Діофантова властивість малих знаменників нелокальної двоточкової задачі для одного рівняння змішаного типу у прямокутнику

Савка Іван Ярославович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
s-i@ukr.net

Гой Тарас Петрович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
tarasgoy@yahoo.com

Сучасні проблеми природознавства призводять до необхідності постановки й дослідження якісно нових задач, одним з прикладів яких є нелокальні крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це пов'язано передусім з тим, що математичними моделями різноманітних фізичних, хімічних і біологічних процесів є задачі, в яких замість класичних крайових умов задається певний зв'язок значень шуканої функції та/або її похідних на межі області [1].

Нехай на комплекснозначну функцію $v : [0,T] \to \mathbb{C}$ з класу $C^1[0,T]$ діють функціонали

$$\begin{aligned} M_1[v] &\equiv a_{11}v(0) + a_{12}v(T) + b_{11}v'(0) + b_{12}v'(T), \\ M_2[v] &\equiv a_{21}v(0) + a_{22}v(T) + b_{21}u'(0) + b_{22}v'(T), \end{aligned} \tag{1}$$

де $T > 0$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,j = 1,2$, а форми M_1 і M_2 — лінійно незалежні, тобто ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

дорівнює 2.

Мінор матриці A, який складений з i-го та j-го стовпців ($i < j$), позначимо через d_{ij}.

Запровадимо функції

$$f_k(t) = \cos \lambda_k t, \quad g_k(t) = \sin \lambda_k t,$$

які залежать від параметра $k \in \mathbb{N}$, причому $\lambda_k > 0$ і

$$\lambda_k = \pi\left(k - \tfrac{1}{4}\right) + O\left(\tfrac{1}{k}\right).$$

За допомогою метричного підходу [1, 1] отримано такий результат.

Теорема. *Якщо*

$$|d_{12} + d_{34}| + |d_{14} - d_{23}| + |d_{13}| + |d_{24}| \neq 0,$$

то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівності*

$$\Delta_k \equiv \left|U_1[f_k]U_2[g_k] - U_1[g_k]U_2[f_k]\right| \geq \lambda_k^{-\gamma} \tag{2}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ *при* $\gamma > 1$.

Вирази Δ_k, $k \in \mathbb{N}$, є малими знаменниками, а виконання для них оцінок (2) є однією з умов коректної розв'язності задачі для рівняння Лаврентьєва – Біцадзе (еліптично-гіперболічного типу) [3] у прямокутній області $Q = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in (-1,1)\}$:

$$u_{tt} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} = 0, \tag{3}$$

з умовами за змінною x

$$u(t,-1) = u(t,1) = 0,\ u(t,-0) = u(t,+0),\ u_x(t,-0) = u_x(t,+0), \tag{4}$$

і нелокальними двоточковими умовами за змінною t

$$\begin{aligned} a_{11}u(0,x) + a_{12}u(T,x) + b_{11}u_t(0,x) + b_{12}u_t(T,x) = \varphi_1(x),\\ a_{21}u(0,x) + a_{22}u(T,x) + b_{21}u_t(0,x) + b_{22}u_t(T,x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{5}$$

У роботах [2, 4] доведено коректність задачі (3)–(5) тільки для окремих випадків нелокальних умов:

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0,\ d_{13} \neq 0;\\ a_{11} = a_{21} = b_{11} = b_{21} = 0,\ d_{24} \neq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

[1] *Ільків В. С.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №12. – С. 1624–1650.

[2] *Захаров П. Е.* Нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / П. Е. Захаров // Матем. заметки ЯГУ. – 2005. – Т.12, вып. 2. – С. 17–27.

[3] *Лаврентьев М. А.* К проблеме уравнений смешанного типа / М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе // Докл. АН СССР. – 1950. – 70, №3. – С. 373–376.

[4] *Пинигина Н. Р.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа/ Н. Р. Пинигина // Матем. заметки ЯГУ. – 2010. – Т.17, вып. 1. – С. 100–108.

[5] *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук // К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

Оцінка малих знаменників багатоточкової нелокальної задачі для псевдодиференціального рівняння із залежними коефіцієнтами в умові

Савка Іван Ярославович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
s-i@ukr.net

Василишин Павло Богданович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
pashavasylyshyn@rambler.ru

Нехай $x = (x_1, \dots, x_p)$, $D_x = \big(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}\big)$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = \sum_{j=1}^{p} |k_j|$, псевдодиференціальний оператор $B(D_x)$ ототожнюється з послідовністю комплексних чисел $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, $B(D_x)e^{i(k,x)} = B(k)e^{i(k,x)}$.

При дослідженні розв'язності багатоточкової нелокальної задачі

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - B\left(D_x\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p,$$

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r(\tau) u(t,x)\Big|_{t=t_r} = \varphi(x), \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T,$$

де $\mu_r : [0,1] \to \mathbb{R}$, φ — задана функція, виникає проблема малих знаменників [1], подолання якої полягає у встановленні діофантової оцінки знизу

$$\left| \sum_{r=1}^{m} \mu_r(\tau) e^{B(k)t_r} \right| \geq |k|^{-\gamma} \max\left(1, e^{T\,\mathrm{Re} B(k)}\right) \tag{1}$$