І.В.ФЕДАК

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Ч.ІІІ

Задачі для самостійного розв'язування та рекомендована література

Схвалено комісією з математики Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки України
як посібник для загальноосвітніх навчальних закладів
(протокол № 4 від 19 червня 2003 року)

Задачі для самостійного розв'язування

I. Задачі логічного характеру.

Логічні задачі.

1. (7-9). Чи можна множину всіх натуральних чисел розбити на три не порожні множини так, щоб виконувалась умова: якщо x та y належать різним множинам, то добуток xy належить третій із цих множин?
2. (8-9). Сума десяти різних натуральних чисел дорівнює 2006. Яке найбільше значення може набувати сума трьох найменших із них?
3. (8-9). Під час перемир'я за круглим столом зібралися лицарі з двох ворогуючих сторін. Виявилося, що число лицарів, справа від яких сидить ворог, дорівнює числу лицарів, справа яких сидить друг. Доведіть, що кількість всіх лицарів, які сидять за столом, кратна чотирьом.
4. (8-9). Чи можна числа 1,2,3,...,9 виписати по колу так, щоб сума жодних двох сусідніх виписаних чисел не ділилась ні на 3. ні на 5, ні на 7?
5. (8-9). Чи можна по колу виписати цифри 1,2,...,9 так, щоб із кожних двох сусідніх цифр можна було утворити просте двоцифрове число?
6. (8-9). Яку найбільшу кількість точок можна розташувати: а) у квадраті; б) у кубі зі стороною 2 так, щоб відстань між довільними двома з них була не менша 1?
7. (8-9). Доведіть, що при $n>4$ опуклий n-кутник, всі координати вершин якого цілочислові, містить всередині принаймні одну точку з обома цілочисловими координатами.
8. (8-9). Незнайків комп'ютер вміє виконувати лише такі операції з натуральними числами: 1) парне число n замінити на число $\frac{n}{2}$; 2) непарне число n замінити на $\frac{n+2001}{2}$.

   а) Чи може Незнайко, починаючи з $n=1$, одержати на своєму комп'ютері всі натуральні числа, менші за 2001;

   б) Розв'яжіть аналогічну задачу, якщо додатково комп'ютер здатний кожне просте число n замінити на $n+1$ чи n-1.
9. (7-8). Подорожуючий прибув у готель, маючи золотий ланцюжок із семи ланок. Господар вимагає з нього оплату за проживання – одну ланку щоденно. Яку найменшу кількість ланок слід розпиляти подорожуючому, щоб кожен день платити господарю потрібну кількість золота?
10. (7-8). Вчитель вирішив зіграти зі своїми двома учнями в одну стародавню гру. Вони сіли за круглим столом і робили ходи за стрілкою годинника. Починає гру вчитель і кожен раз бере зі столу 1 сірник. Учень, який сидить зліва від нього за один хід може взяти 2 або 4 сірники, а учень, який сидить справа, - 3 або 5 сірників. Хто не може зробити хід – пропускає його. Виграє той хто візьме останній сірник. Чи можуть учні договоритись між собою, щоб виграти в учителя, якщо спочатку на столі було 2002 сірники?
11. (7-8). В одній багатодітній сім'ї семеро дітей любили капусту, шестеро - моркву, п'ятеро - горох, четверо – капусту і моркву, троє – капусту і горох, двоє – моркву і горох, а один із задоволенням їв і капусту, і моркву, і горох. Скільки дітей було у цій сім'ї?
12. (8-9). Мені зараз вдвічі більше років, ніж було Вам тоді, коли мені було стільки ж років, скільки Вам зараз. Нам обом разом 70 років. Скільки років кожному з нас?
13. (7-8). Як можуть троє на двомісному мотоциклі за 3 години подолати шлях у 60 км, якщо швидкість мотоцикла 50 км/год, пішохода – 5 км/год?

14. (8-9). Мені тепер вдвічі більше років, ніж було Вам тоді, коли мені було стільки ж років, скільки Вам тепер, а коли Вам буде стільки ж років, скільки мені тепер, то нам разом буде 63 роки. Скільки років кожному з нас?
15. (7-8). Якщо кожен хлопчик купить пиріжок, а кожна дівчинка – булочку, то вони потратять на копійку менше, ніж якщо би кожен хлопчик купив булочку, а кожна дівчинка – пиріжок. Відомо, що хлопчиків більше, ніж дівчаток. На скільки?
16. (8-9). 36 тон вантажу упакували у невагомі ящики, не більше однієї тони у кожний. Доведіть, що чотиритонний автомобіль може перевезти цей вантаж за 11 поїздок.
17. (9-10). Чи можна множину {1,2,3,4,5,6,7,8,9} розбити на 2 множини так, щоб у жодній з них не знайшлося трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію?
18. (9-10). У крузі одиничного радіуса, розташовані 7 точок так, що відстань між довільними двома з них не менша 1. Доведіть, що одна з цих точок центр круга.
19. (7-8). Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор ліспромгоспу всіх заспокоїв, сказавши:” У вашому лісі 99% сосен. Ми будемо рубати тільки їх, і після рубки сосен залишиться 98% від усіх дерев.” Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп?
20. (8-9). На дошці в лабораторії були записані числа 1 та 2. Кожного дня Петрусь стирає з дошки обидва числа і замість них пише їх середнє арифметичне та середнє гармонійне. Знайдіть добуток чисел, які були на дошці 2006-го дня.
21. (8-9). Дано шестицифровий телефонний номер. Зі скількох семицифрових номерів його можна одержати викреслюванням однієї цифри?
22. (8-9). Шифр кодового замка – двоцифрове число. Буратіно забув код, але пам’ятає, що сума цифр цього числа, складена з їх добутком дорівнює самому числу. Яку мінімальну кількість спроб доведеться зробити, щоб гарантовано відкрити замок?
23. (7-8). Яка найбільша кількість квадратних ділянок зі стороною *a* може мати спільну межу з такою ж за розмірами квадратною ділянкою?
24. (8-9). 25 учнів різного росту вишикувалися у квадраті 5х5. У кожному рядку вибрали найбільшого учня і серед цих п’яти – найменшого з них, а в кожному стовпчику спершу вибрали найменших п’ять учнів, а вже серед них – найбільшого. а) Чи міг в обох випадках виявитись визначеним один і той же учень? б) Якщо ні, то котрий з них більший: найменший серед найбільших, чи найбільший серед найменших?
25. (8-9). Доріжки у зоопарку мають форму рівностороннього трикутника, у якому проведені середні лінії. Із клітки втекла мавпа. Її ловлять два сторожі. Чи зможуть вони впіймати мавпу, якщо всі бігатимуть лише по доріжках, бачитимуть весь час одне одного і матимуть: а) однакові максимальні швидкості руху; б) максимальна швидкість мавпи вдвічі більша за максимальні швидкості сторожів?
26. (9-10). а) Ребрами прозорого куба повзають два павуки і муха, максимальні швидкості яких однакові. Чи зможуть павуки спіймати муху? б) Розв’яжіть аналогічну задачу для трьох павуків і мухи за умови, що максимальна швидкість мухи втричі більша максимальних швидкостей кожного з павуків.
27. (7-8). Чотири мотоциклісти мають пального на 120 км кожен. Чи можуть вони доставити пакет на відстань 250 км, якщо запасних баків ні в кого немає, і дозволяється лише переливати бензин у звільнену частину бака кожного мотоцикліста?
28. (7-8). Перед фінальним забігом було висловлено три прогнози щодо його результатів: *АБВГДЕ, ВЕДАГБ, ДГЕБАВ*. Кожний вгадав два місця. У якому порядку фінішували бігуни?

29. (9-11). Скільки точок на земній кулі мають властивість: якщо пройти 10 км на північ, потім – 10 км на схід і, нарешті, – 10 км на південь, то потрапимо у початкову точку. (Вважати поверхню Землі ідеальною сферою).
30. (7-8). Бактерії розмножуються поділом. За 1 сек. з однієї утворюється дві. Одна бактерія разом з потомством заповнює пробірку за 1 годину. За який час заповнять цю пробірку дві бактерії?
31. (7-8). Букіністичний магазин купив книжку на 35% дешевше, ніж написано на обкладинці, а продав – на 25% дешевше цієї ціни. Скільки відсотків прибутку він одержав?
32. (7-8). У вершинах правильного семикутника лежать чорні та білі фішки. Доведіть, що є три фішки одного кольору, які знаходяться у вершинах рівнобедреного трикутника.
33. (8-9). Клітинки дошки розмірами 9х9 замальовані відповідно кожна в один із двох кольорів. Дозволяється вибрати довільний прямокутник 3х1 і перемалювати всі його клітинки у той колір, який переважав у цьому прямокутнику. Доведіть, що з допомогою таких операцій вдасться перемалювати всю дошку в один колір.
34. (7-8). Жителі A завжди кажуть правду, $Б$ – завжди брешуть, B – говорять правду через раз. Черговому пожежної частини подзвонили: “У нас пожежа!” “Де”, – спитав він. “У B ”. Куди поїхала пожежна машина?
35. (7-8). У Простоквашинській школі всього 20 учнів. У будь-яких двох із них є спільний дід. Доведіть, що в одного з дідів у цій школі вчиться не менше 14 онуків.
36. (8-9). У країні 100 міст. Кожні два з них сполучені між собою одним із двох видів транспорту. Яку найбільшу кількість міст вдасться відвідати, користуючись лише одним видом транспорту?
37. (8-10). Вся площина розмальована у 4 кольори. Чи обов’язково знайдеться пряма, яка містить принаймні 3 точки різних кольорів?
38. (8-10). На прямій є 50 відрізків. Доведіть, що або 8 відрізків мають спільну точку, або є 8 відрізків, жодні два з яких не мають спільної точки.
39. (8-10). Шахову дошку 8х8 покрили 32-ма прямокутниками 1х2. Доведіть, що деякі два зі цих доміно покривають квадрат 2х2.
40. (8-10). У деякій країні будь-які два міста з’єднані між собою автомобільною дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що: а) є місто, з якого у будь-яке інше можна проїхати не більше як двома дорогами; б) всі міста можна об’їхати, побувавши у кожному з них по одному разові.
41. (9-10). У країні $2k+1$ місто, причому кожне з них зв’язане з кожним іншим дорогою з одностороннім рухом так, що в кожне місто входить і з кожного виходить по k доріг. Доведіть, що з довільного міста у будь-яке інше можна попасти, проїхавши не більше як двома дорогами.
42. (8-9). З давніх часів жителі острова Чунга вивозять половину своїх скарбів на острів Чанга, а жителі Чанги – третину своїх скарбів на Чунгу. Яке співвідношення між величинами скарбів на цих островах?
43. (8-9). n команд зіграли круговий турнір без нічиїх. Доведіть, що їх можна занумерувати так, що перша команда виграла у другої, друга – у третьої,..., передостання – в останньої.
44. (8-9). Порівняйте числа 2^{300} та 3^{200}.

Бути такого не може?

45. (7-8). Петрусь говорить: позавчора мені ще було 10 років, а в наступному році мені виповниться 13. Чи може таке бути?
46. (7-8). Чи можна з допомогою ножиців вирізати зі сторінки зошита отвір, через який міг би пролізти слон?
47. (7-8). Запишіть 5 таких непарних цифр, щоб складена з них сума дорівнювала 14.
48. (7-9). Заповніть таблицю 3x3 дев'ятьма різними натуральними числами так, щоб усі 8 добутків по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці були однаковими.
49. (9-11). Наведіть приклад неперервної на всій числовій прямій функції, яка кожне своє значення набуває рівно при трьох значеннях аргументу.
50. (8-9). Чотири села лежать у вершинах квадрата зі стороною 4 км. Чи може сумарна довжина доріг, які з'єднують ці села, бути меншою за 11 км?
51. (8-9). Запишіть у клітинки нескінченої таблиці такі цілі числа, щоб у кожному прямокутнику розмірами 4x6 сума записаних чисел дорівнювала: а) 10, б) 2.
52. (8-9). В деякій державі кожне місто зв'язане з кожним іншим дорогою. Король хоче ввести на дорогах односторонній рух так, щоб виїхавши з будь-якого міста, в нього не можна було повернутися. Чи можливо це зробити?
53. (7-8). Чи можна число 2003 записати у вигляді суми кількох: а) цілих; б) натуральних чисел, добуток яких також дорівнював би 2003?
54. (8-9). Випишіть всі цифри від 1 до 9 включно у такому порядку, щоб серед них не можна було вибрати чотирьох цифр, які записані у цьому ряду або у порядку зростання, або у порядку спадання. Чи можна таким чином виписати всі 10 цифр?
55. (8-9). Розріжте рівнобедрений прямокутний трикутних з довжиною катета 7 см на 6 попарно різних рівнобедрених прямокутних трикутників.
56. (8-9). Побудуйте прямокутний трикутник з цілочисловими довжинами сторін, всі вершини якого лежать у вузлах прямокутної решітки зі стороною 1, а сторони не проходять по лініях цієї решітки.
57. (7-8). Намалюйте на площині 6 точок так, щоб кожна з'єднувалась рівно з чотирма іншими точками відрізками, які попарно не перетинаються між собою.
58. (7-8). Розмістіть 9 точок на 10 прямих так, що на кожній прямій було по 3 точки.
59. (8-9). Чи можна відзначити на площині 7 точок так, щоб серед будь-яких трьох із них знайшлися дві точки на відстані 1 ?
60. (7-8). Намалюйте фігуру, якою не можна покрити півкруг радіуса 1, але двома екземплярами якої можна покрити круг радіуса 1.
61. (7-8). Чи можна розмістити 10 точок на п'яти прямих так, щоб на кожній прямій було по 4 точки?
62. (7-8). Таблиця 3x3 складається із дев'яти квадратів. Не відриваючи олівця від листка паперу, проведіть чотири відрізки так, щоб на них лежали усі 9 центрів цих квадратів.
63. (8-9). У кожен вузол цілочислової решітки на площині вбили по цвяху. Чи можна цій площині повернути на 180° вектор довжиною 2006?
64. (8-9). Поділіть відрізок AB на 4 рівні частини провівши лише 6 ліній (прямих чи кіл).
65. (8-10). Намалюйте такий многокутник і точку O всередині нього, з якої жодну сторону цього многокутника не вдасться побачити повністю. Чи можлива аналогічна ситуація, якщо точка O знаходиться поза многокутником?

66. (7-9). У таблиці розмірами 4х4 поставте 7 зірочок таким чином, щоб при викреслюванні довільних двох рядків та довільних двох стовпчиків цієї таблиці принаймні одна зірочка залишилася не викресленою. Чи можна добитися цього з шістьма зірочками?
67. (8-9). Намалюйте карту 11 держав, яку не можна розмалювати у три кольори так, щоб будь-які дві держави зі спільною частиною границі були розмальовані у різні кольори.
68. (7-8). Чи може добуток 2006 цілих чисел дорівнювати 2006, а їх сума – дорівнювати нулю? Узагальніть дану задачу на випадок n чисел із добутком n.
69. (8-10). Зобразіть такі 10 автобусних маршрутів, що будь-які 9 із них охоплюють всі зупинки, а жодні 8 не можуть охопити всіх зупинок.
70. (8-10). На прямокутному листку паперу розмірами 101х200 точка, починаючи з кута, рухається по бісектрисі. Дійшовши до сторони вона здійснює поворот на 90°. Чи зможе вона рухаючись таким чином: а) опинитися ще хоч в одному з кутів цього прямокутника; б) побувати посередині хоч однієї зі сторін?
71. (7-9). Чи можна шахову дошку розмірами 4х4 обійти ходом шахового коня, побувавши на кожному з полів по одному разові?
72. (8-9). Чи можна на шаховій дошці 4×4 розташувати 4 сині, 4 червоні, 4 чорні та 4 білі шахові коні так, щоб сині не били червоних, червоні – чорних, чорні – білих, а білі – синіх?
73. (8-9). Чи може число $n!$ закінчуватися на 200600...0 ?
74. (8-9). а) Знайдіть хоч одне натуральне число n таке, що сума цифр числа n^2 дорівнює 100. б) Чи може сума цифр числа n^2, де $n \in N$, дорівнювати 2005 або 2006 ?
75. (8-9). Розріжте квадрат на 8 гострокутних трикутників. Чи може бути квадрат розрізаний на тупокутні трикутники?
76. (7-9). Розташуйте по колу числа 1, 2, ..., 12 так, щоб різниця між двома сусідніми на колі дорівнювала 3, 4 або 5 чи обґрунтуйте неможливість такого розташування.
77. (8-9). Чи існує число, квадрат якого починається цифрами 123456789, а закінчується цифрами 987654321 ?
78. (8-9). Чи правильне твердження: сума відстаней від довільної внутрішньої точки опуклого чотирикутника до його вершин не перевищує периметра цього чотирикутника?
79. (8-9). Чи можна квадрат 6х6 покрити трьома квадратами 5х5?
80. (8-9). Використовуючи кожну з цифр 1, 2, ..., 9 по одному разові, складіть кілька чисел, сума яких є точним квадратом.
81. (8-9). Чи можна розташувати по колу всі цифри від 0 до 9 так, щоб сума будь-яких трьох цифр, записаних підряд, не перевищувала: а) 14; б) 15?
82. (7-9). Чи можна намалювати на площині дванадцять: а) кіл; б) кругів так, щоб всі вони дотикалися рівно до п'яти інших?
83. (7-9). Чи обов'язково серед 2006-ох відрізків знайдуться три, з яких можна скласти трикутник?
84. (7-9). По колу виписані числа 1, 2, ..., 8. Дозволяється витерти будь-які два сусідні з них, а на їхні місця записати середні арифметичні цих чисел. Чи вдасться добитися, щоб усі числа стали рівними?
85. (7-9). У трьох гаманцях різне число монет. Дозволяється за один крок добавляти по одній монеті у різні два гаманці. Чи завжди вдасться вирівняти число монет у всіх трьох гаманцях? Якщо так, то яке найменше число кроків потрібне при початковій кількості монет $m < n < k$?

86. (7-9). У краплину води, де було 1000 бактерій, посадили 1 вірус. Після цього щохвилини відбувалося наступне: кожен вірус знищував одну бактерію, а сам ділився на 2 віруси. Крім того кожна вціліла бактерія ділилася на дві. Чи вірно, що за деякий час не залишиться жодної бактерії?
87. (8-9). На столі 1001 сірник. Хід полягає у викиданні одного сірника з деякої купи і поділу будь-якої купи, де залишилося більше одного сірника, на дві частини. Чи можуть через декілька ходів всі купи складатися з трьох сірників?
88. (8-9). Випробування нової моделі автомобіля показали, що шини на колесах повністю зношуються через 36, 45, 54 або 60 тисяч кілометрів залежно від їх розміщення (шини є однаковими, під час випробувань їх місцями не міняли). Чи можна, маючи 4 нові шини, проїхати відстань 48 тисяч кілометрів, якщо при цьому дозволяється переставляти місцями будь-які два колеса?
89. (8-9). Чи можна, маючи два бікфордові шнури, кожен з яких згоряє нерівномірно на протязі однієї години, виміряти час у 45 хвилин?

Задачі на зважування, принцип Діріхле, ігри.

90. (7-9). Є 80 монет, серед яких одна фальшива, яка легша від інших. За допомогою 4–х зважувань на терезах з двома шальками без гир виявіть фальшиву монету.
91. (8-9). Доведіть, що якщо кількість монет n задовольняє нерівність $3^{k-1}<n\leq 3^{k}$, то для виявлення серед них єдиної фальшивої монети, яка легша за від справжніх, на терезах з двома шальками без гир у загальному випадку необхідно і достатньо провести k зважувань.
92. (9-11). Серед 13 монет одна фальшива, причому не відомо, важча чи легша вона від справжніх. Як з допомогою трьох зважувань на терезах з двома шальками без гир виявити фальшиву монету?
93. (7-9). Є 3 справжніх монети однакової ваги і 3 фальшиві монети, теж однакової ваги, але легші від справжніх. Василько приніс ще одну монету одного з цих двох видів. Як з допомогою двох зважувань на терезах з двома шальками без гир виявити фальшиву монету?
94. (7-9). Є 5 монет, з яких 3 справжні, одна – фальшива, важча за справжню, і одна – фальшива, легша за справжню. За 3 зважування визначте обидві фальшиві монети.
95. (8-9). Є 6 монет, з яких дві – фальшиві, легші за справжні. За 3 зважування визначте обидві фальшиві монети.
96. (8-10). Про 13 гир відомо, що їхні маси у грамах є цілочисловими, і кожні 12 гир можна розділити на 2 групи однакової маси по 6 гир у кожній з них. Доведіть, що всі гирі мають однакову масу.
97. (8-9). Є 81 гиря з масами 1^2 грам, 2^2 г., ..., 81^2г. Розкладіть їх на 3 рівні за масою купки.
98. (8-9). Є ланцюг із 60 ланок, кожна масою 1 г. Доведіть, що, розпилявши деякі 3 зі цих ланок, з одержаних частин вдасться скласти всі маси в 1г., 2г., ..., 60г. Які ланки слід для цього розпиляти? (Маса розпиляної ланки теж 1г.).
99. (8-9). Є 15 гир різної маси. За яку найменшу кількість зважувань можна виявити 2 найважчі гирі?
100. (8-10). Вантаж масою 13,5 тон упакований у декілька невагомих ящиків, маса вантажу в кожному з яких не перевищує 350 кг. Доведіть, що весь вантаж можна перевести на 11-ти півторатонках.

101. (8-10). Є 11 мішків з монетами і вага з двома шальками і стрілкою, яка показує на якій шальці вантаж важчий і на скільки. Відомо, що в одному мішку всі монети фальшиві (однакової маси, але легші від справжніх). Як з допомогою лише двох зважувань виявити цей мішок?

102. (8-10). Доведіть, що з набору гир 1г., 2г., ..., 26г., можна вибрати 6 так, що з них не вдасться утворити 2-х наборів однакової маси. Чи вірне аналогічне твердження для 7-ми вибраних гир?

103. (8-10). Є 100 гир, кожні 2 з яких відрізняються за масою не більше як на 20 г. Доведіть, що їх можна розкласти по 50 штук на частини терезів так, щоб одна з них переважала іншу не більше як на 20 г.

104. (7-9). Є гирі з масами 98 г, 99 г, 100 г та 101 . Як за 2 зважування на вазі зі стрілкою, на якій можна точно зважити будь-який вантаж, визначити по скільки важить кожна з цих гир окремо.

105. (8-9). Є гирі масами 1000г, 1001 г, 1002 г, 1004 г, 1007 г без надписів. Як вагою зі стрілкою, яка показує масу вантажу у грамах, виявити монету 1000 г за 3 зважування?

106. (8-10). Є набір гир 1г, 2г, ..., 30г. Із них вибрали 10 гир, загальна маси яких дорівнює третині маси всіх гир. Доведіть, що решта 20 гир можна розкласти по 10 так, що вони будуть у рівновазі.

107. (8-10). Є 4 монети, одна з яких фальшива (невідомо легша чи важча вона від справжніх), гиря масою 5г та терези з двома шальками. Відомо, що справжня монета важить 5 г. а) Як двома зважуваннями виявити фальшиву монету і взнати, легша чи важча вона від справжніх? б) Чи можна це зробити, якщо спочатку було 5 монет, серед яких одна фальшива?

108. (7-9). Є 19 гир з масами 1г, 2г, ..., 19г. З них 9 - залізні, 9 – бронзові, одна – золота. Відомо, що загальна маса залізних гир на 90г більша, ніж загальна маса всіх бронзових. Скільки важить золота монета?

109. (8-10). Деяка комісія засідала 40 разів, причому у кожному засіданні брали участь 10 її членів, жодні 2 з яких не зустрічалися на засіданнях більше одного разу. Доведіть, що до складу комісії входить понад 60 осіб.

110. (8-10). На дошці 2002x2002 є 1000 білих тур і чорний король. Доведіть, що при довільному розташуванні фігур король зможе стати під удар, як би не рухалися фігури.

111. (8-10). Із чисел 1, 2, ..., 200 вибрали 101 число. Доведіть, що серед них знайдеться пара, в якій одне число ділиться на інше, причому їхня частка є деяким степенем двійки.

112. (8-10). У квадратну таблицю 8x8 вписані числа 1, 2, ..., 64 . Доведіть, що знайдуться дві сусідні зі спільною стороною клітинки, для яких різниця записаних у них чисел не менша 5.

113. (8-10). На площині розташовані шість точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Двоє по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожен олівцем свого кольору. Повторно проводити уже проведений відрізок не дозволяється. Програє той, хто першим одержить трикутник одного кольору з вершинами у заданих точках. а) Доведіть, що гра не може закінчитись внічию. б) У котрого з двох гравців, починаючого гру чи його суперника є виграшна стратегія. Опишіть цю стратегію.

114. (8-10). Дано 8 різних натуральних чисел, не більших 15. Доведіть, що серед їх додатних попарних різниць є принаймні 3 однакових.

115. (8-10). 11 учнів займаються у п'яти гуртках. Доведіть, що знайдуться учні A та B, що всі гуртки, які відвідує A, відвідує і B.

116. (8-10). На дошці записане число 1234. Хід полягає в тому, щоб відняти від числа деяку його ненульову цифру і записати одержане число замість старого. Виграє той, хто одержить 0. У котрого з двох гравців, які ходять почергово, є виграшна стратегія?

117. (8-10). Є n сірників. Двоє забирають їх по черзі. За один хід можна взяти 1, 2 або 3 сірники, не повторюючи останній хід суперника. Виграє той, хто візьме останній сірник або не дозволить суперникові зробити хід за правилами. У котрого зі гравців є виграшна стратегія?

118. (8-10). Двоє по черзі записують цифри. Перший записує будь-яку, а потім вони приписують до вже одержаного числа або цифру зліва, або цифру справа. Доведіть, що другий може добитися, щоб жодного разу не утворився точний квадрат.

119. (8-10). Троє по черзі кладуть монети на круглий стіл. Програє той, хто не може зробити хід так, щоб монети не перекривалися. Доведіть, що перший і третій гравці можуть домовитися і грати так, щоб весь час програвав другий гравець.

II. Алгебра та початки аналізу

Подільність та остачі.

120. (8-9). Таблицю 3х3 заповнили цілими числами так, що кожна з восьми сум по горизонталі, вертикалі чи діагоналі таблиці дорівнює M. Доведіть, що M ділиться на 3.

121. (8-10). Знайдіть всі натуральні $k<2006$, для яких $5n^7+7n^5+kn$ ділиться на 35 при кожному натуральному n.

122. (8-9). До 17-цифрового числа додали число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Доведіть, що хоч одна цифра одержаної суми парна.

123. (8-10). При яких n число $1^n+2^n+3^n+4^n$ закінчується нулем?

124. (8-10). Доведіть, що $2^{6n+1}+3^{6n+1}+5^{6n}+1$ ділиться на 7 при кожному натуральному n.

125. (8-10). $2n$–цифрове число A розбили на n розрядів по 2 цифри в кожному. Доведіть, що сума, одержаних двоцифрових чисел і число A при діленні на 11 дають однакові остачі.

126. (8-10). Доведіть, що при кожному натуральному n числа $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ та $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ є цілими.

127. (8-10). Числа a та b дають однакові остачі як при діленні на m, так і при діленні на n. Доведіть, що якщо m та n – взаємно прості, то і при діленні на mn остачі також будуть однаковими.

128. (8-10). Число ділиться на 99. Доведіть, що сума його цифр не менша 18.

129. (9-10). Доведіть, що при кожному n число $n!$ не ділиться на 2^n.

130. (9-11). Опуклий n–кутник розбили діагоналями на трикутники так, що з кожної вершини виходить парна кількість діагоналей. Доведіть, що n ділиться на 3.

131. (9-11). Доведіть, що якщо $(n-1)!+1$ ділиться на n, то n – просте число.

132. (8-10). Знайдіть усі цілочислові розв'язки рівняння

$$m^{2006}=n(n+m)(n+2m)...(n+2005m).$$

133. (9-11). Доведіть, що при кожному натуральному $n\geq 2$ число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ не є цілим.

134. (8-9). Чи вірно, що для кожного непарного числа к числа n^k-n ділиться на k при всіх натуральних n?

135. (8-10). Доведіть, що при кожному натуральному n число n^3+3n+5 не ділиться на 121.

136. (8-10). Знайдіть усі такі значення *p*, при яких $p, 2^p - 1$ та $2^p + 1$ є простими числами.

137. (9-11). Чи існують такі 4 натуральні числа, що найбільші спільні дільники всіх можливих пар цих чисел є шістьма послідовними натуральними числами?

138. (8-10). Чи існують такі цілі числа *m* і *n*, що
$$(m+2000)(m+2001)+(m+2001)(m+2002)+(m+2000)(m+2002)=n^2$$

139. (7-9). Маса 100 гирьок, які лежать в одній купі, дорівнює 500 г. Відомо, що там є тільки гирьки по 1 г, 10 г, 50 г. Скільки в купі гирьок кожної маси?

140. (8-9). Доведіть, що якщо довжини сторін прямокутника та його діагоналей є цілими числами, то площа прямокутника – ціле число, кратне 12.

141. (8-10). Доведіть, що із дев'яти послідовних натуральних чисел завжди можна вибрати число, взаємно просте зі всіма іншими.

142. (8-9). Є 7 жетонів із цифрами 1,2,3,4,5,6,7. Доведіть, що з них не можна утворити двох різних семицифрових чисел, одне з яких ділилось би на інше.

143. (8-9). Цифри числа *A* записані у порядку зростання. Знайдіть суму цифр числа 9*A*.

144. (7-9). На дошці записане число 1. Кожної секунди до числа на дошці добавляють суму його цифр. Чи може через деякий час на дошці появитися число 123456?

145. (8-10). Знайдіть хоч одне 100-цифрове число без нульових цифр, яке ділиться на суму своїх цифр.

146. (8-9). Нехай *A* – сума цифр числа 4444^{44444}, *B* – сума цифр числа *A*. Знайдіть суму цифр числа *B*.

147. (9-10). Доведіть, що $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$ при всіх $n \in N$ ділиться на 8640.

148. (8-9). Доведіть, що при будь-яких цілих *a* рівняння $x^2 - y^2 = a^{2005}$ має розв'язки у цілих числах.

149. (9-11). При яких цілих *n* число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ ділиться на 323?

150. (8-9). Знайдіть два найменші послідовні натуральні числа, сума цифр кожного з яких ділиться на 125.

151. (8-9). Знайдіть найменше натуральне число *n*, сума цифр якого ділиться на 2005, а сума цифр числа *n+1* ділиться на 2006.

152. (9-11). Число *n* записано 3^k одиницями. Чи обов'язково воно ділиться на 3^k? Якщо ні, то при яких *k* ділиться?

153. (8-10). Доведіть, що якщо *a* – ціле, *m* і *d* – взаємно прості, то серед чисел *a*, *a+d,...,a+(m-1)d* рівно одне ділиться на *m*.

154. (8-10). Яка остача від ділення числа *A* на 11, якщо при діленні на 2001 та на 2002 остача була 100. Знайдіть найменше натуральне число з цією властивістю.

155. (8-9). Яка максимальна та яка мінімальна різниця може бути між двома сусідніми числами, сума цифр кожного з яких ділиться на 7?

156. (9-11). Із перших 50-ти непарних чисел склали всі можливі добутки, у кожен з яких кожне із цих чисел, крім одиниці, входить не більше одного разу. При якому максимальному *n* сума цих добутків, збільшена на 1, ділиться на 2^n?

157. (8-10). Доведіть, що число 2^n не може закінчуватися чотирма однаковими цифрами.

158. (9-11). $a^n - b^n$ ділиться на *n*. Доведіть, що і $\dfrac{a^n - b^n}{a-b}$ ділиться на *n* при $a \neq b,\ n \in N$.

159. (8-10). Котрі з чисел 2004, 2005, 2006 можна подати у вигляді суми кубів двох цілих чисел?

160. (9-11). Знайдіть всі пари натуральних чисел *n* та *m*, для яких $2006^m - 2006^n = n^{2006}$.

161. (9-11). Доведіть, що якщо суми цифр чисел n та $2n$ співпадають, то n ділиться на 9.

162. (9-11). Знайдіть три такі попарно взаємно прості числа, що що сума будь-яких двох із них ділиться на третє.

163. (9-11). Доведіть, що є безліч пар натуральних чисел m та n, що $m^2+1 \vdots n$, а $n^2+1 \vdots m$.

164. (9-11). Чи може 3^n+1 ділитися на 10^{10}?

165. (9-11). Правильний шестикутник розділили на k паралелограмів однакової площі. Доведіть, що k ділиться на 3.

166. (8-10). Розглядаючи остачі від ділення на 7, доведіть, що $6n^3+3$ при жодному натуральному n не є точним шостим степенем.

167. (8-10). Чи може число $\overline{abc}$ + $\overline{bca}$ + $\overline{cab}$ бути точним квадратом?

168. (9-10). Доведіть, що серед чисел вигляду 2^n+n^2 є нескінченна кількість таких, що діляться на: а) 10; б) 100.

169. (9-11). Доведіть, що якщо p - просте число, то $(p-1)!+1$ ділиться на p (теорема Вільсона).

170. (9-11). Знайдіть всі такі трійки натуральних чисел, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, ділиться на третє число.

Алгебраїчні обчислення

171. (7-9). Обчисліть $19961996 \cdot 199719971997 - 19971997 \cdot 199619961996$.

172. (8-9). Обчисліть, не користуючись калькулятором $\left(1{,}2319^4+0{,}7681^4+1{,}2319^3\cdot 0{,}7681+1{,}2319\cdot 0{,}7681^3-2{,}2319\cdot 1{,}7681\right): 0{,}4638^2$

173. (9-10). Доведіть, що $\sqrt{\underbrace{11...1}_{2006}-\underbrace{22...2}_{1003}}$ є цілим числом.

174. (8-10). Доведіть, що $\sqrt{2002\cdot 2003\cdot 2004\cdot 2005+1}$ є раціональним числом.

175. (7-9). Знайдіть одноцифрові числа, які позначають букви такого запису $M\cdot A=T-E=M:A=T:И=K-A$, якщо різним буквам відповідають різні числа.

176. (8-10). Які цілі числа a,b,c задовольняють нерівність $a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$?

177. (9-11). Доведіть, що дробова частина числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2006}$ починається із 2006-ох однакових цифр.

178. (9-10). $0<a<b<c<d$. Розташуйте числа $x=(a+b)(c+d)$, $y=(a+c)(b+d)$, $z=(a+d)(b+c)$ у порядку зростання.

179. (9-11). Обчисліть $\sqrt{\underbrace{44...4}_{2004}+\underbrace{11...1}_{1003}-\underbrace{66...6}_{1002}}$.

180. (9-11). а) Яких значень можуть набувати цілі частини чисел $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$? б) Знайдіть цілу частину числа a_{100}.

181. (9-11). Доведіть, що а) $[x]+[y]\le[x+y]$, б) $[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]$, в) $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, г) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

182. (9-10). Розв'яжіть рівняння:
а) $\left[x^3\right]-[x]=2006$; б) $[x]+\left[x^2\right]=\left[x^3\right]$; в) $[x]\cdot\{x\}=2006x$.

183. (8-10). Розкладіть на множники:

а) $x^3+y^3+z^3-3xyz$, б) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

184. (9-10). Яке з чисел більше: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a+\sqrt{a+1}}$ чи $\sqrt{a}+\sqrt{a+1+\sqrt{a}}$?

185. (8-10). Числа 1, 2,..., 25 записують у таблиці 5х5 так, щоб у кожному рядку вони були записані у порядку зростання. Яке найбільше (найменше) значення може набувати сума чисел третього стовпчика?

186. (8-10). Розкладіть на два множники з цілими степенями вираз $a^{10}+a^5+1$.

187. (8-10). Таблицю із 20 рядків і 100 стовпчиків заповнити числами 1,2,...,2000, виписуючи їх послідовно від 1 до 100 в першому рядку, від 101 до 200 – у другому і т.д. Після цього перед числами розставити знаки “+” чи “-“ так, щоб у кожному рядку виявилося по 50, а у кожному стовпчику – по 10 знаків кожного виду. Знайдіть суму всіх чисел одержаної таким чином таблиці.

188. (8-10). $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$. Обчисліть $x^3+\frac{1}{x^3}$.

189. (8-10). Розкладіть на два множники четвертого степеня вираз $x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8$.

190. (8-9). Скільки існує чотирицифрових чисел від 0000 до 9999, у яких сума двох перших цифр дорівнює сумі двох останніх цифр.

191. (9-10). Є дві бочки нескінченного об’єму. Чи можна, користуючись лише двома кружками ємністю $\left(2-\sqrt{2}\right)$ л. та $\sqrt{2}$ л., перелити з однієї бочки в іншу рівно 1л. води?

192. (8-9). Для чисел x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 утворили 10 всеможливих попарних сум $a_1,a_2,...,a_{10}$. Чи можна, маючи лише набір таких сум і не знаючи, сумами яких чисел вони є, знайти x_1,x_2,x_3,x_4 та x_5?

193. (8-9). Числа від 1 до 2006 розбили на 2 групи. В першу групу включили кожне число, для якого найближчим до нього квадратом є квадрат непарного числа, а в другу – числа, для яких найближчими є квадрати парних чисел. В якій групі сума чисел більша?

194. (8-10). Спростіть вираз : $\frac{2}{\sqrt{4-3\cdot\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.

195. (9-10). Перевірте, чи для всіх $x\geq1$ виконується рівність $\left[\sqrt{\left[\sqrt{x}\right]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$.

196. (9-10). Знайдіть всі натуральні числа *x*, які у результаті зменшення кожної зі своїх цифр на натуральне число *a* перетворюються у числа $(x-a)^2$.

197. (9-11). Обчисліть суми: а) $1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1)$;

б) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+n(n+1)(n+2)$.

198. (9-11). Числа *a, b, c* такі, що $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$. Яких значень може набувати сума : $\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{c+a}{b}\right)^n$?

199. (9-11). Спростіть дріб : $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

200. (9-11). Відомо, що $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}$. Знайдіть $x^3+y^3+z^3$.

201. (9-11). Обчисліть суму : $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz=1$.

202. (9-11). Розкладіть на множники : $\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right](a^2+b^2)-(ad-bc)^2$.

203. (9-11). Спростіть суму $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{99}{100!}$.

204. (8-10). Розкладіть на множники: а) $a^3+3a^2b+3ab^2+27b^3$,

б) $2(a^5+b^5+c^5)-5abc(a^2+b^2+c^2)$,

в) $6(a^5+b^5+c^5)$ -$5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$.

205. (9-10). Розкладіть вираз $x^{2006}+x+1$ на два множники ненульового степеня.

206. (9-11). Знайдіть хоч один многочлен з цілими коефіцієнтами, який має своїм коренем: а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$, в) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

207. (9-11). Знайдіть суму коефіцієнтів при непарних степенях многочлена $(x^2+x-1)^{2006}$.

208. (10-11). Для додатних чисел x, y, z виконуються рівності

$$x^2+xy+y^2=a^2, y^2+yz+z^2=b^2, z^2+zx+x^2=c^2.$$

Скориставшись геометричними міркуваннями, обчисліть суму $xy + yz + zx$.

209. (8-10). Запропонуйте раціональний спосіб обчислення суми всіх натуральних чисел від 1 до 100, у десятковому записі яких немає цифр 4 і 5.

210. (10-11). $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Обчисліть суму $f\left(\frac{1}{2004}\right)+f\left(\frac{2}{2004}\right)+...+f\left(\frac{2004}{2004}\right)$.

211. (8-9). По колу записано 6 чисел, кожне з яких дорівнює модулю різниці двох сусідніх з ним. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 1.

212. (8-10). Подайте число 100 у вигляді суми кількох натуральних чисел так, щоб їх добуток був найбільшим.

213. (8-10). Послідовні непарні числа об’єднано у групи так, що у n-ій групі є n чисел. Знайдіть суму чисел сотої групи.

214. (9-10). Сума n невід’ємних чисел дорівнює 1. Яке найбільше значення може набувати сума модулів їх попарних різниць?

215. (10-11). Порівняйте числа $lg^2 11$ та lg12.

216. (8-9). По колу виписано n різних чисел, кожне з яких дорівнює: а) добутку б) сумі двох сусідніх з ним. Скільки чисел могло бути виписано у кожному зі цих випадків?

217. (8-9). У вершинах десятикутника у довільному порядку записали всі цифри від 0 до 9, а на сторонах – суми цифр, які знаходяться на їх кінцях. Доведіть, що принаймні дві зі цих сум закінчуються на одну і ту ж цифру.

218. (8-10). Знайдіть хоч одне x>0, для якого $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$.

219. (9-11). $a+b+c=7, \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$. Знайдіть $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

220. (9-11). Довільний дріб вигляду $\frac{a}{b}$ можна замінити на один з дробів $\frac{a-b}{b},\frac{a+b}{b},\frac{b}{a}$. Чи можна таким чином за декілька кроків одержати із дробу $\frac{1}{2}$ дріб: а) $\frac{2003}{2004}$, б) $\frac{2004}{2005}$?

Алгебраїчні доведення

221. (9-11). Доведіть, що коли $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ та $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

222. (9-11). Не користуючись поняттям похідної, знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$.

223. (8-10). Обґрунтуйте такий спосіб множення шестицифрового числа a на 142857: записуємо число $a-1$, а після нього число, яке доповнює кожну цифру записаного до 9. Одержане 12-цифрове число ділимо на 7 і дістаємо потрібний добуток.

224. (8-10). Доведіть тотожність $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

225. (8-10). Чи існують такі натуральні числа x та y, що x^2+y та y^2+x - квадрати цілих чисел?

226. (9-10). Доведіть, що при цілих m та n рівність $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m=\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$ можлива лише за умови $m=n=0$.

227. (9-11). $a,\ b,\ c$ - такі цілі числа, що $a+b=c$. Доведіть, що $a^4+b^4+c^4=2n^2$ при деякому цілому n.

228. (9-11). Про многочлен з цілими коефіцієнтами відомо, що 1 та 2 є його коренями. Доведіть, що знайдеться коефіцієнт цього многочлена, який менший за -1.

229. (9-11). Доведіть, що $\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}>\dfrac{1}{4}$, якщо кількість радикалів у знаменнику на 1 більша, ніж у чисельнику.

230. (9-11). ax^2+bx+c при всіх x є точним квадратом. Доведіть, що $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

231. (9-11). Доведіть, що при всіх натуральних n число n^4+4 складене.

232. (9-11). Доведіть, що $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

233. (9-11). а) Доведіть, що при жодному натуральному n число $a_n=n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ не є точним квадратом. б) Знайдіть всі натуральні n, при яких a_n+1 є точними квадратами.

234. (9-11). а) ax^3+bx^2+cx+d при всіх цілих x ділиться на 5. Доведіть, що всі його коефіцієнти також діляться на 5. б) Узагальніть задачу на випадок многочленів довільного степеня n із подільністю на $2n-1$. Чи для всіх $n\in N$ буде справедливим аналогічне твердження?

235. (9-11). У прямокутній таблиці добуток суми всіх чисел рядка на суму чисел довільного стовпчика дорівнює числу, яке записане на їхньому перетині. Доведіть, що якщо хоч одне з чисел відмінне від нуля, то сума всіх чисел таблиці дорівнює одиниці.

236. (9-11). Всі коефіцієнти многочлена дорівнюють або 1, або 0, або -1. Доведіть, що всі дійсні корені, якщо вони є, лежать на відрізку $[-2;2]$.

237. (9-11). Дано 12 послідовних натуральних чисел. Доведіть, що хоча б одне з них менше суми своїх дільників, які менші від нього.

238. (9-11). Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ при всіх простих p має рівно три розв'язки у натуральних числах.

239. (9-11). На прямій взяли 5 точок і відзначили середини всіх можливих відрізків із кінцями у цих точках. Яке найменше число відзначених точок могло утворитися? Узагальніть дану задачу на випадок довільного числа $n\geq 2$ точок.

240. (9-11). Числа 2^n та 5^n записали підряд одне за одним. Доведіть, що при кожному n утвориться $(n+1)$- цифрове число.

241. (10-11). Доведіть, що $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ - ірраціональне число.

242. (10-11). Доведіть, що рівняння $x^3+y^3=x^2+y^2$ має безліч розв'язків у додатних раціональних числах.

243. (9-11). Доведіть, що всі корені рівняння: $1+x+x^2+...+x^{n-1}=nx^n$ за абсолютною величиною не перевищують 1.

244. (9-10). Доведіть, що при всіх дійсних *a, b, c* рівняння $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$ має дійсні корені.

245. (9-10). Доведіть, що якщо *a, b, c* – довжини сторін трикутника, то рівняння $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ не має дійсних коренів.

246. (9-11). При $|x|\le 1$ вираз $|ax^2+bx+c|\le 1$. Доведіть, що тоді $|cx^2+bx+a|\le 2$.

247. (9-11). Функція *f(x)* неперервна і рівняння *f(f(x))=x* має розв'язок. Доведіть, що і рівняння *f(x)=x* також має розв'язок.

248. (9-10). Доведіть, що ax^2+bx+c при всіх цілих x набуває цілочислових значень тоді і тільки тоді, коли $2a$, $a+b$ та c є цілими числами.

249. (9-10). Доведіть, що якщо $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$, то $a+b+c=0$.

250. (9-10). Число *A* записано 2002-ма одиницями, число *B* – 1002-ма одиницями, а число *C* – 1001-єю шісткою. Доведіть, що *A+B+C+8* є точним квадратом.

251. (9-10). Доведіть, що рівність $1+\sqrt{3}=(a+b\sqrt{3})^2$ не може виконуватися при раціональних *a* та *b*.

252. (10-11). Чи існують такі натуральні *n*, які не є точними квадратами, що $1+\sqrt{n}=(a+b\sqrt{n})^2$ при раціональних *a* та *b* ?

253. (8-10). Про 25 чисел відомо, що сума будь-яких чотирьох із них додатна. Доведіть, що і сума всіх цих чисел додатна. Чи залишиться справедливим дане твердження, якщо додатними будуть лише суми кожних чотирьох записаних підряд чисел: а) у рядок, б) по колу ?

254. (9-11). $a_1^2+a_2^2+...+a_{2002}^2=1$. Доведіть, що $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{2001}a_{2002}+a_{2002}a_1\ge -1$. Коли досягається рівність?

255. (9-11). На параболі $y=x^2$ вибрали точки *A, B, C* з абсцисами *a, b, c* так, що $\angle ABC=90^0$. Доведіть, що *(a+b)(b+c)* = -1.

256. (9-11). Доведіть, що якщо $n\ne m^2$, то $\{\sqrt{n}\}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

257. (10-11). Чи для кожного натурального $k\ge 2$ вірне твердження: якщо $n\ne m^k$, то $\{\sqrt[k]{n}\}>\frac{1}{k\cdot n^{\frac{k-1}{k}}}$?

258. (9-10). Доведіть, що при жодному a рівняння $x(x^2-1)(x^2-2006)=a$ не може мати 5 цілих коренів.

259. (8-9). На шаховій дошці розташовані числа, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному всіх своїх сусідів. Доведіть, що всі числа рівні між собою.

260. (9-10). Доведіть, що: а) $2^{10}+5^{12}$ складене; б) n^4+64 - складене при кожному натуральному *n*.

261. (8-9). Доведіть, що $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2002}=\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+...+\frac{1}{2002}$.

262. (8-9). $0<a<b<c, abc=1, a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Доведіть, що $b=1$.

263. (8-10). Числа a,b,c є довжинами сторін трикутника. Доведіть, що при кожному $n \in N$ числа $\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}, \frac{1}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}, \frac{1}{\sqrt[n]{c}+\sqrt[n]{a}}$ також можуть бути довжинами сторін деякого трикутника. Чи вірне дане твердження для всіх цілих значень *n* ?

264. (8-10). $ab+cd=0, a^2+b^2=1, c^2+d^2=1.$ Доведіть, що $ac+bd=0.$

265. (9-10). Доведіть, що $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ для всіх $n \in N.$

266. (9-11). Доведіть, користуючись методом математичної індукції, що всі коефіцієнти многочлена, який при всіх раціональних значеннях аргумента набуває лише раціональних значень, є раціональними.

267. (9-11). Доведіть, що будь-які 10 двоцифрових чисел можна розбити на дві групи (не обов'язково по 5 чисел) так, що суми чисел в обох групах співпадатимуть.

268. (9-11). Коефіцієнти кожного з многочленів попарно взаємно прості. Доведіть, що і добуток многочленів має цю ж властивість.

269. (9-11). $x+y=z+t, x^2+y^2=z^2+t^2$. Доведіть, що $x^{100}+y^{100}=z^{100}+t^{100}.$

270. (9-11). Число *A* одержано перестановкою цифр числа *B*. Доведіть, що сума цифр числа *5A* дорівнює сумі цифр числа *5B*.

271. (10-11). Доведіть, що при кожному $n \in N$ число $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}$ не є цілим.

272. (10-11). Чи існують такі $n \in N$, що число $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}$ є цілим ?

273. (10-11). Чи існують такі натуральні числа m та n, що число $\sqrt{n+\sqrt{m}}+\sqrt{m+\sqrt{n}}$ також натуральне ?

274. (10-11). Доведіть, що якщо довжина відрізка *AB* є ірраціональним числом, *C* – середина цього відрізка, то для довільної точки X хоч одна з відстаней *AX, BX, CX* є ірраціональним числом.

275. (9-11). Доведіть, що число $\frac{170}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1}$ можна подати у вигляді суми кубічних коренів із цілих чисел.

276. (9-11). Доведіть, що якщо для дійсних чисел a,b,c виконується рівність $2a+3b+6c=0$, то кубічне рівняння $ax^3+bx+c=0$ має принаймні один корінь на інтервалі (0,1).

Рівняння та системи рівнянь.

277. (9-10). Розв'яжіть рівняння: $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}=0$.

278. (9-10). Розв'яжіть рівняння: а) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$; б) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

279. (9-10). Розв'яжіть рівняння: $(x^2-3x+6)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=5$.

280. (9-11). Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x+1}{x-4}=a\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$; б) $\frac{x}{x+a}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}$.

281. (9-11). Розв'яжіть рівняння $x!+y!+z!=t!$.

282. (9-11). Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0 .$$

283. (9-11). Розв'яжіть у цілих числах рівняння: а) $x^2+y^2=3z^2$, б) $x^4+y^4=5z^2$.

284. (9-11). Доведіть, що множина цілочислових розв'язків рівняння $x^3+y^3+z^3=2$ є нескінченною.

285. (9-11). Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівняння $x^3-3xy^2+y^3=n$, якщо: а) $n=1$, б) $n=3$, в) $n=17$.

286. (10-11). Розв'яжіть у натуральних числах рівняння: $x^x+y^y=2x+y$.

287. (10-11). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x!+y!=z! \\ x+y=z \end{cases}$

288. (9-10). Знайдіть трицифрове число, яке дорівнює сумі факторіалів своїх цифр.

289. (9-10). Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

а) $(3x+y)(x+y)=2003$, б) $x^2-xy+y^2=x+y+2003$.

290. (10-11).). Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R$, для яких при всіх дійсних x та y виконується рівність:

а) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$, б) $f^2(x)+f(x)f(y)=x^2+xy$.

291. (8-10). Розв'яжіть рівняння $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3$ у натуральних числах x,y,z.

292. (8-10). Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^3+x^2+x-3=0$.

293. (9-10). Прості числа p та q і натуральне число n задовольняють співвідношення $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=\frac{1}{n}$. Знайдіть ці числа.

294. (9-10). Розв'яжіть рівняння $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}=0$.

295. (9-11). Функція $f(n)$ визначена на множині натуральних чисел і задовольняє умови $f(f(n))+f(n)=\begin{cases} 2n-1, & \text{якщо } n-\text{парне} \\ 2n+1, & \text{якщо } n-\text{непарне} \end{cases}$ Знайдіть $f(2005)$ та $f(2006)$.

296. (9-11). Чи існує функція $f:N\to N$ така, що $f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$ для всіх натуральних $n\ge 2$?

297. (9-11). Знайдіть всі x, y, z, для яких:

а) $(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2$, б) $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

298. (9-11). Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ не має розв'язків у натуральних числах. Чи має воно розв'язки у цілих числах?

299. (10-11). Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a-b}$; б) $\sqrt[x]{9}+\sqrt[x]{6}=\sqrt[x]{4}$.

300. (10-11). Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівняння $2^n-1=x^m$, якщо m і n – задані натуральні числа.

301. (10-11). Розв'яжіть рівняння : $2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^2}$.

302. (10-11). Число 1 + $\sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0$. Знайдіть інші корені, якщо a та b раціональні.

303. (10-11). Розв'яжіть рівняння:

а) $2^x-3^x=\sqrt{6^x-9^x}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=1$.

304. (10-11). Розв'яжіть рівняння $\sin^n x+\cos^n x=\sin x+\cos x$.

305. (9-11). При яких a рівняння $\sqrt{x^2-\sqrt{x^2-a}}=a$ має два корені? Знайдіть ці корені.

306. (9-11). При яких a розв'язок нерівності $a^4+a(a^2-x)>x^2$ містить у собі відрізок $[-1;1]$?

307. (9-10). Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4+4x=1$, б) $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

308. (10-11). Скільки розв'язків у раціональних числах мають рівняння:

а) $x^2+y^2=1$, б) $x^2+x+1=y^2$?

309. (9-11). Розв'яжіть рівняння з параметром:

а) $\sqrt{x+1}=a-1$, б) $\sqrt{x^2+x}=a+x$.

310. (9-10). Розв'яжіть рівняння $ax^3=x^2+x+\frac{1}{3}$.

311. (8-10). Розв'яжіть рівняння $n^2-10n+21=p$, де n – натуральне, а p – просте число.

312. (8-10). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$.

313. (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ xy+yz+zx=27. \end{cases}$

314. (9-11). Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ y^2+yz+z^2=4 \\ z^2+zx+x^2=7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a \\ y^2+yz+z^2=b; \\ z^2+zx+x^2=c \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+xy+xz=48 \\ yx+y^2+yz=12 \\ zx+zy+z^2=84 \end{cases}$.

315. (9-11). Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=11 \\ x^3+y^3+z^3=27 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=15 \\ x^5+y^5+z^5=63 \end{cases}$.

316. (9-10). Двоє по черзі розставляють числа замість зірочок у такій системі рівнянь $\begin{cases} x+*y+*z=* \\ x+*y+*z=* \\ x+*y+*z=* \end{cases}$. Доведіть, що починаючий завжди може зробити систему несумісною.

317. (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь $\frac{xy}{x+y}=a$, $\frac{yz}{y+z}=b$, $\frac{zx}{z+x}=c$.

318. (9-10). Знайдіть усі цілочислові розв'язки системи $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$.

319. (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}1 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}3 \end{cases}$.

320. (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$.

321. (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь $x-\sqrt{y}=1$, $y-\sqrt{z}=1$, $z-\sqrt{x}=1$.

322. (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3 \\ x_2x_3x_4=x_2+x_3+x_4 \\ x_3x_4x_1=x_3+x_4+x_1 \\ x_4x_1x_2=x_4+x_1+x_2 \end{cases}$.

323. (9-11). Розв’яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^3+y^3+z^3=a^2 \\ x^5+y^5+z^5=a^3 \end{cases}$.

324. (8-10). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x_1(x_1+x_2+\cdots+x_n)=1, \\ x_2(x_1+x_2+\cdots+x_n)=3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=2n-1. \end{cases}$.

325. (9-10). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} a=bcd \\ a+b=cd \\ a+b+c=d \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$.

326. (10-11). Розв’яжіть систему рівнянь

$\begin{cases} tgx+\sin y+\sin z=3x \\ \sin x+tgy+\sin z=3y \\ \sin x+\sin y+tgz=3z \end{cases}$, де $0\le x<\frac{\pi}{2}$, $0\le y<\frac{\pi}{2}$, $0\le z<\frac{\pi}{2}$.

327. (10-11). Розв’яжіть системи рівнянь з параметрами:

а) $\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2 \\ y^2=b+(z-x)^2 \\ z^2=c+(x-y)^2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=a \\ y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=b \\ z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)=c \end{cases}$.

328. (9-11). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=12 \\ x+xy+y=0 \end{cases}$.

329. (9-11). Доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} (x+y)(x^3+y^3)=27 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ має 8 розв’язків і знайдіть ці розв’язки.

330. (10-11). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x}-\frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}}=a, \\ \sqrt{y}-\frac{c}{\sqrt{z}}+\frac{a}{\sqrt{x}}=b, \\ \sqrt{z}-\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}}=c. \end{cases}$

331. (10-11). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y+1=\frac{12(x+y)}{5\sqrt{x}}, \\ x+y-1=\frac{4(x+y)}{5\sqrt{y}}. \end{cases}$

332. (9-10). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2-yz=y-z, \\ y^2-zx=z-x, \\ z^2-xy=x-y. \end{cases}$

333. (9-10). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\frac{1}{n}. \end{cases}$

334. (10-11). Скільки розв’язків має система рівнянь: $\cos x_1=x_2, \cos x_2=x_3, \ldots \cos x_n=x_1$?

335. (10-11). Розв’яжіть системи рівнянь: а) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^x = y^y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{2x+y} = y^{2y+x}, \\ xy = 1. \end{cases}$

336. (9-10). Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1. \end{cases}$

337. (9-10). Знайдіть усі дійсні розв’язки системи $\begin{cases} a^2b + ab - b - 1 = 0, \\ a^2b + b^2 - a - 1 = 0. \end{cases}$

Нерівності

338. (9-10). Доведіть, що $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}$.

339. (8-10). Доведіть, що $5^{73} > 7^{53}$.

340. (8-10). Що більше: 31^{11} чи 17^{14} ?

341. (10-11). Порівняйте числа: π^e та e^π.

342. (8-10). Доведіть, що $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100} > \frac{1}{5}$.

343. (9-11). Доведіть, що при $x,y,z \ge 2$ виконується нерівність

$$(x^3+y)(y^3+z)(z^3+x) \ge 125xyz.$$

344. (9-10). *a, b, c, d* – додатні числа. Доведіть, що хоч одна з нерівностей $a+b<c+d$, $(a+b)cd<ab(c+d)$, $(a+b)(c+d)<ab+cd$ неправильна.

345. (9-10). Доведіть, що якщо $x+y+z \ge xyz$, то і $x^2+y^2+z^2 \ge xyz$.

346. (9-11). Доведіть, що якщо $x+y+z>1$, $x^2+y^2+z^2>\frac{1}{3}$, *то* $x^4+y^4+z^4>\frac{1}{27}$.

347. (9-11). Доведіть, що при всіх натуральних n виконується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

348. (9-11). Доведіть, що:

а) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$, б) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1$.

349. (9-10). Доведіть, що для додатних чисел a, b, c, d виконується нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

350. (9-10). Доведіть, що $\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\le 1$ для довільних дійсних x,y,z.

351. (9-10). Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівності:

а) $\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ca}+\frac{c^4}{ab} \ge a^2+b^2+c^2$; б) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$.

352. (9-11). Доведіть, що для довільних натуральних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та їх довільної перестановки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ виконується нерівність $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n} \ge \frac{n(n+1)}{2}$.

353. (9-10). Доведіть, що для додатних чисел a та b виконуються нерівності: а) $a+2\sqrt{b} \ge 3\sqrt[3]{ab}$, б) $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$.

354. (9-10). Доведіть, що нерівність $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \ge \sqrt{a^2+ac+c^2}$ справедлива для довільних дійсних чисел a, b, c.

355. (9-10). Доведіть, що $\frac{3}{5} < 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots < \frac{3}{4}$.

356. (9-10). a, b, c, d – додатні числа, причому $abcd=1$. Доведіть, що

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq 10.$$

357. (9-10). Доведіть, що при $a>1$, $b>1$ виконується нерівність $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8$.

358. (9-11). Доведіть, що $\frac{a}{b^2-1}+\frac{b}{c^2-1}+\frac{c}{a^2-1}\geq 2$, якщо $a>1$, $b>1$, $c>1$, $a+b+c=6$.

359. (9-11). Для додатних x, y, z доведіть нерівності:

а) $\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x}}>\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}}\geq\sqrt[12]{xyz}$.

360. (9-10). Доведіть, що якщо $abc=1$, то:

а) $\frac{1+ab}{1+b}+\frac{1+bc}{1+c}+\frac{1+ca}{1+a}\geq 3$,

б) $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq 1\leq\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}$.

361. (9-10). Доведіть з допомогою геометричних міркувань, що для $x, y, z\in(0\ ,\ 1)$ виконується нерівність $xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)<1$.

362. (10-11). Доведіть, що $\frac{x}{\sqrt{4y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, якщо $x, y\in[0,\frac{1}{2}]$.

363. (10-11). Доведіть нерівність $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$, для $x\geq 0$.

364. (10-11). Для $a,b\geq 0$ доведіть нерівність $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

365. (10-11). $x, y>0$. Доведіть, що $x^{\sin^2\alpha}y^{\cos^2\alpha}<x+y$ для будь-якого α .

366. (9-11). Знайдіть найменше значення виразу $P(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$.

367. (9-11). Доведіть, що якщо $|x|<1$ та $|y|<1$, то $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1$.

368. (9-11). Знайдіть найменше значення дробу $\frac{(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)}{abc}$ при додатних a,b,c.

369. (9-11). У вершинах n-кутника у довільному порядку виписані числа 1, 2, ..., n. Якого найбільшого та найменшого значень може набувати сума добутків чисел, записаних на кінцях спільної для них сторони?

370. (9-11). Доведіть при $n>1$, що $1^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^2<n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

371. (9-11). Доведіть, що середнє арифметичне всіх дільників натурального числа n, включаючи 1 та саме число n, знаходяться в межах між $\sqrt{n}$ та $\frac{1+n}{2}$.

372. (9-10). $a+b+c=1$, $0\leq a\leq b\leq c$. Знайдіть найбільше та найменше значення таких виразів: $2a+3b$, $2a+3c$, $2b+3c$.

373. (9-11). $a+b+c+d+e=1$, $0\leq a\leq b\leq c\leq d\leq e$. Знайдіть: а) найбільше значення суми $b+c+d$, б) найменше значення суми $a+e$.

374. (9-11). Доведіть, що при $x\geq\sqrt{2}$, $y\geq\sqrt{2}$ виконується нерівність $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\geq x^2+y^2$.

375. (8-10). Доведіть, що всі три нерівності $|x|<|y-z|$, $|y|<|z-x|$, $|z|<|x-y|$ одночасно виконуватися не можуть.

376. (9-10). Чи можуть одночасно виконуватися нерівності $\sqrt{3}\vec{a} < \left|\vec{b}-\vec{c}\right|$, $\sqrt{3}\vec{b} < \left|\vec{c}-\vec{a}\right|$, $\sqrt{3}\vec{c} < \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

377. (9-11). Доведіть, що $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}} < 2$ для всіх натуральних n.

378. (10-11). Якого найменшого значення може набувати сума $\frac{1}{1+a_1^2}+\frac{1}{1+a_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n^2}$, якщо всі $a_i \geq 0$ і $a_1+a_2+\cdots a_n = n$?

379. (10-11). Невід'ємні числа x_i такі , що для кожного натурального k сума $x_1+\cdots+x_k \geq 2k$. Доведіть, що $nx_1^2+(n-1)x_2^2+\cdots+2x_{n-1}^2+x_n^2 \geq 2n(n+1)$ для всіх натуральних n.

380. (9-11). Довести для всіх x_i з відрізка [0,1] виконується нерівність $2 \leq (1+x_1)...(1+x_n)+(1-x_1)\ ...\ (1-x_n) \leq 2^n$.

381. (9-11). Доведіть, що $\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2 \leq n\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)$.

382. (9-11). Доведіть нерівність

$$\sqrt{\left(a_1+b_1\right)^2+\cdots+\left(a_n+b_n\right)^2} \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\ .$$

383. (9-10). $a \geq 0$. Доведіть, що: а) $2a^3+2a^2+1 \geq a$, б) $a^4-a^2-3a+5 > 0$.

384. (9-10). Для $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ доведіть нерівності:

а) $2(a^3b+b^3c+c^3a) \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a-1)$,

б) $a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$,

в) $6a+4b+5c \geq 5\sqrt{ab}+3\sqrt{bc}+7\sqrt{ca}$.

385. (9-10). Доведіть, що $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

386. (9-10). Знайдіть найменше значення функції $y = 16x^2 - 10\sin^2 x + \frac{81\pi^4}{x^2}$.

387. (8-10). Знайдіть всі натуральні n, при яких є сумісною наступна система нерівностей: $1 < x < 2,\ 2 < x^2 < 3,\ \ldots,\ n < x^n < n+1$.

388. (9-10). Числа a та b додатні. Доведіть, що $\frac{a+ab}{b+ab}+\frac{b+ab}{a+ab} < \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$.

389. (9-11). Сума невід'ємних чисел $x_1+x_2+\ldots+x_n = n$. Доведіть, що $\frac{x_1}{1+x_1^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}$.

390. (9-11). Доведіть нерівність $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102} < \frac{1}{17}$.

391. (9-10). Доведіть, що при $xyz>0$ виконується нерівність $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z$.

392. (9-10). Доведіть, що $(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4} \geq (x^4+y^4+2)^{x^2y^2}$. Коли досягається рівність?

393. (9-10). Для невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність $x_1+x_2+\ldots+x_n \leq 0{,}5$. Доведіть, що $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geq 0{,}5$.

394. (9-10). Знайдіть найменше значення виразу $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ при умові, що $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 100$.

395. (9-10). Доведіть нерівність

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{2001}x_{2002}+x_{2002}x_1 \leq x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2002}^2.$$

396. (9-10). Знайдіть найменше значення виразу $\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab}$ при додатних a та b.

397. (9-10). Доведіть нерівність $a^4+b^4+c^4 \ge a^2bc+b^2ca+c^2ab.$

398. (10-11). Доведіть, що якщо $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < tg x$.

399. (9-11). Користуючись геометричними міркуваннями, доведіть нерівність $\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2} \le \frac{ab}{c}$ для $a>c>0, b>c>0.$

400. (9-10). Доведіть, що якщо $a+b+c=0,$ то $ab+bc+ca \le 0.$

401. (10-11). Користуючись узагальненою нерівністю Єнсена $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$ для функції $f(x)=x^m$, де $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,$ доведіть, що при $m>1$ для $x_i>0$ виконується нерівність $(x_1^2+\ldots+x_n^2)^m \le (x_1^{m+1}+\ldots+x_n^{m+1})(x_1+\ldots+x_n)^{m-1}.$

402. (10-11). Дослідіть, чи для всіх натуральних n виконується нерівність $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}<2.$

403. (10-11). Доведіть для додатних чисел a та b нерівність $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a} \ge \frac{1}{2}(a^2+b^2)+a+b-1.$

404. (10-11). Знайдіть найменше значення виразу $a^2+(a+b)^2+(a+b+c)^2$ для дійсних чисел $a,b,c,$ які задовольняють нерівність $|a+2b+3c| \ge 1.$

405. (10-11). Доведіть, що нерівність $\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x} \le \frac{5}{7}$ вірна для всіх $x \ge 1.$

406. (10-11). Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}.$

Прогресії , послідовності та елементи математичного аналізу

407. (9-11). Доведіть, що відмінні від нуля числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ $(n \ge 3)$ утворюють арифметичну прогресію тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$

408. (9-11). Числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ утворюють геометричну прогресію. Доведіть, що їх сума $S_n=a_1a_n\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$

409. (9-11). Діагоналі чотирикутника поділили його на чотири трикутники. Чи можуть площі цих трикутників утворювати арифметичну прогресію з різницею, відмінною від нуля?

410. (10-11). $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^{\ 2}}}{2}}$ для всіх $n \in N$. Скориставшись нерівністю $\sin x<x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, доведіть, що $a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{\pi}{2}.$

411. (9-11). Перший член арифметичної прогресії $a_1=1$, а різниця d – натуральне число. Доведіть, що така прогресія містить безліч квадратів натуральних чисел.

412. (10-11). Додатні числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що $\sqrt{a_1a_n} \le \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le \frac{a_1+a_n}{2}.$

413. (10-11). Числа $a_1,a_2,...a_n$ – додатні, а їх сума дорівнює S. Доведіть, що: а) $\frac{a_1}{S-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$, б) $\frac{S}{S-a_1}+\ldots+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}$.

414. (9-10). Числа a^2,b^2,c^2 утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.

415. (9-11). а) При яких $n\in N$ числа $n,\left[n\sqrt{2}\right],\left[\left[n\sqrt{2}\right]\sqrt{2}\right]$ утворюють арифметичну прогресію? б) Яку максимальну кількість елементів може мати арифметична прогресія у якої $a_1=n\in N$, $a_{k+1}=\left[a_k\cdot\sqrt{2}\right]$?

416. (10-11). Чи існує така строго зростаюча послідовність $\{a_n\}$: а) дійсних, б) цілих чисел, що $a_{nm}=a_n+a_m$ для всіх натуральних *m* та *n*?

417. (9-11). Додатні числа a_n утворюють геометричну прогресію. Доведіть, що $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geq\frac{2n}{a_1+a_n}$.

418. (10-11). Задано дві послідовності $x_n=\left[n\sqrt{2}\right]$ та $y_n=\left[n(2+\sqrt{2})\right]$. Доведіть, що кожне натуральне число є елементом рівно однієї з них.

419. (10-11). $a_1=1,a_{n+1}=(n+1)a_n+(-1)^{n+1}$. Доведіть, що $a_n\,\vdots\,(n-1)$ для всіх $n>1$.

420. (10-11). Дано числа $a_1,a_2,...a_n$. З них одержали набір $\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_2+a_3}{2},...,\frac{a_n+a_1}{2}$, з яким поступили аналогічно, і т.д. Доведіть, що якщо всі набори складалися лише з цілих чисел, то всі початкові числа рівні між собою.

421. (10-11). Доведіть, що будь-яка нескінченна арифметична прогресія, складена з натуральних чисел, містить нескінченну геометричну прогресію.

422. (10-11). Обчисліть границю послідовності $a_n=\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}\right\}$

423. (10-11). Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел, квадрати яких утворюють: а) геометричну, б) арифметичну прогресію.

424. (9-11). Чи можуть числа 7, 8, 9 бути членами (не обов'язково сусідніми) деякої геометричної прогресії?

425. (9-11). Чи можуть числа $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

426. (10-11). Доведіть, що існують 2002 послідовні натуральні числа, кожне з яких ділиться на сотий степінь принаймні одного простого числа.

427. (10-11). $a_{n+1}=arcsin a_n$ для всіх $n\in N$. Доведіть, що всі a_n = 0.

428. (10-11). Послідовність Фібоначчі утворюється таким чином: $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

Доведіть, що:

а) $a_n\,\vdots\,2\Leftrightarrow n\,\vdots\,3$, б) $a_n\,\vdots\,3\Leftrightarrow n\,\vdots\,4$, в) $a_n\,\vdots\,4\Leftrightarrow n\,\vdots\,6$,, г) $a_n\,\vdots\,5\Leftrightarrow n\,\vdots\,5$, д) $a_n\,\vdots\,7\Leftrightarrow n\,\vdots\,8$.

Знайдіть ще декілька закономірностей такого типу.

429. (10-11). Доведіть, що для $0<x<\frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\frac{1+cos\,x}{2}<\frac{sin\,x}{x}$.

430. (10-11). Обчисліть з допомогою похідної суму $S_n(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$.

431. (11). Доведіть, що $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ (інтегральна нерівність Коші-Буняковського).

432. (11). Доведіть, що для довільної неперервної монотонно зростаючої функції *f(x)* такої, що $f(0)=f^{-1}(0)$, де $f^{-1}(x)$ - обернена до неї функція, при додатних a та b виконується нерівність $ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$ (нерівність Юнга). При доведенні скористайтеся представленням інтеграла як площі деякої фігури.

433. (11). Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть: а) $\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$, б) $\int_1^3 \sqrt{4x-x^2-3}\,dx$.

434. (11). Доведіть, що для опуклої додатної на відрізку $[a,b]$ функції *f(x)* виконується нерівність $\frac{f(a)+f(b)}{2} > \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Як зміниться ця нерівність, якщо *f(x)* буде вгнутою на даному відрізку?

435. (11). Використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла та монотонність площ, доведіть нерівності:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$.

436. (10-11). Доведіть, що похідна парної функції є непарною функцією і навпаки.

437. (10-11). Доведіть з допомогою похідної, що $\frac{\sin x}{x}+x^2>1$, якщо $x \ne 0$.

438. (10-11). Порівняйте e^2 та 2^e.

ІІІ. Геометрія та тригонометрія.

Задачі на обчислення довжин

439. (8-9). Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 108°. Доведіть, що висота цього трикутника, проведена до основи, вдвічі менша за бісектрису, проведену до бічної сторони.

440. (8-9).Всередині трикутника є дві точки, віддалені від сторін трикутника відповідно на 1, 3, 15 та 4, 5, 11. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

441. (8-9).На гіпотенузі прямокутного трикутника з катетами a та b зовні нього побудовано квадрат. Обчисліть відстань від центра цього квадрата до вершини прямого кута трикутника.

442. (8-9).Всередині правильного шестикутника зі стороною 1 довільним чином вибрали точку *P*. Доведіть, що принаймні від трьох вершин цього шестикутника точка *P* віддалена не менше як на 1.

443. (8-9).Доведіть, що у будь-якому трикутнику *ABC* відстань *AH* від вершини *A* до точки перетину висот дорівнює подвоєній відстані від центра вписаного кола до сторони *BC*.

444. (8-9).У чотирикутнику *ABCD* $\angle A=60^\circ$, $\angle B=150^\circ$, $\angle D=90^\circ$, $AB=6\sqrt{3}$ *см*, $CD=12$ *см*. Знайдіть довжини сторін *BC* та *AD*.

445. (8-9).Коло, вписане в трикутник *ABC* ділить медіану *BM* на три рівні частини. Знайдіть відношення довжин сторін *AB:BC:CA* такого трикутника.

446. (9-10). Доведіть, що для бісектриси l_c трикутника зі сторонами a, b, c виконується рівність $l_c^2 = ab\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$.

447. (9-10). Три відрізки з довжинами 3см, 4см та 5см з'єднують внутрішню точку P правильного трикутника з його вершинами. Знайдіть довжину сторони цього трикутника.

448. (9-10). Дано рівносторонній трикутник *ABC* і точка *P*. Відомо, що $AP = 2$, $BP = 3$. Якого найбільшого та найменшого значень може набувати відстань *CP*?

449. (9-10). *A, B, C, D* – послідовні вершини правильного семикутника. Доведіть, що $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

450. (9-10). Доведіть, що бісектриси внутрішніх кутів трикутника точкою перетину діляться у відношеннях $(b+c) : a$, $(c+a) : b$, $(a+b) : c$, рахуючи від вершин трикутника.

451. (8-9).Точка *M* лежить на основі *BC* рівнобедреного трикутника *ABC*. Доведіть, що $BM \cdot MC = AC^2 - AM^2$.

452. (8-9).Менша основа трапеції дорівнює 24 см, кути при більшій основі – по 30°, а їх бісектриси перетинаються на меншій основі. Знайдіть периметр трапеції.

453. (8-9).Точки *A, B, C, D* є вершинами опуклого чотирикутника. 5 відстаней між ними дорівнюють 1, 1, $\sqrt{3}, \sqrt{3}$ та 3. Якою є шоста відстань?

454. (8-9).З вершини прямого кута трикутника *ABC* проведена висота *CH*. Знайдіть периметр трикутника *ABC* та радіус вписаного у нього кола, якщо для трикутників *ACH* та *BCH* ці величини відповідно дорівнюють p_1 та p_2, r_1 та r_2.

455. (9-10). У коло вписаний п'ятикутник *ABCDE*. Відстані від точки *E* до прямих *AB, BC, CD* відповідно дорівнюють *a, в, c.* Яка відстань від *E* до *AD*?

456. (9-10). Доведіть, що у правильному дванадцятикутнику існує діагональ, довжина якої дорівнює сумі довжин двох інших діагоналей, які виходять з тієї ж вершини. Чи може виконуватись аналогічна властивість для інших многокутників?

457. (9-10). Чи може довжина діагоналі правильного многокутника дорівнювати сумі довжин трьох інших діагоналей цього многокутника?

458. (9-11). У центрі озера круглої форми плаває Червона Шапочка. Навколо озера бігає Вовк. Чи зможе вона врятуватися, якщо плаватиме у 4 рази повільніше, ніж біжить Вовк, але бігтиме швидше від нього?

Задачі на обчислення кутів

459. (8-9).На продовженні найбільшої сторони *AC* трикутника *ABC* відклали відрізок *CM* =*BC*. Доведіть, що кут *ABM* тупий.

460. (8-9).З довільної точки *M* катета *BC* прямокутного трикутника *ABC* на гіпотенузу *AB* опущений перпендикуляр *MN*. Доведіть, що $\angle MAN = \angle MCN$.

461. (8-9).Бісектриса і медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть: а) гострі кути прямокутного трикутника; б) кути утвореного трикутника.

462. (9-10). У трикутнику *ABC* $\angle B = 60^\circ$. Бісектриси *AD* та *CE* перетинаються в точці *P*. Доведіть, що $PD = PE$.

463. (9-10). Всередині правильного трикутника *ABC* взяли точку *M* так, що $\angle AMB = 115^\circ$, $\angle BMC = 125^\circ$. Знайдіть кути трикутника зі сторонами *AM, BM, CM.*

464. (8-9). У трикутнику дві висоти не менші сторін, на які вони опущені. Знайдіть кути такого трикутника.

465. (8-9). Дано прямокутний трикутник *ABC, CD* – медіана, проведена до гіпотенузи, *K* – точка дотику *AD* до кола, вписаного у трикутник *ACD*. Знайдіть кути трикутника *ABC*, якщо *AK* = *KD*.

466. (8-9).У трикутнику $\angle C = 45^\circ$. Точка *M* на стороні *BC* така, що *CM:MB* = 1:2, $\angle AMB = 60^\circ$. Знайдіть $\angle A$ і $\angle B$.

467. (9-10). а) Всередині рівнобедреного трикутника *ABC (AB = BC)* з кутом 80° при вершині *B* взяли точку *M* так, що $\angle MAC = 10^\circ$, $\angle MCA = 30^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$. б) Доведіть, що якщо в умові п. а) точка *M* знаходиться зовні трикутника *ABC*, то трикутник *ABM* рівносторонній.

468. (8-9). Всередині прямокутника ABCD взяли точку M так, що $\angle BMC + \angle AMD = 180^\circ$. Обчислити $\angle BMC + \angle DAM$.

469. (8-9). Сторони трикутника задовольняють рівність $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$. Доведіть, що один з кутів цього трикутника дорівнює 60°. Чи вірне обернене твердження?

470. (8-9). Послідовно виконали поворот квадрата навколо його центра на $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \ldots$ Після якого найменшого числа таких поворотів квадрат відобразиться сам на себе?

471. (8-9). З якого найменшого числа прямокутних трикутників можна утворити трапецію?

472. (8-9). У трикутнику АВС $a^2 = в\,(в + с)$. Доведіть, що $\angle A = 2\angle B$. Чи вірне обернене твердження?

473. (8-9). У трикутнику *ABC* провели бісектрису *AK*. Відомо, що центри кіл, вписаного у трикутник *ABK* та описаного навколо трикутника *ABC*, співпадають. Знайдіть величини кутів трикутника *ABC*.

474. (9-10). Вершини опуклого семикутника з'єднані через одну. Знайдіть суму кутів у вершинах одержаної семикутної зірки.

475. (8-9). Висоти трикутника *ABC* перетинаються у точці *H*. Відомо, що *HC* = *AB*. Знайдіть величину кута *C*.

476. (8-9). Точка *D* лежить на стороні *BC* гострокутного трикутника *ABC* і є відмінною від його вершин. Чи можуть всі трикутники *ABC, ABD, ADC* одночасно бути рівнобедреними?

477. (9-11). У трикутнику *ABC* *AB = BC*, $\angle ABC = 100^0$. На стороні *AC* взяли точки *K* та *P* такі, що $\angle KBA = \angle PBC = 30^0$. Бісектриса кута *CAB* перетинає відрізок *BK* у точці *H*. Знайдіть величину кута *KHP* у градусах.

Вписане та описане коло

478. (9-10). Діагоналі вписаного шестикутника *ABCDEF* перетинаються в одній точці. Доведіть, що $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

479. (9-10). У дане коло впишіть трикутник, подібний заданому (задача із "Начал" Евкліда).

480. (9-10). Доведіть, що відстань *d* між центрами описаного навколо трикутника і вписаного у цей трикутник кіл виражається формулою Ейлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, де *R* та *r* – радіуси таких кіл.

481. (9-10). У дугу *ABC* на колі вписали ламану, що складається з хорд *AB* та *BC*, причому *AB* > *BC*. Доведіть, що перпендикуляр *MK*, опущений із середини *M* дуги *AC* на *AB*, ділить ламану *ABC* на дві рівні частини: *AK* = *KB*+*BC* (теорема Архімеда).

482. (9-10). Чотирикутник *ABCD* вписали в коло. *AC* – бісектриса кута *DAB*. Доведіть, що $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

483. (9-10). Доведіть, що якщо бісектриси кутів опуклого чотирикутника при перетині утворюють чотирикутник, то в нього можна вписати коло.

484. (9-10). У прямокутному трикутнику *ABC* проведено перпендикуляр *CH* до гіпотенузи *AB*. Доведіть, що сума радіусів кіл, вписаних у трикутники *ABC, CAH, CBH* дорівнює *CH*.

485. (9-10). Всередині трикутника *ABC* взяли точку *P* так, що $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$, $\angle APC = \angle B + 60^\circ$, $\angle APB = \angle C + 60^\circ$. Прямі *AP, BP, CP* перетинають описане навколо трикутника *ABC* коло у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що трикутник $A_1B_1C_1$ правильний.

486. (9-10). На дузі *BC* кола, описаного навколо трикутника *ABC* взяли довільну точку *P*. Відрізки *AP* і *BC* перетинаються у точці *Q*. Доведіть, що $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

487. (8-9). Дотична в точці *A* до кола, описаного навколо трикутника *ABC*, перетинає пряму *BC* у точці *E, AD* – бісектриса трикутника *ABC*. Доведіть, що *AE = ED*.

488. (8-9). Доведіть, що якщо у шестикутника протилежні сторони паралельні, а діагоналі, які з’єднують протилежні вершини, рівні, то навколо нього можна описати коло.

489. (8-9). В опуклому чотирикутнику *ABCD* *AB + CD = BC + AD*. Доведіть, що кола, вписані у трикутники *ABC* та *ACD* дотикаються.

490. (8-9). У трикутнику *ABC* сторона $BC = \frac{AB + AC}{2}$. Доведіть, що: а) бісектриса кута *BAC* перпендикулярна до відрізка, який з’єднує центри вписаного та описаного кіл; б) середина сторін *AB* і *AC* центри вписаного та описаного кіл лежать на одному колі.

491. (8-9). Чотирикутник *ABCD* вписаний в коло з центром *O*. Діагоналі *AC* і *BD* перпендикулярні. Доведіть, що перпендикуляр *OH*, опущений на *AD*, вдвічі менший за *BC*.

492. (9-10). Чи існує п’ятикутник зі сторонами 3, 4, 9, 11, 13, у який можна вписати коло?

493. (9-10). Чи можна вписати в коло опуклий семикутник з кутами $\angle A_1 = 140^\circ$, $\angle A_2 = 120^\circ$, $\angle A_3 = 130^\circ$, $\angle A_4 = 120^\circ$, $\angle A_5 = 130^\circ$, $\angle A_6 = 110^\circ$, $\angle A_7 = 150^\circ$.

494. (9-10). У трикутнику *ABC* кут *C* тупий. На стороні *AB* відзначили точки *E* та *H*, а на сторонах *AC* та *BC* – точки *K* та *M* відповідно. Виявилося, що *AH = AC, EB = BC, AE = AK, BH = BM*. Доведіть, що точки *E, H, K, M* лежать на одному колі.

495. (9-10). На катеті *AC* як на діаметрі побудоване коло, яке перетинає гіпотенузу *AB* у точці *E*. Через *E* проведена дотична до кола, яка перетинає катет *BC* у точці *D*. Доведіть, що трикутник *BDE* рівнобедрений.

496. (9-10). Хорди *AC* і *BD* (чи їх продовження) перетинаються в точці *M*. Доведіть, що $AC \cdot AM + BD \cdot BM = AB^2$.

497. (9-10). Два кола перетинаються в точках *B* та *E*. Пряма l перетинає ці кола відповідно у точках *A, M* та *C, D*. Доведіть, що $\angle FDC = \angle DEM$.

498. (9-10). Шестикутник *ABCDEF* вписаний у коло, *AB*|| *DE*, *BC*|| *EF*. Доведіть, що *CD*|| *FA*.

499. (8-9). Дано різносторонній трикутник *ABC*. У нього вписали коло. Точки дотику цього кола до сторін трикутника *ABC* - вершини нового трикутника. У нього знову вписали коло і т. д. Доведіть, що серед побудованих трикутників немає двох подібних.

500. (8-9). Доведіть, що якщо у рівнобічної трапеції діагоналі перпендикулярні, то в неї не можна вписати коло. Чи вірно це для нерівнобічної трапеції?

501. (9-10). Точка *M* лежить на основі *AC* рівнобедреного трикутника *ABC*. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників *ABM* та *BCM*, рівні.

502. (9-10). Доведіть, що:

а) $\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}$; б) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, де r, r_a, r_b, r_c - відповідно радіуси вписаного та зовні вписаних кіл у трикутник зі сторонами a, b, c та півпериметром p.

503. (9-11). Доведіть для сторін, півпериметра та радіусів вписаного у трикутник та описаного навколо нього кіл рівності:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2Rr}$; б) $abc=4prR.$

504. (9-11). I – центр вписаного у трикутник ABC кола. Доведіть, що $\frac{IA^2}{вс}+\frac{IB^2}{са}+\frac{IC^2}{ав}=1.$

Задачі на доведення

505. (9-10). У гострокутному трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 є основами висот, $\angle B = 60^o$. На променях B_1A_1 та B_1C_1 поза трикутником ABC взяли точки M та N відповідно такі , що $MA_1 = A_1C_\perp = C_1 N$. Доведіть, що точки M, B, N лежать на одній прямій.

506. (9-10). Два кола перетинаються в точках A та B. C – діаметрально протилежна до A на першому колі, E – на другому. Доведіть, що точки B, C, E лежать на одній прямій.

507. (8-9). У трикутнику ABC проведені висоти AA_1, BB_1, CC_1 та медіани AA_2, BB_2, CC_2 .Доведіть, що довжина ламаної $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ дорівнює периметру трикутника ABC.

508. (9-10). На стороні AB трикутника ABC взяли точку K так, що відрізок CK перетинає бісектрису BF у точці Q, причому $\angle BQC=2\angle BFA$, $\angle BAF=2\angle CQF$. Доведіть, що $KF=FC$.

509. (9-10). Доведіть, що відрізки, які з'єднують вершини трикутника з точками дотику зовнішніх кіл до протилежних сторін трикутника, перетинаються в одній точці (точка Нагеля).

510. (8-9). Доведіть, що прямі, які з'єднують середини сторін трикутника з серединами відповідних висот, перетинаються в одній точці.

511. (9-10). 4 прямі при перетині утворюють 4 трикутники. Доведіть, що кола, описані навколо цих трикутників, мають спільну точку (точка Мікеля).

512. (9-10). Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. Довести, що: а) трикутники ABC, HBC, AHC, ABH мають спільне коло дев'яти точок; б) прямі Ейлера для цих точок перетинаються в одній точці. Що це за точка?

513. (9-10). Доведіть, що замкнену ламану з довжиною 4 можна помістити в круг радіуса 1.

514. (9-10). Правильний 2005–кутник розбили на трикутники діагоналями, які не перетинаються між собою. Доведіть, що рівно один із одержаних трикутників є гострокутним.

515. (8-9). Доведіть, що якщо $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$, то $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

516. (8-9). Доведіть, що якщо $OA=OB=OC$ та $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, то трикутник ABC – рівносторонній.

517. (9-10). Через точку A перетину двох кіл проведені діаметри цих кіл AC та AD. Доведіть, що пряма CD проходить через другу точку перетину даних кіл.

518. (8-9). Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, проходить через точку перетину діагоналей цієї трапеції.

519. (8-9). На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взяли точку M, відмінну від C. Доведіть, що $MA+MB > CA+CB$.

520. (9-10). Всередині рівностороннього трикутника ABC взяли точку M так, що $\angle AMB=150^o$. Доведіть, що $AM^2+BM^2=CM^2$.

521. (8-9). Довжини катетів і гіпотенуз двох подібних прямокутних трикутників відповідно дорівнюють a_1, b_1, c_1 та a_2, b_2, c_2. Доведіть, що $a_1a_2+b_1b_2 = c_1c_2$.

522. (9-10). Дано правильний n-кутник $A_1A_2...A_n$. Доведіть, що:

а) при n=9 $A_1A_5 - A_1A_3 = A_1A_2$;

б) при n=18 $A_1A_9 - A_1A_5 = A_1A_3$;

в) при n=7 $\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_5}=\frac{1}{A_1A_7}$.

523. (8-9). У прямокутному трикутнику ABC проведена висота CD до гіпотенузи AB. Доведіть, що медіани AM та CN трикутників ADC та DBC перпендикулярні.

524. (9-10). У трикутник ABC вписане півколо так, що діаметр лежить на стороні BC, а дуга дотикається AB та AC відповідно у точках C_1 та B_1. Доведіть, що прямі BB_1 та CC_1 перетинаються на висоті AA_1 цього трикутника.

525. (8-9). Доведіть, що бісектриси кутів, які прилягають до бічної сторони трапеції, перетинаються на середній лінії цієї трапеції.

526. (9-10). Шестикутник $ABCDEF$ вписаний в коло, причому $AB=CD=EF$. Доведіть, що середини відрізків BC, DE, FA є вершинами рівностороннього трикутника.

527. (9-10). Доведіть, що відрізок, який з’єднує середини протилежних сторін опуклого 4-кутника, ділить його діагоналі в однакових відношеннях.

528. (9-11). На стороні AB трикутника ABC дано точку D. Використовуючи теорему косинусів, доведіть теорему Стюарда: $AC^2{\cdot}BD + BC^2{\cdot}AD - CD^2{\cdot}AB = AB{\cdot}BD{\cdot}AD$.

529. (8-9). Із п’яти даних кіл будь-які 4 проходять через одну точку. Доведіть, що є точка, через яку проходять усі 5 кіл.

530. (9-10). В опуклому шестикутнику $ABCDEF$ усі кути рівні. Доведіть, що $AB-DE=EF-BC=CD-FA$.

531. (9-10). Синій та жовтий однакові за розмірами квадрати при перетині утворили восьмикутник. Доведіть, що сума довжин його синіх сторін дорівнює сумі довжин його жовтих сторін.

532. (8-9). Доведіть, що різносторонній трикутник не можна розрізати на два рівні трикутники.

533. (8-9). На площині є 5 точок, жодні 3 з них не лежать на одній прямій. Доведіть, що з них можна вибрати 4 точки, які є вершинами опуклого чотирикутника.

534. (8-9). Доведіть, що на площині не існує таких чотирьох точок $A, B, C, D,$ що всі трикутники ABC, BCD, CDA та DAB є гострокутними.

535. (8-9). Дано п’ятикутник $ABCDE$, у якому $AB=BC=CD=DE$, $\angle B=\angle D=90^\circ$. Доведіть, що можна зробити паркет із таких п’ятикутників, який покриває усю площину.

536. (8-9). Доведіть, що для довільного чотирикутника можна побудувати трапецію (або паралелограм) із такими ж довжинами сторін.

537. (9-10). Всередині рівностороннього трикутника ABC взяли точку O, відмінну від M - точки перетину медіан. Пряма OM перетинає сторони трикутника чи їх продовження у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що $\frac{A_1O}{A_1M}+\frac{B_1O}{B_1M}+\frac{C_1O}{C_1M}=3$.

538. (8-9). Дано довільний трикутник ABC і пряма l, яка перетинає його. Доведіть, що якщо відстань до l від вершини A дорівнює сумі відстаней до l від вершини B та C, то пряма l проходить через точку перетину медіан трикутника ABC.

539. (8-9). У рівнобічній трапеції *ABCD* точка *M* – середина бічної сторони *AB*, а точка *N* – середина більшої основи *AD*. Відрізки *BN* та *DM* перетинаються у точці *P*. Пряма *PC* перетинає основу *AD* у точці *K*. Доведіть, що $BK \perp AD$.

540. (8-9). *ABCD* –опуклий чотирикутник, *O* – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що якщо периметри трикутників *ABO, BCO, CDO* та *DAO* рівні, то *ABCD* – ромб.

541. (9-10). У коло вписаний опуклий семикутник, 3 кути якого дорівнюють 120^o. Доведіть, що в ньому є 2 сторони однакової довжини.

542. (9-10). Два правильні п’ятикутники мають спільну вершину $A_1 = A_1'$. Інші вершини занумеровані за годинниковою стрілкою. Доведіть, що всі прямі A_iA_i', i=2, 3, 4, 5, перетинаються в одній точці.

543. (9-10). Дано квадрат *ABCD* і точка *M* всередині. З вершин *A, B, C, D* опущено перпендикуляри на *MB, MC, MD, MA* відповідно. Доведіть, що прямі, на яких лежать ці перпендикуляри, перетинаються в одній точці.

544. (9-10). Доведіть, що коли опуклий 4-кутник має вісь симетрії, то в нього можна вписати або навколо нього описати коло.

545. (8-9). На суміжних сторонах *AB* та *BC* паралелограма *ABCD* зовні нього побудували рівносторонні трикутники *ABE* та *BCF*. Доведіть, що трикутник *DEF* рівносторонній.

546. (9-10). У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 20^o, основа – a, бічна сторона – b. Доведіть, що $a^3+b^3=3a\,b^2$.

547. (8-9). На сторонах паралелограма *ABCD* зовні нього побудовані рівносторонні трикутники *ABM, BCN, CDP, ADQ*. Доведіть, що *MNPQ* – паралелограм.

548. (8-9). На сторонах паралелограма зовні нього побудовані квадрати. Доведіть, що їх центри теж є вершинами квадрата.

549. (8-9). Дано правильний трикутник *ABC*. На продовженні *CE* сторони *AC* побудовано правильний трикутник *CDE* у тій же півплощині відносно *CE*, що й *ABC*. *M* - середина *AD, N* – середина *EB*. Доведіть, що трикутник *CMN* правильний.

550. (8-9). На площині проведено 3 прямі, які проходять через спільну точку і утворюють попарно кути 60^o. Доведіть, що відстань від довільної точки площини до найбільш віддаленої від неї прямої дорівнює сумі відстаней до двох інших прямих.

551. (9-10). У трикутнику висоти та радіус вписаного кола задовольняють рівність $h_a+h_b+h_c=9r$. Доведіть, що такий трикутник правильний.

552. (9-10). У трикутнику радіус описаного кола дорівнює 2, а всі довжини висот цілі числа. Доведіть, що такий трикутник правильний.

553. (9-10). Для висот, сторін, площі трикутника та радіусів описаного та вписаного кіл доведіть рівності:

а) $Rh_ah_bh_c = 2S$, б) $2R(h_a+h_b+h_c)=ab+bc+ca$, в) $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$.

554. (8-9). *ABCD* – паралелограм. Зовні нього побудували квадрати *ABHE* та *BCKM*. Доведіть, що $ED \perp DK$.

555. (9-10). Сума кутів при стороні *AD* опуклого чотирикутника *ABCD* дорівнює 90^0. Доведіть, що $BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$.

556. (8-9). Доведіть, що у прямокутному трикутнику $\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

557. (8-9). Доведіть, що трикутник *ABC* можна розрізати на будь-яке число $n>5$ подібних йому трикутників. Як виконати таке розрізання на 6, 7 та 8 трикутників?

558. (9-10). *a, b, c* – сторони, m_a, m_b, m_c - медіани деякого трикутника. Доведіть, що існує трикутник зі сторонами $a+m_a, b+m_b, c+m_c$.

559. (9-10). У трикутнику *ABC* точка *H* є ортоцентром, *AH* = *x*, *BH* = *y*, *CH* = *z*, *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c*. Доведіть, що *ayz* + *bzx* + *cxy* = *abc*.

560. (8-9). У трикутнику *ABC* проведено медіани *AD* і *CE*, причому $\angle BAD = \angle BCE = 30^0$. Доведіть, що трикутник *ABC* рівносторонній.

561. (9-10). Вершини правильного трикутника знаходяться на сторонах *AB, CD, EF* правильного шестикутника. Доведіть, що центри цих фігур співпадають.

562. (8-9). Доведіть або спростуйте наступні "ознаки" рівності трикутників за двома сторонами і: а) медіаною, б) висотою, в) бісектрисою, проведеною до третьої сторони.

563. (8-9). Доведіть, що *n* прямих загального положення розбивають площину на $\frac{n(n+1)}{2}+1$ частин.

564. (8-9). На прямій задано декілька відрізків, кожні два з яких мають спільну точку. Доведіть, що всі вони мають спільну точку.

565. (8-9). Доведіть, що якщо у трикутнику середини висот лежать на одній прямій, то такий трикутник прямокутний.

566. (8-9). Доведіть, що будь-які 10 точок можна з'єднати попарно п'ятьма відрізками, жодні два з яких не перетинаються.

567. (8-9). На сторонах довільного трикутника як на основах зовні від нього побудовані рівносторонні трикутники. Доведіть, що їх центри є вершинами правильного трикутника.

568. (9-10). На сторонах *BC* та *CD* квадрата *ABCD* вибрали точки *M* та *K* так, що $\angle BAM = \angle MAK$. Доведіть, що *BM* + *KD* = *AK*.

569. (8-9). З вершини *C* гострокутного трикутника *ABC* проведена висота *CH*. Із точки *H* опущені перпендикуляри *HM* та *HK* на сторони *BC* та *AC* відповідно. Доведіть, що трикутники *MKC* та *ABC* подібні.

570. (9-10). Із довільної точки *M* всередині кута з вершиною *A* опущені перпендикуляри *MP* та *MQ* на сторони кута, а з точки *A* опущено перпендикуляр *AK* на *PQ*. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

571. (9-10). У трикутник вписано коло радіуса *r* . Дотичні до цього кола, паралельні сторонам трикутника, відтинають від нього три трикутники з радіусами вписаних кіл r_1, r_2, r_3. Доведіть, що $r_1+r_2+r_3=r$.

572. (9-10). Через центр квадрата провели пряму. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин квадрата до цієї прямої не залежить від її напряму.

573. (8-10). Доведіть, що довільний опуклий *2n*-кутник, усі сторони якого мають однакову довжину, а протилежні сторони паралельні, можна розрізати на ромби.

574. (9-11). На площині 400 точок. Доведіть, що різних відстаней між ними не менше 15.

Площа

575. (9-10). Побудуйте правильний трикутник, площа якого дорівнює площі заданого трикутника.

576. (9-10). Точка *M* лежить всередині трикутника *ABC*. Доведіть, що площі трикутників *ABM* та *BCM* рівні тоді і тільки тоді, коли *M* лежить на медіані *BK*.

577. (9-10). *H* – точка перетину висот трикутника *ABC*. Доведіть, що *a* ·*AH* + *b* ·*BH* + *c* ·*CH* = *4S*, де *S* – площа трикутника *ABC*.

578. (9-10). Доведіть, що довільний опуклий многокутник можна розрізати двома взаємо перпендикулярними прямими на 4 фігури однакової площі.

579. (9-10). Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника з довжинами сторін *a, b, c*.

580. (9-10). AA_1, BB_1, CC_1 - бісектриси трикутника *ABC*. Доведіть, що відношення площ трикутників $A_1B_1C_1$ та *ABC* дорівнює $2abc : (a+b)(b+c)(c+a)$.

581. (9-10). Гострокутний трикутник вписаний в коло. Побудуйте вписаний у це ж коло шестикутник із вдвічі більшою площею.

582. (9-10). Доведіть, що $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, де h_a ,h_b ,h_c – довжини висот, *r* – радіус кола, вписаного в трикутник *ABC*.

583. (9-10). Всередині паралелограма *ABCD* довільним чином вибрили точку *X*. Доведіть, що $S_{\Delta ABX} + S_{\Delta CDX} = S_{\Delta BCX} + S_{\Delta ADX}$.

584. (9-10). Точки *M, N, K, L* – середини сторін *AB, BC, CD, DA* опуклого чотирикутника *ABCD*. Відрізки *KM* та *NL* перетинаються в точці *O*. Доведіть, що $S_{AMOL} + S_{CKON} = S_{BNOM} + S_{DLOK}$.

585. (9-10). У трикутнику дві медіани перпендикулярні і дорівнюють 2 та 3 см. Знайдіть площу цього трикутника.

586. (9-10). У коло радіуса 1 вписано 2 трикутники з площами, більшими за 1. Доведіть, що вони перетинаються.

587. (9-10). Із паперового трикутника вирізали паралелограм. Доведіть, що його площа не перевищує половини площі трикутника.

588. (9-10). Доведіть, що для сторін і площі довільного трикутника виконуються нерівності: а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$; б) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

589. . (9-10). Площа трикутника *ABC* дорівнює 1. Доведіть, що якщо $a \leq b \leq c$, то $b \geq \sqrt{2}$.

590. (9-10). Діагоналі опуклого чотирикутника при перетині утворюють 4 трикутники. Яку: а) найменшу; б) найбільшу площу може мати цей чотирикутник, якщо площі двох зі цих трикутників дорівнюють 1 см^2 та 4 см^2?

591. (9-10). Доведіть, що якщо:

а) довжини всіх сторін трикутника менші за 1, то його площа менша за $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

б) довжини всіх бісектрис трикутника менші за 1, то його площа менша за $\frac{1}{\sqrt{3}}$

592. (9-10). Який висновок можна зробити про площу трикутника, якщо: а) довжини всіх його медіан менші за 1; б) довжини всіх його висот менші за 1?

593. (9-10). Всередині трикутника *ABC* взяли точку *M*. Доведіть, що $S_{\Delta BMC} \cdot \vec{MA} + S_{\Delta CMA} \cdot \vec{MB} + S_{\Delta AMB} \cdot \vec{MC} = \vec{0}$.

594. (9-10). Доведіть, що зі всіх трикутників однакової площі зі спільною основою *AB* найменший периметр має рівнобедрений трикутник.

595. (9-10). Продовження бісектрис внутрішніх кутів трикутника *ABC* перетинає описане навколо нього коло у точках M, N, L. Доведіть, що площа трикутника *MNL* дорівнює добутку радіуса цього кола на периметр трикутника *ABC*.

596. (9-10). Образом квадрата $ABCD$ при повороті на кут α навколо його центра є квадрат $A_1B_1C_1D_1$. При якому α площа спільної частини цих квадратів є найменшою?

597. (10-11). Дано еліпс з довжинами осей $2a$ та $2b$ ($a>b$). Намалюйте замкнену криву, довжина якої дорівнює довжині еліпса, але площа обмеженої нею фігури на $(a-b)^2$ більша, ніж площа еліпса.

598. (9-10). а) Доведіть, що пряма, яка проходить через центр вписаного у трикутник кола поділяє площу і периметр цього трикутника в однакових відношеннях. б) Проведіть пряму, яка ділить площу і периметр трикутника ABC пополам.

599. (9-10). Коло проходить через вершину A квадрата $ABCD$ і дотикається до двох його сторін BC та CD. З якою точністю у відсотках площа квадрата $ABCD$ наближає площу круга, обмеженого цим колом?

600. (9-10). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка M - середина сторони CD. Точки K та L ділять сторону AB на 3 рівні частини. Доведіть, що $S_{KLM}=\frac{1}{2}(S_{AKD}+S_{LBC})$.

601. (9-10). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки K і L, M і N ділять відповідно сторони AB та CD на три рівні частини. Доведіть, що $S_{ABCD}=3S_{KNML}$.

602. (9-10). Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Відомо, що площа трикутника ABD дорівнює S. Знайдіть площу трикутника BCD, якщо $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

603. (9-10). a, b, c, d - довжини послідовних сторін чотирикутника. Доведіть, що $(a+c)(b+d)\geq 4S$, де S - площа цього чотирикутника.

604. (9-10). Використовуючи лише властивість рівності площ рівних фігур, знайдіть відношення площі правильного шестикутника, описаного навколо кола, до площі правильного шестикутника, вписаного у це ж коло.

605. (9-10). У прямокутнику з площею 5 розташовано 9 прямокутників площі 1. Доведіть, що знайдуться два прямокутники, площа перетину яких не менша $\frac{1}{9}$.

606. (9-10). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки K та M є відповідно серединами сторін AB та CD. Відрізки AM і DK перетинаються в точці Q, а BM і CK - в точці P. Доведіть, що площа чотирикутника $MQKP$ дорівнює сумі площ трикутників BPC та AQD.

607. (9-10). Всередині трикутника ABC знайдіть таку точку M, щоб площі трикутників ABM, BCM, CAM відносились як $1:2:3$.

608. (9-11). Обчисліть площу трикутника, довжини сторін якого є коренями рівняння $x^3-mx^2+nx-k=0$, де m, n, k - натуральні числа. Чи завжди існує трикутник з такими довжинами сторін?

609. (9-10). Доведіть, що площа правильного дванадцятикутника $A_1A_2..A_{12}$ дорівнює $A_1A_5^{\ 2}$.

610. (9-10). Доведіть, скориставшись властивостями площі, що у довільному трикутнику

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

611. (9-10). Кожна діагональ опуклого чотирикутника ділить його площу навпіл. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом.

612. (9-10). В опуклому шестикутнику $ABCDEF$ протилежні сторони попарно паралельні. Доведіть, що площі трикутників ACE та BDF рівні.

613. (9-10). У трикутнику ABC з площею S проведено медіану BD, а через її середину і вершину A – пряму l. Визначте площі чотирьох фігур, які при цьому утворилися.

614. (9-10). Доведіть, що якщо площа трикутника $S=\frac{1}{4}\left(c^2-a^2-b^2\right)$, то $\angle C=135°$.

615. (9-10). Дослідіть, чи існує трикутник з висотами $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

616. (9-10). Знайдіть площу прямокутного трикутника за відомими довжинами: а) висоти і медіани, б) медіани і бісектриси, в) бісектриси і висоти, проведеними з вершини прямого кута.

617. (9-10). Чи існує трикутник, у якого довжини двох сторін 1 і 4, а деяких двох висот – 3 і 4?

618. (9-10). У коло вписана трапеція, основа якої лежить на діаметрі, і рівнобедрений трикутник зі сторонами, паралельними сторонам трапеції. Доведіть, що площі трапеції та трикутника рівні.

619. (9-10). Площа трикутника $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Знайдіть кути цього трикутника.

620. (9-10). Доведіть, що не існує рівнобічної трапеції, яка ділиться діагоналлю на частини із відношенням периметрів 1:2 та площ 1:3.

621. (9-10). Діагоналі опуклого чотирикутника мають однакову довжину. Доведіть, що його площа дорівнює добутку середніх ліній.

622. (9-10). Знайдіть криву найменшої довжини, яка з'єднує дві точки на сторонах правильного трикутника і ділить його площу пополам.

623. (9-10). На одній стороні кута з вершиною *O* відклали відрізки *OA* = *AB* = *BC*, а на іншій – *OD* = *DE* = *EF*. Доведіть, що площі трикутників *AEC* та *DBF* рівні.

624. (9-10). На сторонах *AD* і *CD* паралелограма *ABCD* взяли точки *M* та *K* відповідно так, що $MK \,||\, AC$. Доведіть, що площі трикутників *ABM* та *CBK* рівні.

625. (9-10). Точка *M* всередині описаного *n*-кутника з'єднана відрізками з усіма його вершинами і точками дотику до вписаного у нього кола. Утворені при цьому трикутники почергово замальовані у червоний та синій кольори. Доведіть, що добуток площ червоних трикутників дорівнює добутку площ синіх трикутників.

626. (9-10). Всередині трикутника *ABC* з площею *S* взяли точку *M*. Доведіть, що $AM\cdot BC+BM\cdot AC+CM\cdot AB\geq 4S$. Коли досягається рівність?

627. (9-10). Доведіть, що будь-який гострокутний трикутник з площею 1 можна помістити у прямокутний трикутник з площею $\sqrt{3}$.

628. (9-10). Знайдіть величину кута *A* трикутника *ABC* з площею *S=(a-в+c)(a+в-c)*.

629. (9-10). Продовження бісектрис трикутника *ABC* перетинають описане коло в точках A_1,B_1,C_1. Доведіть, що відношення площ $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta A_1B_1C_1}=2r:R$, де r та R – відповідно радіуси вписаного та описаного кіл для трикутника *ABC*.

630. (9-10). Доведіть, що площа *S* довільного трикутника задовольняє нерівність $3\sqrt{3}r^2\leq S\leq p^2/3\sqrt{3}$, де p – півпериметр, а r – радіус вписаного кола.

631. (9-10). Доведіть, що площу трикутника можна обчислити за формулою $S=\frac{abc}{4R}$, де *a, b, c* – сторони, *R* – радіус описаного кола.

632. (9-10). Доведіть, що площа трикутника $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$, де r,r_a,r_b,r_c - відповідно радіуси вписаного та зовні вписаних кіл.

Геометричні нерівності

633. (9-10). Доведіть, що для довжин сторін довільного трикутника виконуються нерівності:
а) $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)<abc$,
б) $a(b-c)^2+ b(c-a)^2+ c(a-b)^2+ 4abc > a^3+b^3+c^3$.
634. (9-10). Доведіть, що якщо з відрізків з довжинами a, b, c можна скласти трикутник, то і з відрізків з довжинами $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ трикутник також можна утворити.
635. (9-10). Доведіть, що в опуклому п'ятикутнику знайдуться три діагоналі, з яких можна скласти трикутник.
636. (9-10). Доведіть, що для сторін трикутника і радіуса описаного навколо нього кола виконуються нерівності:
а) $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$, б) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{R^2}$.
637. (8-9). Доведіть, що довільної точки M всередині трикутника ABC виконується нерівність $p<AM+BM+CM<2p$, де p – півпериметр цього трикутника.
638. (9-10). Доведіть, що $l_a\le\sqrt{p(p-a)}$, де p – півпериметр трикутника ABC, l_a – довжина його бісектриси проведеної з вершини A.
639. (8-9). Доведіть, що якщо в чотирикутнику $ABCD$ кути A та C тупі, то $AC<BD$.
640. (8-9). Всередині опуклого 4-кутника знайдіть точку, для якої сума квадратів відстаней від його вершини є найменшою.
641. (8-9). 4 точки на площині визначають кінці шістьох відрізків. Доведіть, що відношення довжин найбільшого та найменшого з цих відрізків не менше $\sqrt{2}$.
642. (8-9). Доведіть, що у будь-якому опуклому п'ятикутнику є три діагоналі, з яких можна скласти трикутник.
643. (9-10). Доведіть, що для будь-якого трикутника ABC виконуються нерівності $12r^2\le\frac{4S\sqrt{3}}{3}\le\frac{ab+bc+ca}{3}\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\le\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\le 3R^2$, причому рівності досягаються тоді і тільки тоді, коли цей трикутник рівносторонній.
644. (9-10). Доведіть, що для довільної точки M на стороні AB трикутника ABC виконується нерівність $CM\cdot AB\le AM\cdot BC+BM\cdot AC$.
645. (8-9). Який найбільший: а) круг можна покрити трьома кругами радіуса R; б) квадрат - трьома квадратами зі стороною a.
646. (9-10). a, b, c – довжини сторін, A, B, C – величини відповідних їм кутів трикутника ABC. Доведіть, що $A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)\le\ \le 2(Aa+Bb+Cc)$.
647. (8-9). Знайдіть найбільше і найменше значення n, для якого можна розташувати на площині n точок так, що кожні 3 з них є вершинами прямокутного трикутника.
648. (9-10). Точка M всередині правильного опуклого шестикутника зі стороною 1, з'єднана з його вершинами. Доведіть, що з шести утворених трикутників принаймні 2 мають усі сторони не менші 1.
649. (8-9). Скільки сторін може бути в опуклого многокутника, всі діагоналі якого мають однакову довжину?
650. (9-10). Дано опуклий п'ятикутник з п'ятьма тупими кутами. Доведіть. що круги, побудовані на сторонах як на діаметрах, покривають цей 5-кутник.
651. (9-10). Доведіть, що в довільному трикутнику $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le 1+\frac{R}{r}$.

652. (9-10). У трикутнику ABC $a < \frac{b+c}{c}$. Доведіть, що $\angle A < \frac{\angle B + \angle C}{2}$. Чи правильне обернене твердження?

653. (8-9). Через дану вершину трикутника проведіть пряму так, щоб сума відстаней до неї від двох інших вершин була: а) найбільша; б) найменша.

654. (9-10). Квадрат і трикутник мають однакові площі. У якої з цих фігур периметр більший?

655. (9-10). Доведіть, що площа трикутника не перевищує $\frac{1}{2}(a^2 - ab + b^2)$.

656. (9-10). Два рівні прямокутники мають спільну діагональ. Доведіть, що площа їх спільної частини більша за половину площі кожного з прямокутників.

657. (9-10). При якому найбільшому k для сторін і площі трикутника виконується нерівність: а) $ab + bc + ca \geq kS$, в) $a^2 + b^2 + c^2 \geq kS$?

658. (9-10). Доведіть, що периметр шестикутника $ABCDEF$ більший за $\frac{2}{3}(AD + BE + CF)$.

659. (8-9). Доведіть, що всередині трикутника ABC найменшу суму відстаней до вершин та середин сторін має точка перетину медіан цього трикутника.

660. (9-10). a та b – довжини двох протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола з діаметром d. Доведіть, що $ab \geq d^2$.

661. (9-10). Точки A, B, C лежать на колі, а точка D – всередині кола. Відомо, що периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює довжині кола. Доведіть, що D не є центром цього кола.

662. (9-10). Доведіть, що для сторін довільного трикутника виконується нерівність $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| < 1$.

663. (9-10). Для сторін, півпериметра та радіуса вписаного у трикутник кола доведіть нерівність $\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$.

664. (9-10). Бісектриса кута A перетинає описане навколо трикутника ABC коло у точці E. Доведіть, що $AB + AC \leq 2 \cdot AE$.

665. (9-10). Доведіть, що якщо трикутник ABC лежить всередині трикутника MPK, то радіус вписаного у нього кола менший від радіуса кола, вписаного у MPK.

Тригонометрія

666. (10-11). Доведіть тотожності:

а) $tg3\alpha \cdot ctg\alpha = ctg(30^\circ - \alpha) \cdot ctg(30^\circ + \alpha)$,

б) $4sin\alpha \cdot sin(60^\circ - \alpha) \cdot sin(60^\circ + \alpha) = sin3\alpha$,

в) $4cos\alpha \cdot cos(60^\circ - \alpha) \cdot sin(60^\circ - \alpha) = cos3\alpha$,

г) $tg3\alpha - tg2\alpha - tg\alpha = tg3\alpha \cdot tg2\alpha \cdot tg\alpha$.

667. (10-11). Доведіть, що $cos36^\circ > tg36^\circ$.

668. (10-11). Доведіть, що:

а) $cos\frac{\pi}{7} - cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$, б) $cos\frac{2\pi}{1001} + cos\frac{4\pi}{1001} + \ldots + cos\frac{2002\pi}{1001} = 0$

669. (10-11). Скористайтеся тригонометричними підстановками для доведення нерівності $\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le \frac{1}{2}$.

670. (10-11). Замінюючи числа a_i на $tg\alpha_i$, i = 1, 2, ...13, доведіть, що серед будь-яких тринадцяти чисел можна вибрати два такі числа *x* та *y*, що $0 \le \frac{x-y}{1+xy} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

671. (10-11). Знайдіть найменше додатне значення суми α+β, якщо $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)=2$.

672. (10-11). Доведіть, що $cos\,5^\circ + cos\,77^\circ + cos\,149^\circ + cos\,221^\circ + cos\,293^\circ = 0$. Як можна геометрично інтерпретувати цю рівність?

673. (10-11). Обчисліть без таблиць і обчислювальних засобів:

а) $cos\,6^\circ \cdot cos\,42^\circ \cdot cos\,66^\circ \cdot cos\,78^\circ$, б) $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7}$,

в) $cos\frac{\pi}{15} \cdot cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{3\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{5\pi}{15} \cdot cos\frac{6\pi}{15} \cdot cos\frac{7\pi}{15}$

674. (10-11). Виконайте обчислення, не користуючись таблицями чи калькулятором:

а) $tg^2 10^\circ + tg^2 30^\circ + tg^2 50^\circ + tg^2 70^\circ$,

б) $ctg^2 10^\circ + ctg^2 30^\circ + ctg^2 50^\circ + ctg^2 70^\circ$.

675. (10-11). Доведіть, що $arctg\frac{1}{1+n+n^2} = arctg(n+1) - arctgn$ для всіх натуральних чисел *n*.

676. (10-11). Виразіть *sin5x* через *sinx* і знайдіть на основі одержаної формули $\sin 36^0$.

677. (10-11). При яких цілих *a, b, c* виконуються рівності:

а) $\frac{a}{sin 30^\circ} + \frac{b}{cos\,30^0} + \frac{c}{tg 60^0} = 4$, б) $sin\frac{180^0}{a} + cos\frac{120^0}{b} + tg\frac{90^0}{c} = 2$?

678. (10-11). Доведіть, що $sin\alpha + sin2\alpha + \ldots + sin n\alpha = \frac{sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\,sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$.

679. (10-11). Обчисліть:

а) $cos\,\alpha + cos\,2\alpha + \ldots + cos\,n\alpha$, б) $sin\alpha + sin(\alpha+\beta) + \ldots + sin(\alpha + n\beta)$.

680. (10-11). Доведіть, що принаймні одне з чисел $sin\alpha\,cos\,\beta, sin\beta\,cos\,\gamma, sin\gamma\,cos\,\alpha$ не більше за 0,5.

681. (10-11). Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $arctg\frac{2}{m} + arctg\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$.

682. (10-11). Знайдіть натуральне число *n*, якщо:

а) $arctg\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{n}$, б) $arctg(\sqrt{2}+1) = \frac{\pi}{2n}$.

683. (10-11). Доведіть, що $tgx \cdot tg2x + tg2x \cdot tg3x + \ldots + tg(n-1)x \cdot tgnx = \frac{tgnx}{tgx} - n$.

684. (10-11). Виразивши $tg3\alpha$ через $tg\alpha$, доведіть, що числа $tg^2 20^0, tg^2 40^0, tg^2 80^0$ є коренями рівняння $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

685. (10-11). Що можна сказати про трикутник *ABC*, якщо $sinC = 2cos\,A \cdot sinB$?

686. (10-11). У трикутнику *ABC* кут *C* тупий. Доведіть, що $sinA \cdot sinB < cos\,A \cdot cos\,B$.

687. (10-11). Для кутів трикутника *ABC* виконується рівність $\frac{sinA + sinB + sinC}{cos\,A + cos\,B + cos\,C} = \sqrt{3}$. Доведіть, що хоч один з кутів дорівнює 60^0.

688. (10-11). Доведіть, що якщо трикутник ABC не є прямокутним, то $tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC.$

689. (9-10). $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ - синуси кутів трикутника. Доведіть, що із відрізків з такими довжинами також можна утворити трикутник.

690. (9-10). Доведіть, що кути, сторони та площа трикутника ABC зв'язані співвідношенням $a^2+b^2+c^2=4S(ctgA+ctgB+ctgC).$

691. (9-10). Доведіть, що у довільному трикутнику ABC $\dfrac{a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C}{a+b+c}=\dfrac{r}{R}.$

692. (9-10). Медіани AA_1 та BB_1 трикутника ABC перпендикулярні. Доведіть, що $ctgA+ctgB\geq\dfrac{2}{3}.$

693. (9-10). $ABCD$ – опуклий чотирикутник. Доведіть, що $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{AB\cdot CB+AD\cdot CD}{AB\cdot AD+CB\cdot CD}.$

694. (9-11). Доведіть, що для кутів трикутника ABC виконуються рівності: а) $\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{R+r}{R}$, б) $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{p}{R}$, в) $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{pr}{2R^2}.$

695. (9-11). Доведіть, що для гострокутного трикутника ABC виконуються рівності: а) $tgA+tgB+tgC=\dfrac{p}{r}$, б) $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\dfrac{r}{4R}.$

696. (9-11). Доведіть, що в попередніх двох задачах рівності збережуться, якщо всюди замінити вирази вигляду $\sin x$ та $\cos x$ відповідно на $\cos\dfrac{x}{2}$ та $\sin\dfrac{x}{2}.$

697. (9-11). Для кутів трикутника ABC доведіть нерівність $\cos A\cdot\cos B+\cos B\cdot\cos C+\cos C\cdot\cos A\leq\dfrac{3}{4}\leq\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C.$

Задачі на побудову та геометричне місце точок

698. (9-10). Побудуйте трикутник за двома кутами та сумою радіусів описаного і вписаного кіл.

699. (9-10). Побудувати трикутник за кутом A, висотою h_a та периметром.

700. (9-10). Задані точка A, пряма l і коло ω. Побудувати правильний трикутник ABC, у якого $B\in l$, $C\in\omega$.

701. (9-10). Дано два кола і точка A. Побудувати відрізок з кінцями на цих колах, який ділиться точкою A пополам. Чи завжди така задача має розв'язок?

702. (8-10). Побудувати траєкторію руху більярдної кулі, яка, відбившись від усіх чотирьох стінок стола, повернеться у своє початкове положення.

703. (9-10). Основи двох рівнобедрених трикутників лежать на одній прямій l. Проведіть пряму, паралельну l, на якій бічними сторонами цих трикутників відтинаються два відрізки однакової довжини.

704. (9-10). Побудуйте на стороні BC трикутника ABC точку P так, щоб пряма, яка з'єднує основи перпендикулярів, опущених із P на AB та AC, була паралельною до BC.

705. (9-10). Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через задану точку всередині цього кута.

706. (9-10). Є два концентричні кола. Проведіть пряму, на якій ці кола відтинають три рівні відрізки.

707. (9-10). ABC - гострокутний трикутник. Побудуйте на сторонах AB та BC такі точки X та Y, щоб: а) $AX = XY = YC$, б) $BX = XY = YC$.

708. (8-10). Побудуйте відрізки $\sqrt{ab}, \frac{ab}{c}, \sqrt{a^2+b^2}, \sqrt[4]{a^4+b^4}$ за відомими відрізками a, b, c.

709. (9-10). Дано відрізок та його середина. Користуючись лише лінійкою, поділіть його на 3 рівні частини.

710. (9-10). Користуючись лише лінійкою, проведіть дотичну до намальованого кола, яка проходить через задану точку: а) на колі; б) поза колом. Центр кола не вказаний.

711. (9-10). На малюнку дано коло і його центр. Користуючись лише лінійкою: а) поділіть заданий кут пополам; б) намалюйте кут, втричі більший від заданого.

712. (9-10). Побудуйте квадрат, три вершини якого лежать на трьох заданих паралельних прямих.

713. (9-10). Точки A та B знаходяться з одного боку від прямої l. Знайдіть на l таку точку M, що $AM + BM = a$, де a - задане число.

714. (9-10). Дано точки A, B, C. Через A проведіть пряму l так, щоб сума відстаней від B та C до l дорівнювала наперед заданому числу a.

715. (9-10). Побудуйте трикутник за точками, симетричними точці перетину висот: а) відносно сторін цього трикутника; б) відносно середин його сторін.

716. (9-10). Побудуйте прямокутний рівнобедрений трикутник з наперед заданим периметром.

717. (9-10). Побудуйте трикутник, якщо відома пряма, на якій лежить його основа і основи висот, проведених до бічних сторін.

718. (9-10). Побудуйте трапецію: а) за її сторонами, б) за її основами та діагоналями.

719. (9-10). Побудуйте квадрат за сумою сторони та діагоналі.

720. (9-10). Побудуйте відрізок $\sqrt[4]{abcd}$ за відрізками a, b, c, d.

721. (8-10). Дано кут CAB, вершина A якого недоступна, і точку M всередині кута. Проведіть через M відрізок прямої, яка проходить через A.

722. (9-10). Дано коло і дві точки всередині нього. Впишіть у коло прямокутний трикутник, катети якого проходять через ці точки.

723. (9-10). Впишіть у трикутник ABC такий трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого були б:
а) перпендикулярні до сторін трикутника ABC;
б) паралельні бісектрисам трикутника ABC.

724. (9-10). Побудуйте трапецію за бічними сторонами, меншою основою та відстанню між серединами основ.

725. (9-10). Дано кут і точка M поза ним. Побудуйте пряму, яка проходить через M і відтинає від кута трикутник заданого периметра.

726. (9-10). Побудуйте трикутник за відомими кутами та периметром.

727. (10-11). На площині намальована парабола. Циркулем та лінійкою побудуйте: а) її вісь симетрії; б) дотичну у довільній точці цієї параболи.

728. (9-10). На площині задана точка P і дві паралельні прямі. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна вершина якого співпадає з точкою P, а дві інші лежать відповідно на цих прямих.

729. (9-10). Дано коло діаметра d і точка M поза ним. Проведіть через M пряму, яка при перетині з колом утворює хорду наперед заданої довжини $a < d$.

730. (9-10). Побудуйте всередині трикутника *ABC* таку точку *M*, щоб площі трикутників *ABM, BCM, CAM* відносились як 1:2:3.

731. (9-10). Побудуйте трикутник за його: а) медіанами; б) висотами. Чи можна виконати таку побудову за бісектрисами трикутника?

732. (10-11). Побудуйте коло, яке дотикається до заданого кола і проходить через дві дані поза ним точки *A* та *B*.

733. (10-11). Користуючись лише циркулем, поділіть дугу *AB* даного кола з центром *O* пополам.

734. (9-11). Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин трикутника *ABC* є сталою.

735. (9-11). Дано рівносторонній трикутник *ABC*. Знайдіть геометричне місце точок *M*, для яких $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

736. (8-10). Зобразіть на площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність $min\{max\{|x|,|y|\},|x|+|y|-1\} \le 2.$

737. (10-11). Запропонуйте способи побудови дотичних до параболи, гіперболи та еліпса, якщо відомі фокуси цих кривих.

738. (10-11). Всередині еліпса, фокуси якого F_1, F_2, дано точку *P*. Знайдіть на еліпсі таку точку *M*, щоб довжина ламаної F_2MP була найменшою.

739. (9-10). Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан всіх гострокутних трикутників, вписаних у дане коло.

740. (9-10). *A* та *B* – фіксовані точки на колі, а точка *C* рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину: а) висот; б) медіан; в)бісектрис трикутників *ABC*.

741. (9-10). Дано квадрат *ABCD*. Знайдіть геометричне місце точок *M* таких, що $\angle AMB = \angle CMD$.

742. (9-10). Трикутник *ABC* рівносторонній. Знайдіть геометричне місце точок *M* таких, що трикутники *AMB* та *BCM* рівнобедрені.

Стереометрія

743. (10-11). Доведіть, що у будь-якого опуклого многогранника є дві грані з однаковим числом сторін.

744. (10-11). Доведіть, що куб $6\times6\times6$ не можна скласти із 54-ьох прямокутних паралелепіпедів $1\times1\times4$. Яка максимальна кількість таких паралелепіпедів може повністю вміститися у цьому кубі?

745. (10-11). Який найбільший радіус може мати круг, поміщений у кубі з ребром a?

746. (10-11). Доведіть, що не існує тетраедра, в якому кожне ребро є стороною тупого плоского кута.

747. (10-11). Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Жук почав повзти по поверхні піраміди з точки A - перетину бічного ребра з основою піраміди. Побувавши на всіх бокових гранях, він повернувся в точку A. Яка довжина найкоротшого шляху його руху?

748. (10-11). В основі правильної n- кутної піраміди довільним чином вибрали точку M. Доведіть, що сума відстаней від неї до бічних граней піраміди не залежить від вибору цієї точки.

749. (10-11). Розріжте куб на 3 однакові чотирикутні піраміди.

750. (10-11). Всередині правильного тетраедра розміщені 4 однакові сфери так, що кожна з них дотикається трьох інших та трьох граней тетраедра. Знайдіть радіуси цих сфер, якщо довжина ребра тетраедра дорівнює a.

751. (10-11). Всі сторони просторового чотирикутника дотикаються кулі. Доведіть, що всі точки дотику лежать в одній площині.

752. (10-11). Площина перетинає координатні осі у точках, віддалених від початку координат, відповідно на a, b та c. Знайдіть відстань від цієї площини до початку координат.

753. (10-11). На ребрах AB, AC та AD тетраедра $ABCD$ як на діаметрах побудовані сфери. Доведіть, що вони повністю покривають цей тетраедр.

754. (9-10). Доведіть, що із 120 см дроту, не розрізаючи його на частини, не можна зробити каркас куба з ребром 10 см.

755. (10-11). На поверхні куба знайдіть точки, з яких діагональ куба видно під найменшим кутом. Яка величина цього кута?

756. (9-10). Чи можна з квадрата 3×3 вирізати фігуру, яка є розгорткою куба зі стороною 1?

757. (10-11). Чи може квадрат зі стороною a бути розгорткою деякої піраміди? Якщо так, то знайдіть її об’єм.

758. (10-11). Знайдіть всі значення n, для яких існує многогранник, що має n граней.

759. (10-11). Чи існує многогранник, який не є кубом, але всі його грані є однаковими квадратами?

760. (11). Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша від діагоналей його граней відповідно на 1 см, 2 см та 10 см. Знайти його об’єм.

761. (11). Довжина діагоналей прямокутного паралелепіпеда дорівнює d. Який найбільший об’єм може він мати.

762. (10-11). Доведіть, що при перетині куба площиною не може утворитися правильний п’ятикутник. Які правильні многокутники утворитися можуть?

763. (11). Кути куба зрізали так, що одержали многогранник, у якого 6 граней – квадрати, а 8 – правильні трикутники. Знайдіть відношення:
а) площ, б) об’ємів одержаного многогранника та початкового куба.

764. (11). У кулю вписано рівносторонній циліндр та рівносторонній конус. Доведіть, що як об’єми, так і площі поверхонь конуса, циліндра та кулі утворюють геометричну прогресію. Чи залишиться справедливим дане твердження, якщо рівносторонній конус та рівносторонній циліндр описати навколо кулі?

765. (11). Висоти тетраедра дорівнюють h_1, h_2, h_3 та h_4, а відстані від внутрішньої точки M до відповідних граней - d_1, d_2, d_3 та d_4. Доведіть, що $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}=1$.

766. (11). В тетраедр вписана куля радіуса r. Дотичні до неї площини, паралельні граням цього тетраедра, відтинають від нього чотири менші тетраедри. Чому дорівнює сума радіусів куль, вписаних у них?

767. (11). Дві піраміди мають спільну основу – квадрат зі стороною a, і однакові довжини висот – h. Знайдіть об’єм спільної частини цих пірамід, якщо основи цих висот: а) діагонально протилежні вершини квадрата; б) сусідні вершини квадрата; в) середини протилежних сторін квадрата; г) середини суміжних сторін квадрата.

768. (11). Вісім точок лежать на поверхні куба з ребром 1. Відстань між будь-якими двома з них не менша 1. Доведіть, що всі точки знаходяться у вершинах куба.

769. (11). Мимобіжні ребра тетраедра попарно рівні. Доведіть, що вписана в нього і описана навколо нього сфери мають спільний центр.

770. (11). Через точку M всередині сфери радіуса R на відстані a від її центра проведено три взаємно перпендикулярні хорди. Знайдіть суму квадратів довжин цих хорд.

771. (11). Побудуйте тетраедр, висоти якого не перетинаються в одній точці.

772. (11). Доведіть, що для довільного тетраедра $ABCD$ виконується рівність $\vec{AB}\cdot\vec{CD}+\vec{AC}\cdot\vec{DB}+\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$.

773. (11). У тетраедрі $ABCD$ всі плоскі кути при вершині A дорівнюють $60°$. Доведіть, що $AB+AC+AD\le BC+CD+DB$.

774. (11). Чи можна всередині правильного тетраедра з ребром 1 розмістити: а) 5 точок, б) 4 точки так, щоб усі попарні відстані між ними були не меншими за 1.

775. (11). Доведіть, що площа будь-якої грані тетраедра не більша від суми площ решти його трьох граней.

776. (11). Яку найбільшу площу проекції на площину може мати тетраедр з ребром a?

777. (11). Побудуйте тетраедр: а) у якого всі грані тупокутні трикутники, б) у якого всі основи висот лежать поза відповідними гранями.

778. (11). Побудуйте шестикутну піраміду, в якої три грані перпендикулярні до площини основи.

779. (11). Вершина E тетраедра $ABCE$ знаходиться всередині тетраедра $ABCD$. Чи обов'язково сума довжин ребер зовнішнього тетраедра більша за суму довжин ребер внутрішнього.

780. (11). Доведіть, що куб не можна розрізати менше, ніж на 5 тетраедрів.

781. (11). Доведіть, що площини, які обмежують опуклий многогранник, розбивають простір на $1+B+\Gamma+P$ частин, де B – кількість вершин, Γ – кількість граней, P – кількість ребер цього многогранника.

782. (11). Чотири кулі попарно дотикаються одна одної у шістьох різних точках. Доведіть, що всі ці точки лежать на одній сфері.

783. (11). Дано довільний тетраедр. Доведіть, що 6 його ребер можна розбити на дві трійки так, що з кожної можна буде утворити по трикутнику.

784. (11). Скільки різних площин можна побудувати так, щоб кожна з них проходила принаймні через три вершини заданого куба?

785. (11). Середини п'яти сторін просторового шестикутника лежать в одній площині. Доведіть, що цій же площині належить і середина шостої сторони.

786. (11). Чи можуть середини всіх висот трикутної піраміди лежати в одній площині?

787. (11). Плоскі кути при вершині піраміди – прямі. Доведіть, що сума квадратів площ бічних граней дорівнює квадрату площі її основи.

788. (11). Чи можуть всі грані піраміди бути прямокутними трикутниками?

789. (11). Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні і мають довжини, a, b c. Доведіть, що для висоти H виконується рівність $\frac{1}{H^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

790. (11). Доведіть, що якщо суми квадратів мимобіжних ребер трикутної піраміди рівні, то її висоти перетинаються в одній точці. Чи вірне обернене твердження ?

791. (11). Доведіть, що якщо дві висоти тетраедра перетинаються в одній точці, то дві інші теж перетинаються в одній точці.

792. (11). Доведіть, що об'єм тетраедра: а) не перевищує $\frac{1}{6}$ добутку довжин трьох ребер, які виходять з однієї вершини; б) менший за $\frac{1}{6}$ квадратного кореня з добутку довжин всіх його ребер.

793. (11). Дослідіть, який найбільший об'єм може мати конус, твірна якого дорівнює l .

794. (11). Планета у формі кулі оточена двадцять п'ятьма точковими астероїдами. Доведіть, що у будь-який момент часу на планеті знайдеться точка, з якої видно не більше 11 астероїдів.

795. (11). Доведіть, що площина, яка проходить через середини двох мимобіжних ребер тетраедра , ділить його об'єм пополам.

796. (11). У просторі задано 4 точки *A, B, C, D* так, що $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^0$. Доведіть, що *ABCD* – прямокутник.

797. (11). Задано 6 відрізків таких, що з будь-яких трьох із них можна скласти трикутник. Чи обов'язково з цих відрізків вдасться скласти тетраедр?

798. (11). Чи можна розбити весь простір на попарно неперетинні тетраедри?

799. (11). На скільки частин можуть розділити простір: а) 3; б) 4 площини?

800. (11). У сферу радіуса *R* вписано 2 куби. Знайдіть суму квадратів довжин усіх відрізків, які з'єднують вершини одного куба з вершинами іншого.

Відповіді та вказівки до розв'язування вправ

§1.

1.а). Ні. **б).** Так. На кожному кроці кількість отриманих точок буде непарною. **2.** Ні. Ліва і права частини виразу мають різні парності. **3.** Після зведення до найменшого спільного знаменника чисельник одержаного дробу виявиться непарним числом. **4.** Врахуйте, що загальна кількість учасників всіх рукостискань є парною. **5.** Справді, адже його сторони не можна згрупувати у пари попарно паралельних сторін. **6. а).** Ні. **б).** Так. Кількість вузлів, у яких сходиться непарне число відрізків, не має перевищувати двох. **7.** Ні. Врахуйте, що після вилучення без пари залишаються 6 плиток. **8.** Ні. Кожна плитка покриває поля двох різних кольорів, а обидві вирізані клітинки є чорними. **9.** Ні. Припустивши протилежне, порахуйте суму всіх чисел таблиці двома способами. **10. а).** Так. Заповніть самостійно. **б).** Ні. Порахуйте суму всіх чисел таблиці двома способами. **11.** Знайдіть знак добутку всіх чисел таблиці двома способами. **12.** Якщо третя справа цифра суми є непарною, то відповідно друга і четверта чи перша і п'ята цифри справа матимуть різні парності. **13.**При парних n. **14. а).** 1. **б).** 0. В кожній серії із чотирьох стрибків перші два дають непарну, а останні два – парну відстань від початкової точки. **15.** При жодному n, оскільки дане число є непарним при кожному натуральному n.

§2.

1.Ні. Принаймні одна з цифр повинна бути парною. **2.** Не існує. Доведіть це методом від протилежного. **3.** $p=3$. Доведіть, що принаймні одне з цих чисел ділиться на 3. **4.** $n=3$. Скористайтеся рівністю $n^2+8n+9 =(n+3)(n+5)-6$. **5.** Помножте чисельник дробу на 2, а знаменник – на 3. **6.** Доведіть, що n^3-n ділиться на3 при всіх цілих значеннях n. **7.** Проаналізуйте остачі кожного з доданків від ділення на 7. **8.** Доведіть, що четверті степені кожного з чисел при діленні на 5 дають остачу 1. **9.** Дослідіть остачі від ділення кубів чисел $3n$, $3n+1$, $3n+2$ на 9. **10.** Обґрунтуйте, що $p=3$. **11.** Покладіть $z=1$ і розкладіть одержаний вираз на два множники. **12.** Проаналізуйте числа вигляду: **а)** $8n+7$**;** **б)** $9n+5$. **13. а).** 5^n+1 не ділиться на 4; **б).** $\kappa=2$, $n=1$. **14.** Скористайтеся рівністю $\overline{abcdef} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$ і перевірте, що 999 ділиться на 37. **15. а).** Доведіть спочатку, що як чисел 1, так і чисел -1 є парна кількість. **б).** Ні. Наприклад, $n=8$, $x_1=x_2=x_5=x_6=1$, $x_3=x_4=x_7=x_8=-1$.

§3.

1.7! Зверніть увагу на те, що остачі від ділення кожного з чисел на 9 однакові, а 7! Ділиться на 9. **2. а).** 17496. Скористайтеся правилом множення. **б).** 12504. Відніміть результат пункту а) від кількості всіх п'ятицифрових чисел, кратних трьом. **3.** 5625. Обчисліть за правилом множення. **4.** 105. Перемножте три числа для комбінацій. **5.** 22. Відніміть від кількості всіх можливих виборів трьох книг ті, в яких відповідно 3 чи 2 книги стоять поруч. **6.** Врахуйте, що множник p_κ може входити до дільника числа A у степенях від 0 до α_κ включно, і скористайтеся правилом множення. **7. а).** 60. **б).** 24. **8.** а). 2016. б). 157426. **9.** Розгляньте окремо випадки вибору з перших двох груп відповідно жодного, одного, двох, трьох та чотирьох гребців і додайте одержані результати. **10.** Тих многокутників, які мають вершину A, на C_{n-1}^2 - кількість трикутників з вершиною A – більше. **11.** $S=S_1-2(S_3+S_5+S_7)+4(S_{15}+S_{21}+S_{35})-8S_{105}$, де S_n – сума чисел від 1 до 105, які діляться на n. **12.** 28.

Знайдіть $к$ з рівняння $к+2=18-к$. **13. а).** $(n+1)!$ Замініть множники $к$ на $(к+1)-1$. **б).** $(n+1)2^{n}$. Порівняйте з аналогічною сумою, в якій множники перед біноміальними коефіцієнтами записані у зворотному порядку. **14.** Скористайтеся формулами для $C_n^к$, або надайте цим доданкам реального змісту, пов'язаного з вибором. **15. а).** 34. **б).** 152. Послідовно обчисліть, скількома способами можна попасти у кожну клітинку заданого квадрата, починаючи з лівого нижнього квадратика.

§4.

1. Принаймні два числа будуть однієї парності. **2.** Серед чисел $0, a_1, a_1+a_2, ..., a_1+a_2+...+a_{10}$ принаймні два при діленні на 10 дають однакові остачі. **3.** Переконайтеся, що при діленні точних квадратів на 100 є не більше 51 різних остач. **4. а).** Так. Врахуйте, що різних остач від ділення на 7 є лише 7, і помножте 14 на 7. **б).** Ні. Наприклад, якщо по 14 чисел при діленні на 7 дають остачі 0, 1, 2, 3, 4, а по 15 – остачі 5 та 6. **5.** Порівняйте з задачею 4.3. **6.** Для кожного. Розгляньте остачі $к+1$ чисел вигляду 2^n від ділення на $к$. **7.** Скористайтеся методом вправи 2. **8.** Вісьмома. Якби вантажівок було 7, то навіть найлегших 8 каменів на одну з них завантажити не вдалось би, оскільки їх маса перевищує 3 тони. **9.** Якщо є два учні, які не дружать між собою, то принаймні в одного з них серед решти 23 учнів є не менше 12 друзів. **10.** Розгляньте чотири рівносторонні трикутники зі стороною 1, з яких можна скласти заданий трикутник. **11.** $R=0,5$. Доведіть, що при $R<0,5$ покрити коло радіуса 1 шістьма кругами не вдасться. **12. а).** Припустіть протилежне. **б).** Для многокутників з парним числом сторін. **13.** Замініть вказані прямі паралельними до них прямими, які проходять через одну точку. **14.** Покрийте прямокутник п'ятьма многокутниками (не обов'язково однаковими) з діаметром $\sqrt{5}$. **15.** Розгляньте дві найбільш віддалені точки. Круг радіуса 1 з центром в одній з них і буде шуканим. Порівняйте зі вправою 9.

§5.

1. Намалюйте 9 квадратиків 3x3 на відстанях 2 клітинки між сусідніми з них. **2.** Ні. Розгляньте кутовий квадратик 2x2, який містить замальоване поле. **3.** Шуканим є квадрат 4x4 у центрі дошки. **4. а).** 5. Розмалюйте рядки дошки у 2 кольори так, щоб сусідні рядки були різного кольору. **б).** 16. Виділіть 9 клітинок, з яких жодні два жуки не можуть переповзати на одну і ту ж клітинку. **5.** Виділіть 10 прямокутників 1x2, розташувавши 7 із них по периметру дошки і 3 навколо центрального квадрата 2x2 так, щоб жуки при переповзанні зі цих 20 клітинок зайняли 40 клітинок дошки. **6.** Ні . Замалюйте дошку у 3 кольори, починаючи з вирізаної клітинки, і використайте ідею задачі 5.2. **7.** Ні. Замалюйте рядки таблиці у 2 кольори. Тоді клітинок кожного кольору виявиться непарна кількість, а по 12 плиток кожного виду покриватимуть парну кількість клітинок обох кольорів. **8.** Можна. Покриття здійсніть самостійно. **9.** 4. **10.** Розгляньте вершини правильного п'ятикутника, вписаного у це коло. **11.** Ні. Розмалюйте рядки з номерами 1, 4, 7, ..,2002 у чорний колір, а решта – у білий. Тоді кожен зі вказаних квадратиків містить парну кількість білих клітинок, а всього на дошці їх непарна кількість. **12.** Вистачить і 7 кольорів. Розмалюйте площину правильними шестикутниками зі стороною a, де $\frac{1}{\sqrt{7}} < a < \frac{1}{2}$ так, щоб будь-які 7 шестикутників, один з яких оточений шістьма іншими, були різного кольору. **13.** Припустіть протилежне і розгляньте два ряди рівносторонніх трикутників, вершини яких лежать на прямій, яка проходить через дві вершини одного кольору. **14.** Розгляньте точку, симетричну до вершини правильного трикутника зі стороною 1 відносно його сторони, і доведіть, що ці точки одного кольору. Тоді на колі з діаметром $\sqrt{3}$ також всі точки одного кольору. Серед них є дві на відстані 1. **15.** В нижньому рядку є не менше 5 клітинок одного кольору. Розглянемо відповідні їм стовпчики. Якщо би вказаного прямокутника не існувало, то у кожному з восьми рядків по 5 клітинок було би не більше однієї клітинки того ж кольору. Але тоді існував потрібний трикутник з вершинами іншого кольору.

§6.

1.а). Ні. **б).** Так. Кількість нулів весь час буде парною. **2.** 0. Інваріантом є остача від ділення суми всіх чисел на 13. **3.** Скористайтеся тим, що всі отримані числа при діленні на 3 дають остачу 1. **4.** Кількість чисел -1 або не змінюється, або зменшується на 2. **5.** Ні. Сума записаних чисел не змінюється. **6.** Ні. Оскільки $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)$ і числа ненульові, то сума квадратів цих чисел на першому кроці збільшиться, а далі уже не зменшиться. **7. а).** Ні. В кожній парі різниця чисел ділиться на 13. **б).** Так. **8. а).** Ні. Шашки, які стоять на непарних місцях не зможуть зайняти парні позиції. **б).** Ні. Шашка 1 може займати лише позиції 1, 4, 7. **9.** Уявіть, що в один і той же день два туристи рухалися назустріч один одному. **10.** Пронумеруйте штирі та розетки по колу у протилежних напрямах. **11.** Доведіть спочатку, що у кутовому квадраті 2x2 всі числа однакові. **12.** 18, 45, 90, 99. Обґрунтуйте, що кожне з таких чисел ділиться на 9. **13. а).** 64. **б).** 11!-1. Не змінюється добуток чисел, збільшених на 1. **в).** Помножте кожне з чисел на 5 і додайте 1. Тоді від добутку одержаних чисел відніміть 1 і результат поділіть на 5. **14.** Проаналізуйте, як змінюється сума квадратів чисел, обернених до *x, y.* **15.** Розпочніть з довільного розбиття на дві палати з наступним переведенням депутатів з однієї палати в іншу при умові, що в даній палаті у депутата не менше двох ворогів.

§7.

1.Удругого. Ходи слід робити симетрично до ходів першого відносно центра дошки. **2.** У першого. Виграшні позиції: 7 –12, 112 – 222. **3.** Перший, якщо весь час відніматиме непарні дільники. **4.** У першого. Виграшні позиції: 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535. **5.** У першого. Виграшні позиції: 0, 1, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. **6.** У першого. Позиції 1, 5, 11, 17, 23 йому слід займати, маючи парну кількість сірників, а позиції 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25 – з непарною кількістю сірників. Зокрема, на першому кроці слід взяти 3 сірники. **7.** У першого. Спочатку слід викреслити 5, а потім при викреслюванні дотримуватися такої взаємної відповідності остач від ділення на 5: 1 та 4, 2 та 3. Крім того, остачу 0 не більше одного разу почергово поєднати в пари з остачами 1, 2, 0. **8.** Друга трійка чисел повинна повторювати першу трійку, четверта – третю. Тоді одержане число ділитиметься на 1001, а отже, і на 77. **9.** Достатньо записати числа, сума яких дорівнює нулю. Тоді один з коренів буде 1. **10.** У другого. Для цього він повинен кожен раз залишати у найбільшій купці 2^n-1 сірників. **11.** У першого. Слід забрати купку із 33 сірників, а тоді весь час залишати суперникові в обох купках по $5n$+2 або $5n$+3 сірники. Тоді другий на останньому кроці змушений буде ділити купку із двох чи трьох сірників, а отже, програє. **12.** Якщо *m* і *n* різні, то першому для перемоги слід весь час зрівнювати кількості сірників в обох купках. Інакше – виграє другий. **13.** Перший. Розмалюйте дошку прямокутниками 1x2. Для перемоги першому гравцеві потрібно робити ходи в тому прямокутнику, в якому одна клітинка уже зайнята. Тоді його ходи вичерпаються не раніше ходів другого. **14.** Перший повинен робити ходи симетрично до ходів другого відносно центра дошки поки не з'явиться нагода зайняти кутове поле. **15.** Може. Для цього йому потрібно брати цукерки так, щоб після довільного його κ-того ходу залишалось не менше κ порожніх коробок. Доведіть, що він зможе цього добитися.

§8.

1. 8,125. Скористайтеся формулами Вієта. **2.** $a=\pm 2004$. Зауважте, що 2003 – просте число. **3.** Корені будуть раціональними, якщо дискримінант є точним квадратом. Зверніть увагу, що p і D однієї парності. **4.** $a<-3$ та $a>0$. **5. а).** –4. **б).** $E(y)=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **6.** "-". Підставте $x=-1$ та $x=0$. **7.** $a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$, де x_1, x_2 – корені рівняння. **8.** Скористайтеся графічною інтерпретацією. Графік третьої параболи лежить між графіками перших двох, проходячи через точку їхнього перетину. Зауважте, що останнє рівняння може і не мати коренів. Можна міркувати ще й так: при $|x|\geq 1$ ліві частини перших двох рівнянь набувають лише додатних значень, то і їх півсума – ліва частина третього рівняння теж набуває лише додатних значень. **9.** Додайте ці рівняння і переконайтеся, що дискримінант суми дорівнює $(b-p)^2$. **10.** Міг. Покладіть $p=0$ і порівняйте додатні корені рівнянь $x^2+q=0$ та $0{,}999x^2+q=0$ при достатньо великому за модулем від'ємному значенні q. **11.** $a\leq 1$ або $a>6$. **12.** $f(x)\neq x$ означає, що для всіх x або $f(x)>x$, або $f(x)<x$. Тоді відповідно і $f(f(x))>f(x)>x$, або $f(f(x)<f(x))<x$. **13.** Подайте ліву частину нерівності у вигляді $(x+y+1)^2+2(y+1)^2$. **14.** a, b, c – корені рівняння $t^3-mt^2+nt-k=0$ з додатними коефіцієнтами. При від'ємному t ліва частина також від'ємна. **15. а).** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. **б).** $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

§9.

1. $x=2$. **2. а).** $x^4-x^3-4x^2+x+1=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$. **б).** Попередньо поділіть на x^2. **3.** Ліва частина є монотонною функцією. Для знаходження кореня зведіть рівняння до бікубічного. **4. а).** Покладіть $y=x^2+x$. **б).** Покладіть $y=x^2+5x+2$, розклавши попередньо ліву частину рівняння на 4 множники і відповідно згрупувавши їх. **5.** Запишіть рівняння у вигляді $(x^2-1)^2+(3x-2)^2=0$. **6.** Розв'яжіть рівняння як квадратні відносно параметра. **7. а).** $x=4$. Інші корені є сторонніми. **б).** $x_1=1$, $x_2=x_3=x_4=-1$. **8. а).** Покладіть $y=x-1$. **б).** $x_1=-1$. Для знаходження інших коренів поділіть ліву частину рівняння на $x^2(x+1)$ і покладіть $y=x+\frac{1}{x}$. **9.** $x=-0{,}75$. Покладіть $x=tg\, t$. Не забудьте зробити перевірку. **10.** Рівняння не має коренів. Порівняйте множини значень його лівої і правої частин. **11.** $x=y=z=t=0$. Виділіть 4 повні квадрати. **12.** Поділіть на x^2 і покладіть $y=x+\frac{24}{x}+11$, перемноживши попередньо відповідні множники у лівій частині. **13. а).** $x_1=1$, $x_2=2$. **б).** Покладіть $y=x^2+4x+8$ і розкладіть $y^2+3xy+2x^2$ на множники. **14. а).** $x=\frac{1}{3}$. Поділіть на 8^x і дослідіть обидві частини одержаного рівняння на монотонність. **б).** $x=-1$. Дослідіть знаки лівої частини рівняння при $x<-1$ та $x>-1$. **15.** Покладіть $u=\frac{x}{x+1}, v=\frac{x}{x-1}$. Тоді $u^2+v^2=a(a+1)$, $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=2$. Отже, $(u+v)^2-(u+v)=a(a+1)$. Продовжіть самостійно.

§10.

1. x=22, y=16. **2.** Може. Наприклад, при русі 14 хвилин вліво та 11 хвилин вправо. **3.** 13 задач, з яких 6 розв'язав правильно. **4. а).** 161. Запишіть рівняння у вигляді $(x-2002)(y-2002)=2002^2$. Врахуйте, що $xy \neq 0$. **б).** Перенесіть $\sqrt{y}$ вправо і піднесіть обидві частини до квадрату. Врахуйте, що $\sqrt{2002y}$ має бути цілим числом. **5.** Якщо $a^2+b^2=n$, то $(a+b)^2+(a-b)^2=2n$. Навпаки, якщо $x^2+y^2=2n$, то $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=n$. Врахуйте, що тут x та y однієї парності. **6.** (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6) та все можливі їх перестановки. Попередньо поділіть на abc. **7.** $x_1=2$, $y_1=1$, $x_{n+1}=2x_n+3y_n$, $y_{n+1}=x_n+2y_n$. Для другого рівняння розгляньте остачі від ділення на 3. **8. а).** x=5, y=3. Розкладіть обидві частини рівняння на множники. **б).** Розв'язків немає. Розгляньте остачі від ділення на 7. **9. а).** x=1, y=1; x=3, y=2. Доведіть, що при x>2 число y є парним і розкладіть 3^y-1 на множники – степені двійки. **б).** Якщо z=1, то $x \in Z_+$, $y=2^x+1$. При інших z розкладіть y^z-1 на множники – степені двійки. Тоді y=3. **10. а).** $x=y=2$, z=5. Доведіть, що x, y – парні числа. **б).** (2,5,7) та їх перестановки. Доведіть, що одне з чисел дорівнює 5. **11.** Розгляньте остачі від ділення на 4. **12.** Покажіть, що x, y, z діляться на 2^n при кожному натуральному n. **13.** $x=y=z=1$ є розв'язком. Якщо $x=a$, $y=b$, $z=c$ – розв'язок, то і $x=3bc-a$, $y=b$, $z=c$ – розв'язок. Врахуйте також, що змінні входять у рівняння симетрично. **14. а).** x=1, y=1; x=3, y=2. При $x > 3$ розгляньте остачі від ділення на 10. **б).** z<3, бо при x>8 ліва частина ділиться на 3, але не ділиться на 27. x<9 перевіряємо безпосередньо. **15. а).** x_0=10, y_0=3, z_0=1, t_0=2. **б).** x_0=4, y_0=2, z_0=1, t_0=3. В обох випадках далі використайте метод вирівнювання степенів.

§11.

1. $f(x)=x+a$, $a \in R$. Покладіть x=0. **2. а).** $f(x)=0{,}5x^2+ax$, $a \in R$. Шукайте розв'язок у вигляді $f(x)=0{,}5x^2+g(x)$. **б).** $f(x)=-1$ або $f(x)=a^x-1$, де a>0. Покладіть $f(x)=g(x)-1$. **3.** Не існує. Підставте послідовно x=0 та y=0. **4.** Не існують, оскільки $f(2005)=f(0)=0$. **5. а).** $f(x)=0$ або $f(x)=\log_a x$, a>0, $a \neq 1$. **б).** $f(x)=0$ або $f(x)=a^x$, a>0. Зведіть до рівняння Коші. **6.** $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$. **7. а).** $f(x)=\frac{a}{x}$, $a \neq 0$. Покладіть $f(x)=\frac{1}{g(x)}$. **б).** $f(x)=\mathrm{tg}\, ax$, $a \in R$. Покладіть $f(x)=\mathrm{tg}\, g(x)$. **8. а).** $f(x)=ax+b$, де $a, b \in R$. **б).** $f(x)=c^{ax+b}$, де c >0, $a, b \in R$. **9.** $f(x) \equiv 0$ або $f(x)=1$ при $x \neq 0$ та $f(0)=a$, $a \in R$. Підставте $y=x=1$ і проаналізуйте випадки $f(1)=1$ та $f(1)=0$, покладаючи y=1. **10. а).** Замініть x на $-x$. **б).** Замініть x на $\frac{1}{x}$. Після цього розгляньте одержані рівняння в системі із заданими. **11.** Тричі поміняйте x на $\frac{x-1}{x+1}$ і розв'яжіть одержану систему чотирьох рівнянь відносно $f(x)$. Порівняйте із задачею 11.10. **12. а).** $f(x)=a$, $a \in R$. Покладіть $y=2x-1$. Тоді $f(y)=f\left(\frac{y+1}{2}\right)=f\left(\frac{y+3}{4}\right)=...=f\left(\frac{y+2^n-1}{2^n}\right)=...$Перейшовши до границі, одержимо $f(y)=f(1)$. **б).** $f(x)=ax$, $a \in R$. Розгляньте функцію $g(x)=f'(x)$. **13.** Виразіть $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ через Φ. **14.** $f(x)=x^2$. Обидва рівняння системи рівносильні. **15.** $f(0)=0$, $g(0)=1$. Покладіть $x=y=0$. Обґрунтуйте, що випадки $g(0)=0{,}5$ та $g(0)=0$ неможливі.

§12.

1 – 4. Скористайтеся безпосередньо методом математичної індукції. **5. а).** $S_{2n}= n^2(2n+1)^2$.Скористайтеся результатом задачі 12.7. **б).** $S= S_{2n} – 8S_n = n^2(2n^2-1)$. **6 –7.** Застосуйте модифікацію методу математичної індукції, в якій база індукції складається з двох тверджень. **8.** Використайте тотожність $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$. **9.** Врахуйте, що $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. **10.** Розгляньте дві пари чисел: $a=0,5(x-y)$, $b=0,5(7x+y)$ та $c=0,5(x+y)$, $d=0,5(7x-y)$. Принаймні в одній з них обидва числа непарні. Якщо $7x^2+y^2=2^k$, то $7a^2+b^2=7c^2+d^2=2^{k+1}$. **11.** Доведіть за індукцією. **12.** При проведенні нової прямої всі частини, які знаходяться по одну сторону від неї перемалюйте у кольори, протилежні до тих, в які вони були замальованими. **13.** Покажіть спочатку, як із двох квадратів з допомогою розрізання можна скласти один. **14.** При доведенні за індукцією додатково використайте метод підсилення, зменшивши одну із частин нерівності на 1. **15.** Доведіть безпосередньо за індукцією.

§13.

1.Погрупуйте доданки у 5 груп по 200 і одну групу з останніх двох доданків та оцініть суми в кожній з груп. **2.** При $n>1$ оцініть зверху відповідні доданки дробами $\frac{1}{(n-1)n}$. **3.** Доведіть спочатку для додатних x, y нерівності: **а).** $\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\frac{x+y}{2}$**; б).** $\frac{x+y}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. **4.** Розгляньте задану нерівність як квадратичну зі змінними коефіцієнтами. **5.** Використайте нерівність Коші. **6.** Розгляньте різницю між правою і лівою частинами нерівності. **7.** Скористайтеся похідною. **8.** Використайте послідовно нерівності Бернуллі та Коші. **9.** Порівняйте з методом доведення нерівності Коші. **10.** Виділіть відповідно два найбільших та два найменших елементи. Порівняйте із задачею 13.24. **11.** Застосуйте нерівність Коші-Буняковського. **12.** Скористайтеся нерівністю Бернуллі, виконавши відповідні перетворення, або доведіть з допомогою похідної. **13.** Скористайтеся геометричною інтерпретацією, врахувавши, що довжина ламаної більша за довжину відрізка, який сполучає її початок і кінець. **14.** Припустіть протилежне і, додавши нерівності $1-a>\frac{1}{4b}$, $1-b>\frac{1}{4c}$, $1-c>\frac{1}{4a}$, прийдіть до протиріччя. Для цього перенесіть від'ємні доданки вправо і застосуйте нерівність Коші. **15.** Як геометричні інтерпретації використайте об'єми відомих тіл.

§14.

1.Використайте властивості відношення відповідних сторін подібних трикутників. **2.** $\angle A=30^0$, $\angle B=90^0$, $\angle C=60^0$. **3.** Якщо K симетрична до M відносно AB і коло радіуса KN з центром у точці K перетинає пряму AB у точці L, то O – точка перетину бісектриси кута NKL з прямою AB. **4.** 72^0, 72^0,36^0. Розгляньте всі можливі варіанти. **5.** 72^0, 108^0. **6. а).** ***1-2***. Проаналізуйте самостійно. ***3***. Будь-який. Проведіть висоту, а потім медіани двох утворених прямокутних трикутників з вершин прямих кутів. **б).** Дивись малюнок 31. **7.** Доведіть, що в кожній точці, де сходяться вершини трикутників, відношення кількості кутів у 75^0 до кількості кутів у 30^0 не перевищує двох, а у вершинах квадрата воно менше двох. Але, якщо би таке розбиття було можливе, то вказане відношення мало би дорівнювати 2. **8.**

Продовжіть AC поза точку C до точки E так, щоб $CE=CB$, і скористайтеся подібністю трикутників ABE та ACB. **9.** $180^0-\arcsin\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. Доведіть, що цей кут є тупим, і скористайтеся теоремою синусів. **10.** 70^0. Продовжіть BM до перетину з висотою CH у точці E і доведіть, що $\Delta AEC=\Delta AEM$. Можна скористатися також теоремою синусів. **11.** $\frac{|a-b|}{2}$. Продовжіть бічні сторони трапеції до їх перетину і розгляньте різницю медіан двох утворених прямокутних трикутників. **12.** $\angle B=60^0$, $\angle D=120^0$. Доведіть, що точка B – центр кола, описаного навколо трикутника ACD. **13.** Доведіть спочатку, що чотирикутник, утворений відрізками, які з'єднують середини сусідніх сторін, є паралелограмом. **14.** Доведіть рівність трикутників з вершинами у вершинах паралелограма і центрах суміжних з цими вершинами квадратів. **15.** Відкладіть на діагоналі A_1A_5 точку B так, щоб $BA_5=A_5A_6$, і доведіть , що $\angle A_1A_3B=\angle A_1BA_3$. А отже, $A_1A_3=A_1B$.

§15.

1. Виразіть явно ці кути через кути трикутника, врахувавши, що центр вписаного кола лежить на перетині бісектрис трикутника. **2.** Доведіть, що перпендикулярні до BD прямі, проведені з вершин A та C, симетричні відносно діаметра, який проходить через середину BD. **3.** Покажіть, що цією точкою є основа висоти. **4.** Скористайтесь тим, що серединний перпендикуляр до хорди проходить через центр кола, діаметром якого і є відповідна сторона. **5.** Якщо K – точка перетину прямих AB та MN, то $KM^2=KA\cdot KB=KN^2$. **6. а).** 1. **б).** 2,5. Доведіть спочатку, що центри цих кіл є вершинами прямокутного трикутника зі сторонами 3, 4, 5. **7.** Знайдіть радіуси цих кіл із системи рівнянь: $R_1+R_2=AB,\ R_1+R_3=AC,\ R_2+R_3=BC,$ де A, B, C – три задані точки. **8.** 135^0 та 150^0. **9.** Доведіть, що ця пряма розбиває APD на два рівнобедрені трикутники. Для цього порівняйте кути цих трикутників при основах AP та PD. **10.** Доведіть, що $\angle AOB=2\angle ADP=\angle APB,$ де O – центр описаного навколо $ABCD$ кола. **11.** Побудуйте паралелограм $ACED$ і доведіть, що навколо $DMCE$ можна описати коло. **12.** Нехай H – точка перетину діагоналей BD і CE. Тоді точки A, H, D, E лежать на одному колі і точки A, B, C, H також лежать на одному колі. **13.** Нехай B лежить між A та C. Доведіть, що $\angle OO_1O_3=\angle OBC,\ \angle OO_2O_3=\angle OBA.$ Врахуйте, що центри кіл лежать на серединних перпендикулярах до OA та OC, а центральний кут вдвічі більший відповідного вписаного кута. **14.** Доведіть подібність трикутників ABC та ABD за рівністю відповідних кутів. **15.** Доведіть, що дотична у точці С розбиває трикутник BCM на два рівнобедрені трикутники з основами BC та CM. Для цього обґрунтуйте рівність відповідних кутів.

§16.

1. Порівняйте площі вписаних чотирикутників $ABCD$ та $AECD$, де $BE\|AC$. **2.** Подайте цю площу як суму площ чотирьох трикутників і виконайте відповідні алгебраїчні спрощення. **3.** Спочатку поділіть площу трикутника пополам, а потім відділіть $\frac{2}{3}$ від тієї частини, яка є трикутником. Скористайтеся ідеями задач 16.5 та 16.6. **4.** Побудуйте ламані відповідно з трьох та п'яти ланок, паралельних до сторін прямокутника. **5.** Слід рухатися по колу радіуса $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Справді, якщо б це коло повністю містилося всередині лісу, то площа лісу перевищувала би $\pi r^2=S$. **6.** Замініть відрізком прямої. Порівняйте із задачею 16.5. **7.** Замініть дані відношення відношеннями площ трикутників *BMC*, *CMA* та *AMB* до площі трикутника *ABC*. **8.** $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$. Скористайтеся відношенням площ подібних трикутників. **9. а).** $7S$. Проведіть відрізки A_1B, B_1C, C_1A і доведіть, що площі семи утворених трикутників рівні. **б).** $5S$. Додатково проведіть діагональ *AC* і зробіть порівняння з площами трикутників *ABC* та *ADC*. **10.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Доведіть спочатку, що цей п'ятикутник правильний. **11.** Проведіть через точки *A, C, E* прямі, паралельні до сторін шестикутника, які обмежують всередині трикутник. Доведіть, сума площ цього трикутника та шестикутника дорівнює подвоєній площі трикутника *ACE*. Аналогічно виразіть подвоєну площу трикутника *BDF*. **12.** 1:2. Розгляньте спочатку різницю площ заданих трикутників. **13.** $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$. Порівняйте з вправою 12. **14.** 45^0. Скористайтеся теоремою косинусів і обчисліть площу трикутника двома способами. **15.** Точка перетину медіан трикутника *ABC* та точки, симетричні до вершин трикутника відносно середин протилежних сторін.

§17.

1. Для знаходження висот обчисліть площу трикутника двома способами. Для знаходження медіан доповніть трикутник до паралелограма і скористайтеся співвідношенням між довжинами його сторін та діагоналей. **2.** $l_c = \frac{2ab\cos\frac{\angle C}{2}}{a+b}$. Як допоміжний елемент використайте площу. **3.** Безпосередньо скористайтеся властивостями вказаних ліній для складання відповідних відношень. **4.** Доведіть, що меншому куту трикутника відповідає більша бісектриса. Нехай $\angle B < \angle C$, *BM* і *CL* – бісектриси, *К* – точка перетину *BM* з колом, описаним навколо *BCL*. Тоді $CL<BK<BM$. Для висот та медіан аналогічне твердження також вірне. **5.** Продовжіть CC_1 до перетину з описаним навколо *ABC* колом у точці *D*. Скористайтеся рівністю $CC_1(CD-C_1D)=AC_1\cdot BC_1$ і подібністю трикутників BCC_1 та *ACD*. **6.** Врахуйте, що медіана прямого кута розбиває трикутник на два рівнобедрені трикутники. **7.** Припустіть протилежне і доведіть, що тоді вказані три відрізки перетинаються в одній точці. **8.** Побудуйте паралелограми *ABFC* та *ABCH* і врахуйте, що навколо *ABFH* можна описати коло. **9.** Виразіть відношення сторін цього трикутника через відношення медіан. **10.** Скористайтеся рівностями вигляду $\angle BA_1C_1 = \angle A = \angle CA_1B_1$, які випливають з подібності відповідних трикутників. **11.** Врахуйте, що точки A_1, B_1, C_1 симетричні до точки перетину висот трикутника відносно його сторін, і скористайтеся властивостями вписаних кутів. **12. а).** Доведіть, що точка перетину бісектрис трикутника *ABC* співпадає з точкою перетину висот трикутника $A_1B_1C_1$. **б).** Скористайтеся результатом вправи 11. **в).** Висота паралельна прямій, яка проходить через точку перетину продовження бісектриси з колом і центр кола. Медіана перетинає цю пряму посередині сторони трикутника. **13.** Якщо $AM>AL>AH$, то побудуємо спочатку прямокутні трикутники *AMH* та *ALH* за гіпотенузою і катетом. Нехай $MD \perp LH$, *E* – точка перетину прямих *MD* і *AL*. Тоді *O* – точка перетину *MD* із серединним перпендикуляром до *AE* – є центром описаного навколо *ABC* кола, причому *B* і *C* лежать на прямій *LH*. **14.** Скористайтеся методом геометричного місця точок. У правильному трикутнику *P* і *Q* співпадають. **15.** При симетрії цих кіл відносно відповідних сторін трикутника їх центри перейдуть у точку, рівновіддалену від вершин *A, B, C*, тобто у центр описаного навколо *ABC* кола. Врахуйте також результат задачі 17.5.

§18.

1.Для $a \ge b \ge c > 0,$ $b+c>a$ доведіть нерівність $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$. **2.** Ні. Наприклад, a=2, b=c=1. **3. а).** Вважаючи $a \ge b \ge c > 0,$ подайте різницю між лівою і правою частинами нерівності у вигляді $(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)$. Зауважимо, що нерівність справедлива для будь-яких додатних a, b, c. **б).** Скористайтеся результатом задачі 18.2. Для доведення лівої частини нерівності виділіть повні квадрати. **4.** Дивись задачу 18.14. Другу частину нерівності доведіть самостійно. **5. а).** З'єднайте центр описаного кола з вершинами та серединами сторін трикутника. **б).** Скористайтеся результатом задачі 18.9. **6.** Порівняйте r з радіусом кола, яке проходить через середини сторін трикутника. **7.** Побудуйте трикутник CAE так, що $\angle CBE = 90^0$, CE=2h_a Тоді $AB+AC=AE+AC\ge AE$. Рівність досягається, якщо $AC=AB$. **8.** Оскільки $AD\cdot l_a = AB\cdot AC,$ то нерівність рівносильна такій $2AB\cdot AC \ge AB\cdot l_a + AC\cdot l_a$. Далі як допоміжний елемент використайте площу трикутника ABC. **9.** Розгляньте прямокутник зі сторонами $a+c$ та $b+d$ і поміщений у ньому з відповідними до умови задачі довжинами сторін. Порівняйте площі одержаних фігур. **10.** Скористайтеся нерівностями трикутника. **11.** Нехай A – найближча із вершин до протилежної зі сторін п'ятикутника $ABCDE$. Тоді $S_{\Delta BCD}+S_{\Delta CED}\ge S_{\Delta ACD}$. **12.** Кожен доданок зліва не менший за 2S. **13.** Додайте до обох частин нерівності подвоєні площі трикутників BMC, CMA, AMB і доведіть одержану нерівність. **14.** Нехай для конкретності точка M належить трикутнику AOD, де O – центр квадрата. Доведіть, що $90^0 \le \angle MAB + \angle MCD \le 135^0$, $45^0 \le \angle MBC + \angle MDA \le 90^0$. Аналогічно розглядаються випадки іншого розташування точки M. **15.** Зробіть розгортку бічної поверхні піраміди і доведіть, що довжина ламаної, утвореної сторонами основи, більша за довжину двох однакових відрізків-ребер у цій розгортці.

§19.

1.Точка M лежить на перетині l і серединного перпендикуляра до AB. **2.** P – середина відрізка AB. **3.** Один відрізок паралельний до основи квадрата, а чотири інших утворюють з бічними сторонами кути 30^0. **4.** M – проекція середини відрізка AB на пряму l. Скористайтеся теоремою Піфагора. **5.** Така хорда перпендикулярна до діаметра, проведеного через задану точку. **6.** 60^0. Скористайтеся тим, що серед вписаних шестикутників найбільший периметр має правильний шестикутник. **7.** Якщо $\angle A < 90^0$, то $\angle ACB = 90^0$. Інакше – задача не має розв'язку. Скористайтеся рівністю $R=\frac{AB}{2\sin\angle C}$. **8.** Коло, описане навколо ABC повинно дотикатися до іншої сторони кута. **9. а).** X – основа висоти. Врахуйте, що MN=CX. **б).** X – середина гіпотенузи. **10. а).** $(2\sqrt{3}-3)a^2$ та $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **б).** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ та $\frac{9\sqrt{3}a^2}{16}$. **11.** $c=\max\{a,b\}$ задовольняє обидві задані умови. **12.** На 3.Проведіть два відрізки з вершини кута у 105^o. **13.** Нехай A – той із лівих кінців всіх відрізків, який знаходиться правіше від інших, B – той із правих кінців всіх відрізків, який знаходиться лівіше від інших. Точки відрізка AB є шуканими. **14.** Нехай A та B – дві найближчі точки, C – точка, з якої відрізок AB видно під найбільшим кутом. Тоді всередині кола, описаного навколо ABC немає жодної із заданих точок. **15.** $a\sqrt{5}$. Шлях проходить через середину ребра, яке не містить вказаних вершин. Розгляньте розгортку куба.

§20.

1. 0,5a. Скористайтеся результатом задачі 20.1. **2.** Уявіть собі, що коло залишається нерухомим, а трикутник рухається вздовж прямої, на якій лежить його основа. Доведіть, що величина дуги між точками перетину колом бічних сторін не змінюється. **3.** Врахуйте, що основи таких перпендикулярів лежать на колі з діаметром $OM=R$, де O – центр прямокутника, M – вибрана точка на колі, R – радіус заданого кола. **4.** Побудуйте спочатку правильний многокутник зі сторонами, паралельними до сторін заданого многокутника, і доведіть аналогічне твердження для нього. Як допоміжний елемент використайте площу. **5.** Обчисліть площу трикутника двома способами. **6.** Доведіть, що чотири прямі, які проходять через відповідні вершини обох карт, перетинаються в одній точці. Ця точка і буде шуканою. Зауважимо, що твердження задачі залишиться справедливим і у випадку непаралельності відповідних сторін. **7.** Обчисліть об'єм тетраедра двома способами. **8.** 1,25a^2. Виконайте обчислення безпосередньо. Дивись також задачу 23.10. **9.** Явно виразіть кожну із вказаних величин як функцію від радіуса вписаного кола і кута, який утворює проведена пряма з однією зі сторін трикутника. **10.** $4R^2$. Скористайтеся теоремою Піфагора. **11.** $4(2R^2\text{-}d^2)$, де R – радіус кола, $d=OM$, O – центр кола. **12.** $\frac{2(n-1)(n-2)}{3n}R^2$. Скористайтеся теоремою косинусів, згрупувавши у пари симетричні відносно центра кола точки поділу. **13.** Після закінчення гри будемо мати деякий опуклий многокутник, розбитий діагоналями на m трикутників. Якщо всередині нього k точок, то $l=n\text{-}k$ - кількість сторін многокутника. Нехай проведено x відрізків. Тоді $3m=2x\text{-}l$, $\pi m = 2\pi k + (l-2)\pi$. Звідси $x=2n+k\text{-}3$ і не залежить від того як проходила гра. **14.** Порахуйте суму всіх кутів одержаних трикутників. Вона не залежить від способу розрізання. **15.** Вона дорівнює подвоєній площі початкового чотирикутника. Обґрунтуйте, що його вершини лежать на сторонах утвореного у результаті симетрії чотирикутника.

§21.

1. Із даних векторів можна скласти опуклий чотирикутник, в якого всі сторони рівні, тобто ромб. **2.** Скористайтеся рівністю $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$. **3.** $\vec{AA_1}=\frac{n\vec{AB}+m\vec{AC}}{n+m}$. Виключіть $\vec{BC}$ із рівностей $\vec{AA_1}+\frac{n}{n+m}\vec{BC}=\vec{AC}$, $\vec{AA_1}-\frac{m}{n+m}\vec{BC}=\vec{AB}$. **4.** $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=(\vec{AB}+\vec{BA_1})+(\vec{BC}+\vec{CB_1})+(\vec{CA}+\vec{AC_1})=\vec{BA_1}+\vec{CB_1}+\vec{AC_1}=\vec{0}$. Виконайте поворот останніх трьох векторів на 60^0. **5.** Додайте вектори попарно і одержані вектори-суми поверніть на 90^0. Їх довжини пропорційні до сторін 2002-кутника. **6. а).** Так. **б).** Ні. Розгляньте проекції векторів на висоту піраміди. **7.** Виразіть скалярні добутки в лівій частині рівності за теоремою косинусів. **8.** Врахуйте, що $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$, $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$.

9. Скористайтеся рівностями $\vec{CC_1}=\frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CB})$, $CC_1\cdot C_1D=AC_1\cdot C_1B$.

10. Виразіть $\vec{AD},\vec{AC},\vec{BD}$ через $\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}$. Різниця між лівою і правою частинами нерівності дорівнює $\left|\vec{AB}+\vec{CD}\right|^2$. **11.** На перетині відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін. **12. а).** Розбийте дану фігуру двома способами на два прямокутники. Центр мас знаходиться на перетині ліній, які з'єднують центри відповідних прямокутників. **б).** Скористайтеся ідеєю п. а). **13.** Зосередьте у точках A, B, C, M однакові маси і доведіть, що M – спільний центр мас. **14.** Зосередьте у вершинах трикутників маси, обернено пропорційні до відношень довжин відрізків на кожній стороні. **15.** Зосередьте у вершинах тетраедра однакові маси і доведіть, що центр мас тетраедра є точкою перетину трьох вказаних відрізків.

§22.

1. Виконайте поворот трикутника AMC на кут 60^0 навколо вершини A. **2.** Паралельно перенесіть трикутник ABD на вектор $\vec{AD}$. Якщо $\vec{DE}=\vec{AD}$, то трикутник ACE будується за основою, протилежним кутом і медіаною. Точку C знайдіть як перетин двох кіл. **3.** Спочатку перенесіть одну з точок на вектор $\vec{MN}$ і скористайтеся результатом задачі 19.1. **4.** Прямі AM та NC симетричні відносно діаметра, перпендикулярного до AD. **5.** Симетризуйте одне з кіл відносно точки A. На перетині з другим колом одержимо ще одну точку шуканої прямої. **6.** Доведіть, що точка перетину діагоналей першого паралелограма є центром симетрії для другого паралелограма. **7. а).** Композиція симетрій відносно перпендикулярних осей є поворотом на 180^0, тобто симетрією відносно точки перетину цих осей. **б).** Врахуйте, що пряма, симетрична до однієї з осей відносно другої осі, теж є віссю симетрії. Оскільки осей симетрії всього дві, то вона співпадає з першою віссю, а отже, перпендикулярна до другої. **8.** Серединний перпендикуляр до AB перетинає лінію бісектриси l на колі, описаному навколо трикутника ABC. Окремо розгляньте випадок $l\perp AB$. **9.** Виконайте поворот прямого кута на 60^0 навколо точки A. На перетині сторін і буде одна з вершин шуканого трикутника. **10.** Побудуйте довільний правильний трикутник, симетричний відносно прямої OH, де H – точка перетину висот, O – центр кола, і застосуйте гомотетію з центром H. Окремо розгляньте випадок $O=H$. **11.** Виконайте поворот шестикутника на 90^0 навколо його центра. Одержані точки перетину і будуть вершинами квадрата. **12.** Доведіть, що для всіх k=1, 2, ...,2001 $\frac{R_{k+1}}{R_k}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$, де α - величина заданого кута. **13.** Скористайтеся гомотетією відносно точки перетину відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін. **14.** Побудуйте довільний трикутник, сторони якого перпендикулярні до сторін трикутника ABC і дві вершини лежать відповідно на сторонах AB та AC, і скористайтеся гомотетією з центром A. **15.** Виконайте інверсію заданих кіл відносно довільного кола з центром у заданій точці, а потім інверсію прямої, яка проходить через центри двох одержаних на першому кроці кіл.

§23.

1.а). $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **б).** Напишіть рівняння прямих, на яких лежать висоти трикутника, і розв'яжіть систему трьох одержаних рівнянь. **2. а).** Квадрат з вершинами (1;0), (-1;0), (0;1), (0;-1). **б).** Чотири круги радіуса 1 з центрами у точках (2;2), (2;-2), (-2;2), (-2;-2). Розгляньте спочатку $x,y\geq 0$ і скористайтеся симетрією відносно обох координатних осей. **3. а).** Коло з центром у точці C – середині відрізка AB, або лише точка C. або порожня множина в залежності від d. **б).** Пряма. **в).** Коло, якщо $n\neq 1$, або серединний перпендикуляр до AB, якщо n=1. **4.** Координати центра описаного кола є розв'язками системи двох лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами. **5.** Припустіть протилежне і доведіть, проаналізувавши остачі від ділення на 3, що кутовий коефіцієнт прямої $y=kx$, яка перетинає це коло в точках з обома раціональними координатами не може бути раціональним. **6.** Центр симетрії – початок координат, k=2. Розгляньте відношення відстаней до початку координат вздовж прямих $y=ax$.

7. $(x\text{-}5)^2+(y\text{-}5)^2=25$ або $(x\text{-}17)^2+(y\text{-}17)^2=289$. **8.** $(x\text{-}6)^2+(y\text{-}7)^2=36$. **9. а).** $x+\sqrt{3}y=2$. **б).** $4x\text{-}3y+5=0$ або $x=1$. Шукайте дотичну у вигляді $x\text{-}1 = k(y\text{-}3)$. Підставивши у рівняння кола, знайдіть k з умови, що дискримінант дорівнює нулю. **10.** $y=8x+4$. Підставте $y=ax+b$ у рівняння парабол і прирівняйте обидва дискримінанти до нуля. **11.** Розгляньте систему координат з початком в основі висоти трикутника. **12.** Вісь абсцис спрямуйте вздовж сторони *AC* і виразіть координати середин двох останніх вказаних відрізків через координати інших вершин п'ятикутника. **13. а).** $AB=AC=7$. **б).** Скористайтеся скалярним добутком векторів або теоремою косинусів. **14.** Скористайтеся результатами задач 23.11, 23.12. Для порівняння попробуйте розв'язати дану вправу ще й іншим способом. **15.** Скористайтеся результатом задачі 23.11.

§24.

1.Можна. Організуйте переправу на куті рова. **2.** Можуть. Розташуйте ці точки на одній прямій. **3.** Може. Наприклад, якщо два числа дорівнюють по 0,9, а вісім чисел – по -0,1. **4.** Ні. Скористайтеся результатом вправи 4 до §18. Навпаки – так. Наведіть приклад з тупокутним рівнобедреним трикутником. **5. а).** Ні. Розгляньте трикутник з довжинами сторін 4, 6, 8 чи будь-який інший, довжини сторін якого утворюють арифметичну прогресію з різницею, відміною від нуля. **б).** Так. **6.** Так. Заповніть квадрат 5x5 числами 1 та $-k^2$ так, щоб у кожному квадратику kxk число $-k^2$ зустрічалося по одному разові: **а).** $k=2$. **б).** $k=3$. **в).** $k=4$. **7.** Міг. Наприклад, якщо він кожні півгодини чергував рухи зі швидкостями 120 км/год та 0 км/год. **8.** Могло. Наприклад, якщо суперники особисті зустрічі між собою зіграли так: *A:B* (+0=8-0), *A:C* (+2=5-1), *B:C* (+3=2-3). **9.** Можна. Розмістіть куб так, щоб центри його грані і листка паперу співпали, а діагоналі грані куба були паралельними до сторін листка. **10.** Можна. Перш, ніж брати мотузку за кінці, переплетіть руки. **11.** Продовжіть сторону *AD* чотирикутника *ABCD* поза точку *A*. Поставте ніжку циркуля у точку *A* і зробіть відмітки на *AB* та на продовженні *AD*. Тим же розхилом циркуля з ніжкою у точці *C* зробіть відмітки на сторонах *BC* та *CD*. Порівняйте з допомогою циркуля відстані між парами відзначених точок. **12.** Відкладіть на даній прямій відрізки *OA* та *OB* довжиною 1, а потім ще два одиничні відрізки *OE* та *OH* так, щоб точки *E* та *H* лежали в одній півплощині відносно заданої прямої. Якщо *C*- точка перетину прямих *AE* та *BH*, *K* – точка перетину прямих *AH* та *BE*, то *CK* – шуканий перпендикуляр. Для обґрунтування скористайтеся властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи. **13. а).** Циркулем побудуйте коло з центром $M \notin l$ і радіусом *MA*, яке перетинає цю пряму ще й у точці *B*. Проведіть діаметр *BC* та шуканий перпендикуляр *AC*. **б).** Виберіть точки *M* та *K* на прямій l і побудуйте кола з центрами у цих точках і радіусами *AM* та *AK* відповідно. З'єднайте точки перетину цих кіл.**14.** Виберіть на заданому колі точку *A* і побудуйте коло *K* з центром у цій точці. На перетині кіл одержимо точки *B* і *D*. Побудуйте на *K* точку *C* – діаметрально протилежну до *B* як у задачі 24.22. На перетині кіл радіусом *CD* з центром у точках *A* та С знайдіть точку *E*. Нехай *M* – точка перетину кола *K* і кола радіуса *CD* з центром *E*. Тоді *BM* – радіус заданого кола. Отже, його центр *O* лежить на перетині кіл радіуса *BM* з центрами у точках *A* та *B*. Для обґрунтування доведіть, що *DO=AO=BO*. **15.** Спочатку поділіть відрізок *AB* пополам, як у задачі 24.19, а потім розв'яжіть обернену до неї задачу, скориставшись тим, що *PM* ділить відрізок *CD* (див. мал. 145) пополам. При цьому візьміть точку *B* за середину шуканого відрізка.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

1. Бугаенко В.О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. – М.: ТЕИС, 1995. – 110 с.
2. Белоусов В.Д., Изман М.С., Солтан В.П., Чиник Б.И. Республиканские математические олимпиады. – Кишинев: Штиинца, 1986.
3. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986 – 176 с.
4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – (Б-ка мат. кружка) – 288 с.
5. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа., 1993 – 415 с.
6. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й..Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач: Навчальний посібник.–К.: Либідь, 1993. –144 с.
7. Вороний О.М. Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991–2000 рр.). Кіровоград: РВЦ КДПУ, 2002.–140 с.
8. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.. Сборник задач Киевских математических олимпиад.–К.: Вища школа., 1984.–240 с.
9. Гальперин Г.А., Толпыго А.К.. Задачи Московских математических олимпиад.– М.: Просвещение, 1986.–304 с.
10. Двенадцать турниров: Математические Турниры городов с 1 по 12. Под ред. Н.Н. Константинова.–М.: ИЦТГ, 1991.
11. Зарубежные математические олимпиады/ Под ред. Сергеева И.Н.– М.: Наука, 1987.– 416с.
12. Зубелевич Г.И. Сборник задач Московских математических олимпиад (V–VIII классы).– М.: Просвещение, 1971.
13. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В. М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади.– Кам’янець–Подільський: Абетка, 2000.– 304с.
14. Конет І.М., Паньков В.Г., Теплінський Ю. В. Хмельницькі обласні олімпіади юних математиків.– Кам’янець–Подільський: Абетка, 1998.– 207с.
15. Коршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады.– М.: Мир., 1976.– 543с.
16. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 1991- 2000. – К.: Техніка, 2003. – 541с.
17. Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги. Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.
18. Сборник задач Московских математических олимпиад. / Сост. А.А.Леман. – М.: Просвещение, 1965.
19. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978. – 338 с.
20. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987-2005 рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164 с.

21. Физико-математические олимпиады. Сборник. – М.: Знание, 1977. –160 с.
22. Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – С.-Пб.: Политехника, 1994.
23. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся. – М. Просвещение, 1992.
24. I – VII Соросівські олімпіади для учнів 9 – 11 класів загальноосвітніх шкіл. Математика. – К.: Міжнародний фонд “Відродження”, 1995 – 2001.

ЗБІРНИКИ РІЗНИХ ЗАДАЧ ОЛІМПІАДНОГО ХАРАКТЕРУ

25. Агаханов Н.Х., Купцов А.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. Математические олимпиады школьников.9. –М.: Просвещение, 1997.
26. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975. – 112 с.
27. Біляніна О.Я., Білянін Г. М. Збірник олімпіадних задач з математики. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 76 с.
28. Бодрик О.Г., Вознюк О.В., Кузенко В.Г. та ін. Збірник конкурсних і олімпіадних задач з математики. – К. : Діалектика, 1995. – 142 с.
29. Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. Математические соревнования. Геометрия. – М.: Наука, 1974. – 80с.
30. Васильев Н.Б., Савин А.П. Избранные задачи математических олимпиад. – М.: Из-во МГУ, 1968.
31. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для пед. институтов – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
32. Вишенський В.А., Ядренко М.Й. Вибрані задачі алгебри і геометрії. – К.: Вища школа, 1978. – 72 с.
33. Вишенський В.А., Ядренко М.Й. Вибрані математичні задачі . – К.: Вища школа, 1974. – 108 с.
34. Воробець Б.П. 300 задач з планіметрії. – Львів: Каменяр, 2000. 52 с.
35. Вороний О.М. Вибрані задачі шкільної математики. – Кіровоград: РВЦ КДПУ, 2001. – 44 с.
36. Германович П.Ю. Вопросы и задачи на соображение для 8-10 классов. Алгебра, геометрия, тригонометрия.: Пособие для учителей. – Л.: Учпедгиз, 1957. – 152 с.
37. Германович П.Ю. Математичні вікторини. – К.: Рад. школа, 1966.
38. Горделадзе Ш.Т., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики: Посібник для вступників до вузів. – К.: Вища школа, 1973. – 324 с.
39. Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л. Математические соревнования. Алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1970.
40. Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Толпыго А.К. Математические задачи. – М.: Наука, 1971.
41. Задачник “Кванта”. Ч. I,II,III. //Приложение к журналу «Квант». – М.: Бюро “Квантум”, 1997.
42. Избранные задачи. Сборник. / под. ред. В.М. Алексеева. – М.: Мир, 1977. – 597 с.
43. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. – Тернопіль: Мандрівець, 1998. – 80 с.
44. Кречмар В.А. Задачник по алгебре. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

45. Купцов А.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. Математические олимпиады школьников. 10. – М.: Просвещение, 1998.
46. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И., Федосов Б.В. Задачи по элементарной математике. – М.: Наука. 1973. – 416 с.
47. Лоповок Л.М. Збірник вправ з геометрії для 6-8 класів. Посібник для вчителів. – К.: Рад. школа, 1977. – 144 с.
48. Лоповок Л.М. Збірник математичних задач логічного характеру. – К.: Рад. школа, 1972. – 159 с.
49. Лоповок Л.М. Сборник геометрических задач для 10 класса. – К.: Рад. школа, 1979. – 96 с.
50. Лоповок Л.М. Факультативные занятия по геометрии для 7 – 11 классов: Пособие для учителя. – К.: Рад. школа, 1990. – 128 с.
51. Математический кружок. Задачник первого-второго года обучения (составитель Иванов С.В.) – С.– Пб. – СПГДТЮ, 1993. – 67 с.
52. Михайловський В.І., Тарасюк В.Є., Ченакал Є.Ю., Шунда Н.М., Савич Є.Ф. Практикум з розв’язування задач з математики. – К.: Вища школа, 1975. – 424 с.
53. Олимпиадные задачи по математике. 6-11 класс. (Составитель Шевченко Е.В.). – Ч.1, Ч.2. – Ильичевск, 2000-2001.
54. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. – М.: Наука, 1991. – 320 с.
55. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
56. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. – (Б-ка мат. кружка). – 288 с.
57. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968.
58. Сивашинский И.Х. Задачи по математики для внеклассных занятий (9-10 классы). – М.: Просвещение, 1968. – 311 с.
59. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967.
60. Сивашинский И.Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. – М.: Наука., 1971. – 368 с.
61. Тригг Ч. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975. – 302 с.
62. Фетисов А.И. Геометрия в задачах. Пособие для учащихся школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики. – М.: Просвещение, 1977, – 192 с.
63. Хонсбергер Р. Математические изюминки. – М.: Наука, 1992.
64. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). – М.: Наука, 1986. – 224 с.
65. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). – М.: Наука, 1984. – 160 с.
66. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.
67. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.
68. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.
69. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1976. – (Б-ка мат. кружка). – 384 с.
70. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). – М.: Гостехиздят, 1954.
71. Штейнгауз Г. Сто задач . – М.: Наука, 1976. – 168 с.
72. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М.: Гостехиздат, 1954.

73. Ясінський В.А. Математика: Олімпіадні задачі. Випуск1. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 40с.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

74. Гайштут А.Г. Математика в логических упражнениях. – К.: Рад школа, 1985.
75. Генкін С.А., Ітенберг І.В, Фомін Д.В. Ленінградські математичні гуртки. – К.: ТВіМС, 1997.
76. Генкин С.А., Итенберг И.В, Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: Пособие для внеклассной роботы. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.
77. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К.: Евроиндекс, 1995.
78. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решать нестандартные задачи: 60-я Московская математическая олимпиада: подготовительный сборник. – М.: МЦНМО, 1997. – 96 с.
79. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Московские математические олимпиады. 60 лет спустя. – Бюро-Квантум, 1995. – (приложение к журналу «Квант» 6/95).
80. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 96 с.
81. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії – К.: Абрис, 1994.
82. Лакатош И. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.
83. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру. – К.: Вища школа, 1992. – 91 с.
84. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Львів:Євросвіт, 1999. – 128 с.
85. Мазаник А.А. Рациональное решение задач и примеров по математике. – Минск: Народная асвета, 1968.
86. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків. – К.: Рад. школа, 1977. – 103 с. (Вид. друге, 1985. – 879 с.).
87. Маланюк П.М. Стежинки до математичних узагальнень. – Тернопіль: Мандрівець, 1997. – 64 с.
88. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач (Методическое пособие). – К.: Агрофирма "Александрия", 1993. – 59 с.
89. Петраков И.С. Математические кружки в 8-10 классах: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
90. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.
91. Пойа Д. Как решать задачу. – Львов: Журнал "Квантор", 1991. – 216 с.
92. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
93. Пойа Д. Математическое открытие. Решения задач: основные понятия, обучение и преподавание. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
94. Русанов В.Н. Математические олимпиады младших школьников: Кн. для учителя: Из опыта работи (в сел. р-нах). – М.: Просвещение, 1999. – 77с.
95. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Методичний посібник. – Житомир, ЖДПУ, 2002. – 238 с.
96. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Розв'язування олімпіадних задач з математики. Ч.1. – Хмельницький: ОІУВ, 1991. – 124 с.

97. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Розв'язування олімпіадних задач з математики. Ч.2. – Хмельницький: ОІУВ, 1993. – 95 с.
98. Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7 – 9 кл. сред. шк./ Сост. И.Л. Никольськая. – М.: Просвещение, 1991. – 383с.
99. Федак І.В. Методи розвязування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці: Зелена Буковина,2002. – 340с.
100. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.
101. Шарыгин И. Ф., Голубев В.И. Факультативний курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. сред. шк. – 14.: Просвещение, 1991. – 384 с.
102. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця, 1998. – 266 с.

ЛІТЕРАТУРА ДО ОКРЕМИХ ТЕМ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

103. Балк М.Б., Болтянський В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987.
104. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972.
105. Беккенбах Э, Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
106. Беккенбах Э, Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965.
107. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985.
108. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979.
109. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К.: Высшая школа, 1988. – 120 с.
110. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: Наука, 1976.
111. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1977.
112. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
113. Вишенський В.А., Сущанський В.І. Дано тільки точки. – К.: Вища школа. 1988. – 95 с.
114. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Книга для учителя. – К.:Рад. школа, 1989. – 160 с.
115. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – М.Наука, 1975.
116. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
117. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. – К.: Вища школа, 1974. – 128 с.
118. Дороговцев А.Я., Ядренко М.Й. Метод координат. – К.: Вища школа, 1972. – 96 с.
119. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. – К.: Вища школа. 1972. – 84 с.
120. Зетель С.Ч. Геометрия циркуля и геометрия линейки. – М.: Учпедгиз, 1957.
121. Зыков А.А. Введение в теория графов. – М.: Наука, 1987.
122. Коваленко В.Г., Гельфанд М.Б., Ушаков Р.П. Доведення нерівностей. – К.: Вища школа, 1979. – 120 с.
123. Кованцов М.І. Геометричні перетворення. – К.: Вища школа, 1972.
124. Коксетер Г.С.М., Грейтсер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
125. Костовський А.Н. Геометрические построения одним циркулем. – М.: Наука, 1984.

126. Кужель О.В. Контрприклади в математиці. – К.: Рад. школа, 1988.
127. Кушнір И.А. Векторные методы решения задач. – К.: Обериг, 1994. – 207 с.
128. Кушнір І.А. Побудова трикутника. Енциклопедія розв'язування задач: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1994. – 80 с.
129. Кушнір І.А. Трикутник і тетраедр у задачах: Для ст. шк. віку. – К.: Рад. школа, 1991. – 208 с.
130. Лейфура В.М. Вибрані задачі з теорії чисел. – Миколаїв, 1995. – 134 с.
131. Лигун А.А., Шумейко А.А., Поляков О.В. Точные неравенства в треугольниках. Пособие для членов и слушателей Днепропетровского МАН. Секция "Математика" – Днепропетровск, 2000. – 10 с.
132. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – С.-П.: Лань, 1997. – 160 с.
133. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.: Наука, 1978.
134. Мітельман І.М. Розмалюємо клітчасту дошку. – Львів, Каменяр, 2001. – 60 с.
135. Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С. Геометрия на плоскости (планиметрия). – Минск: Альфа, 1996.
136. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. – М.:Из-во МГУ, 1991. – 144 с.
137. Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика / Отв. ред. Л.Я. Савельева.– Новосибирск: Наука, 1979. – 177 с.
138. Оре О. Графы и их приложения. – М.: Мир, 1965.
139. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.:Наука, 1980. – 128 с. – (Библиотека "Квант", Вып. 3)
140. Островский А.И., Кордемский Б.А. Геометрия помогает арифметике. М.: 1960.
141. Пенцак Є.А., Юрчишин А.С. Функційні рівняння: Методичний посібник. – Львів:Ред. вид. відділ Львів. ун-ту, 1998. – 112 с.
142. Петечук В.М. Геометрія для 8-го класу з поглибленим вивченням математики (На допомогу вчителеві). – Ужгород: Карпати, 1992. – 124 с.
143. Понарин Я.П., Скопец З.А. Перемещения и подобия плоскости. – К.: Рад. школа, 1981. – 176 с.
144. Рижов Ю.М. Границі. – К.: Вища школа, 1972. – 104 с.
145. Савин А.П. Математические миниатюры. – М.: 1991.
146. Скопец З.А. Геометрические миниатюры /Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
147. Смогоржевский А.С. Линейка в геометрических построениях. – М.: Наука, 1957.
148. Тесленко І.Ф. Метод інверсії. – К.: Вища школа, 1976. – 72с.
149. Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра / Под ред. А.А. Егорова. – М.: Бюро-Квантум, 1994. – 128 с. – (Прилож к журналу «Квант». – №2/94).
150. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Ч.І. Движения и преобразования подобия. – М.: Гостехиздат, 1956.
151. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Ч.ІІ. Линейные и круговые преобразования. – Л.: Гостехиздат, 1956.
152. Ядренко М.Й. Принцип Діріхле та його застосування. – К.: Вища школа, 1985. – 80с.

НАУКОВО-ПОПУЛЯРНА ЛІТЕРАТУРА

153. Барр Ст. Россыпи головоломок. М.: Мир, 1987. – 415 с.
154. Бизам Д., Герцег Я. Многоцветовая логика. 175 логических задач. – М.: Мир, 1978. – 435 с.
155. Болховитинов В.Н., Колтовой Б.И., Лаговский И.К. Твое свободное время. Занимательные задачи, опыты, игры. – М.: Детская литература, 1975. – 464 с.
156. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.
157. Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972.
158. Гарднер М. Есть идея! – М.: Мир, 1982.
159. Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир. 1974.
160. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. М.: Наука, 1986.
161. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. – М.: 1977.
162. Дубровский В.Н., Калинин А.Т. Математические головоломки. – М.: Знание, 1990.
163. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. – М.: Наука, 1978. – 192 с.
164. Интересные задачи для любителей математики из старых русских задачников /Под ред. Олехника С.Н., Потапова М.К. – М.: Наука, 1984.
165. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Рад. школа, 1981. – 189 с.
166. Конфорович А.Г. Математичні софізми і парадокси. – К.: Рад. школа, 1983. – 208 с.
167. Кордемский Б.А. Математическая смекалка.– М.: ГИТТЛ, 1957. – 576 с.
168. Кордемский Б.А. Увлечь школьников математикой (Материал для классных и внеклассных занятий). – М.: Просвещение, 1981. – 112 с.
169. Кордемский Б.А., Анадов А.А. Удивительный мир чисел: (Математические головоломки и задачи для любознательных): Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1986. – 144 с.
170. Куликов А.Н. Задачи, ребусы, головоломки стран мира. – М.:Пилигрим., 1996. – 336 с.
171. Олейник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. – М.:Наука, 1985. – 160 с.
172. Перельман Я.И. Живая математика: Математические рассказы и головоломки. – М.: Наука, 1978. – 176 с.
173. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1975. – 200 с.
174. Перельман Я.И. Занимательная геометрия. – М.: Физматгиз, 1958.
175. Поляк Г.Б. Занимательные задачи. – М., 1957.
176. Черватюк О.Г., Шиманська Г.Д. Елементи цікавої математики на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Рад. школа, 1968. – 191 с.

Зміст