}$$

которое является приближенным для уравнения (34.1).

Из вида квазипроизводных (31.16) и начального вектора (34.6) легко получить следующие начальные условия для уравнения (34.7):

$$y_\nu(0) = y_\nu'(0) = 0, \quad y_\nu''(0) = y_\nu'''(0) = 1. \tag{34.8}$$

Используя результаты примера 31.5, видим, что ТРС для начальной задачи (34.7), (34.8) выражается формулой (здесь $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0, \nu}$):

Таблица 1. *Приближенное значение* $y(1)$ *для задачи* (34.1), (34.2)

ν	ТДФ	$\varepsilon_1\times 10^3$	ТРС	$\varepsilon_2\times 10^3$	МСР	$\varepsilon_3\times 10^3$
100	0.95240307	0.04495	0.95240307	0.04495	0.94704780	5.40022
200	0.95243678	0.01124	0.95243678	0.01124	0.94976818	2.67984
400	0.95244521	0.00281	0.95244527	0.00275	0.95111322	1.33480
800	0.95244732	0.00070	0.95244670	0.00132	0.95178198	0.66604
1600	0.95244785	0.00018	0.95244996	0.00194	0.95212856	0.31946

$$\widetilde{y}_{k+4} - \left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+3} + \left(6+10h^2+\frac{8}{3}h^4+\frac{5}{3}h^6\right)\widetilde{y}_{k+2} - \\ - \left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+1} + \widetilde{y}_k = 0, \quad k=\overline{0,\nu-4},$$

$$\widetilde{y}_0 = 0,\ y_1 = \frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6},\ \widetilde{y}_2 = 2h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{2}+\frac{5h^5}{4}-\frac{h^6}{3}-\frac{h^7}{9},$$

$$\widetilde{y}_3 = \frac{9h^2}{2}+\frac{9h^3}{2}+15h^4+10h^5+\frac{17h^6}{2}+ \\ +\frac{161h^7}{36}-\frac{25h^8}{6}-\frac{5h^9}{3}+\frac{2h^{10}}{9}+\frac{2h^{11}}{27}.$$

Результаты, полученные этим способом при разном числе точек деления, приведены в 4-м столбце таблицы 1. В этой таблице для сравнения приведены также результаты (см. 6-ой столбец), полученные при решении задачи (34.1) (34.2) классическим методом конечных разностей. Кроме того, в 3-м, 5-м и 7-м столбцах этой таблицы для удобства указаны (умноженные на 10^3) абсолютные погрешности ε_1, ε_2, ε_3 соответственно для точной двухточечной формулы (ТДФ), точного рекуррентного соотношения (ТРС) и метода конечных разностей (МКР).

Отметим, что точное значение решения задачи Коши (34.1), (34.2) равно $y(1) = -\frac{1}{3}e+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{12}e^{-2} \approx 0.95244802218267.$ ▲

Пример 34.2. Рассмотрим шарнирно закрепленный на двух концах $x=0$ и $x=\pi$ сжатый стержень длины $l=\pi$ и переменной жесткости $g(x)=\frac{c}{1+\sin x}$ $(c>0)$. Для отыскания критической силы $P_{\text{кр}}$ необходимо решить задачу на собственные значения

$$y''+p(1+\sin x)y=0, \quad p=P/c, \tag{34.9}$$

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{34.10}$$

первое собственное значение которой $p_1=P_{\text{кр}}/c$ как раз и даст нужный результат.

▼ *Первый способ.* Для отыскания приближенного решения краевой задачи (34.9), (34.10) используем D-аппроксимацию. На отрезке $[0,\pi]$ введем равномерную (для удобства) сетку $\omega_\nu=\{x_k=kh,\ k=\overline{0,\nu}\}$ с шагом $h=x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{\nu}$.

Применим к первообразной $\alpha(x)=x-\cos x+\mathrm{const}$ коэффициента $a(x)=1+\sin x$ дискретизацию, т. е. на полуинтервале $[x_k,x_{k+1})$ аппроксимируем ее постоянной функцией:

$$\alpha(x)\approx\alpha(x_k)=x_k-\cos x_k+\mathrm{const}, \quad x\in[x_k,x_{k+1}).$$

Тогда на отрезке $[0,\pi]$ первообразная $\alpha(x)$ аппроксимируется ступенчатой функцией вида (33.18):

$$\alpha(x)\approx\alpha_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu}(x_k-\cos x_k+\mathrm{const})\Theta_k(x), \quad x\in[0,\pi].$$

Найдем скачок функции $\alpha_\nu(x)$ в точке $x_k=kh$ $(k=\overline{1,\nu})$:

$$\Delta\alpha_\nu(x_k)=\alpha_\nu(x_k)-\alpha_\nu(x_{k-1})=x_k-\cos x_k+\mathrm{const}-$$
$$-(x_{k-1}-\cos x_{k-1}+\mathrm{const})=h-\cos kh+\cos(k-1)h.$$

Таким образом, согласно (33.20) имеем

$$a(x)\approx\alpha'_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\nu}[h-\cos kh+\cos(k-1)h]\,\delta(x-x_k). \tag{34.11}$$

Тогда вырожденное КДУ

$$y''_\nu + p\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k)y_\nu = 0,$$

где

$$\alpha_\nu^k = h - \cos kh + \cos(k-1)h = \frac{\pi}{\nu} - \cos\frac{\pi k}{\nu} + \cos\frac{\pi(k-1)}{\nu}, \tag{34.12}$$

является, очевидно, приближенным для уравнения (34.9).

Полученное КДУ имеет вид уравнения из примера 30.6 (см. задачу (30.22)), в котором

$$c_0 = 0, \quad c_k = p\alpha_\nu^k, \; x_k^* = x_k \; (k = \overline{1, N}, \; N = \nu).$$

Поэтому ТРС для этого уравнения определяется формулой (30.25), где в силу (30.24) $M_k = -c_k = -p\alpha_\nu^k$, и, следовательно, соотношение (30.25) запишется в виде (здесь $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k), \; k = \overline{0, \nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+1} - (2 - ph\alpha_\nu^k)\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu-1}. \tag{34.13}$$

Из краевого условия на левом конце $y(0) = 0$ имеем $\widetilde{y}_0 = 0$. Выбрав $\widetilde{y}_1$ равным произвольной ненулевой константе[4] (например, $\widetilde{y}_1 = 1$), из рекуррентной формулы (34.13) найдем $\widetilde{y}_\nu = y_\nu(\pi)$, которое, очевидно, будет зависеть от p, т. е. $\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_\nu(p)$. Тогда из краевого условия $y(\pi) = 0$ получим *характеристическое уравнение* $\widetilde{y}_\nu(p) = 0$, корни которого (т. е. собственные значения p) можно найти, например, методом деления отрезка пополам.

В таблице 2 для сравнения приведены результаты, полученные (при $\nu = 1600$) разными методами: МВ — *метод Вайнштейна*[5],

---

[4] Поскольку собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя.

[5] Вайнштейн Альберт Львович (1892–1970) — российский экономист и статистик, один из основоположников российской школы экономико-математического анализа.

Таблица 2. *Собственные значения задачи* (34.9), (34.10); $\nu = 1600$

p	МВ	МФ	МР	MD
p_1	0.54031883	0.54031789	0.54031885	0.54031883
p_2	–	–	–	2.37174805
p_3	5.4486360	5.4477473	5.4486362	5.4486358
p_4	–	–	–	9.762195318
p_5	15.312608	15.292913	15.312608	15.3120518

МФ — *метод Фикеры*[6), МР — *метод Ритца*[7), MD — *метод D-аппроксимации.*

Второй способ. Для сравнения построим приближенное решение краевой задачи (34.9), (34.10), используя иной способ аппроксимации коэффициентов — L-аппроксимацию.

Применим к функции $\alpha(x) = x - \cos x + \mathrm{const}$ линеаризацию, т. е. на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ приблизим ее отрезком прямой, проходящей через точки $\big(x_k, \alpha(x_k)\big)$ и $\big(x_{k+1}, \alpha(x_{k+1})\big)$. Тогда согласно (33.17) имеем

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{h - \cos{(k+1)h} + \cos kh}{h}\, \Theta_k(x)$$

или в обозначениях (34.12)

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\, \Theta_k(x). \tag{34.14}$$

6) Фикера Гаэтано (Fichera Gaetano, 1922–1996) — итальянский математик, ученик М. Пиконе, профессор Университета Триеста, Римского университета и Национального института высшей математики.

7) Ритц Вальтер (Ritz Walter, 1878–1909) — швейцарский физик-теоретик и математик, учился на одном курсе с А. Эйнштейном и М. Гроссманом, работал в Геттенгенском и Лейденском университетах, в Институте Кайзера, в Высшей нормальной школе.

Следовательно, исходное уравнение (34.9) аппроксимируется КДУ

$$y_\nu'' + p\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x)y_\nu = 0. \tag{34.15}$$

Последнее является частным случаем уравнения (30.1), а потому ТРС для него запишется в виде (30.20)–(30.21). Для построения функции Коши $\widetilde{K}_\nu(x,s)$ КДУ (34.15) на полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$, т. е. уравнения

$$y_\nu'' + p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,y_\nu = 0,$$

воспользуемся результатами примера 14.2. Поскольку на отрезке $[0,\pi]$ функция $\cos x$ монотонно убывает, то $\cos x_{k+1} < \cos x_k$. Тогда, учитывая, что $p > 0$, имеем

$$p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h} = p\,\frac{h - \cos(k+1)h + \cos kh}{h} > 0,$$

поэтому по формуле (14.5) находим

$$\widetilde{K}_\nu(x,s) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Поскольку квазипроизводные в смысле уравнения (34.15) и сопряженного с ним уравнения (см. §11) определяются по формулам

$$y_\nu^{[1]}(x) = y_\nu'(x), \quad z_\nu^{\{1\}}(s) = -z_\nu'(s),$$

то

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x,s) = \frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial s} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial^2 \widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x \partial s} = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}} \sin \sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Тогда

$$\widetilde{K}_\nu(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu(x_k,x_{k-1}) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}} \sin \sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_k,x_{k-1}) = \cos \sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = \cos \sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}} \sin \sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (30.20) и учитывая в силу (30.7), что $M_k = 0$, после упрощения получим

$$\widetilde{y}_{k+1} - 2\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}\,\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1,\nu-1},$$

где, как и раньше, $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0,\nu}$.

Далее, для отыскания собственных значений задачи (34.9), (34.10) так же, как и в первом способе, построим при помощи аналогичной процедуры характеристическое уравнение и используем метод деления отрезка пополам.

Для удобства в таблице 3 приведены результаты приближенного вычисления первого собственного значения с помощью L- и D-аппроксимации. ▲

Замечание 34.3. Задачу (34.9), (34.10) можно решить также посредством ТДФ, построенной для соответствующей приближенной системы, которую можно получить путем как D-, так и L-апрокисмации. Предлагаем читателю решить задачу этими методами самостоятельно и сравнить полученные результаты со значениями, приведенными в таблице 3.

Таблица 3. *Первое собственное значение задачи* (34.9), (34.10)

ν	*D*-аппроксимация	*L*-аппроксимация
100	0.54031183	0.54057761
200	0.54031710	0.54038353
400	0.54031842	0.54033503
800	0.54031875	0.54032290
1600	0.54031883	0.54031987

Следующий модельный пример иллюстрирует необходимость использования L-аппроксимации.

Пример 34.4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую вал в слабо деформированном состоянии под действием сжатия и кручения [**47**, с. 26]:

$$\begin{cases} -g(x)z'' = Pz - My', \\ -g(x)y'' = Py + Mz', \end{cases} \tag{34.16}$$

где $g(x) = (1+\sin x)^{-1}$ — жесткость на изгиб, P — осевая сжимающая сила, M — крутящий момент. Для вала длиной $l=\pi$ с закрепленными концами краевые условия для системы (34.16) имеют вид

$$z(0) = z(\pi) = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{34.17}$$

Известно, что под действием достаточно большого крутящего момента M вал может терять устойчивость в форме винтообразной линии: с ростом крутящего момента сначала имеет место только скручивание, а дальше при определенном критическом крутящем моменте ось винтообразно деформируется. Если вал к тому же испытывает влияние со стороны осевой сжимающей силы $(P>0)$, то эта винтообразная деформация наступает раньше, т. е. при меньшей величине крутящего момента. Напротив, появление растягивающей осевой силы $(P<0)$ увеличивает критический момент, повышая тем самым устойчивость вала.

Используя D- и L-аппроксимацию, найдем соотношение между параметрами P и M, которое, собственно, и будет служить условием устойчивости вала.

▼ Введем матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда краевую задачу (34.16), (34.17) можно записать в векторном виде следующим образом:

$$\bar{Y}'' + A(x)\bar{Y}' + B(x)\bar{Y} = 0, \tag{34.18}$$

$$\bar{Y}(0) = \bar{Y}(\pi) = 0,$$

где $\bar{Y} = (z, y)^\top$, $A(x) = M(1 + \sin x)J$, $B(x) = P(1 + \sin x)E_2$. Далее рассмотрим матричное дифференциальное уравнение, ассоциированное с уравнением (34.18) (см. §17),

$$Y'' + A(x)Y' + B(x)Y = 0, \tag{34.19}$$

вместе с краевыми условиями

$$Y(0) = Y(\pi) = O_2. \tag{34.20}$$

С помощью вектора $\mathcal{Y} = (Y, Y')^\top$ уравнение (34.19) приведем к обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$\mathcal{Y}' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -B(x) & -A(x) \end{pmatrix} \mathcal{Y}. \tag{34.21}$$

Введем на отрезке $[0, \pi]$ равномерную сетку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

с шагом $h = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\nu}$. Чтобы найти приближенное решение системы (34.21), применим D-аппроксимацию к элементу $B(x)$. Поскольку

$$B(x) = \begin{pmatrix} P(1+\sin x) & 0 \\ 0 & P(1+\sin x) \end{pmatrix}$$

и $P = \mathrm{const}$, то дискретизацию применяем к первообразной для функции $1+\sin x$. При этом воспользуемся полученной в примере 34.2 аппроксимацией (34.11):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=1}^{\nu}[h - \cos kh + \cos(k-1)h]\delta(x-x_k).$$

Тогда

$$B_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) & 0 \\ 0 & P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) \end{pmatrix} =$$

$$= P\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta_k(x-x_k)E_2, \quad (34.22)$$

где $\alpha_\nu^k = h - \cos kh + \cos(k-1)h$.

К элементу $A(x)$ применить D-аппроксимацию не получится, так как при этом матрица скачков приближенной системы выглядела бы следующим образом:

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -\Delta B_\nu & -\Delta A_\nu \end{pmatrix}$$

и, очевидно, не удовлетворяла бы условию корректности $\left[\Delta\mathcal{C}_\nu(x)\right]^2 = 0\,\forall\, x \in [0,\pi]$ (см. (17.6)). Именно поэтому, применим к элементу $A(x)$ L-аппроксимацию. Поскольку

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -M(1+\sin x) \\ M(1+\sin x) & 0 \end{pmatrix},$$

то линеаризировать будем снова первообразную функции $1+\sin x$. Только теперь применим полученную в примере 34.2 аппроксимацию (34.14):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x).$$

Тогда

$$A_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} 0 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) \\ M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) J. \quad (34.23)$$

Используя выражения (34.22) и (34.23), запишем дифференциальную систему

$$\mathcal{Y}_\nu' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -P\sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x-x_k)E_2 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)J \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu, \quad (34.24)$$

которая, очевидно, является аппроксимацией системы (34.21). Пусть $\mathcal{B}_\nu(x,s)$ — фундаментальная матрица системы (34.24). По аналогии с (32.2) построим ТДФ

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1})\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), \quad k=\overline{1,\nu}. \quad (34.25)$$

С учетом свойства (d) фундаментальной матрицы (см. теорему 3.2) и структуры матрицы скачков

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & O_2 \end{pmatrix}$$

дифференциальной системы (34.24) имеем

$$\mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1}) = \left(E_4 + \Delta\mathcal{C}_\nu(x_k)\right)\mathcal{B}_\nu(x_k-0, x_{k-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}), \tag{34.26}$$

где $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s)$ — фундаментальная матрица определяющей системы на полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$, т. е. системы

$$\mathcal{Y}_\nu' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ O_2 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h}\cdot J \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu. \tag{34.27}$$

Подставляя выражение (34.26) в ТДФ (34.25), получим соотношения

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}) \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}),\ k = \overline{1,\nu}. \tag{34.28}$$

Построим фундаментальную матрицу $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s)$, используя теорему 19.4. Для этого найдем матрицу-функцию Коши $\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x,s)$ КДУ

$$Y_\nu'' + M\frac{\alpha_\nu^k}{h} J Y_\nu' = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu, \tag{34.29}$$

эквивалентного системе (34.27). Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция Коши этого КДУ определяется выражением

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x,s) = \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right],$$

где $J_\nu^k = M\frac{\alpha_\nu^k}{h}J$, $k = \overline{1,\nu}$. Учтем также, что квазипроизводные в смысле уравнения (34.29) и сопряженного с ним уравнения согласно (17.3) и (17.13) имеют вид

$$Y_\nu^{[1]}(x) = Y_\nu'(x), \quad Z_\nu^{\{1\}}(s) = -Z_\nu'(s) + J_\nu^k Z_\nu(s).$$

Тогда в силу теоремы 19.4 фундаментальная матрица системы (34.27) будет выглядеть следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x,s) = \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k(x-s)} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}) = \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу в формулу (34.28), получим ТДФ для системы (34.24), которая одновременно является приближенной для системы (34.21):

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) \quad = \quad \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix}\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}). \tag{34.30}$$

Можно показать (см., например, [**33**, с. 54]), что

$$e^{-tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

поэтому

$$e^{-J_\nu^k h} = e^{-M\alpha_\nu^k J} = \begin{pmatrix} \cos M\alpha_\nu^k & \sin M\alpha_\nu^k \\ -\sin M\alpha_\nu^k & \cos M\alpha_\nu^k \end{pmatrix} =$$
$$= \cos M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - \sin M\alpha_\nu^k \cdot J.$$

Вычислим также $\left(J_\nu^k\right)^{-1}$:

$$\left(J_\nu^k\right)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h} \\ M\frac{\alpha_\nu^k}{h} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{M\alpha_\nu^k} \\ -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad -\frac{h}{M\alpha_\nu^k}J.$$

Если эти выражения подставить в (34.30) и выполнить умножения блочных матриц, то ТДФ будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & G_\nu^k \\ -P\alpha_\nu^k \cdot E_2 & H_\nu^k \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), k = \overline{1, \nu}, \tag{34.31}$$

где

$$G_\nu^k = \frac{h}{M\alpha_\nu^k}\left[\sin M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - \left(1 - \cos M\alpha_\nu^k\right) \cdot J\right],$$

$$H_\nu^k = \left[\cos M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}\sin M\alpha_\nu^k\right]E_2 - \\ - \left[\sin M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}(1 - \cos M\alpha_\nu^k)\right]J.$$

Из краевого условия (34.20) на левом конце следует, что первая компонента блочного вектора $\mathcal{Y}_\nu(0)$ равна O_2. Выбрав вторую компоненту этого вектора равную любой ненулевой (к примеру, единичной) матрице, так что $\mathcal{Y}_\nu(0) = (O_2, E_2)^\top$, по рекуррентной формуле (34.31) найдем $\mathcal{Y}_\nu(\pi)$, которое, очевидно, будет зависеть от параметров P и M. Тогда из краевого условия (34.20) на правом конце получим уравнение

$$\det \mathcal{Y}_\nu^1(P, M) = 0,$$

где $\mathcal{Y}_\nu^1(P, M)$ — первая блочная компонента вектора $\mathcal{Y}_\nu(\pi; P, M)$. Это и есть *характеристическое уравнение* для определения P и M. Последовательно задавая значения крутящего момента M, будем вычислять значения осевой сжимающей силы P. При $M = 0$ или $P = 0$ исходная задача значительно упрощается и поэтому решается независимо. В таблице 4 приведены числовые результаты, а на рис. 1 — кривая зависимости значений сжимающей силы P от значений крутящего момента M.

Напоследок заметим, что в случае, когда вал имеет постоянное поперечное сечение и, следовательно, $g(x) = \text{const}$, задача (34.16), (34.17) исследовалась в работе [**13**], где получено условие устойчивости в виде соотношения $\frac{M^2}{4g^2} + \frac{P}{g} = \frac{\pi^2}{l^2}$. ▲

Таблица 4. *Зависимость между параметрами P и M*

M	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
P	0.540	0.539	0.536	0.530	0.522	0.512	0.499	0.484
M	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
P	0.467	0.448	0.426	0.402	0.376	0.347	0.317	0.283
M	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.09	
P	0.248	0.210	0.170	0.128	0.083	0.036	0	

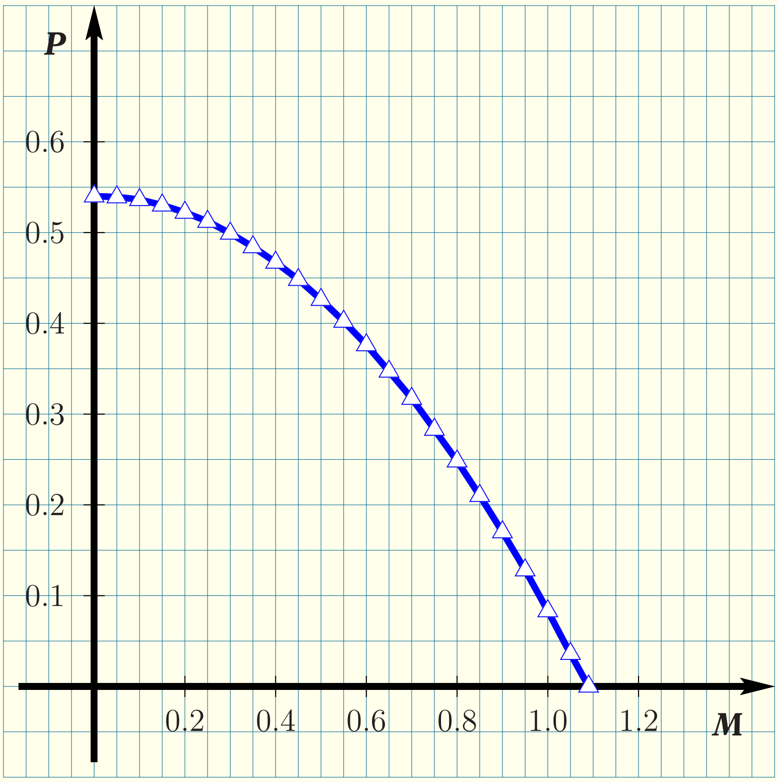

Рис. 1. Кривая зависимости сжимающей силы от крутящего момента

Литература

[1] Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, №2. – С. 267–270. 30

[2] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 311 с. 29, 46, 69, 235

[3] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с. 19, 23, 24, 28, 40, 50, 53, 55, 57, 73

[4] Ахиезер Н. И. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи математ. наук. – 1941. – №9. – С. 126–156. 15

[5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 544 с. 15

[6] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. – Х.: ГНТИУ, 1938. – 265 с. 15

[7] Ахметов М. У., Перестюк Н. А., Тлеубергенова М. А. Управление линейными импульсными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 307–314. 27

[8] Ахметов М. У., Сеилова Р. Д. Ранговые признаки управляемости для краевой задачи линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №6. – С. 723–730. 27

[9] Ашордиа М. Т. О задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикл. матем. – Тбил. ун., 1987. – №22. – С. 5–41. 30

[10] Багмут И. Г. Разностные схемы высокого порядка точности для уравнений типа Лежандра // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1972. – Т.12, №3.34

[11] Балоян Н. М., Молокович Ю. М. К вопросу о разностных схемах высокого порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особенностью // Изв. ВУЗов. Математ. – 1975. – №7. – С. 10–18. 34

[12] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Изд. ИЛ, 1954. – 216 с.

[13] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: Пер. с нем. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1950. – 900 с. 269

[14] Брук В.М. О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ. – 1975. – 5. – С. 25–33. 19

[15] Бурханов Ш. А., Макаров В. Л. О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, №9. – С. 1502–1514. 33

[16] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с. 46, 69, 235

[17] Власій О. О. Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2005. – №540. – С. 62–64. 6, 11, 26

[18] Власій О. О., Мазуренко В. В. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.73–86. 6, 11, 26

[19] Власий О. О., Мазуренко В. В., Таций Р. М. Об одном классе дискретно-непрерывных краевых задач для векторных квазидифференциальных уравнений // Актуальные проблемы современного анализа: Сб. научн. Трудов. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2009. – С.19–36. 6, 11, 26

[20] Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – №.660 – С.34–38. 6, 11

[21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с. 134

[22] Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технол., 1999. – 372 с. 12

[23] Глазман И. Об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1949. – Т.64, №2. – С. 151–154. 14

[24] Глазман И. М. К теории сингулярных дифференциальных операторов // Успехи. мат. наук. – 1950. – Т.5, №6(40). – С. 102–135. 15

[25] Годев К. Н., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями // Матем. сборник. – 1986. – Т. 131(173), №2(10). – С. 159–184. 34, 35

[26] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАН України. – 2009. – №5. – С. 16–21. 25

[27] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173–207. 25

[28] Голощапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. – 2011. – V. 90, №1. – P. 151–156. 25

[29] Голощапова Н. И., Оридорога Л. Л. Одномерный оператор Шрёдингера с δ- и δ'-взаимодействиями // Мат. заметки. – 2008. – V. 84, №1. – P. 127–131. 25

[30] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №4. – С. 19–24. 26

[31] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №9. – С. 27–31. 26

[32] Гохман Э. Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. – М.: ГИФМИ. – 1958.

[33] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с. 55, 268

[34] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: неосцилляция решений. – Ижевск, 1984. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ, №1749. 22

[35] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи. – Ижевск, 1984. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ, №2994. 22

[36] Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №11. – С. 1861–1872. 22

[37] Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэфициентах // Доклады АН СССР. – 1988. – Т.298, №2. – С. 269–272. 22

[38] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с. 22

[39] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5(275). – С. 3–40. 30, 47

[40] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы, модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с. 27, 29, 30

[41] Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. – Львів: Вид.-во НУ"ЛП 2001. – 244 с. 170

[42] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я. и др. – Киев: Наук. думка, 1981. – 272 с. 12

[43] Кац И. С. Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели // Функц. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, №2. – С. 74–78. 24

[44] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. К вопросу о дефектных числах симметрических дифференциальных операторов с комплексными коэффициентами // Матем. физ. и функц. ан. – 1971. – 2. – С. 45–60. 15, 19

[45] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка: Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур. – Харьков, 1973. – 60 с. 15, 19

[46] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. ИЛ, 1958. – 474 с. 110

[47] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 503 с. 12, 149, 263

[48] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с. 40, 47, 245, 247

[49] Корнеев В. Г. О точных сеточных схемах // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1982. – Т. 22, №3. – С. 646–654. 34

[50] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II // Матем. сборник. – 1947. – Т. 20(62), №3. – С.431–495; Т. 21(63), №3. – С. 365–404. 15

[51] Крейн М. Г. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74, №1. – С. 9–12. 15

[52] Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Г.С. и др. – К.: Вища шк., 1974. – 472 с. 109, 125, 171, 188

[53] Кутнів М. В. Про точність триточкових різницевих схем m-го рангу для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 43–49. 33

[54] Кутнів М. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2002. - Вип. 4. – С. 61–66. 33

[55] Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60. 33

[56] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ярославского унив. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144. 30

[57] Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщенные интегралы. – 2-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2011. – 280 с. 247

[58] Мазуренко В. Про коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. – 2000. – Т. 2. – С. 255–259. 6, 11, 26

[59] Мазуренко В. В. Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доповіді НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22. 6, 11

[60] Мазуренко В. В., Таций Р. М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. – С. 328–336. 6, 11

[61] Мазуренко В. В., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про властивості матриці Ґріна систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Вісник Прикарпатського університету: Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 21–29. 6, 11, 26

[62] Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, №7. – С. 1194–1205. 33

[63] Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М. Точные и усеченные разностные схемы для задачи Штурма-Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, №7. – С. 1265–1275. 34

[64] Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25. 6, 11

[65] Махней О. В. Узагальнений несамоспряжений оператор другого порядку на півосі // Вісник Львів. нац. універ. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 92–101. 6, 11

[66] Махней О. В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 147–156. 6, 11

[67] Махней О. В. Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.64–72. 6, 11, 26

[68] Махней А. В., Таций Р. М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №8. – С. 1044–1051. 6, 11, 26

[69] Махней О. В., Тацій Р. М. Розвинення за власними векторфункціями у випадку простих власних значень сингулярного квазідиференціального оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №3. – С. 16–27. 6, 11, 26

[70] Махней О. В., Тацій Р. М. Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №2. – С. 179–187. 6, 11, 26

[71] Махней О. В., Тацій Р. М. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Математичні студії. – 2007. – Т. 29, №2. – С. 165–174. 6, 11, 26

[72] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1954. – 352 с. (2-е изд.) – М.: Наука, 1969. – 528 с. 15, 86

[73] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с. 28, 40, 42, 245

[74] Нижник Л. П. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева // Функц. ан. и его прил. – 2006. – V. 40, №2. – С. 74–79. 25

[75] Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием // Функц. ан. и его прил. – 2003. – V. 37, №1. – С. 85–88. 24

[76] Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с. 12, 81

[77] Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 92, №3. – С. 483–486. 15

[78] Орлов С. А. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №3. – С. 538–541. 15, 17

[79] Орлов С. А. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №6. – С. 1175–1177. 15, 17

[80] Перестюк Н. А., Остапенко Е. В. Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №8. – С. 1112–1118. 27

[81] Радыно Н. Я. О решениях линейных дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, содержащих медленно растущие распределения // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. н. – 1999. – №1. – С. 18–22. 30

[82] Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1969. – 8. – С. 3–24. 15, 18

[83] Самойленко А. М., Бойчук А. А. Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 564–568. 27

[84] Самойленко А. М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, №1. – С. 63–67. 27

[85] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Наукова думка, 1987. – 287 с. 27

[86] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк I. О. Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с. 158

[87] Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И. Проблема “биений” в импульсных системах: Препр. / АН УССР. Ин-т мат. – 1990. – №11. – С. 1–46. 27

[88] Слюсарчук В. Е. Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №7. – С. 954–964. 27

[89] Стасюк М. Ф. Структура розв’язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 33–36. 6, 26

[90] Стасюк М. Ф., Власій О. О. Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 82–87ю 6, 11, 26

[91] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. До дослідженя коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 43–47. 6

[92] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Структура решений обобщенного квазидифференциального уравнения 2-го порядка // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1984. – №182. – С. 120–122. 6, 26

[93] Стасюк *М. Ф.*, Таций *Р. М.* Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С. 89–90. 6, 75

[94] Стасюк *М. Ф.*, Тацій *Р. М.* Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1990. – №242. – С. 91–92. 6

[95] Стасюк *М. Ф.*, Тацій *Р. М.* Диференціальні рівняння з коефіцієнтами – узагальненими функціями вищих порядків // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1991. – № 251. – С. 111–113. 6, 26

[96] Стасюк *М.*, Тацій *Р.* Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник НУ "Львів. політех.": Фіз.-мат. науки. – Вип. 566. – 2006. – С. 33–40. 6

[97] Тацій *Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ. – 1994. – №2-94. – С. 1–54. 6, 26

[98] Тацій *Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. Держ. ун-т ім. І.Франка. - Львів, 1994. – 37 с. 28, 32, 75

[99] Тацій *Р. М.*, Власій *О. О.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №4. – С. 49–55. 6, 11, 26

[100] Тацій *Р. М.*, Власій *О. О.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її

застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – №9. – С. 17–20. 6, 11, 26

[101] Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165–167. 6

[102] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, №1. – С. 43–53. 6, 11, 26

[103] Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – 16, №1. – С. 61–75. 6, 11, 26

[104] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1989. – №4. – С. 25–28. 6, 26

[105] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1991. – №1. – С. 16–19. 6, 26

[106] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Живічинські М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 18–27. 6, 11, 26

[107] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі //

Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1996. – №229. – С. 165–170. 6, 11, 26

[108] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1998. – №346. – С. 120–124. 6, 11, 26

[109] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 163–173. 6, 11, 26

[110] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2004. – №518. – С. 30–35. 6, 26

[111] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В., Мазуренко В. В. Узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 21–27. 6, 11

[112] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Про порядок зростання розв'язків звичайного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами як функцій параметра // Вісник НУ "Львів. політех.": Прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 311–317. 6, 11

[113] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2009. – №10. – С. 7–37. 6, 26

[114] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №3. – С. 514–517. 33, 35

[115] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №1. – С. 5–63. 10, 35

[116] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №3. – С. 425–440. 33, 35

[117] Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Уч. пособ. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с. 10, 34, 35

[118] Самарский А. А. Теория разностных схем: Уч. пособ. – М.: Наука, 1977. – 656 с. 221, 228, 235

[119] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с. 26, 29

[120] Фихтегольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2 – М.: Физматлит, 2001. – 810 с. 212

[121] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с. 55

[122] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с. 27, 28, 29, 40, 48, 49

[123] Шилов Г. Е. Математический анализ. 2-й спец. курс. – М.: Изд.МГУ, 1984. – 201 с.

[124] Шин Д. Теорема существования квази-дифференциального уравнения n-го порядка // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 515–518. 12, 84

[125] Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu, I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 519–522. 12, 84

[126] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 523–526. 12, 84

[127] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), №3. – С. 479–527. 13, 84

[128] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), №1. – С. 39–70. 13, 14

[129] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов // Известия АН СССР. Серия математ. – 1955. – 19. – С. 201–220. 15, 17

[130] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 115, №1. – С. 67–70. 15, 17

[131] Штраус А. В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Известия АН СССР. Серия математ. – 1957. – 21. – С. 785–808. 15, 17

[132] Штраус А. В. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 155, №4. – С. 771–774. 15, 17

[133] Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №8. – С. 1132–1135. 27

[134] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. – 2nd revised ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p. 25

[135] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. 25

[136] Antosik P., Ligeza J. Products of measures and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, 1975. Sofia, 1979. – P. 20–26. 29, 31

[137] Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1989. – 372 p. 30

[138] Everitt W. N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910-1976 // Differential Equations (Proceedings of The 1977 Uppsala International Conference). – P. 62–81. 20

[139] Everitt W. N. Linear ordinary quasi-differential expressions. – Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Equations and Differential Geometry. – Science Press, University of Beijing, P.R. China, 1986. – P. 1–28. 20, 21

[140] Everitt W. N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators // Math. Surveys and Monographs. – Vol. 61. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 20, 21

[141] Everitt W. N., Muldowhey I. S., Thandi N. Factorization of quasi-differential operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 113, No. 1. – P. 93–98. 20, 21

[142] Everitt W. N., Race D. Some remarks on linear ordinary quasi-differential expressions // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 3-54, No. 2. – P. 300–320. 20, 21

[143] Everitt W. N., Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1979. – Vol. 27, No. 3. – P. 363–397. 20, 21

[144] Everitt W. N., Zettl A. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line // Proc. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 3-64, No. 3. – P. 524–544. 20, 21

[145] Fang H. The existence of periodic solutions of impulsive differential equations of mixed type // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2000. – Vol. 21, No. 3. – P. 291–296. 27

[146] Feller W. On second order differential operators // Ann. Math. – 1955. – Vol. 61. – P. 90–105. 24

[147] Feller W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions // Ill. J. Math. – 1957. – Vol. 1, No. 4. – P. 459–504. 24

[148] Feller W. The birth and death processes as diffusion processes // Journ. Math. Pur. Appl. – 1959. – Vol. 38. – P. 301–345. 24

[149] Frayer C., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V., Perry P. A. Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, No. 11. – 115007 (25 p). 25

[150] Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L. Three point difference schemes of variable order for nonlinear BVPs on the half axis. Technical Report // Friedrich Schiller University Jena, Department of Mathematics and Computer Science; 05 04, 2005. – P. 1–37. 33

[151] Goloschapova N., Oridoroga L. On the Negative Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators with Point Interactions // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – Vol. 67. – P. 1–14. 25

[152] Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43, No. 15. – 155204 (14 p). 25

[153] Halas Z., Tvrdý M. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter // Funct. Differ. Equ. – 2009. – Vol. 16, No. 2. – P. 299–313. 247

[154] Hildebrandt T. H. On systems of linear differentio-Stiltjes-integral equations // Illinois Journ. Math. – 1959. – Vol. 3, No. 3. – P. 352–373. 30, 54, 60, 100, 140

[155] Hildebrandt T. H. Introduction to the theory of integration. – Academic Press, New York – London, 1963. – 385 p. 244, 245

[156] Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 238, No. 1. – P. 27–57. 25

[157] Kodaira K. On ordinary differential equations of any even order and the correponding eigenfunction expansions // Amer. J. Math. – 1950. – Vol. 72. – P. 502–544. 20, 21

[158] Kostenko A. S., Malamud M. M. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differ. Equatios. – 2010. – Vol. 241, No. 2. – P. 253–304. 25

[159] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. – 1958. – Vol. 8, No. 3. – P. 360–388. 30

[160] Ligeza J. Cauchy's problem for system of linear differential equations with distributional coefficients // Coloq. math. – 1975. – Vol. 33, No. 2. – P. 295–303. 28, 29, 31

[161] Ligeza J. On distributional solution of some systems of linear differential equuatios // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, No. 1. – P. 37–41. 29, 31

[162] Ligeza J. Generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombean algebra // Math. Bochem. – 1993. – Vol. 118, No. 2. – P. 123–146. 30

[163] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, No. 4. – P. 464–493. 34

[164] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Jenaer schriften zur mathematik und informatik. Eingag: 03.03. – 2003. – P. 1–24. 34

[165] Makhney O. V., Tatsiy R. M. The Structure of Cauchy Function of a Vector Quasidifferential Equation // Matematychni Studii. – 2004. – Vol. 21, No. 1. – P. 221–224. 6, 11, 26

[166] Mazurenko V., Stasyuk M., Tatsiy R. On boundary value problem for the system of ordinary differential equations with distributions as coefficients // Matematychni Studii. – 2009. – Vol. 31, No. 1. – P. 65–74. 6, 11, 26

[167] Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, No. 2. – P. 184–200. 25

[168] Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2009. – Vol. 15, No. 1. – P. 31–40. 25

[169] Ogurisu O. On the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator with point interactions // Lett. Math. Phys. – 2008. – Vol. 85. – P. 129–133. 25

[170] Pandit S. G. Differential systems with impulsive perturbations // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 86, No. 2. – P. 553–560. 27

[171] Pandit S. G., Deo S. G. Differential systems involving impulses / Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 954. – Springer-Verlag, Berlin, 1982. – 102 p. 30

[172] Rofe-Beketov F. S., Kholkin A. M. Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties. – USA: World Scientific, 2005. – 438 p. 15, 19

[173] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, No. 6. – P. 814–832. 25

[174] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the properties of mappings associated with inverse Sturm-Liouville problems // Proc. Steklov. Inst. Math. – 2008. – Vol. 261. – P. 218–237. 25

[175] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Inverse Problems for Sturm–Liouville Operators with Potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability // Func. Analysis and Its Applications. – 2010. – Vol. 44, No. 4. – P. 270–285. 25

[176] Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. Differential and Integral Equations. – Praha: Academia, 1979. – 249 p. 30

[177] Stallard S. Functions of bounded variations as solutions of differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 366–373. 30

[178] Stone M. H. Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. – New York: A.M.S., 1932. – 622 p. 14

[179] Šeba P. Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, No. 1. – P. 111–120. 25

[180] Titchmarsh E. C. A problem in relativistic quantum mechanics // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 3-11, No. 1. – P. 169–192. 25

[181] Tvrdý. Differential and integral equations in the space of regulated functions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 25. – P. 1–104. 247

[182] Walker Ph. W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 9, No. 1. – P. 151–159. 18, 20

[183] Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugenhörigen Entwicklungen Willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1910. – 68. – S. 220-269. 14

[184] Weidmann J. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren // Math. Zeitschr. – 1967. – Vol. 98, No. 4. – P. 268–302. 20

[185] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators / Lecture Notes in Mathematics, 1258. – Springer-Verlag, 1987. – 303 p. 20

[186] Windau W. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die dazugehörigen

Darstellungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1921. – 83. – S. 256–279. 14

[187] Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mount. Journal of Math. – 1975. – Vol. 5. – P. 453–474. 20, 21

[188] Zolotaryuk A. V., Christiansen P. L., Iermakova S. V. Scattering properties of point dipole interactions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – Vol. 39. – P. 9329–9338. 25

[189] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187–191. 25

[190] Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ'-potential // Phys. Lett. A. – 2010. – Vol. 374, No. 15-16. – P. 1636–1641. 25

Именной указатель

Предметный указатель

ДЛЯ ЗАМЕТОК

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Роман Марьянович Таций
Марта Федоровна Стасюк
Виктор Владимирович Мазуренко
Олеся Орестовна Власий

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дизайн обложки *Олеся Таций*
Технические редакторы *Виктор Мазуренко, Олеся Власий*
Редактор перевода *Орест Фурикевич*
Главный редактор *Василий Слюсарчук*

Подписано в печать 14.04.2017. Формат издания $60\times84/16$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «CM PsCyr».
Условн. печатн. лист. 17,5. Тираж 300 экз.

Издательство ЛГУ БЖД
Свидетельство ДК №2038 от 02.02.2005 г.
79007, Украина, г. Львов, ул. Клепаровская, 35,
тел./факс: (032) 233-32-40, 233-24-79
e-mail.: ndr@ubgd.lviv.ua