Тестові завдання з функціонального аналізу та теорії міри

1. *Для множин* A *та* B *множина* $C=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$ *є їх*:

А. Різницею. ***Б.*** Симетричною різницею.

В. Асиметричною різницею. ***Г.*** Антисиметричною різницею.

2. *Серед перерахованих нижче множин незліченною є множина:*

А. Натуральних чисел. ***Б.*** Цілих чисел.

В. Раціональних чисел. ***Г.*** Ірраціональних чисел.

3. *Серед перерахованих нижче пар множин виберіть пару, в якій потужності множин рівні:*

А. Канторова множина і множина дійсних чисел.

Б. Канторова множина і множина раціональних чисел.

В. Множина дійних і множина раціональних чисел.

Г. Множина раціональних і множина ірраціональних чисел.

4. *З наступних тверджень про канторову множину виберіть правильне:*

А. Всі точки канторової множини – ізольовані.

Б. Канторова множина – відкрита.

В. Канторова множина – незліченна.

Г. Лінійна міра Лебега канторової множини дорівнює 1.

5. *З наступних тверджень про кільце множин виберіть правильне:*

А. Кожне кільце є $\sigma-$кільцем множин.

Б. Кожне кільце є $\delta-$кільцем множин.

В. Кожне кільце є півкільцем множин.

Г. Кожне кільце є алгеброю множин.

6. *Функція* $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ *визначає відстань у просторі:*

А. R^1. ***Б.*** R_0^n. ***В.*** R_1^n. ***Г.*** R^n.

7. *Функція* $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$ *визначає відстань у просторі:*

А. R^1. ***Б.*** R_0^n. ***В.*** R_1^n. ***Г.*** R^n.

8. *З наступних метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1;2)$ *та* $y=(3;1)$ *дорівнює 2:*

А. R_3^2. ***Б.*** R_1^2. ***В.*** R_0^2. ***Г.*** R^2.

9. *З наступних метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1;2)$ *та* $y=(3;1)$ *дорівнює 3:*

А. R_3^2. ***Б.*** R_1^2. ***В.*** R_0^2. ***Г.*** R^2.

10. *З наступних чотирьох метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1,2,3,0,0,...,0,...)$ *та* $y=(2,3,1,0,0,...,0,...)$ *є найменшою:*

А. l_3. ***Б.*** l_2. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

11. *З наступних чотирьох метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1,2,3,0,0,...,0,...)$ *та* $y=(2,3,1,0,0,...,0,...)$ *є найбільшою:*

А. l_3. ***Б.*** l_2. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

12. *Множина* $K=\{x:\rho(x,x_0)\le r\}$ *точок метричного простору називається:*

А. Замкненою кулею. ***Б.*** Відкритою кулею.

В. $\varepsilon-$околом точки x_0. ***Г.*** $r-$околом точки x_0.

13. *Точка* x_0, *у кожному околі якої є принаймні одна точка множини* M, *називається:*

А. Точкою дотику множини M.

Б. Граничною точкою множини M.

В. Ізольованою точкою множини M.

Г. Внутрішньою точкою множини M.

14. *Точка* x_0, *у кожному околі якої є принаймні одна точка множини* M, *відмінна від* x_0, *називається:*

А. Точкою дотику множини M.

Б. Граничною точкою множини M.

В. Ізольованою точкою множини M.

Г. Внутрішньою точкою множини M.

15. *Кожна гранична точка множини:*

А. Є точкою дотику даної множини.

Б. Є ізольованою точкою даної множини.

В. Є внутрішньою точкою даної множини.

Г. Належить до даної множини.

16. *Якщо існує таке* $\varepsilon > 0$, *що* $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ *для кожного* $n > N(\varepsilon)$, *то:*

А. $x_0 -$ точка дотику послідовності (x_n).

Б. $x_0 -$ гранична точка послідовності (x_n).

В. $x_0 -$ границя послідовності (x_n).

Г. Кожна з трьох інших наведених відповідей неправильна.

17. *Якщо для кожного* $\varepsilon > 0$, *існує такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що* $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ *для всіх* $n > N(\varepsilon)$, *то:*

А. $x_0 -$ ізольована точка множини (x_n).

Б. $x_0 -$ належить до послідовності (x_n).

В. $x_0 -$ границя послідовності (x_n).

Г. Кожна з трьох інших наведених відповідей неправильна.

18. x_0 *–внутрішня точка множини. Тоді серед наступних чотирьох тверджень про неї неправильним є твердження:*

А. $x_0 -$ точка дотику даної множини.

Б. $x_0 -$ ізольована точка даної множини.

В. $x_0 -$ гранична точка даної множини.

Г. $x_0 -$ належить до даної множини.

19. *Замиканням множини всіх раціональних чисел є:*

А. Порожня множина.

Б. Скінченна множина.

В. Зліченна множина.

Г. Незліченна множина.

20. *Якщо множини A_n, $n=1,2,...$, відкриті, то серед наступних тверджень неправильним є твердження:*

А. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ − відкрита множина. ***Б.*** $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$ − відкрита множина.

В. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ − відкрита множина. ***Г.*** $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A_n$ − відкрита множина.

21. *З наведених нижче метричних просторів виберіть простір, який не є сепарабельним:*

А. $C[a,b]$. ***Б.*** R^n. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

22. *Множина M метричного простору називається компактною, якщо скінченне підпокриття цієї множини можна виділити з довільного її покриття:*

А. Обмеженими множинами. ***Б.*** Замкненими множинами.

В. Вимірними множинами. ***Г.*** Відкритими множинами.

23. *Міра елементарних множин є продовженням міри:*

А. Прямокутників. ***Б.*** Лебега.

В. Жордана. ***Г.*** Жодної з трьох інших.

24. *Для міри довільних двох елементарних множин виберіть правильну рівність:*

А. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)+m'(A\bigcap B)$.

Б. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)-2m'(A\bigcap B)$.

В. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)-m'(A\bigcap B)$.

Г. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)$.

25. *Для довільних підмножин A та B одиничного квадрата та зовнішньої міри μ^* правильною є нерівність :*

А. $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\geq\mu^*(A\vartriangle B)$. ***Б.*** $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\leq\mu^*(A\vartriangle B)$.

В. $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|<\mu^*(A\vartriangle B)$. ***Г.*** $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|>\mu^*(A\vartriangle B)$.

26. *Серед наведених нижче плоских множин не є елементарною множиною:*

А. Круг. ***Б.*** Квадрат. ***В.*** Відрізок. ***Г.*** Точка.

27. *Властивість міри μ, яка полягає у тому, що із включення $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ випливає нерівність $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, називається:*

А. Адитивністю міри. ***Б.*** Зліченною адитивністю міри

В. Півадитивністю міри. ***Г.*** Неперервністю міри.

28. *З наступних тверджень про вимірну за Жорданом плоску множину вберіть правильне :*

А. Ця множина є прямокутником.

Б. Ця множина є елементарною.

В. Ця множина є квадрованою фігурою.

Г. Ця множина не обов'язково є квадрованою фігурою.

29. *Множина точок на площині обмежена лініями:* $y = 0, y = 2,$ $y = x - 1,\ x = 0.$ *Знайдіть плоску міру Лебега цієї множини:*

А. 1. ***Б.*** 2. ***В.*** 3. ***Г.*** 4.

30. *Множина точок на площині обмежена лініями:* $y = 6x,\ y = 6x^2.$ *Знайдіть плоску міру Лебега цієї множини:*

А. 1. ***Б.*** 2. ***В.*** 3. ***Г.*** 6.

31. *Функція $f(x)$ визначена на вимірній множині A. З наступних чотирьох тверджень виберіть те, з котрого не випливає її вимірність на цій множині:*

А. Множини $\{x : x \in A, f(x) = c\}$ вимірні при кожному $c \in R.$

Б. Множини $\{x : x \in A, f(x) \geq c\}$ вимірні при кожному $c \in R.$

В. Множини $\{x : x \in A, f(x) \leq c\}$ вимірні при кожному $c \in R.$

Г. Множини $\{x : x \in A, f(x) > c\}$ вимірні при кожному $c \in R.$

32. *Серед наступних чотирьох тверджень виберіть неправильне твердження:*

А. Якщо функція $f(x)$ вимірна, то $f^2(x)$ також вимірна.

Б. Якщо функція $f(x)$ вимірна, то $f^3(x)$ також вимірна.

В. Якщо функція $f^2(x)$ вимірна, то $f(x)$ також вимірна.

Г. Якщо функція $f^3(x)$ вимірна, то $f(x)$ також вимірна.

33. *Послідовність функцій* $f_n(x)=x^{n+1}-x^n$ *на відрізку* $[-1;1]$ *збігається до функції* $f(x)=0$*:*

А. Лише за мірою. ***Б.*** Лише майже скрізь.

В. За мірою і майже скрізь. ***Г.*** Скрізь.

34. *Серед функцій* $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\ f_3(x)=\begin{cases}x, & x\in Q,\\ 1, & x\in R\setminus Q,\end{cases}$ *визначте кількість вимірних за Лебегом на відрізку* $[-1,1]$ *функцій:*

А. 3. ***Б.*** 2. ***В.*** 1. ***Г.*** 0.

35. *З наведених функцій, визначених на проміжку* $(0;1]$, *виберіть ту, яка не є простою:*

А. $f(x)=1.$ ***Б.*** $f(x)=x.$

В. $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,5,\\ 0, & x\geq 0,5.\end{cases}$ ***Г.*** $f(x)=\dfrac{1}{n},\ x\in\left(\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right],\ n\in N.$

36. *З наступних чотирьох тверджень виберіть твердження, справедливе як для інтеграла Лебега, так і для інтеграла Рімана по відрізку* $[a,b]$*:*

А. Якщо функція $|f(x)|$ інтегрована, то $f(x)$ теж інтегрована.

Б. Якщо функція $f(x)$ вимірна і обмежена, то вона інтегрована.

В. Обмежена розривна лише при $x\in N$ функція – інтегрована.

Г. Обмежена невід’ємна функція – інтегрована.

37. *Функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *вимірні та обмежені на відрізку* $[-1;1]$. *Тоді на цьому відрізку функція* $f(x)-g(x)$*:*

А. Інтегровна за Лебегом.

Б. Неперервна і вимірна за Лебегом.

В. Інтегровна за Ріманом.

Г. Непарна і вимірна за Лебегом.

38. *Для функції* $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in Q, \\ 3x^2, & x\in R\setminus Q, \end{cases}$ *обчисліть* $\int\limits_{[0;2]} f(x)d\mu$ *: :*

А. 4. ***Б.*** 8. ***В.*** 12. ***Г.*** Інтеграл не існує.

39. *Обчисліть* $\int\limits_{[0;2]} f(x)d\mu$ *, якщо* $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in Q, \\ 2x, & x\in R\setminus Q, \end{cases}$:

А. 4. ***Б.*** 8. ***В.*** 12. ***Г.*** Інтеграл не існує.

40. *Не інтегрованими за Ріманом на відрізку* $[a;b]$ *є такі функції:*

А. Неперервні на відрізку $[a;b]$.

Б. Монотонні на відрізку $[a;b]$.

В. Обмежені з множиною точок розриву $[a;b]\cap Q$.

Г. Обмежені з множиною точок розриву $[a;b]\setminus Q$.

41. *Послідовність вимірних функцій* $f_n(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *збігається у середньому до функції* $f(x)$. *Тоді вона збігається до* $f(x)$*:*

А. Майже скрізь. ***Б.*** Рівномірно.

В. За мірою. ***Г.*** Принаймні в одній точці.

42. *Якщо функція* $\varphi(x)\geq 0$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри і число* $c>0$, *то:*

А. $\mu\{x : x\in A, \varphi(x)\leq c\}\leq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

Б. $\mu\{x : x\in A, \varphi(x)\geq c\}\geq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

В. $\mu\{x : x\in A, \varphi(x)\geq c\}\leq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

Г. $\mu\{x : x\in A, \varphi(x)\leq c\}\geq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

43. *Невизначеним інтегралом Лебега функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *називається функція:*

А. $\int\limits_{[a;x]} f(t)d\mu.$ **Б.** $\int\limits_{[a;b]} f(t)d\mu.$ **В.** $\int\limits_{[x;b]} f(t)d\mu.$ **Г.** $\int\limits_{[t;x]} f(t)d\mu.$

44. *Для похідної кожної монотонно неспадної на відрізку* $[a;b]$ *функції* $f(x)$ *правильною є нерівність:*

А. $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu < f(b)-f(a).$ **Б.** $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu > f(b)-f(a).$

В. $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu \le f(b)-f(a).$ **Г.** $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu \ge f(b)-f(a).$

45. *З наступних чотирьох тверджень про функції, визначені на деякому відрізку виберіть неправильне:*

А. Абсолютно неперервна функція є неперервною.

Б. Абсолютно неперервна функція є рівномірно неперервною.

В. Монотонна функція є абсолютно неперервною.

Г. Функція з обмеженою похідною є абсолютно неперервною.

46. *Рівність* $\int\limits_{[a,x]} f'(t)d\mu = f(x)-f(a)$ *правильна для кожної:*

А. Абсолютно неперервної функції.

Б. Рівномірно неперервної функції.

В. Монотонної функції.

Г. Функції з обмеженою зміною.

47. *Знакозмінні міри називають:*

А. Розрядами. **Б.** Зарядами.

В. Потенціалами. **Г.** Функціями стрибків.

48. *До класифікації зарядів не має відношення термін:*

А. Сингулярний. **Б.** Регулярний.

В. Неперервний. **Г.** Дискретний.

49. *Для всіх функцій з обмеженою зміною правильною є нерівність:*

А. $V_a^b[f+g] \ge V_a^b[f]+V_a^b[g].$ **Б.** $V_a^b[f+g] < V_a^b[f]+V_a^b[g].$

В. $V_a^b[f+g] \le V_a^b[f] + V_a^b[g]$. **Г.** $V_a^b[f+g] > V_a^b[f] + V_a^b[g]$.

50. *Визначте* $V_{-1}^2[f]$, *якщо* $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x \in [-1,2), \\ 1, & x = 2. \end{cases}$:

А. 0. **Б.** 4. **В.** 6. **Г.** 8.

51. *З наведених нижче чотирьох тверджень виберіть правильне:*

А. Кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Б. Кожна збіжна послідовність є фундаментальною.

В. Кожна послідовність повного метричного простору є збіжною.

Г. Усі послідовності метричного простору є фундаментальними .

52. *З наступних чотирьох варіантів відповідей виберіть той, у котрому всі з наведених у ньому метричних просторів є повними:*

А. $L_2[a,b], C_2[a,b], C[a,b]$. **Б.** $C_2[a,b], C_1[a,b], R^n$.

В. $l_2, C_3[a,b], C[a,b]$. **Г.** $l_1, L_2[a,b], C[a,b]$.

53. *З наступних варіантів відповідей виберіть той, у котрому рівно два наведені у ньому метричні простори є повними:*

А. $L_2[a,b], C_2[a,b], C[a,b]$. **Б.** $l_1, C[a,b], R^n$.

В. $l_2, C_3[a,b], C[a,b], R^1$. **Г.** $l_2, L_2[a,b], C_1[a,b], R_1^n$.

54. *Відображення* $A: X \to X$ *називається стискаючим, якщо:*

А. $\rho(Ax, Ay) < \alpha\rho(x,y)$ для всіх $x, y \in X$.

Б. $\rho(Ax, Ay) < \alpha\rho(x,y)$ для всіх різних $x, y \in X$.

В. $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y)$ для всіх $x, y \in X$.

Г. Серед трьох інших наведених відповідей правильне означення відсутнє.

55. *З наступних чотирьох тверджень виберіть правильне:*

А. Кожне неперервне відображення є стискаючим.

Б. Кожне стискаюче відображення є неперервним.

В. Кожне стискаюче відображення є лінійним.

Г. Серед трьох інших наведених відповідей правильне твердження відсутнє.

56. *Для розв'язування рівняння* $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)$ *з обмеженим ядром* $|K(x,s)|\le M$ *метод послідовних наближень у просторі* $C[a,b]$ *застосовний за такої достатньої умови:*

А. $|\lambda|M(b-a)\ge 1.$ **Б.** $|\lambda|M(b-a)\le 1.$

В. $|\lambda|M(b-a)>1.$ **Г.** $|\lambda|M(b-a)<1.$

57. *Для розв'язування рівняння* $y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x)$ *з обмеженим ядром* $|K(x,s)|\le M$ *метод послідовних наближень у просторі* $C[a,b]$ *застосовний лише за умови:*

А. $|\lambda|M(b-a)<1.$ **Б.** $|\lambda|M(b-a)\le 1.$

В. $|\lambda|M(b-a)>1.$ **Г.** Для всіх $\lambda\in R.$

58. *Лінійні простори* $l_2,\ c_0,\ c,\ m$ *утворюють такий ланцюжок послідовних включень:*

А. $l_2\subset c_0\subset c\subset m.$ **Б.** $c_0\subset l_2\subset c\subset m.$

В. $c_0\subset c\subset l_2\subset m.$ **Г.** $c_0\subset c\subset m\subset l_2.$

59. *Серед наступних тверджень про лінійні топологічні простори виберіть неправильне:*

А. Такий простір є лінійним.

Б. Такий простір є топологічним.

В. Такий простір є нормованим.

Г. Операція додавання у такому просторі є неперервною.

60. *До аксіом норми не відноситься умова :*

А. $\|x\|\ge 0$. **Б.** $\|xy\|\le\|x\|\cdot\|y\|.$

В. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|.$ **Г.** $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|.$

61. *Норму у просторі* R_1^n *визначають рівністю:*

А. $\|x\|=\int_a^b|x(t)|dt$. **Б.** $\|x\|=\sum_{k=1}^n|x_k|.$

В. $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|.$ ***Г.*** $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|.$

62. *Норму у просторі* m *задають формулою:*

А. $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt.$ ***Б.*** $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|.$

В. $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|.$ ***Г.*** $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|.$

63. *Формула* $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt$ *визначає норму у просторі:*

А. $C[a,b].$ ***Б.*** $C_1[a,b].$ ***В.*** $C_2[a,b].$ ***Г.*** $C_3[a,b].$

64. *Формула* $\|x\| = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t) dt}$ *визначає норму у просторі:*

А. $C[a,b].$ ***Б.*** $C_1[a,b].$ ***В.*** $C_2[a,b].$ ***Г.*** $C_3[a,b].$

65. *З наступних нормованих просторів виберіть той, у котрому послідовність* $x_n(t) = t^n$ *не збігається до функції* $x(t) = 0$*:*

А. $C[0,1].$ ***Б.*** $C_1[0,1].$ ***В.*** $C_2[0,1].$ ***Г.*** $L_2[0,1].$

66. *Формула* $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t) y(t) dt$ *визначає скалярний добуток на такому лінійному просторі :*

А. $C[0,1].$ ***Б.*** $c_0.$ ***В.*** $c.$

Г. На жодному з трьох інших просторів

67. *Скалярний добуток елементів* $x = (1, 2, -3, 0, 0, ..., 0, ...)$ *та* $y = (-2, 3, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$ *простору* l_2 *дорівнює:*

А. 0. ***Б.*** 1. ***В.*** 2. ***Г.*** 3.

68. *Норму в евклідовому просторі визначають рівністю::*

А. $\|x\| = (x, x).$ ***Б.*** $\|x\| = \sqrt{x^2}.$

В. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$ ***Г.*** $\|x\| = \sqrt{(x, y)}.$

69. *Умова* $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ *називається характеристичною властивістю:*

А. Метричних просторів. ***Б.*** Лінійних просторів.

В. Нормованих просторів. ***Г.*** Евклідових просторів.

70. *Скалярним добутком не може бути задана норма простору:*

А. R^n. ***Б.*** $C_2[a,b]$. ***В.*** l_2. ***Г.*** m.

71. *Рівність* $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ *справедлива для кожної пари елементів довільного:*

А. Дійсного лінійного нормованого простору.

Б. Комплексного лінійного нормованого простору.

В. Дійсного лінійного евклідового простору.

Г. Комплексного лінійного евклідового простору.

72. *Для довільних елементів* x, y *дійсного евклідового простору справедлива нерівність:*

А. $|(x,y)|<\|x\|\cdot\|y\|$. ***Б.*** $|(x,y)|>\|x\|\cdot\|y\|$.

В. $|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$. ***Г.*** $|(x,y)|\ge\|x\|\cdot\|y\|$.

73. *У комплексному евклідовому просторі* l_2. *скалярний добуток визначають формулою:*

А. $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{x_k}y_k$. ***Б.*** $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}$.

В. $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k$. ***Г.*** $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{x_k y_k}$.

74. *В означення гільбертового простору не входить вимога:*

А. Нескінченної розмірності. ***Б.*** Сепарабельності.

В. Повноти. ***Г.*** Евклідовості.

75. *Нерівність Бесселя у дійсному евклідовому просторі має вигляд:*

А. $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\ge\|x\|^2$. ***Б.*** $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\le\|x\|^2$. ***В.*** $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\|x\|^2$. ***Г.*** $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2>\|x\|^2$.

76. *Функціонал* f *називається адитивним, якщо для всіх* $x, y \in L$ *виконується рівність:*

А. $f(x+y) = \alpha f(x) + f(y).$ **Б.** $f(x+y) = f(x) + f(y).$

В. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$ **Г.** $f(xy) = f(x) + f(y).$

77. *Функціонал* f *називається спряжено-однорідним, якщо для всіх комплексних чисел* α *та всіх* $x \in L$ *виконується рівність:*

А. $f(\alpha x) = \alpha f(x).$ **Б.** $f(\alpha x) = \alpha \overline{f(x)}.$

В. $f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x).$ **Г.** $f(\alpha x) = |\alpha| f(x).$

78. *З наведених нижче функціоналів* $f : C(a,b) \to R^1$ *виберіть лінійний функціонал:*

А. $f(x) = \int\limits_a^b (t + x(t))dt.$ **Б.** $f(x) = \int\limits_a^b t^2 x(t)dt.$

В. $f(x) = f(a) + f(b).$ **Г.** $f(x) = a + b.$

79. *З наведених нижче функціоналів* $f : C[a,b] \to R^1$ *виберіть функціонал,який не є лінійним:*

А. $f(x) = \int\limits_a^b t^2 x(t)dt.$ **Б.** $f(x) = \int\limits_a^b t\, x(t)dt.$

В. $f(x) = 0.$ **Г.** $f(x) = a + b.$

80. *Норма лінійного неперервного функціонала не може бути визначена формулою:*

А. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}.$ **Б.** $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$

В. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} |f(x)|.$ **Г.** $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} |f(x)|.$

81. *В означенні однорідно-опуклого функціонала* p, *визначеного на дійсному лінійному просторі* L, *нерівність однієї з аксіом має вигляд :*

А. $p(x+y) \geq p(x) + p(y).$ **Б.** $p(x+y) < p(x) + p(y).$

В. $p(x+y) \le p(x)+p(y)$. **Г.** $p(x+y) > p(x)+p(y)$.

82. *Простір усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на лінійному просторі L, називається:*

А. Спряженим до L. **Б.** Симетричним до L.
В. Обмеженим на L. **Г.** Неперервним на L.

83. *Слабка збіжність у просторі $C[a,b]$ є:*

А. Рівномірною. **Б.** Збіжністю майже скрізь.
В. Поточковою. **Г.** Збіжністю за мірою.

84. *Кожна узагальнена функція є:*

А. Регулярною. **Б.** Сингулярною.
В. Диференційовною. **Г.** Необмеженою.

85. *Похідна узагальненої функції визначається рівністю:*

А. $\langle f',\varphi\rangle = \langle f,\varphi'\rangle,\ \varphi \in D.$ **Б.** $\langle f',\varphi\rangle = -\langle f',\varphi'\rangle,\ \varphi \in D.$
В. $\langle f',\varphi\rangle = \langle f',\varphi'\rangle,\ \varphi \in D.$ **Г.** $\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle,\ \varphi \in D.$

86. *З наведених нижче операторів $A: C(a,b) \to C(a,b)$ виберіть лінійний оператор:*

А. $Ax(t) = 1 + x(t)$. **Б.** $Ax(t) = t + x(t)$.
В. $Ax(t) = t - 1$. **Г.** $Ax(t) = t^2 x(t)$.

87. *З наведених нижче прикладів операторів $A: C(a,b) \to C(a,b)$ виберіть необмежений оператор:*

А. Нульовий оператор. **Б.** Оператор множення.
В. Оператор Фредгольма. **Г.** Оператор диференціювання.

88. *З операторів $A: C[a,b] \to C[a,b]$ виберіть нелінійний оператор:*

А. $Ax(t) = x(t)$. **Б.** $Ax(t) = t + x(t)$.
В. $Ax(t) = t\,x(t)$. **Г.** $Ax(t) = t^2 x(t)$.

89. *Норму лінійного неперервного оператора можна визначити за формулою:*

А. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|>1} \|Ax\|$. **Б.** $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.

В. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|.$ **Г.** $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\geq 1} \|Ax\|.$

90. *Якщо* A *та* $B-$ *обмежені лінійні оператори, то :*

А. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$ **Б.** $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|.$

В. $\|A+B\| \geq \|A\| + \|B\|.$ **Г.** $\|A+B\| < \|A\| + \|B\|.$

91. *Якщо* A *та* $B-$ *обмежені лінійні оператори, то :*

А. $\|AB\| \leq \|A\| + \|B\|.$ **Б.** $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|.$

В. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$ **Г.** $\|AB\| \geq \|A\| \cdot \|B\|.$

92. *Резольвентою Фредгольма називається функція:*

А. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x,t)$.

Б. $R(x,t;\lambda) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)$.

В. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t)$.

Г. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} K_n(x,t)$.

93. *Ітеровані ядра інтегрального оператора Вольтерри у просторі* $C[a,b]$ *визначаються формулами:*

А. $K_1(t,s) = K(t,s),\ K_n(t,s) = \int\limits_t^s K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,\ldots$.

Б. $K_1(t,s) = K(t,s),\ K_n(s,t) = \int\limits_s^t K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,\ldots$.

В. $K_1(t,s) = K(t,s),\ K_n(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,\ldots$.

Г. $K_1(t,s) = K(t,s),\ K_n(t,s) = \int\limits_a^t K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,\ldots.$

94. *Якщо* $\lambda \in \sigma_p(A)$, *то оператор* $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$*:*

А. Не існує. ***Б.*** Обмежений.

В. Неперервний. ***Г.*** Необмежений.

95. *Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L, то точка λ регулярна, якщо*

А. $|\lambda| = \|A\|$. ***Б.*** $|\lambda| < \|A\|$. ***В.*** $|\lambda| \le \|A\|$. ***Г.*** $|\lambda| > \|A\|$.

96. *Оператор A, визначений в евклідовому просторі E, називають самоспряженим якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність :*

А. $(Ax, y) = (x, y)$. ***Б.*** $(Ax, y) = (y, Ax)$.

В. $(Ax, y) = (x, Ay)$. ***Г.*** $(Ax, y) = (y, x)$.

97. *Власні значення довільного самоспряженого оператора:*

А. Невід'ємні. ***Б.*** Раціональні.

В. Дійсні. ***Г.*** Ірраціональні.

98. *$K(x,s)$ – неперервна у квадраті $[a,b;a,b]$ функція така, що $|K(x,s)| \le M$. Тоді рівняння $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x)$ має єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$ за такої достатньої умови:*

А. $|\lambda| M(b-a) \ge 1$. ***Б.*** $|\lambda| M(b-a) \le 1$.

В. $|\lambda| M(b-a) > 1$. ***Г.*** $|\lambda| M(b-a) < 1$.

99. *Власні значення довільного самоспряженого оператора:*

А. Невід'ємні. ***Б.*** Раціональні.

В. Дійсні. ***Г.*** Ірраціональні.

100. *З наведених нижче тверджень про компактні та обмежені оператори виберіть неправильне:*

А. Добуток компактних операторів – компактний оператор.

Б. Добуток обмежених операторів – компактний оператор.

В. Добуток обмежених операторів – обмежений оператор.

Г. Добуток обмеженого і компактного операторів – компактний оператор.