**Equation Chapter 1 Section 1** УДК 336.71

Буртняк І.В., к.е.н. асистент кафедри економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Малицька Г.П., к.фіз.-мат.н., доцент кафедри математичного та функціонального аналізу, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

# Дослідження динаміки фінансових ресурсів на базі мультиплікативної стохастичної моделі

В статті розглянуто прогнозування динаміки показників стану фінансової фірми за допомогою мультиплікативної стохастичної моделі з використанням z–перетворення Лапласа.

**Вступ.** При представленні фінансової фірми як сукупності стохастичних потоків і ресурсів ми не можемо обмежитися тільки моделями, що описують динаміку окремо взятих показників. Такий стан справ одержуємо тому, що достатньо широкий список похідних величин і характеристик, залежність яких від базових стохастичних ресурсів має детерміновану природу. Наприклад, величини окремих депозитних рахунків однозначно визначають їх сумарний об'єм. Часто зустрічаються ситуації, коли для безпосереднього ухвалення конкретних управляючих рішень по діяльності фінансової фірми потрібне знання динаміки саме вторинних показників. Потрібно звернути увагу на те, що залежності між рядами величин ресурсів фінансової фірми можуть бути достатньо складними.

Економіко-математичні конструкції також як і дискретні стохастичні моделі, опираються на припущення про можливість спостереження значень досліджуваних фінансових ресурсів через дискретні рівновіддалені проміжки часу $t = 0,1,\ldots,T$.

**Постановка завдання.** Введемо позначення: $t$ – індекс періоду $(t \in 1:T)$; $q_t$ – об'єм власних засобів фірми в періоді $t$; $x_t$ – об'єм залучених засобів в періоді $t$; $v$ – середня норма витрат на одиницю залучених засобів;

$u-$ середня норма доходу на одиницю використаних засобів; $\Theta-$ частка власних засобів, які перетворюються на активи, тобто використовуються для отримання доходу (накопичення власного капіталу).

Тоді $vx_t-$ затрати для залучення засобів в періоді $t$, $u\left(\Theta q_{t-1}+x_t\right)-$ дохід за період $t$, величина власних засобів визначається співвідношенням

$$q_{t+1}=q_t+u\left(\Theta q_{t-1}+x_t\right)-vx_t. \qquad (1.1)$$

Описана модель базується на наступних істотних припущеннях, що значно спрощують реальну ситуацію: припускаємо незмінність норм $u,v,\Theta$ для всіх періодів $t$, що зумовлюють можливість безпосереднього використання даної моделі для відносно нетривалих часових періодів; припускаємо, що зміни обсягів залучених і використаних засобів, а також витрати і отримання доходу проходять дискретно.

Проте, не дивлячись на прийняті припущення, дана модель може бути ефективно використана для аналізу принципових залежностей динаміки показників стану фінансової фірми від норм витрат на залучення засобів і доходу від активів.

З математичної точки зору (1.1) є стохастичне різницеве рівняння або процес авторегресії, для розв'язання якого може бути, зокрема, застосоване $z-$ перетворення. Апарат інтегральних і дискретних перетворень базується на зв'язку однозначної функції комплексної змінної з відповідною функцією дійсної змінної. Для багатьох складних ситуацій це дозволяє операції над оригіналами замінити простішими операціями над зображеннями, що широко використовуються при розв'язанні диференціальних і інтегральних рівнянь (інтегральні перетворення) і в теорії імпульсних систем (дискретне перетворення Лапласа, $z-$перетворення). $z-$перетворенням функції дискретного аргументу $f\left(k\right)=f_k,\ k=0,1,\ldots$ називається функція $F\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\,z^{-k}$, визначена на деякій області комплексної площини [1].

Зведемо вираз (1.1) до вигляду

$$q_{t+1} = (1 + u\,\Theta) q_t + u x_{t+1} - v x_t, \qquad (1.2)$$

або

$$q_{t+1} - \rho q_t = u x_{t+1} - v x_t, \qquad (1.3)$$

де $\rho = 1 + u\,\Theta$.

Величину $\rho$ можна інтерпретувати як норму накопичення власних засобів фінансової фірми за один період. Припустимо, що обсяги залучених засобів по періодах є деяким зовнішнім чинником, динаміка якого може бути описана за допомогою мультиплікативної стохастичної моделі (МСМ) [2].

Тоді, обсяг залучених засобів в період $t$ можна представити, як

$$\tilde{x}_t = x_0 \prod_{j=1}^{t} \tilde{\alpha}_j, \qquad (1.4)$$

де коефіцієнти переходу, $\tilde{\alpha}_t$– незалежні випадкові величини, розподілені за логарифмічно нормальним законом з параметрами $\mu_t$ і $\sigma_t^2$. Відповідно, рівняння (1.3) набуває вигляду

$$\tilde{q}_{t+1} - \rho \tilde{q}_t = x_0 (u\,\tilde{\alpha}_{t+1} - v) \prod_{j=1}^{t} \tilde{\alpha}_j. \qquad (1.5)$$

Вираз (1.5) є стохастичним різницевим рівнянням, безпосереднє розв’язання якого пов'язане з серйозними проблемами як теоретичного, так і практичного плану. В зв'язку з цим цілком зрозумілим і технічним є підхід, що передбачає «заміну» випадкових параметрів $\tilde{\alpha}_t$( їх деякими детермінованими оцінками $\alpha_t$). З урахуванням властивостей МСМ [2], вони можуть бути визначені як: $\alpha_t = \exp\left(\bar{\mu}_t + \frac{\bar{\sigma}_t^2}{2}\right)$, де $\bar{\mu}_t, \bar{\sigma}_t^2$– оцінки значень параметрів $\mu_t, \sigma_t^2$ відповідно.

Запропонований спосіб спрощення вихідної проблеми може бути обґрунтований лише на рівні емпіричних доведень. Проте одержані на його основі результати є корисними для якісного аналізу даної ситуації.

Як наслідок, від (1.5) ми переходимо до детермінованого рівняння

$$q_{t+1} - \rho q_t = x_0 (u\,\alpha_{t+1} - v) \prod_{j=1}^{t} \alpha_j. \qquad (1.6)$$

Розв’яжемо його за допомогою методу Дюамеля для z–перетворення. З цією метою розглянемо допоміжне рівняння

$$g_{t+1} - \rho g_t = \delta_t, g_0 = 0, \tag{1.7}$$

де $\delta_t$ – функція Дірака $\delta_t = \begin{cases} \infty, & \text{ÿêù î } t = 0; \\ 0, & \text{ÿêù î } t \neq 0. \end{cases}$

Нехай $g_t \to G(x)$ і $\delta_t \to 1$– z–перетворення функцій $g_t$ і $\delta_t$. З властивостей z–перетворення $g_{t+1} \to zG(z)$ рівняння для (1.7) набуде вигляду

$$zG(z) - \rho G(z) = 1. \tag{1.8}$$

Отже,

$$G(z) = \frac{1}{z-\rho} = \frac{1}{z}\frac{z}{z-\rho}. \tag{1.9}$$

Оригіналом для $\dfrac{z}{z-\rho}$ є послідовність $\rho^t$. Тоді за властивостями z–перетворення, $g_t = \begin{cases} 0, & \text{ÿêù î } t = 0; \\ \rho^{t-1}, & \text{ÿêù î } t > 0. \end{cases}$.

Щоб звести рівняння (1.6) до нульової початкової умови, введемо нову змінну $h_t = q_t - q_0$. Якщо позначити

$$A_t = x_0 \left(u\, \alpha_{t+1} - v\right) \prod_{j=1}^{t} \alpha_j, \tag{1.10}$$

то рівняння для $h_t$ набуде вигляду

$$h_{t+1} - \rho h_t = A_0 + (\rho - 1) q_0. \tag{1.11}$$

Позначимо $H(z)$ z–перетворення $h_t$ і $F(z)$ z–перетворення $A_0 + (\rho-1)q_0$. Тоді рівняння зображення для (1.11) може бути записане, як

$$zH(z) - \rho H(z) = F(z). \tag{1.12}$$

Розглядаючи одночасно рівняння (1.8) і (1.12), одержимо

$$H(z) = G(z)F(z). \tag{1.13}$$

Це означає, що послідовність $h_t$, яка є оригіналом для $H(z)$, може бути знайдена як згортка оригіналів $g_t$ (див.(1.9)) і $A_0 + (\rho-1)q_0$, тобто

$$h_t=\sum_{i=0}^{t}\left(A_i+\left(\rho-1\right)q_0\right)g_{t-i}=\sum_{t=0}^{t}\left(A_i+\left(\rho-1\right)q_0\right)\rho^{t-i-1}. \qquad (1.14)$$

Після елементарних перетворень вираз (1.14) набуде вигляду

$$h_t=q_0\left(\rho^t-1\right)+\sum_{i=0}^{t}A_i\rho^{t-i-1}. \qquad (1.15)$$

Таким чином, знайдений розв'язок рівняння (1.6)

$$q_t=q_0\rho^t+x_0\left(u\,\alpha_{i+1}-v\right)\sum_{i=0}^{t-1}\left[\left(\prod_{j=1}^{i}\alpha_j\right)\rho^{t-i-1}\right]. \qquad (1.16)$$

У тому випадку, коли оцінки коефіцієнтів переходу можуть вважатися однаковими для всіх моментів $t\left(\alpha_t=\alpha\right)$, розв'язок (1.16) набуде вигляду

$$q_t=q_0\rho^t+x_0\left(u\,\alpha-v\right)\sum_{i=0}^{t-1}\left[\alpha^i\rho^{t-i-1}\right]. \qquad (1.17)$$

З (1.17) обчисливши суму геометричної прогресії, одержуємо кінцевий вираз для прогнозного значення об'єму власних засобів на момент $t$:

$$q_t=q_0\rho^t+x_0\left(u\,\alpha-v\right)\frac{\alpha^t-\rho^t}{\alpha-\rho}. \qquad (1.18)$$

У частинному випадку, якщо $\rho\approx\alpha$ після розкриття невизначеності $\dfrac{\alpha^t-\rho^t}{\alpha-\rho}$ вираз (1.18) набуває компактнішої форми

$$q_t=q_0\rho^t+x_0\left(u\,\alpha-v\right)t\alpha^{t-1}. \qquad (1.19)$$

Формули (1.18) і (1.19) мають прозору економічну інтерпретацію – об'єм власних засобів фінансової фірми на момент часу $t$ в рамках запропонованої моделі залежить від двох складових: $q_0\rho^t$ – величини початкового капіталу з урахуванням політики накопичення, що проводиться; $x_0\dfrac{u\,\alpha-v}{\alpha-\rho}\left(\alpha^t-\rho^t\right)$ – величини результатів діяльності по залученню засобів і отриманню доходів від їх активного використання.

Незважаючи на очевидну простоту моделі (1.1), на основі одержаного в її рамках аналітичного розв'язку (1.18) можуть бути виявлені принципово важливі якісні закономірності еволюції власного капіталу фірми залежно від динаміки залучених засобів, і політики накопичення, що проводиться. Зокрема, використовуючи формулу (1.18), нескладно встановити граничні значення для величини відносного приросту власного капіталу $q_{t+1}/q_t$. Дійсно, при досить великих $t$: якщо $\alpha < \rho$ то $\frac{q_{t+1}}{q_t} \to \rho$; якщо $\alpha \geq \rho$ то $\frac{q_{t+1}}{q_t} \to \alpha$, що, фактично, дозволяє встановити, який з двох параметрів ($\alpha$ або $\rho$) визначає тенденції приросту $q_t$. Отже, в умовах моделі (1.1) фінансова фірма, впливаючи на $\rho$ (за допомогою зміни норми накопичення $\Theta$), з урахуванням динаміки залучених засобів, яка визначена параметром $\alpha$, може проводити перспективну політику формування заданого обсягу власного капіталу.

**Результати.** Зупинимося детальніше на питаннях перевірки працездатності запропонованої моделі динаміки власного капіталу. Очевидно, що компоненти рівняння (1.1), що моделює поведінку фінансової фірми у зредукованому вигляді, досить важко ототожнити з тими чи іншими статтями балансу реального фінансового об'єкту. Зробити це можна лише наближено ціною втрат у точності одержаних результатів. Тому запропоновані нижче приклади претендують тільки на демонстрацію працездатності даних методів на принциповому рівні. Як статистична база для контрольного прикладу були узяті матеріали щорічної фінансової звітності ПАТ «Плюс Банк» (табл. 1).

Таблиця 1. Дані по динаміці власного капіталу, зобов'язань, процентних доходів та витрат для ПАТ «Плюс Банк»

| Рік | Зобов'язання $x_t$ | Власний капітал $q_t$ | Відсотковий дохід $U_t$ | Відсоткові витрати $V_t$ | Чистий відсотковий дохід $U_t - V_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2004 | 5378878 | 599398 | 732858 | 395661 | 337197 |
| 2005 | 9022227 | 906812 | 941645 | 479895 | 461750 |
| 2006 | 10556232 | 1303210 | 1222360 | 692320 | 530040 |
| 2007 | 17349528 | 1365964 | 1718783 | 869085 | 849698 |
| 2008 | 24123825 | 2898675 | 2726970 | 1178195 | 1548774 |
| 2009 | 39238288 | 5030169 | 4261453 | 1989634 | 2271818 |

Табл. 1 містить дані по динаміці власного капіталу, зобов'язань та об'єму процентних доходів і витрат за період з 2004 по 2009 р. На їх основі знаходимо первинні оцінки значень норми доходу від застосування засобів $\hat{\bar{u}}$, одержані як усереднене відношення процентного доходу $U_t$ до всього капіталу $x_t + q_t$ і норми витрат на їх залучення $\hat{\bar{v}}$, які дорівнюють усередненому відношенню процентних витрат $V_t$ до об'єму зобов'язань попереднього періоду $x_{t-1}$. Враховуючи те, що з розгляду виключені такі чинники, як непроцентні доходи і витрати, витрати на виплату податків і т.п., для співвідношення об'ємів чистого процентного доходу $U_t - V_t$ з приростами власного капіталу $\Delta q_t$ необхідно ввести нормуючий коефіцієнт, значення якого визначається як відношення $\dfrac{\Delta q_t}{U_t - V_t}$.

Після множення на нього первинних оцінок норм доходу і витрат $\left(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}}\right)$ ми одержуємо їх остаточні оцінки $\left(\bar{u}, \bar{v}\right)$. Зауважимо, що поняття первинності і скінченності оцінок вживаються в контексті їх використання для інтерпретації моделі (1.1). Підставивши замість $u$ і $v$ їх оцінки $\bar{u}$ і $\bar{v}$ у формулу (1.18), можна знайти прогнозні значення обсягів власного капіталу $\bar{q}$, по роках даного періоду. Результати даного розрахунку репрезентовані в табл. 2 (значення параметра $\Theta$ дорівнює 0.05, відповідно, $\rho \approx 1.001$).

Таблиця 2. Фактичні і прогнозні значення об'єму власного капіталу для ПАТ «Плюс Банк».

| Рік | Зобов'язання $x_t$ | Власний капітал $q_t$ | Власний капітал прогноз $\bar{q}_t$ | Зокрема | | Відхилення прогнозу від фактичного % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $q_0\rho^t$ | $x_0 \dfrac{\bar{u}\,\bar{A} - \bar{v}}{\bar{A} - \rho}\left(\bar{A}^t - \rho^t\right)$ | |
| 2004 | 5378878 | 599398 | – | – | – | – |
| 2005 | 9022227 | 906812 | 845731 | 131455 | 714276 | 6,7 |
| 2006 | 10556232 | 1303210 | 1111764 | 131587 | 980177 | 14,7 |
| 2007 | 17349528 | 1365964 | 1289930 | 131718 | 1158212 | 5,6 |
| 2008 | 24123825 | 2898675 | 2571812 | 131850 | 2439962 | 11,3 |
| 2009 | 39238288 | 5030169 | 4363468 | 131982 | 4231486 | 13,3 |

Відносно невисокий рівень відхилень між прогнозними і дійсними величинами, досягатися в окремі роки (14,7%), адекватний рівню помилки, який закладений даних, які ми використовуємо. По серіях, що містяться в табл. 2, побудовані графіки динаміки фактичного і прогнозного значень об'єму власного капіталу за період з 2004 по 2009 р., репрезентовані на рис. 1.


Рис. 1. Динаміка фактичних і прогнозних значень об'єму власного капіталу.

**Висновок.** Порівнюючи результати не важко помітити, що вони майже ідентичні з погляду точності прогнозування, оскільки засновані на фактично одному і тому ж варіанті розвитку подій. Розроблені моделі динаміки фінансових ресурсів, дозволяють описати процеси еволюції власного капіталу банку залежно від динаміки залучених ресурсів і реалізованої ним політики нагромадження

Література

1. Дёч Г. Руководство к практическому применению проебразования Лапласа и z–преобразования / Г. Дёч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
2. Благун І.С. Моделювання стохастичної динаміки фінансових ресурсів / І.С. Благун, І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2004. – №4. – С. 3–16.