Деякі цікаві задачі
для рівнобедрених трикутників

ТЕЗИ

наукової роботи на конкурс учнівських наукових робіт МАН України

«Деякі цікаві задачі для рівнобедрених трикутників»

Виконала: Тороус Юлія**,** учениця 11 класу Надвірнянського ліцею

Надвірнянської районної ради Івано-Франківської області

Науковий керівник: Федак Іван Васильович, доцент ДВНЗ

«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

У поданій науковій роботі на прикладах конкретних задач розглядаються деякі властивості рівнобедрених трикутників, в основному пов'язані з обчисленням кутів в цих трикутниках.

Актуальність такого дослідження полягає в тому, що окремі властивості таких трикутників, які хоч і зустрічаються в різного роду джерелах, але досі ніде не робилася спроба їх систематизувати.

Метою дослідження якраз і була систематизація таких властивостей.

Але у своїй роботі ми не тільки систематизуємо їх, а й доповнюємо ці властивості новими, які в опублікованих іншими авторами матеріалах досі не зустрічалися. Зокрема, це стосується задач 2, 5, 6, 9, 11, 15 – 18 та додатку 2.

До всіх розглянутих нами задач наведені раціональні розв'язання. Часто вони суттєво відрізняються від уже опублікованих розв'язань цих задач. До окремих задач запропоновано кілька різних розв'язань. Для порівняння таких підходів у додатку 1 наведений приклад надто вже нераціонального розв'язання аналогу задачі 4 з матеріалів Міжнародних математичних олімпіад.

Специфікою запропонованих нами підходів є й те, що часто отриманий в попередній задачі результат використовується для розв'язування наступної задачі або ж для узагальнення даної задачі. Наприклад, 1 – 2, 3 – 4, 5 – 6, 8 – 9, 16 – 17, 19 – 20 тощо.

Матеріали дослідження, наведені у перших трьох пунктах роботи, опубліковані нами в журналі «Математика в школах України».

ЗМІСТ

Вступ…………………………………………………………………………... 4

1. Тригонометрична тотожність……………………….................................. 5

2. Геометричні обґрунтування ……………………………………………........ 6

3. Інші цікаві задачі для «бермудського трикутника» математики…...…………… 8

4. Золотий трикутник та деякі пов’язані з ним задачі……………………………... 10

5. Деякі цікаві задачі для інших рівнобедрених трикутників…………………….. 12

6. Рівнобедрені трикутники та інваріанти………………………………………… 14

7. Рівнобедрені трикутники і симетрія……………………...……………....... 16

8. Повороти на площині в задачах про рівнобедрені трикутники………………… 18

Висновки…………………………………………………………………………… 20

Список використаних джерел……………………………………………………….. 21

Додаток 1. Про одне розв’язання аналогу задачі 4…..……………………………..... 22

Додаток 2. Про одне доповнення до задачі XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка……………………………… 24

ВСТУП

Об'єктом дослідження поданої наукової роботи є рівнобедрені, у тому числі й рівносторонні, трикутники.

Предмет дослідження – деякі нетривіальні властивості таких трикутників, в основному пов'язані з обчисленням кутів між лінійними елементами цих трикутників.

Актуальність такого дослідження полягає в тому, що окремі властивості рівнобедрених трикутників, які хоч і зустрічаються в різного роду джерелах та олімпіадах з математики, але досі ніде не робилася спроба їх систематизувати.

Метою дослідження була систематизація вже відомих та отримання нових властивостей для ряду конкретних рівнобедрених трикутників.

Методика такого дослідження полягала в опрацюванні літературних джерел, порівнянні різних підходів до обґрунтування вказаних властивостей та в доведенні цих властивостей своїми способами і отриманні на їх основі нових властивостей рівнобедрених трикутників.

Структура роботи. Подана наукова робота складається зі вступу, восьми пунктів основної частини, висновків, списку використаних джерел та двох додатків.

Наукова новизна. В роботі систематизовані деякі відомі властивості рівнобедрених трикутників, самостійно отримані окремі нові властивості таких трикутників, до переважної більшості наведених задач запропоновані власні раціональні підходи щодо їх розв'язування.

Ефективність запропонованих у роботі методів можна, зокрема, оцінити, порівнюючи, наприклад, розв'язання задачі 4 та наведеного у додатку 1 розв'язання аналогу цієї задачі.

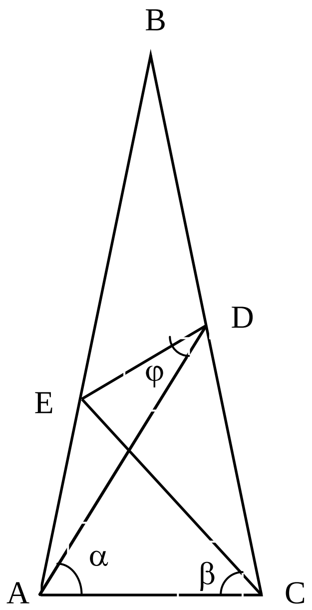
Практична цінність. Матеріали проведеного дослідження можуть бути використані в позакласній роботі з учнями на заняттях гуртків чи факультативів, а також при підготовці до математичних олімпіад.

Апробація роботи. За матеріалами пунктів 1 – 3 поданої наукової роботи опублікована стаття в журналі «Математика в школах України».

1. Тригонометрична тотожність

Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, в якому $AB = BC$, $\angle ABC = 20^{\circ}$. З цим трикутником пов'язано так багато цікавих задач, що іноді його жартома називають *бермудським трикутником математики*.

Виберемо на його бічних сторонах BC та AB точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = \alpha$, $\angle ACE = \beta$. Нехай при цьому $\angle ADE = \varphi$ (мал. 1).



Мал.1

Послідовно застосовуючи теорему синусів до трикутників ADE, ACE та CDE, запишемо рівності:

$$\frac{DE}{\sin\left(80^{\circ} - \alpha\right)} = \frac{AE}{\sin\varphi}, \qquad \frac{AE}{\sin\beta} = \frac{CE}{\sin 80^{\circ}},$$

$$\frac{CE}{\sin\left(100^{\circ} - \alpha + \varphi\right)} = \frac{DE}{\sin\left(80^{\circ} - \beta\right)}.$$

Перемноживши ці рівності, отримаємо тригонометричну тотожність

$$\sin\left(80^{\circ} - \alpha\right) \cdot \sin\beta \cdot \sin\left(100^{\circ} - \alpha + \varphi\right) \equiv \sin\varphi \cdot \sin 80^{\circ} \cdot \sin\left(80^{\circ} - \beta\right).$$

Використаємо її для знаходження кута φ за відомими кутами α, β.

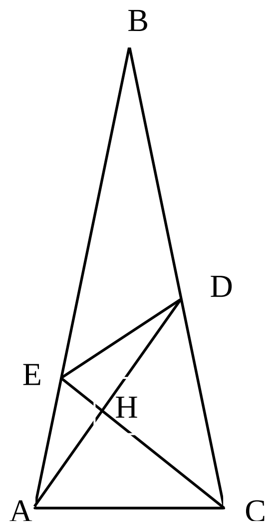
Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що цю тотожність задовольняють лише 6 трійок кутів α, β, φ, кратних 10°, таких, що $\alpha > \beta$:

$$\left(50^{\circ}, 40^{\circ}, 30^{\circ}\right), \left(50^{\circ}, 20^{\circ}, 10^{\circ}\right), \left(60^{\circ}, 30^{\circ}, 10^{\circ}\right),$$

$$\left(60^{\circ}, 50^{\circ}, 30^{\circ}\right), \left(70^{\circ}, 50^{\circ}, 10^{\circ}\right), \left(70^{\circ}, 60^{\circ}, 20^{\circ}\right).$$

З геометричних міркувань очевидно також, що у разі $\beta = \alpha$ будемо мати $\varphi = \alpha$, а випадок $\beta > \alpha$ зводиться до шести наведених вище варіантів, де кут φ отримуємо з рівності $\angle CED + \varphi = \alpha + \beta$, знайшовши спочатку $\angle CED$.

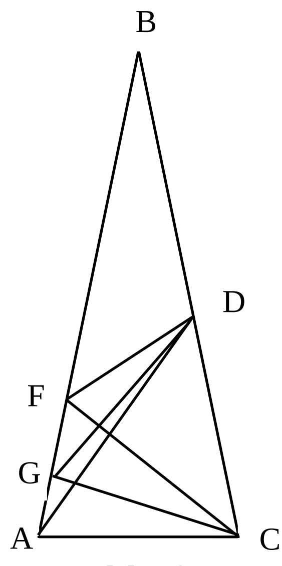
2. Геометричні обґрунтування



Мал.2

Задача 1. На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 50^o$, $\angle ACE = 40^o$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що CH є одночасно висотою та бісектрисою трикутника ACD, отже, і його медіаною (мал. 2). Тому EH є висотою та медіаною трикутника AED. Отже, трикутник AED рівнобедрений, і в ньому $\angle ADE = \angle DAE = 30^o$.



Мал.3

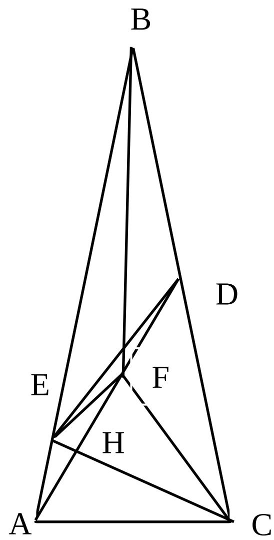
Задача 2. На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 50^o$, $\angle ACE = 20^o$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. Виберемо (мал. 3) на стороні AB точки F та G такі, що $\angle ACF = 40^o$, $\angle ADG = 10^o$. Тоді $\angle GFC = \angle GDC = 60^o$. Отже, навколо чотирикутника $GFDC$ можна описати коло. Оскільки (див. задачу 1) $\angle ADF = 30^o$, то $\angle FCG = \angle FDG = 20^o$. Звідси маємо, що $\angle ACG = \angle ACF - \angle FCG = 20^o$, тобто точка G збігається з точкою E. Тому $\angle ADE = \angle ADG = 10^o$.

Задача 3. На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 60^o$, $\angle ACE = 30^o$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. Виберемо (мал. 4) на відрізку AD точку F таку, що $AF = AC$. Оскільки $\angle CAF = 60^o$, то трикутник CAF рівносторонній, і в ньому, враховуючи умову задачі, CH є одночасно висотою та бісектрисою, отже, й медіаною. Тому EH

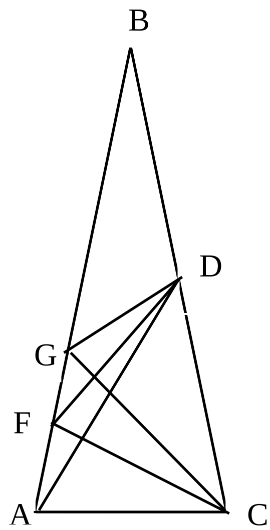
є висотою та медіаною трикутника AEF, тобто трикутник AEF рівнобедрений, і справджується рівність $\angle AFE = \angle FAE = 20^o = \angle DBE$. Отже, навколо чотирикутника $EFDB$ можна описати коло. Тоді $\angle ADE = \angle FDE = \angle FBE = 10^o$.



Мал.4

<u>Задача 4.</u> На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 60^o, \angle ACE = 50^o$. Знайти величину кута ADE.

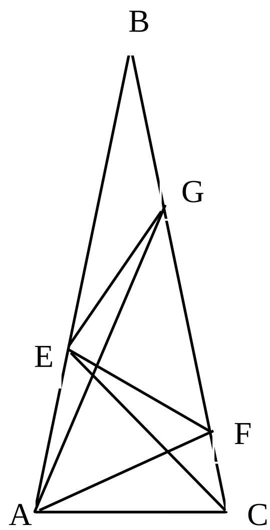
Розв'язання. Виберемо (мал. 5) на стороні AB точки F та G такі, що $\angle ACF = \angle ADG = 30^o$. Тоді $\angle AFC = \angle GDC = 70^o$. Звідси випливає, що навколо чотирикутника $GFCD$ можна описати коло. Оскільки (див. задачу 3) $\angle ADF = 10^o$, то $\angle FCG = \angle FDG = 20^o$. Звідси отримуємо, що $\angle ACG = \angle ACF + \angle FCG = 50^o$, тобто точка G збігається з точкою E. Тому $\angle ADE = \angle ADG = 30^o$.



Мал.5

<u>Задача 5.</u> На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 70^o$, $\angle ACE = 50^o$. Знайти величину кута ADE.

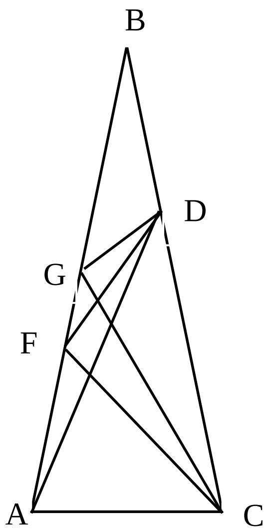
Розв'язання. Виберемо (мал. 6) на стороні BC точки F та G такі, що $\angle CAF = \angle BEG = 20^o$. Безпосереднім підрахунком кутів переконуємося, що трикутники CAE, CAF та BGE є рівнобедреними, а трикутник FAE – ще й рівностороннім. Отже, трикутник FEG є також рівнобедреним. Звідси маємо $AE = FE = GE$ та



Мал.6

$\angle GAE = \angle AGE = \frac{1}{2}\angle BEG = 10^{\circ}$. Отже, $\angle CAG = 70^{\circ}$, тобто точка G збігається з точкою D, і тому $\angle ADE = \angle AGE = 10^{\circ}$.

<u>Задача 6.</u> На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^{\circ}$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 70^{\circ}$, $\angle ACE = 60^{\circ}$. Знайти величину кута ADE.



Мал.7

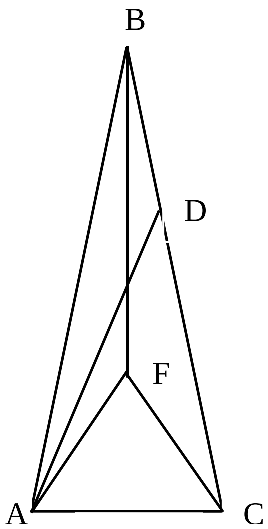
Розв'язання. Виберемо (мал. 7) на стороні AB точки F та G такі, що $\angle ACF = 50^{\circ}$, $\angle ADG = 20^{\circ}$. Тоді $\angle AFC = \angle GDC = 50^{\circ}$. Отже, навколо чотирикутника $FGDC$ можна описати коло. Оскільки (див. задачу 5) $\angle ADF = 10^{\circ}$, то $\angle FCG = \angle FDG = 10^{\circ}$. Звідси випливає, що $\angle ACG = \angle ACF + \angle FCG = 60^{\circ}$, тобто точка G збігається з точкою E. Тому $\angle ADE = \angle ADG = 20^{\circ}$.

3. Інші цікаві задачі для «бермудського трикутника» математики

<u>Задача 7.</u> На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^{\circ}$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $BD = AE = AC$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. Аналізуючи розв'язання задачі 5, бачимо (мал. 6), що $BG = AE = AC$. Тому точка D збігається з точкою G. Отже, $\angle ADE = \angle AGE = 10^{\circ}$.

Зрозуміло, що при цьому $\angle CAD = 70^{\circ}$. Але відзначимо, що для знаходження цього кута достатньо лише знання умови $BD = AC$.



Мал.8

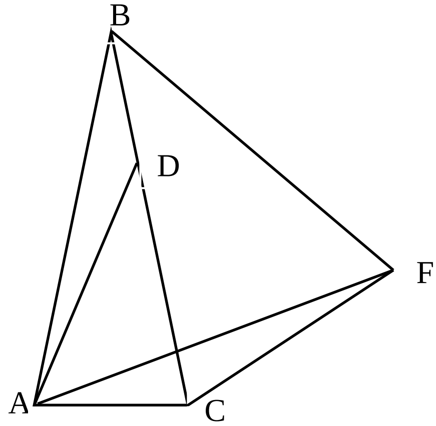
<u>Задача 8.</u> На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 20^{\circ}$, вибрали точку D таку, що $BD = AC$. Знайти величину кута CAD.

Розв'язання. Побудуємо всередині трикутника ABC рівносторонній трикутник AFC (мал. 8). Тоді трикутники AFB та BDA рівні за двома сторонами та кутом 20° між ними. Тому $\angle BAD = \angle ABF = 10^{\circ}$ та $\angle CAD = 70^{\circ}$.

Можна також довести, що $FD = FC = FA$. Тоді $\angle ADC = 0{,}5\angle AFC = 30^{\circ}$, $\angle CAD = 70^{\circ}$. Або ще й так: $\angle ADC = \angle ADF + \angle CDF = 10^{\circ} + 20^{\circ} = 30^{\circ}$ та $\angle CAD = 70^{\circ}$.

Будувати рівносторонній трикутник можна й на стороні AB (мал. 9). Тоді $BC = BF$, $\angle CBF = 40^{\circ}$, тому $\angle BCF = 70^{\circ}$. Оскільки $\Delta BAD = \Delta AFC$ (за двома сторонами і кутом 20° між ними), то $\angle ADB = \angle ACF = 150^{\circ}$, $\angle ADC = 30^{\circ}$, $\angle CAD = 70^{\circ}$.

Навпаки, якщо $BD = AC$ і $\angle CAD = 70^{\circ}$, то $\angle ABC = 20^{\circ}$.

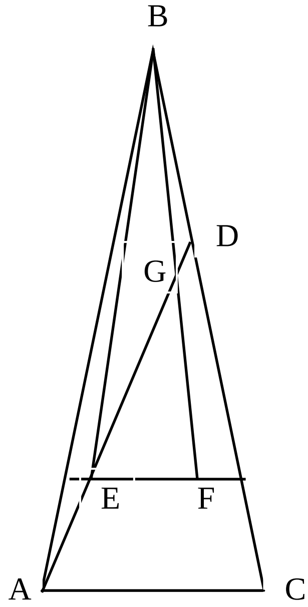


Мал.9

<u>Задача 9.</u> На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, вибрали точку D таку, що $BD = AC$ і $\angle CAD = 70^{\circ}$. Довести, що $\angle ABC = 20^{\circ}$.

Розв'язання. Припустимо, що цей кут менший за 20°. Тоді у рівнобедреному трикутнику EBF (мал. 10) $\angle GEF = 70^{\circ}$, але $BG > BD = AC > EF$.

Аналогічно доводимо, що такий кут не може бути більшим за 20°. Для цього точку E потрібно вибрати на продовженні DA поза точку A і взяти $EF \parallel AC$. При цьому точка G опиниться на продовженні AD поза точку D, а відповідний ланцюжок нерівностей матиме вигляд $BG < BD = AC < EF$.



Мал.10

Повернемось також ще раз до задачі 5.

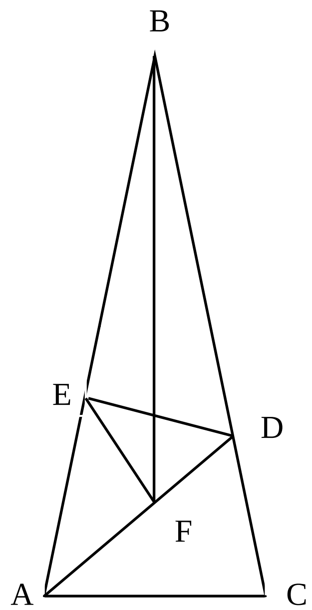
<u>Задача 10.</u> На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC існують такі точки G та F, а на бічній стороні AB – точка E така, що $BG = GE = EF = FA = AC$. Довести, що $\angle ABC = 20^{\circ}$.

Розв'язання. Нехай $\angle ABC = 2\beta$. Тоді (мал. 6) за властивостями кутів рівнобедрених трикутників та зовнішніх кутів трикутників послідовно отримуємо наступні рівності: $\angle BEG = 2\beta$, $\angle BFE = \angle FGE = 4\beta$, $\angle BAF = \angle AEF = 6\beta$, $8\beta = \angle AFC = \angle BCA = 90^{\circ} - \beta$. Звідси знаходимо $\beta = 10^{\circ}$ та $\angle ABC = 20^{\circ}$.

Розглянемо й такий приклад знаходження кутів рівнобедреного трикутника за властивостями проведених всередині нього чотирьох бісектрис.

<u>Задача 11.</u> У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC провели бісектрису AD, далі у трикутнику ABD – бісектрису DE, а у трикутнику ADE – бісектрису EF. Виявилося, що точка F лежить на бісектрисі кута ABC. Довести, що $\angle ABC = 20^{\circ}$.

Розв'язання. Оскільки точка F лежить на бісектрисі кута ABC (мал. 11), то ця точка рівновіддалена від сторін цього кута. Так само вона рівновіддалена і від сторін кута AED, бо знаходиться на його бісектрисі. Звідси випливає, що ця точка рівновіддалена і від сторін кута CDE. Отже, DA – бісектриса кута CDE. Враховуючи, що також DE – бісектриса кута ADB, отримуємо, що всі три кути, які мають спільну вершину D, дорівнюють по 60°. Крім того, у трикутнику ACD кут C вдвічі більший кута A, отже, дорівнює 80°. Тому $\angle ABC = 20^{\circ}$.

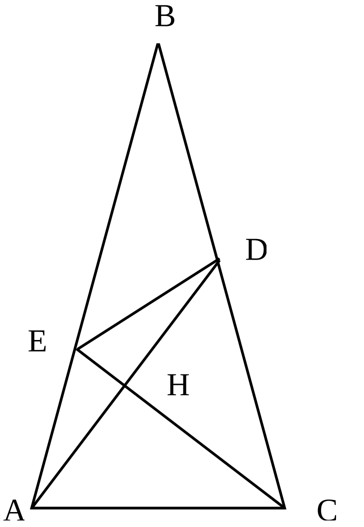


Мал.11

4. Золотий трикутник та деякі пов'язані з ним задачі

Рівнобедрений трикутник, в якому відношення довжини бічної сторони до довжини основи дорівнює відношенню золотого перерізу $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, називають золотим трикутником. Кути такого трикутника дорівнюють 72°, 72° та 36°.

Із золотим трикутником також пов'язані багато цікавих задач, але тут ми розглянемо лише аналоги задач, розв'язаних для «бермудського» трикутника.

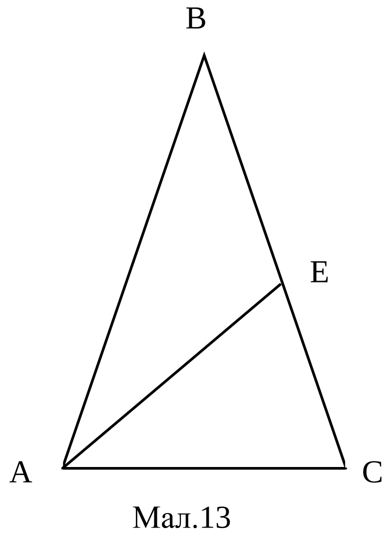


Мал.12

Задача 12. На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 36^o$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 54^o$, $\angle ACE = 36^o$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. З умови задачі, так само як і в задачі 1, випливає, що CH є одночасно висотою та бісектрисою трикутника ACD, отже, і його медіаною (мал. 12). Тому EH є висотою та медіаною трикутника AED. Отже, трикутник AED рівнобедрений, і в ньому маємо $\angle ADE = \angle DAE = 18^o$.

Задача 13. На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 36^o$, вибрали точку D таку, що $BD = AC$. Знайти величину кута CAD.



Мал.13

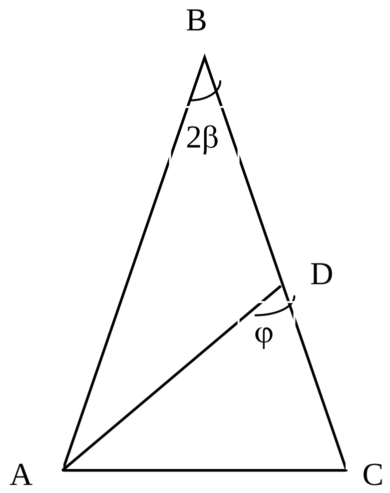
Розв'язання. Нехай AE – бісектриса цього трикутника. Тоді (мал. 13) $BE = AE = AC$, тобто точка E збігається з точкою D. Тому отримуємо, що $\angle CAD = \angle CAE = 36^o$.

Задача 14. На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC існує така точка E, що $BE = AE = AC$. Довести, що $\angle ABC = 36^o$.

Розв'язання. Нехай $\angle ABC = 2\beta$. Тоді (мал. 13) за властивостями кутів рівнобедрених трикутників та зовнішніх кутів трикутників отримуємо рівності $\angle BAE = 2\beta$ та $4\beta = \angle AEC = \angle BCA = 90^o - \beta$. Звідси знаходимо $\beta = 18^o$ та $\angle ABC = 36^o$.

5. Деякі цікаві задачі для інших рівнобедрених трикутників

Повертаючись до задач 8 та 13, розглянемо аналогічні задачі для рівнобедрених трикутників з іншими кутами при вершині B.



Мал.14

Покладаючи $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ADC = \varphi$ (мал. 14), застосуємо теорему синусів до трикутників BAD та ADC. Звідси отримуємо $\dfrac{AB}{\sin\varphi} = \dfrac{BD}{\sin(\varphi - 2\beta)}$ та $\dfrac{AB}{\sin(90^\circ - \beta)} = \dfrac{AC}{\sin 2\beta}$ відповідно. Якщо $BD = AC$, то приходимо до такої тригонометричної тотожності:

$$\sin 2\beta \cdot \sin\varphi \equiv \cos\beta \cdot \sin(\varphi - 2\beta) \Leftrightarrow 2\sin\beta \cdot \sin\varphi \equiv \sin(\varphi - 2\beta).$$

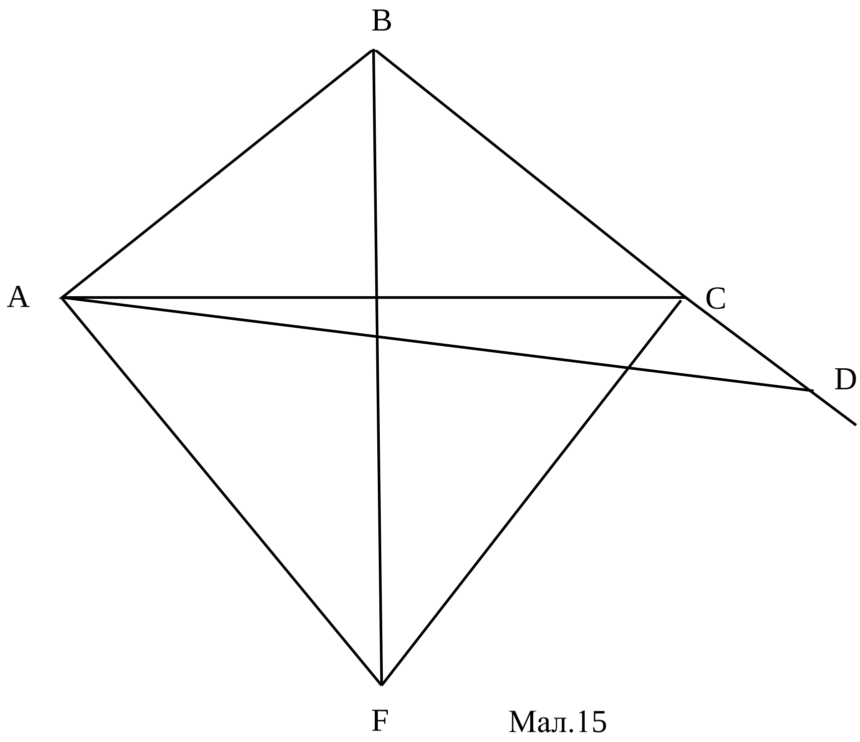
Повним перебором кутів β, які вимірюються цілим числом градусів від 1° до 29°, можна переконатися, що в цілих градусних мірах її задовольняють лише пари $2\beta = 20^\circ, \varphi = 30^\circ$ та $2\beta = 36^\circ, \varphi = 72^\circ$. Відповідно маємо: $\angle CAD = 70^\circ$ та $\angle CAD = 36^\circ$, що ми вже отримали вище і без тригонометрії.

Якщо ж $2\beta = 60^\circ$, то кут ADC не визначений, проте $\angle CAD = 0^\circ$.

А для точки D на продовженні сторони BC поза точку C повним перебором кутів β, які вимірюються цілим числом градусів від 31° до 89°, можна переконатися, що підійде лише пара кутів $2\beta = 100^\circ, \varphi = -30^\circ$.

<u>Задача 15.</u> На продовженні бічної сторони BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 100^\circ$, поза точку C вибрали точку D таку, що $BD = AC$. Знайти величину кута CAD.

Розв'язання. Побудуємо зовні трикутника ABC рівносторонній трикутник AFC (мал. 15). Тоді трикутники AFB та BDA рівні за двома сторонами та кутом 100° між ними. Тому $\angle BAD = \angle ABF = 50^\circ$ та $\angle CAD = 10^\circ$.

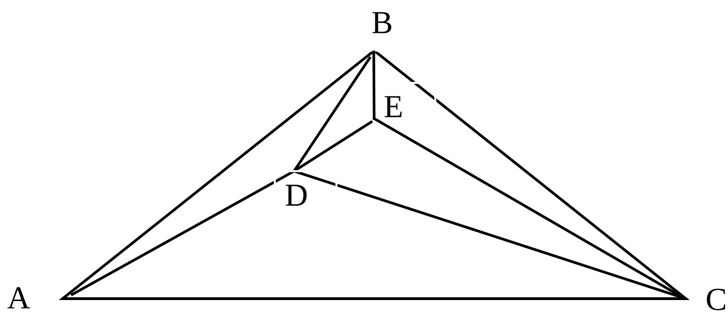


Мал.15

Для цього ж трикутника розглянемо ще й таку цікаву задачу.

Задача 16. Всередині рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 100^{\circ}$, вибрали точку D таку, що $\angle DAC = 30^{\circ}$, $\angle DCA = 20^{\circ}$. Знайти величину кута BDC.

Розв'язання. Нехай E – точка перетину бісектриси кута ABC та прямої AD (мал. 16). Оскільки при цьому $\angle EAC = \angle ECA = 30^{\circ}$, то також BE – бісектриса кута ABC. Отже, $\angle EDC = \angle EBC = 50^{\circ}$ та $\angle ECD = \angle ECB = 10^{\circ}$. Тому з рівності трикутників EDC та EBC зі спільною стороною EC отримуємо, що $DC = BC$. Враховуючи, що $\angle BCD = 20^{\circ}$, звідси знаходимо $\angle BDC = 80^{\circ}$.



Мал.16

Відзначимо, що задача 16 допускає таке природне узагальнення.

Задача 17. Всередині рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 2\beta$, $30^{\circ} < \beta < 60^{\circ}$, вибрали точку D таку, що $\angle DAC = 30^{\circ}$, $\angle DCA = \beta - 30^{\circ}$. Знайти величину кута BDC.

Розв'язання. Міркуючи аналогічно як при розв'язуванні задачі 16, отримаємо $\angle EAC = \angle ECA = 30^{\circ}$, $\angle EDC = \angle EBC = \beta$, $\angle ECD = \angle ECB = 60^{\circ} - \beta$. Тому також $DC = BC$. Оскільки ж $\angle BCD = 120^{\circ} - 2\beta$, то з рівнобедреного трикутника BCD знаходимо $\angle BDC = 30^{\circ} + \beta$.

Можна було також побудувати рівносторонній трикутник AFC, який містить у собі трикутник ABC, і довести рівність трикутників ACD та FCB.

І, як узагальнення задач 1 та 12, розглянемо ще й наступну задачу з кутами α та β такими, що $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.

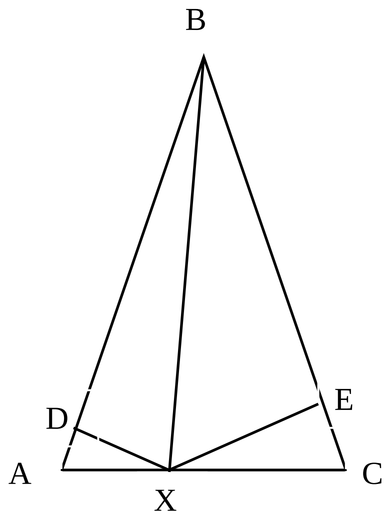
<u>Задача 18.</u> На бічних сторонах BC та AB рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 180^{\circ} - 4\beta$, $30^{\circ} < \beta < 45^{\circ}$, вибрали точки D та E відповідно такі, що $\angle CAD = 90^{\circ} - \beta$, $\angle ACE = \beta$. Знайти величину кута ADE.

Розв'язання. Міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні задачі 12, отримаємо, що трикутник AED (мал. 12) є рівнобедреним, причому $\angle ADE = \angle DAE = 3\beta - 90^{\circ}$.

6. Рівнобедрені трикутники та інваріанти

Наступними розглянемо задачі, в яких певні властивості рівнобедрених трикутників є інваріантними. У перших двох з них як допоміжний елемент розв'язування використаємо площі трикутників.

<u>Задача 19.</u> На основі AC рівнобедреного трикутника ABC довільно вибрали точку X. Довести, що сума її відстаней до бічних сторін цього трикутника не залежить від розташування точки X.



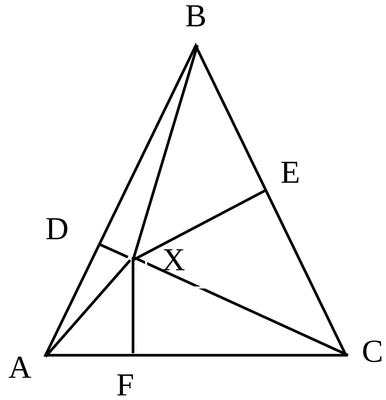
Мал.17

Розв'язання. Нехай точки D та E – основи перпендикулярів, опущених з точки X на сторони AB та BC відповідно, S – площа трикутника ABC, h – висота цього трикутника, проведена до бічної сторони BC (мал. 17). Тоді $AB \cdot XD + BC \cdot XE = 2S = BC \cdot h$.

Оскільки $AB = BC$, то звідси знаходимо, що $XD + XE = h = const$.

Окремо розглянемо випадок, коли трикутник ABC є не лише рівнобедреним, а й рівностороннім.

<u>Задача 20.</u> Довести, що сума відстаней від точки X до сторін рівностороннього трикутника ABC не залежить від вибору точки X всередині цього трикутника.



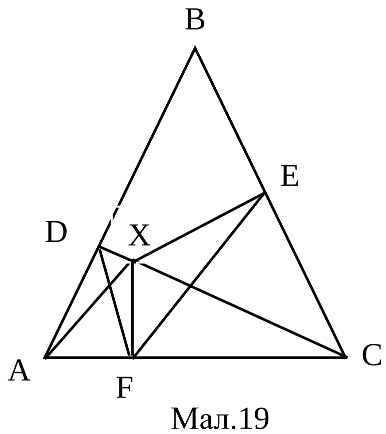
Мал.18

Розв'язання. Нехай (мал. 18) точки D, E та F – основи перпендикулярів, опущених з точки X на сторони AB, BC та AC відповідно, S – площа трикутника ABC, h – висота цього трикутника. Тоді $AB \cdot XD + BC \cdot XE + AC \cdot XF = 2S = AC \cdot h$.

Оскільки $AB = BC = AC$, то отримуємо, що $XD + XE + XF = h = const$.

З відстанями до сторін трикутника та інваріантами пов'язана і наступна задача III Всеросійської олімпіади з математики.

<u>Задача 21.</u> Знайти геометричне місце точок X всередині рівнобедреного трикутника ABC, відстані яких до основи AC дорівнюють середньому геометричному відстаней до бічних сторін.



Мал.19

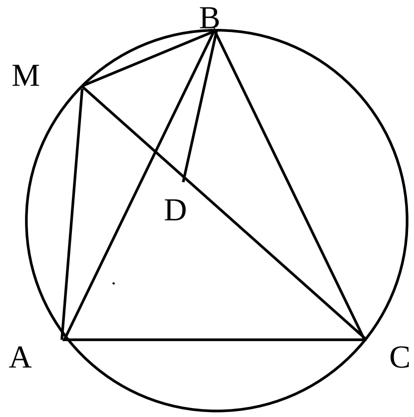
Розв'язання. Доведемо, що шуканим геометричним місцем точок є дуга кола, яке дотикається до бічних сторін трикутника в точках A та C.

Нехай (мал. 19) точки D, E та F – основи перпендикулярів, опущених з точки X на сторони AB, BC та AC відповідно. У чотирикутниках $ADXF$ та $CFXE$ відповідні кути рівні. Оскільки ж, крім того, за умовою задачі $XF = \sqrt{XD \cdot XE}$, тобто $XF : XD = XE : XF$, то ці чотирикутники подібні. Тому також $\Delta AXF \sim \Delta CXE$. Отже,

$$\angle AXC = \angle AXF + \angle FXC = \angle EXC + \angle FXC = \angle FXE = 180^{\circ} - \angle ACB = const.$$

Таким чином, точка X лежить на дузі кола, яка стягується хордою AC. При цьому кожна точка такої дуги належить до шуканого геометричного місця точок.

А наступна задача стосується відстаней до вершин трикутника.



Мал.20

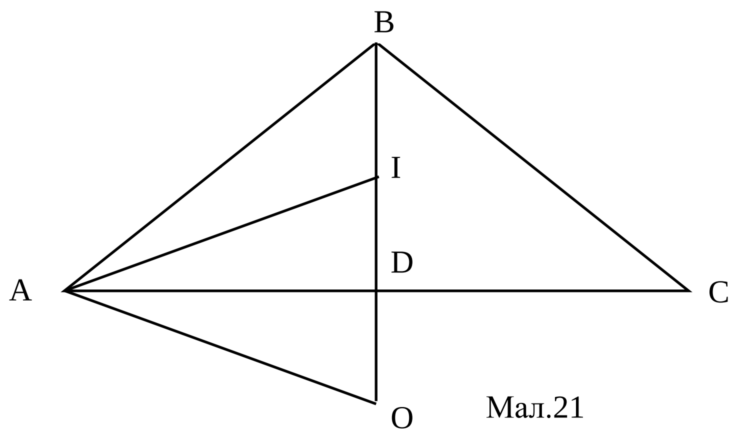
Задача 22. Рівносторонній трикутник ABC вписаний в коло. Нехай – довільна точка дуги AB. Довести, що $AM + BM = CM$.

Розв'язання. Виберемо на CM точку D таку, що $MD = MB$. $\cup BMC = 120^{\circ}$, тому $\angle BMD = 60^{\circ}$, отже, трикутник BMD – рівносторонній. Оскільки $\angle MBA = 60^{\circ} - \angle DBA = \angle DBC$, то $\Delta MBA = \Delta DBC$ (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси маємо $AM + BM = CD + BD = CD + DM = CM$.

7. Рівнобедрені трикутники і симетрія

Задача 23. Центри вписаного та описаного кіл рівнобедреного трикутника ABC симетричні відносно основи AC. Знайти кути цього трикутника.

Розв'язання. Нехай точки I та O є центрами вписаного та описаного кіл трикутника ABC відповідно, $\angle BAC = 2\alpha$ (мал. 21). Тоді $OA = OB$ та $\angle ABO = \angle BAO = 3\alpha$. Отже, з прямокутного трикутника ABD знаходимо $2\alpha + 3\alpha = 90^{\circ}$, тобто $\alpha = 18^{\circ}$. Тоді $\angle BAC = \angle BCA = 36^{\circ}$, $\angle ABC = 108^{\circ}$.



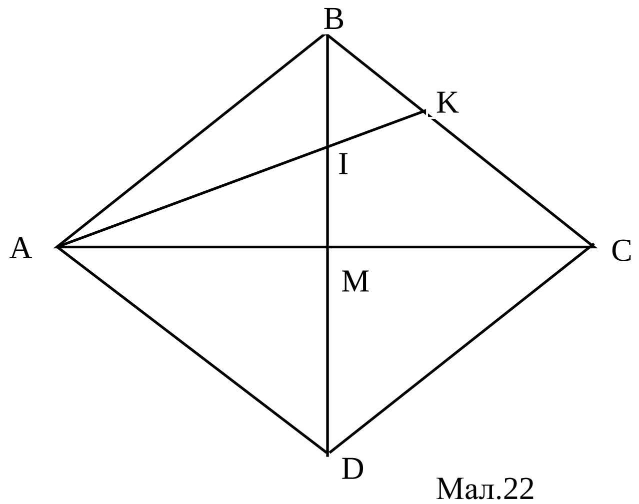
Мал.21

<u>Задача 24.</u> Бісектриса AK рівнобедреного трикутника ABC, проведена до його бічної сторони, вдвічі більша за бісектрису BM, проведену до основи. Знайти кути цього трикутника.

Розв'язання. Продовжимо бісектрису BM до точки D такої, що $BM = MD$ (мал. 22). Оскільки при цьому діагоналі чотирикутника $ABCD$ точкою M діляться пополам, то цей чотирикутник є паралелограмом. Отже, $\Delta ADI \sim \Delta KBI$. Крім того, $AK = BD$, тому ці трикутники рівнобедрені, тобто $AI = DI$ та $BI = KI$. Якщо при цьому $\angle BAC = 2\alpha$, то звідси отримуємо, що

$$3\alpha = \angle DAI = \angle BKI = \angle KBI = \angle ABM = 90^{\circ} - 2\alpha.$$

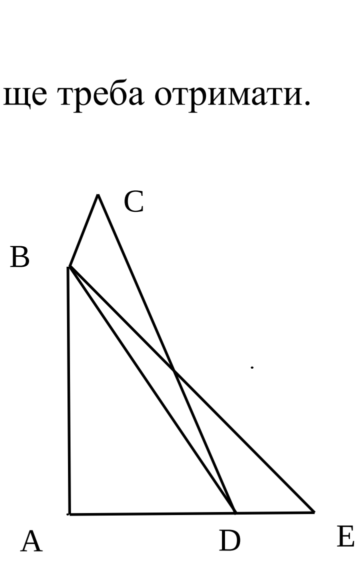
Остаточно маємо $\alpha = 18^{\circ}$ та $\angle BAC = \angle BCA = 36^{\circ}$, $\angle ABC = 108^{\circ}$.



Мал.22

В наступній задачі потрібний рівнобедрений трикутник ще треба отримати.

<u>Задача 25.</u> У чотирикутнику $ABCD$ кут A – прямий, $\angle ABC = 170^{\circ}$, $\angle BCD = 45^{\circ}$ та $\angle BDC = 5^{\circ}$. Знайти площу $ABCD$, якщо $AB = 4см$.



Мал.23

Розв'язання. Нескладно переконатися, що $\angle CBD = 130^{\circ}$, $\angle ABD = 40^{\circ}$, $\angle ADB = 50^{\circ}$ (мал. 23). При симетрії трикутника DBC відносно серединного перпендикуляра до відрізка BD отримаємо рівний йому трикутник BDE, в якому $\angle BDE = 130^{\circ}$, а точка E

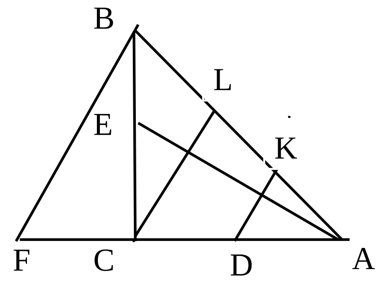
лежить на продовженні AD. При цьому $\angle ABE = \angle AEB = 45^{\circ}$, отже, $AE = AB = 4 см$. Тому шукана площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює площі прямокутного трикутника ABE і дорівнює $8 см^2$.

8. Повороти на площині в задачах для рівнобедрених трикутників

І на завершення – чотири цікаві задачі з різних математичних олімпіад, для розв'язування яких доцільно скористатися властивостями поворотів на площині.

Задача 26. На катетах CA та CB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC вибрані точки D та E відповідно такі, що $CD = CE$. Продовження перпендикулярів, опущених з точок D та C на пряму AE, перетинають гіпотенузу AB відповідно у точках K та L. Довести, що $KL = LB$.

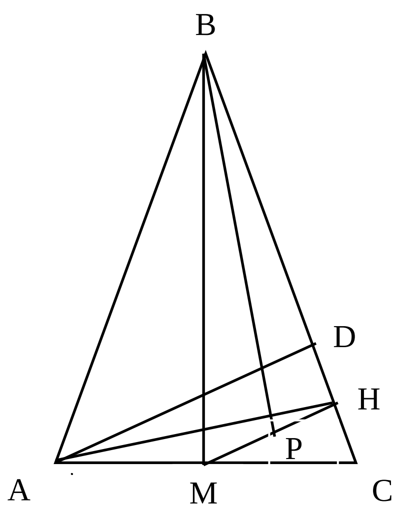
Розв'язання. Повернемо трикутник ABC навколо вершини C на 90° так, щоб точка A перейшла в точку B (мал. 24). Тоді точка E перейде в точку F прямої AC, а відрізок AE – у відрізок BF. Оскільки при цьому $FC = CD$ та $FB \parallel CL \parallel DK$, то $KL = LB$.



Мал.24

Задача 27. З точки M – середини основи AC рівнобедреного трикутника ABC – опущений перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P – середина відрізка MH. Довести, що $AH \perp BP$.

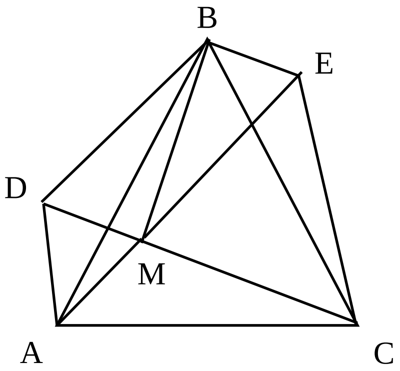
Розв'язання. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD (мал. 25). Тоді у трикутнику ADC відрізок MH буде середньою лінією, тобто $DH = HC$. Оскільки $\angle DAC = 90^{\circ} - \angle C = \angle HBM$, то прямокутні трикутники DAC та HBM подібні. Після повороту одного з них на 90° їхні відповідні сторони стануть паралельними. Тому при цьому паралельними стануть і їх відповідні медіани AH та BP. Отже, до повороту ці медіани були перпендикулярними.



Мал.25

<u>Задача 28.</u> Всередині рівностороннього трикутника ABC вибрали точку M таку, що $AM=1$, $BM=\sqrt{3}$, $CM=2$. Під якими кутами з цієї точки видно сторони трикутника?

Розв'язання. Спочатку повернемо трикутник AMC на 60^{o} проти стрілки годинника навколо точки A. У результаті отримаємо рівносторонній трикутник ADM та трикутник BDM зі сторонами $DM=1$, $BM=\sqrt{3}$ та $BD=2$ (мал. 26). Оскільки при цьому $BD^2=BM^2+DM^2$, то $\angle BMD=90^{o}$. Тому маємо $\angle AMB=150^{o}$.



Мал.26

Тепер повернемо трикутник AMC на 60^{o} навколо точки C за стрілкою годинника. Тоді трикутник MEC також буде рівностороннім, а у трикутнику MBE сторони відповідно дорівнюють: $BE=1$, $MB=\sqrt{3}$ та $ME=2$. Тому цей трикутник є прямокутним, в якому катет BE дорівнює половині гіпотенузи ME. Отже, $\angle BME=30^{o}$ та $\angle BMC=90^{o}$.

І, нарешті, знаходимо $\angle AMC=360^{o}-\angle AMB-\angle BMC=120^{o}$.

Зауважимо, що, отримавши $\angle BMD=90^{o}$, важливо було не спокуситися зразу записати, що $\angle BMC=90^{o}$, як це виглядає візуально, а продовжити розв'язування другим поворотом, що й було зроблено нами.

Відзначимо також, що використану тут ідеєю можна застосувати і для розв'язування свого роду оберненої задачі XXX Всеукраїнської олімпіади з математики.

<u>Задача 29.</u> Всередині рівностороннього трикутника ABC вибрали точку M таку, що $\angle AMB=150^{o}$. Довести, що $AM^2+BM^2=CM^2$.

Як і в попередній задачі, для її розв'язування достатньо буде виконати поворот трикутника AMC на 60^{o} проти стрілки годинника навколо точки A і врахувати, що $\angle BMD=90^{o}$ (мал. 26). Тому $DM^2+BM^2=BD^2$, тобто $AM^2+BM^2=CM^2$.

ВИСНОВКИ

Зі шкільного курсу математики відомі властивості рівнобедрених трикутників про рівність їх бічних сторін, кутів при основі, співпадання висоти, медіани та бісектриси, проведених до основи, тощо. Проте деякі з цих трикутників мають багато специфічних властивостей, які ми й розглянули у поданій науковій роботі.

Особливо багато таких властивостей пов'язано з рівнобедреним трикутником з кутами 80°, 80° та 20°, у зв'язку з чим він отримав жартівливу назву бермудського трикутника математики.

Для цього трикутника нами виділено цілий ряд взаємно пов'язаних між собою задач. Окремі з них були запропоновані у поданій науковій роботі вперше. Також оригінальними були і розв'язання більшості з таких задач.

Не менше цікавих властивостей і в так званого золотого трикутника з кутами 72°, 72° та 36°. Відповідні задачі можна знайти у матеріалах різноманітних олімпіад. Проте у своїй роботі ми зупинилися лише на тих властивостях, які були аналогами відповідних властивостей бермудського трикутника.

Заслуговують уваги й рівнобедрені трикутники з іншими кутами при вершинах, про свідчать задачі, які ми розглянули у 5 – 8 пунктах поданої наукової роботи. При розв'язуванні цих задач корисною як допоміжний елемент стала площа. Ефективними виявилися і рухи на площині – симетрії та повороти.

Відзначимо також і важливу роль, яку при розв'язуванні багатьох задач відіграли рівносторонні трикутники. В окремих задачах вони ще й ставали своєрідним містком для переходу від одного трикутника до іншого зі збереженням довжин відповідних сторін.

Зауважимо, що майже всі розглянуті в роботі задачі могли бути розв'язані з допомогою тригонометрії з застосуванням теореми синусів та виключенням з розгляду лінійних елементів. Але, на нашу думку, наведені нами геометричні розв'язання виглядають набагато красивіше. Та й наведений у додатку 1 приклад розв'язування задачі з матеріалів Міжнародних математичних олімпіад також говорить на користь такого висновку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384с.
2. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – (Б-ка мат. кружка: вып. 18). – 288с.
3. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В. та ін. Українські математичні олімпіади: Довідник. – К.: Вища шк., 1993. – 415с.
4. Зуб В. Міські олімпіади юних математиків. – К.: Шк. світ, 2008. – (Б-ка «Шк. світу»). – 120с.
5. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 224с.
6. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М. та ін. Математичні олімпіади школярів України: 1991 – 2000: Навч. посібник. – К.: Техніка, 2003. – 541с.
7. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М. та ін. Математичні олімпіади школярів України: 2001 – 2006: Навч. посібник. – Львів: Каменяр, 2008. – 348с.
8. Морозова Е.А., Петраков Н.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги. Пособие для учащихся. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1976. – 288с.
9. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія: Поглибл. курс: 7 – 9 кл.: Навч. посібник. – Київ; Ірпінь: ВТФ «Перун», 1999. – 352с.
10. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – (Б-ка мат. кружка: вып. 15). – 320с.
11. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – (Б-ка мат. кружка: вып. 15). – 240с.
12. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам’янець-Поділ.: Абетка, 2006. – 420с.
13. Федак І.В., Тороус Ю.С. Деякі цікаві задачі для «бермудського трикутника математики». – Математика в школах України. – 2020. – № 1 – 3 (625 – 627). – С. 24 – 28.

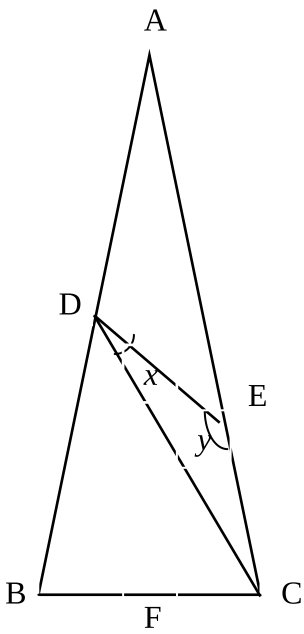
ДОДАТОК 1

Про одне розв’язання аналогу задачі 4

Задача 30 ([8], ст. 47, задача 156). У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$, $\angle BAC = 20^\circ$) на ребрі AB вибрали точку D таку, що $AD = CD$, а на ребрі AC – точку E таку, що $BC = CE$. Знайдіть величину кута CDE.

(Із матеріалів журі Міжнародних математичних олімпіад, Угорщина).

Розв’язання (переклад українською мовою з [8], ст. 195 – 196). Виберемо одиницю довжини так, що $AB = AC = 1$. Тоді $BF = CF = \sin 10^\circ$, де F – середина основи BC (мал. 27).



Мал.27

У рівнобедреному трикутнику ACD, очевидно, $CD = \dfrac{1}{2\cos 20^\circ}$.

Введемо позначення $\angle EDC = x$, $\angle CED = y$.

У трикутнику CED за теоремою тангенсів маємо:

$$\frac{\dfrac{1}{2\cos 20^\circ} + 2\sin 10^\circ}{\dfrac{1}{2\cos 20^\circ} - 2\sin 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{y+x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{y-x}{2}}.$$

Оскільки $y + x = 160^\circ$, то попереднє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg}\left(80^\circ - x\right)} = \frac{1 + 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}{1 - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}.$$

Перетворимо ліву частину цієї рівності:

$$\frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg}\left(80^\circ - x\right)} = \frac{\operatorname{ctg} 10^\circ}{\operatorname{ctg}\left(x + 10^\circ\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(x + 10^\circ\right)}{\operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \operatorname{tg}\left(x + 10^\circ\right).$$

Перетворимо тепер праву частину цієї ж рівності:

$$\frac{1 + 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}{1 - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ} = \frac{1 + 2\left(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ\right)}{1 - 2\left(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ\right)} = \frac{1 - \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

Отже, $\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \operatorname{tg}\left(x+10^\circ\right)=\frac{1-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}$, тобто $\operatorname{tg}\left(x+10^\circ\right)=\frac{1-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$.

Доведемо, що права частина останнього співвідношення дорівнює $\operatorname{tg} 40^\circ$:

$$\frac{1-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sqrt{\left(1-\cos 80^\circ\right)^2}}{\sqrt{1-\cos^2 80^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\cos 80^\circ}{1+\cos 80^\circ}}=\operatorname{tg} 40^\circ.$$

Оскільки $0<x<180^\circ$, то величина шуканого кута дорівнює 30°.

Здається, що коментарі до такого «раціонального» розв’язання є зайвими.

Адже, навіть з допомогою тригонометрії, в позначеннях мал. 27 ця задача розв’язується набагато простіше.

Послідовно застосовуючи теорему синусів до трикутників CDE, CBE та BDE, запишемо рівності:

$$\frac{DE}{\sin 20^\circ}=\frac{CE}{\sin x}, \qquad \frac{CE}{\sin 50^\circ}=\frac{BE}{\sin 80^\circ}, \quad \frac{BE}{\sin\left(40^\circ+x\right)}=\frac{DE}{\sin 30^\circ}.$$

Перемноживши ці рівності, отримаємо тригонометричне співвідношення

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin\left(40^\circ+x\right) \equiv \sin x \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin 30^\circ.$$

Враховуючи, що умовами задачі кут CDE визначається однозначно, причому $0<x<90^\circ$, залишилось довести, що $x=30^\circ$ задовольняє це співвідношення.

Це безпосередньо випливає з такого ланцюжка рівностей:

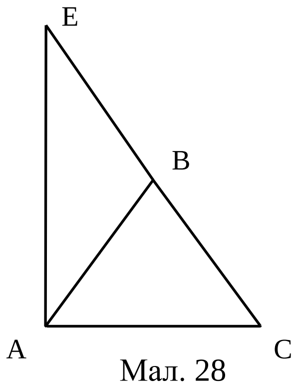
$$\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ =$$

$$=\frac{1}{2}\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{4}\sin 80^\circ = \sin^2 30^\circ \cdot \sin 80^\circ.$$

ДОДАТОК 2

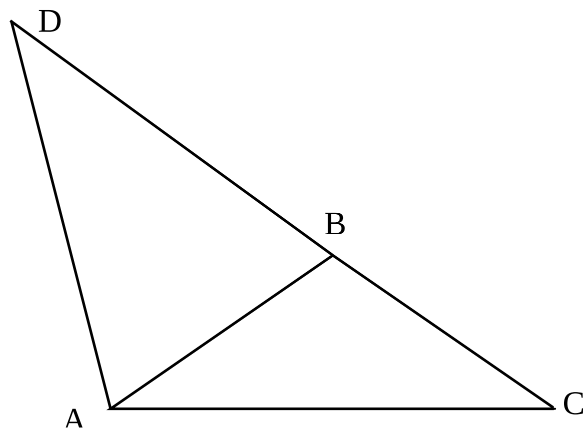
Про одне доповнення до задачі XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

У задачах 8, 14 та 15 ми фактично розв'язали одну з задач XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка на знаходження трьох рівнобедрених трикутників ABC з основою AC, всі кути яких вимірюються цілим числом градусів, і для яких на промені BC існує точка E така, що $BE = AC$, і кут AEC також виражається цілим числом градусів. Вкажемо також на ще три можливі випадки таких трикутників з точкою E на продовженні сторони BC поза точку B.



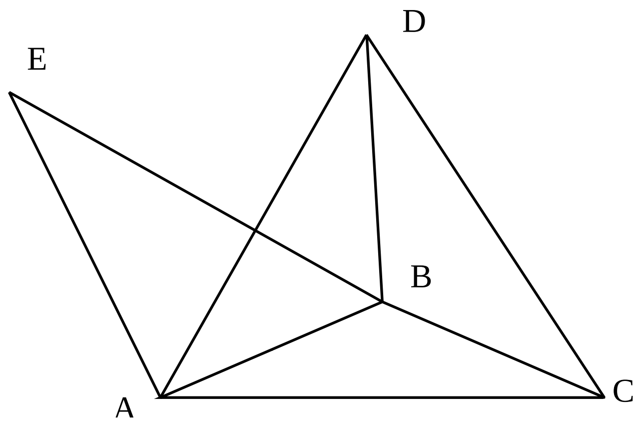
Мал. 28

1). Для рівностороннього трикутника ABC (див. мал. 28) отримаємо $BE = AB = BC$. Тому кут CAE прямий, а $\angle AEC = 30^o$.



Мал. 29

2). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 108^o$, на продовженні сторони BC поза точку B розглянемо точку D таку, що $\angle ADC = \angle ACD = 36^o$ (див. мал. 29). Оскільки $\angle ADB = \angle ABD = 72^o$, то $BD = AD = AC = BE$, тобто точка E збігається з точкою D. Отже, $\angle AEC = 36^o$.



Мал. 30

3). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 140^o$, доведемо, що $\angle AEC = 30^o$. Справді, якщо ADC – рівносторонній трикутник (див. мал. 30), то трикутники ABE та BAD рівні за двома сторонами і кутом 40^o між ними. Тому $\angle AEC = \angle BDA = 30^o$.