І.В.ФЕДАК

ГОТУЄМОСЯ ДО ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Ч.І.

Теорія чисел, комбінаторика, алгебра

Схвалено комісією з математики Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки України
як посібник для загальноосвітніх навчальних закладів
(протокол № 4 від 19 червня 2003 року)

Передмова автора

Математична освіта у загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями алгоритмів розв'язування стандартних задач. Але часто доводиться мати справу із задачами, для розв'язування яких традиційних способів буває недостатньо. Як правило, завдання такого типу пропонуються на різноманітних олімпіадах. Часто розв'язання олімпіадної задачі ґрунтується на використанні однієї оригінальної ідеї. Однак в більшості випадків одні і ті ж підходи реалізуються для розв'язування багатьох задач. Тільки, на відміну від стандартного алгоритму, треба ще здогадатися, що саме цей, а не інший метод, необхідно використати.

Мета цієї книжки – познайомити читачів з деякими методами розв'язування олімпіадних задач. Зміст її побудовано так, що загальні висновки і рекомендації встановлюються і формулюються в процесі аналізу та розв'язування конкретних задач, взятих в основному з математичних олімпіад різних рівнів. В дужках вказано для яких класів рекомендована та чи інша задача. До кожного параграфа пропонується по 15 вправ, до котрих в кінці книги наведені вказівки щодо їх розв'язування.

Книга є логічним доповненням попередніх книжечок автора, які вийшли протягом 1997–1998 років у серії "Бібліотечка заочної математичної школи" (м. Тернопіль). У процесі її підготовки враховано досвід читання спецкурсу "Розв'язування задач підвищеної складності з математики" для студентів математичних спеціальностей Прикарпатського національного університету, авторських курсів для вчителів математики Івано-Франківської, Вінницької та Чернівецької областей, проведення факультативних занять у ліцеях Івано-Франківщини, участі в роботі журі II – IV етапів Всеукраїнської олімпіади юних математиків, конференції Соросівських учителів.

Для самостійної роботи з книгою від читача не вимагається знання позапрограмного матеріалу. Разом з тим, така робота вимагатиме від читача і чималих зусиль для відновлення окремих проміжних результатів чи обґрунтувань, які пропонується зробити самостійно. Але, мабуть, лише в такий спосіб, працюючи неформально, і можна добитися певних успіхів, чого я вам щиро бажаю.

Сподіваюсь також, що книжка виявиться корисною як для тих творчих учителів, які вже успішно працюють з обдарованою молоддю, так і для тих, хто лише хоче випробувати себе на цій ниві.

§ 1. Парність

Перша спроба класифікувати натуральні числа приводить до поділу їх на класи парних та непарних чисел. Про те, що такий поділ є змістовним, свідчать задачі цього параграфа. При їх розв'язуванні використовуються такі основні ідеї: чергування, групування у пари, збереження парності при перетвореннях, підрахунок двома способами. Проілюструємо їх застосування на конкретних прикладах.

Задача 1.1. (7-8). На площині розташовані 2005 шестерень, з'єднані одна з одною у вигляді замкнутого ланцюжка. Чи можуть всі шестерні рухатися одночасно?

Розв'язання. Пронумеруємо всі шестерні в порядку обходу їх вздовж ланцюжка числами від 1 до 2005. Припустимо, що перша шестерня рухається за годинниковою стрілкою. Тоді друга шестерня повинна рухатися проти годинникової стрілки, і т.д. Зрозуміло, що при цьому кожна шестерня з непарним номером змушена буде рухатися за годинниковою стрілкою. Але перша та 2005-а шестерні є сусідніми і одночасно рухатися за годинниковою стрілкою не можуть. А тому і весь набір шестерень також не може рухатися одночасно.

Задача 1.2. (8-9). На безмежному хокейному полі лежать три шайби A, B, C. Хокеїст кидає одну з них так, щоб вона пройшла між двома іншими. Чи можуть всі шайби після 2003-ох кидків, виконаних у довільному порядку, опинитися на своїх початкових місцях?

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що коли спочатку всі шайби розміщувались на одній прямій, то після жодного числа кидків опинитися знову на одній прямій вони не зможуть. Зрозуміло, що в такому разі перший удар проводиться по середній шайбі. Якщо ж шайби знаходились у вершинах деякого трикутника ABC, то після кожного кидка його орієнтація (тобто порядок обходу вершин від A до B і до C "за" чи "проти" годинникової стрілки) змінюється на протилежну. А тому після непарного числа кидків шайби опинитися на своїх початкових місцях не можуть.

Задача 1.3. (7-8). Чи може кінь пройти з поля *a1* шахівниці на поле *h8*, побувавши по дорозі на кожному з решти полів по одному разові?

Розв'язання. Зрозуміло, що для виконання умови задачі кінь повинен зробити 63 ходи. Але при цьому, рухаючись за правилами шахової гри, він почергово ставатиме на біле або на чорне поле шахівниці. Оскільки поле *a1* чорне, то після кожного непарного ходу кінь займатиме білі поля. Отже, після 63-го ходу він не зможе опинитися на полі *h8* чорного кольору.

Задача 1.4. (7-8). Автобусні квитки мають номери від 000000 до 999999. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі решти трьох. Довести, що загальна кількість щасливих квитків є парною.

Розв'язання. Якщо у квитка $\overline{abcdeh}$ перші три цифри відповідно співпадають із трьома останніми, тобто $\overline{abc} = \overline{deh}$, то такий квиток є щасливим, а всіх таких щасливих квитків стільки ж, скільки і квитків $\overline{abc}$, тобто парне число 1000. Це легко підрахувати, враховуючи, що номери останніх міняються в межах від 000 до 999. Якщо ж $\overline{abc} \neq \overline{deh}$, то поряд із щасливим квитком $\overline{abcdeh}$ таким же буде і відмінний від нього квиток $\overline{dehabc}$. Отже, такі щасливі квитки можна розбити на пари. А тому їх загальна кількість теж є парною.

Зауважимо, що коли в пару з квитком $\overline{abcdeh}$ поставити квиток з цифрами $9-a$, $9-b$, $9-c$, $9-d$, $9-e$, $9-h$, то зразу одержимо розбиття на пари, в кожну з яких входять або два різні щасливі квитки, або два квитки, жоден з яких не є щасливим.

Відзначимо, що групування у пари за певним принципом дає можливість встановлювати й інші властивості досліджуваної системи. Наприклад, легко довести, що при останньому способі групування сума цифр номерів кожної пари виявиться рівною 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 54. Звідси випливає, що й сума цифр номерів усіх щасливих квитків ділиться на 54.

Наголосимо, що при групуванні важливо слідкувати, щоб у кожну пару обов’язково попадали два різні квитки. Саме тому при першому способі групування квитків нам довелося розглядати два випадки. Крім того, необхідно також, щоб при цьому всі щасливі були охоплені.

Задача 1.5. (7-8). Розставити замість зірочок знаки “+” чи “–” так, щоб одержати правильну рівність:

$$1*2*3*4*5*6*7*8*9=10.$$

Розв’язання. Оскільки у виразі зліва записана непарна кількість непарних чисел, то як би ми не розставляли знаки “+” чи “–”, значення цього виразу буде непарним числом. А тому рівність виконуватися не може.

Звернемо увагу читачів, що автоматична заміна в задачі 1.5 числа 10 на непарне число не обов’язково приведе до позитивного результату. Але для будь-якого непарного числа з проміжку $[-43;45]$ задача завжди матиме один чи декілька розв’язків. Наприклад, у випадку числа 25 знак “–” слід поставити перед довільними двома числами, сума яких дорівнює 10. Справді, сума всіх чисел зліва дорівнює 45. Щоб зменшити її на 20, необхідно змінити знаки перед числами, сума яких дорівнює 20 : 2 = 10.

Задача 1.6. (7-8). На дошці записані числа 1, 2, ..., 2005. Дозволяється витерти з дошки довільні два числа і замість них записати модуль їх різниці. Після 2004 таких кроків залишиться одне число. Чи може воно дорівнювати нулю?

Розв’язання. Оскільки числа a_p+a_k та $\left|a_p-a_k\right|$, однакової парності, то парність суми усіх записаних на дошці чисел після кожного витирання не змінюється. Але спочатку ця сума дорівнювала 1 + 2 + ... + 2005 = (1 + 2004) + (2 + 2003) + ... + (1002 + 1003) + 2005 =

= 1003 · 2005, тобто була непарним числом. Тому єдине число, яке залишиться, теж повинне бути непарним, а отже, не може бути нулем.

Задачу можна розв’язувати ще й так. Зауважуємо, що після кожного кроку кількість записаних на дошці непарних чисел або не змінюється, або зменшується на 2 (якщо витерли два непарні числа). Оскільки спочатку непарних чисел було 1003, то останнє число, яке залишиться, теж буде непарним.

Ця ідея може бути застосованою і при розв'язуванні наступної задачі.

Задача 1.7. (7-8). У банці лежать білі і чорні зернята. Навмання виймають два з них. Якщо вони одного кольору, то замість них в банку кладуть чорне зернятко; якщо різного – то чорне зернятко забирають, а біле кладуть назад у банку. Врешті-решт у банці залишилось одне зернятко. Якого воно кольору, якщо спочатку білих зернят було 100 ?

Розв'язання. Зрозуміло, що після кожного кроку число білих зернят або не змінюється, або зменшується на 2. Тому залишитись може лише чорне зернятко.

Задача 1.8. (7-8). Чи можна в таблицю розміром 5×5 записати числа 1, 2, . . ., 25 так, щоб у кожному рядку сума деяких із записаних у ньому чисел дорівнювала сумі решти чисел цього рядка?

Розв'язання. Не можна, бо тоді сума чисел у кожному рядку, а отже, і в усій таблиці була би парною. Але 1 + 2 + ... +25 = 325 – непарне число.

Задача 1.9. (7-8). Чи можна на площині розташувати 2005 кіл однакового радіуса так, щоб кожне з них дотикалося до трьох інших?

Розв'язання. Ні, не можна. Припустимо, що на кожному колі знаходиться по 3 точки дотику. Оскільки при цьому кожна точка врахована двічі, то загальна кількість точок дотику повинна дорівнювати $\frac{2005\cdot 3}{2}$, а це число не є цілим.

Задача 1.10. (8-9). У загоні 120 осіб. Щовечора чергують троє. Чи можна скласти графік чергування так, щоб кожні дві особи чергували разом рівно один раз?

Розв'язання. Ні, не можна, бо для того, щоб особа *А* прочергувала із 119-ма іншими рівно один раз, ці останні треба було б розбити на пари так, щоб жодна не входила в різні пари. А це неможливо, бо 119 – непарне число.

Дещо складнішим прикладом підрахунку двома способами служить наступна задача третього етапу олімпіади з математики.

Задача 1.11. (8-10). Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку зафарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх із нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

Розв'язання. Зазначимо, що після кожного перефарбовування кількість чорних вершин змінюється на непарне число. Тому, якщо вказане перефарбовування можливе, то воно складається з непарного числа кроків. Позначимо вершини через A_1, A_2, …, A_{2001}, починаючи з вершини A_1 чорного кольору. Нехай a_k – кількість тих кроків, при яких центром зміни кольорів була вершина A_k. Тоді $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2001}$ – це загальна кількість всіх кроків і вона, згідно доведеного, має бути непарним числом. Але $S = (a_1 + a_2 + a_3) +$ $+ \ldots + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001})$. Тут у кожних дужках суми трьох записаних доданків співпадають із загальною кількістю змін кольору відповідно у вершинах A_2, A_5, …, A_{2000}. Справді, наприклад, у вершині A_2 колір міняється тоді і тільки тоді, коли центром зміни є вершини A_1, A_2, A_3, а сумарна кількість таких змін дорівнює $a_1+a_2+a_3$. Оскільки у них і спочатку, і вкінці колір буде білим, то кожна з цих сум, а з ними і S, є парною. Одержане протиріччя доводить неможливість вказаного перефарбування.

Вправи до § 1

1. (7-8). На прямій взяли декілька точок. Потім між кожними сусідніми вставили ще по одній точці. Так повторили декілька разів. Чи могли всього одержати: а) 2004; б) 2005 точок ?
2. (7-8). Чи можна у записі $1 * 2 * 3 * \ldots * 1997 = 1 * 9 * 9 * 7$ розставити замість зірочок знаки "+" або "–" так, щоб одержати правильну рівність?
3. (7-8). Доведіть, що не можна добитися виконання рівності $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}=0$, розставляючи замість зірочок знаки "+" або "–" .
4. (7-8). На олімпіаді деякі учасники привіталися між собою. Доведіть, що кількість учасників, які зробили непарне число привітань, є парною.
5. (8-9). Доведіть, що опуклий 13-кутник не можна жодним способом розбити на паралелограми.
6. (7-9). Перевірте, чи можна намалювати: а) опуклий чотирикутник; б) опуклий п'ятикутник разом з їхніми діагоналями, не відриваючи олівця від листка паперу і не проводячи жоден із відрізків більше одного разу. Узагальніть одержані результати на випадок 2005-кутника.
7. (7-8). Із 28 плиток доміно забрали всі доміно з одиницями. Чи вдасться з решти плиток викласти згідно правил гри у: а) замкнутий ланцюг; б) незамкнутий ланцюг?
8. (7-8). Із шахівниці вирізали поля a_1 та h_8 . Чи можна решту дошки покрити 31-єю плиткою розмірами 1×2?
9. (7-8). Чи можна числа 1, 2, 3, ... , 33 розбити на 11 груп так, щоб у кожній групі одне число дорівнювало сумі двох інших?
10. (7-8). Числа 1, 2, 3, ..., 30 виписали у таблицю розмірами 5×6 (5 рядків та 6 стовпчиків). Чи могли виявитися однаковими суми чисел: а) кожного рядка; б) кожного стовпця цієї таблиці ?
11. (7-8). Квадрат 7×7 заповнений числами так, що добуток чисел кожного рядка від'ємний. Доведіть, що добуток чисел принаймні одного стовпчика теж від'ємний.
12. (8-9). Цифри деякого п'ятицифрового числа записали у зворотному порядку. Одержане число додали до початкового. Доведіть, що хоч одна цифра такої суми є парною.
13. (7-9). n-цифрове число "y" утворене перестановкою цифр числа "x". При яких значеннях n сума $x + y$ може бути записана лише дев'ятками?
14. (7-9). Коник стрибає вздовж прямої, причому кожен непарний стрибок він робить на 1 см, а кожен парний – на 2 см вліво або вправо. На якій найближчій відстані від початкової точки він може опинитися після: а) 2004; б) 2005 стрибків?
15. (7-9). При яких n число $n^2 + n +1$ ділиться на 2004.

§ 2. Подільність і остачі

Інший підхід до класифікації натуральних чисел полягає у розбитті їх на прості і складені числа. Нагадаємо, що натуральне число є складеним, якщо воно дорівнює добутку двох менших натуральних чисел (отже, ділиться на кожне з цих чисел). Всяке ж просте число ділиться лише на 1 та саме на себе. Число 1 не є а ні простим, а ні складеним.

Кожне натуральне число, крім одиниці, єдиним способом розкладається у добуток простих множників. Це твердження називають *основною теоремою арифметики.* Зрозуміло, що число a ділиться на просте число p тоді і тільки тоді, коли p є одним із множників згаданого розкладу.

Два числа називаються взаємно простими, якщо у них немає спільних дільників, відмінних від одиниці. Легко довести такі очевидні твердження:

а) якщо деяке число ділиться на два взаємно прості числа n та m, то воно ділиться і на їх добуток nm;

б) якщо число pa ділиться на n, де p і n взаємно прості, то a ділиться на n.

Задача 2.1. (7-8). Довести, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

Розв'язання. Серед трьох послідовних натуральних чисел є принаймні одне парне число і одне число, що ділиться на 3. Оскільки 2 і 3 взаємно прості, то добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на $2 \cdot 3 = 6$.

Тут ми безпосередньо скористалися твердженням а). А ось при розв'язуванні наступної задачі попередньо проводиться допоміжне міркування.

Задача 2.2. (7-8). Довести, що добуток чотирьох послідовних натуральних чисел ділиться на 24.

Розв'язання. Як і в попередній задачі, зауважуємо, що серед чотирьох послідовних натуральних чисел є принаймні одне, яке ділиться на 3, та одне, яке ділиться на 4. Але цього для подільності добутку на 24 замало. Тому слід звернути увагу ще й на те, що серед згаданих чотирьох чисел є ще одне парне число, відмінне від того, яке ділиться на 4. Звідси і випливає подільність добутку на $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

На властивостях подільності та розкладу чисел на множники ґрунтуються і поширені методи розв'язування рівнянь в цілих числах.

Задача 2.3. (7-8). Розв'язати у цілих числах рівняння: $x^2 - y^2 = 1997$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)\cdot(x+y)=1997$. Якщо x, y – цілі числа, то $(x - y)$ та $(x + y)$ теж цілі числа. Оскільки 1997 – просте число, то звідси одержуємо сукупність таких чотирьох систем рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=1997; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1997, \\ x+y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=-1997; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1997, \\ x+y=-1. \end{cases}$$

З них легко одержати чотири розв'язки задачі: $x_1 = 999$, $y_1 = 998$; $x_2 = 999$, $y_2 = -998$; $x_3 = -999$, $y_3 = -998$; $x_4 = -999$, $y_4 = 998$.

Звертаємо увагу читачів, що при пошуку розв'язків у цілих числах ми розглядали не лише натуральні дільники простого числа 1997, а й дільники з протилежним до них знаком. Адже без їх врахування було б втрачено відразу три розв'язки із чотирьох.

А ось дещо складніший приклад такого типу.

Задача 2.4. (7-8). Розв'язати у цілих числах рівняння $xy = x + y + 1996$.

Вказівка до розв'язування. Запишіть рівняння у вигляді $(x-1)\cdot(y-1)=1997$ і скористайтеся міркуваннями попередньої задачі.

При розв'язуванні задач, пов'язаних із подільністю чисел, важливу роль відіграють ознаки подільності. Деякі з них добре відомі учням. Так, число *a* ділиться на 2, якщо його остання цифра парна; на 3 – якщо сума цифр ділиться на 3; на 4 — якщо число, складене з двох останніх цифр, ділиться на 4; на 5 – якщо задане число закінчується цифрами 0 або 5; на 9 – якщо сума цифр ділиться на 9; на 10 – якщо остання цифра – нуль; на 25 – якщо число, складене з двох останніх цифр, ділиться на 25. На основі цих ознак легко вивести ознаки подільності на деякі інші числа. Наприклад, для подільності числа *a* на 6 необхідно і достатньо, щоб остання цифра числа *a* була парною, а сума цифр ділилася на 3. Для подільності натурального числа *a* на 11 необхідно і достатньо, щоб сума цифр, які у десятковому записі числа *a* стоять на непарних місцях, мінус сума цифр, які стоять на парних місцях, ділилась на 11. Для перевірки подільності числа $\overline{abcdeh}$ на 7, 11 та 13 достатньо перевірити, чи ділиться відповідно на 7, 11 та 13 число $\overline{deh}-\overline{abc}$. Такий спосіб перевірки ґрунтується на рівностях $7\cdot 11\cdot 13=1001$, $\overline{abcdeh}=1001\cdot\overline{abc}+\left(\overline{deh}-\overline{abc}\right)$.

Розглянемо застосування деяких із цих ознак на конкретних прикладах.

Задача 2.5. (7-8). Чи може число, в десятковому записі якого використано 100 одиниць та 100 двійок, а решта цифр – нулі, бути точним квадратом ?

Розв'язання. Ні, не може, бо сума цифр цього числа дорівнює 300. Отже, воно ділиться на 3. Тоді, щоб число було точним квадратом воно повинно ділитися і на 9. А на 9 воно не ділиться, бо на 9 не ділиться число 300.

Зауважимо, що застосування ознаки подільності на 9 відразу привело до негативної відповіді. Але хочемо застерегти від поспішного протилежного висновку у подібній ситуації. Так, число 1111111110 ділиться на 9, але точним квадратом не є.

Задача 2.6. (8-9). Чи можна всі двоцифрові числа від 32 до 86 включно виписати у деякому порядку одне за одним так, щоб одержати запис простого числа?

Розв'язання. В якому б порядку ми не записували задані числа, сума цифр, що стоятимуть на непарних місцях, тобто сума перших цифр чисел від 32 до 86 включно, дорівнюватиме 300. Сума ж цифр, що стоятимуть на парних місцях, дорівнюватиме 245. Оскільки число 300–245 = 55 ділиться на 11, то в результаті дістанемо число, яке ділиться на 11, і яке не є простим.

Якщо натуральне число a не ділиться на натуральне число m, то можна розглядати ділення з остачею. Нехай $a = km + n$, де k – ціле невід'ємне число, $0 \le n < m$. Тоді число k називають неповною часткою, а n – остачею від ділення a на m. Випадок $n = 0$ відповідає подільності числа a на m націло.

Зауважимо, що іноді замість розгляду остач доцільно перейти до подільності чисел. Наприклад, для знаходження числа n, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – остачу 2, …, при діленні на 10 – остачу 9, достатньо спершу знайти число $n + 1$, яке ділиться і на 2, і на 3, …, і на 10.

Узагальнюючи, відзначимо, що для довільного набору попарно взаємно простих чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$, і цілих чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, де $0 \le r_i < m_i$, існує таке число k, яке при діленні на m_i дає остачу r_i, $i = 1, 2, ..., n$. Цей факт носить назву *"китайська теорема про лишки"*. Вона була відома у стародавньому Китаї вже більш ніж 2000 років тому.

Властивості остач можуть бути успішно використані при розв'язуванні задач. Зокрема, справедливі такі твердження:

1. Сума будь-яких двох натуральних чисел і сума їх остач при діленні на натуральне число $m \ge 2$ дають однакові остачі;

2. Добуток будь-яких двох натуральних чисел і добуток їх остач при діленні на натуральне число $m \ge 2$ теж дають однакові остачі.

Справді, нехай $a_1 = k_1 m + n_1$, $a_2 = k_2 m + n_2$. Тоді

$$a_1 + a_2 = (k_1 m + n_1) + (k_2 m + n_2) = (k_1 + k_2)m + (n_1 + n_2); \; a_1 a_2 = (k_1 m + n_1)(k_2 m + n_2) = (mk_1 k_2 + k_1 n_2 + k_2 n_1)m + n_1 n_2.$$

Цим, очевидно, обидва твердження доведені.

Зауважимо, що подібними міркуваннями можна було б довести справедливість аналогічних тверджень для довільного числа доданків чи довільного числа множників, зокрема, і відповідну властивість остач для степеня натурального числа.

Відзначимо також, що натуральне число a і сума його цифр при діленні на 3 чи на 9 мають одну і ту ж остачу. Цей факт доводиться так само, як і ознаки подільності на 3 чи на 9. Зрозуміло, що ці ж ознаки є його частковим випадком, коли остача дорівнює нулю.

Розглянемо приклади задач.

Задача 2.7. (7-8). Є три купки камінців. Одним ходом дозволяється або з кожної купки забрати одну і ту ж кількість камінців (від ходу до ходу ця кількість може змінюватися), або половину камінців з будь-якої купки (якщо їх у ній парна кількість) перекласти в будь-яку іншу купку. Спочатку у купках було відповідно 1997, 997 та 97 камінців. Чи можна при цих правилах добитися того, щоб у кожній купці не залишилося жодного камінця?

Розв'язання. Після кожного ходу остача від ділення загальної кількості камінців у трьох купках на число 3 не змінюється. Але початкова сума 1997 + 997 + 97 на 3 не ділиться. Тому добитися того, щоб у кожній купці не залишилося жодного камінця, не вдасться.

Задача 2.8. (8-9). Визначити дві останні цифри числа 2^{2002}.

Розв'язання. Дану задачу можна сформулювати таким чином: Знайти остачу від ділення числа 2^{2002} на 100. Для її розв'язання скористаємося сформульованим вище твердженням 2, знаходячи послідовно остачі від ділення на 100 чисел вигляду 2^n. Послідовність таких остач, починаючи з ділення числа 2^1, має вигляд: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 28

($64 \cdot 2 = 128$, отже, остача 28), 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, ... Як бачимо, починаючи з другої остачі 4 – для числа 22, остачі від ділення інших чисел повторюються з періодом 20. Оскільки 2002 при діленні на 20 дає остачу $2 > 1$, то дві останні цифри числа 2^{2002} такі ж, як і дві останні цифри числа 2^2, тобто 0 та 4.

Зауважимо, що для числа 2^{2001} дві останні цифри будуть 5 та 2 (як у числа 2^{21}), а не 0 та 2.

Задача 2.9. (7-8). Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n, $S(S(n))$ – сума цифр числа $S(n)$. Чи існує таке натуральне число n, для якого виконується рівність:

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2005\ ?$$

Розв'язання. Не існує, бо при діленні на 3 кожен доданок лівої частини рівності має одну і ту ж остачу. Отже, при кожному натуральному n вираз зліва ділиться на 3, а 2005 на 3 не ділиться.

Задача 2.10. (9-10). Із чисел, утворених перестановкою перших 12-и цифр 120-цифрового числа, вибрали якісь 120 чисел. Довести, що їх сума ділиться на 120.

Розв'язання. Зауважимо, що при перестановці цифр заданого числа сума його цифр не змінюється. Тому при діленні на 3 кожне з таких чисел дає одну і ту ж остачу. Отже, різниця будь-яких двох із вибраних чисел ділиться на 3. Але така різниця закінчується 108-ма нулями, а тому ділиться і на 40. Оскільки 3 та 40 взаємно прості, то ця різниця ділиться також і на $3 \cdot 40 = 120$. Отже, на 120 ділиться і сума вигляду $a_1 + a_2 + \ldots + a_{120} = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \ldots + 119(a_{119} - a_{120}) + 120a_{120}$ де a_1, a_2, ..., a_{120} – вибрані числа, оскільки кожний доданок у правій частині рівності ділиться на 120.

Інший напрям використання властивостей остач при розв'язуванні задач пов'язаний з їх повним перебором.

Задача 2.11. (8-9). Довести, що число $p^3 + 2p$ ділиться на 3 при довільному натуральному p.

Розв'язання. Число p при діленні на 3 може давати одну з трьох остач: 0, 1, 2. Розглянемо ці три випадки. 1) Якщо маємо остачу 0, то p^3 та $2p$ діляться на 3, а тому $p^3 + 2p$ теж ділиться на 3; 2) Якщо маємо остачу 1, то на основі твердження 2, p^3 дає остачу 1, а $2p$ – остачу 2. Але 1+2=3 ділиться на 3. Тому на основі твердження 1, $p^3 + 2p$ також ділиться на 3. 3) Якщо ж маємо остачу 2, то аналогічно встановлюємо, що, p^3 дає остачу 2, як і 2^3, а $2p$ – остачу 1. Отже, число $p^3 + 2p$ знову ділиться на 3.

Задача 2.12. (8-9). Довести, що квадрати натуральних чисел при діленні на 4 можуть давати лише остачі 0 або 1.

Розв'язання. Число p при діленні на 4 може давати остачі 0, 1, 2, 3. На основі твердження 2, для числа $p^2 = p \cdot p$ відповідно одержимо остачі 0, 1, 0, 1.

Зауважимо, що для розв'язання останньої задачі вистачило б і перебору лише двох остач від ділення числа p на 2. Справді, для $p = 2k$ маємо $p^2 = 4k^2$, а для $p = 2k+1$ одержимо $p^2 = 4(k^2 + k) + 1$.

Твердження задачі 2.12 інколи застосовують для розв'язування складніших задач.

Задача 2.13. (8-9). При яких n число $6^n - 5^n$ є точним квадратом?

Розв'язання. При $n = 1$ число $6^n - 5^n = 6 - 5 = 1^2$. При $n > 1$ число 6^n ділиться на 4, а число $5^n = (4+1)^n$ при діленні на 4 дає остачу 1. Отже, число $6^n - 5^n$ тоді дасть остачу 3, а тому це число уже не буде точним квадратом.

Аналогічно до того, як встановлені вище остачі від ділення на 4 квадратів натуральних чисел, можуть бути остачами від ділення квадратів цих же чисел на інші натуральні числа. Зокрема, остачі від ділення квадратів натуральних чисел на 3 також можуть дорівнювати лише 0 та 1. Усе це можна використати при розв'язуванні наступної задачі.

Задача 2.14. (8-9). При яких n число $2^n + 3^n + 4^n$ є точним квадратом?

Розв'язання. При $n = 1$ число $2^n + 3^n + 4^n = 2 + 3 + 4 = 3^2$ є точним квадратом. Якщо ж $n > 1$, то для $n = 2k$ одержимо, що число $2^n + 3^n + 4^n$ при діленні на 3 дає остачу 2. Це легко вивести з використанням твердження 2, записавши $2^n = 4^k$. При $p = 2k + 1$ остача від ділення числа $2^n + 3^n + 4^n$ на 4 дорівнює 3. Цей висновок просто випливає з тверджень 1 і 2, якщо записати, що $3^n = 3 \cdot 9^k$ і врахувати, що числа 2^n та 4^n діляться на 4. Отже, відповідь до задачі одна: при $n = 1$.

Зауважимо, що до розгляду такого роду остач можуть приводити і задачі іншого характеру, наприклад.

Задача 2.15. (8-9). У деякій клітинці таблиці $n \times n$ сидить жук. За один хід він може переповзати на сусідню клітинку в одному з таких трьох напрямків: вгору, вправо, по діагоналі вліво вниз. Чи зможе він побувати у кожній клітинці таблиці по одному разу, завершивши свій обхід у клітинці, сусідній справа від початкової?

Розв'язання. Нехай у напрямку вгору зроблено k кроків. Тоді, щоб опинитись на початковій горизонталі, стільки ж кроків слід зробити по діагоналі вліво вниз. А, щоб перейти на сусідню справа від початкової вертикалі, вправо слід переповзати $k + 1$ раз. Отже, всього одержимо $3k + 1$ хід. З іншого боку ця кількість має дорівнювати $n^2 - 1$. Звідси маємо $n^2 = 3k + 2$, що неможливо. Отже, вказаний обхід здійснити не вдається.

В задачах, в яких зустрічаються куби натуральних чисел, варто спробувати використати остачі від ділення на 7 та на 9.

Задача 2.16. (8-9). Довести, що куби натуральних чисел при діленні на 7 можуть давати лише остачі 0, 1 та 6.

Розв'язання. Число n при діленні на 7 може давати остачі 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6. Користуючись узагальненням твердження 2 для випадку трьох множників, одержимо, що відповідні остачі для чисел n^3 такі ж, як і остачі для чисел 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3 5^3, 6^3, тобто 0, 1, 1, 6, 1, 6, 6. □

Аналогічно доводиться, що куби натуральних чисел при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1, 8.

Зауважимо, що при розв'язуванні задач 2.11, 2.12, 2.16 ми явно спиралися на властивості остач, сформульовані у твердженнях 1 і 2. Але кожну з цих задач можна було б розв'язати і без посилання на ці твердження. Зокрема, для розв'язування задачі 2.16 можна було провести повний перебір остач від ділення на 7 чисел вигляду $(7k)^3$, $(7k+1)^3$, $(7k+2)^3$, $(7k+3)^3$, $(7k+4)^3$, $(7k+5)^3$ та $(7k+6)^3$.

Задача 2.17. (8-9). Довести, що число $n^9 - n^3$ ділиться на 504 при кожному натуральному n.

Розв'язання. Оскільки 504 = 7 · 8 · 9, а числа 7, 8, 9 попарно взаємно прості, то достатньо довести подільність числа $n^9 - n^3$ на кожне з цих чисел. Запишемо $n^9 - n^3 = (n^3 - 1) \cdot n^3 \cdot (n^3 + 1)$.

Враховуючи властивості остач від ділення кубів натуральних чисел на 7 та на 9, одержимо, що принаймні один із множників справа ділиться на 7 і принаймні один з них ділиться на 9. Котрий саме, очевидно, залежить від того, якою є остача від ділення числа n^3 на 7 (чи на 9). Отже, добуток цих множників ділиться на 7 і на 9. Якщо n – парне, то множник n^3 ділиться на 8; якщо ж $n = 2k + 1$, тобто n – непарне, то $n^3 - 1$ та $n^3 + 1$ – два сусідні парні числа. Але тоді одне з них ділиться на 4, а їхній добуток – на 8. Тому число $n^9 - n^3$ ділиться на 504 при кожному натуральному n.

Зауважимо, що $504 = 2^9 - 2^3$, тому 504 – найбільше натуральне число, на яке число $n^9 - n^3$ ділиться при всіх натуральних n.

У наступній задачі із заочної математичної олімпіади журналу "У світі математики" до успіху приводить розгляд остач від ділення на 8.

Задача 2.18. (9-10). Знайти всі натуральні числа x, y, z, для яких виконується рівність $105^x + 211^y = 106^z$.

Розв'язання. При $z \geq 3$ число 106^z ділиться на 8. Оскільки 105 = = 8 · 13 + 1, то при кожному натуральному x число 105^x при діленні на 8 дає остачу 1. Оскільки, далі, 211 = 8 · 26 + 3, а степені трійки при діленні на 8 почергово дають остачі 3 та 1, то і в числах 211^y ці ж дві остачі теж будуть чергуватися. Тому при $z \geq 3$ рівність виконуватися не може. При z=1 виконується нерівність $211^y > 106^z$. Тому залишилось перевірити $z = 2$. Оскільки $211^2 > 106^2$, то $y = 1$. Легко побачити, що тоді $x = 2$. Отже, $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ – єдиний розв'язок цієї задачі.

А тепер розглянемо приклад задачі на подільність, коли змінюється не лише ділене, а й дільник.

Задача 2.19. (9-10). Довести, що при довільному непарному натуральному n число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot \ldots \cdot 2n$ ділиться на $2n + 1$.

Розв'язання. Скористаємось позначенням $n!$ (читається "ен факторіал") для добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ і запишемо дану суму у вигляді

$$n! + ((2n+1)-n) \cdot ((2n+1)-(n-1)) \cdot ((2n+1)-(n-2)) \cdot \ldots \cdot ((2n+1)-1) =$$
$$= n! + (2n+1) \cdot a - n! = (2n+1) \cdot a,$$

де a – деяке ціле число. Звідси елементарно випливає твердження задачі.

А ось ще декілька задач, в яких фігурують факторіали.

Задача 2.20. (9-10). Чи може число $n!$ при деякому натуральному n закінчуватися 1998-ма нулями?

Розв'язання. Оскільки в розкладі чисел $n!$ на прості множники просте число 2 зустрічається в степенях вищих, ніж просте число 5, то потрібно встановити, чи існує таке число n, для якого в розкладі на прості множники числа $n!$ число 5 входить в 1998-му степені. Оскільки

$$\left[\frac{8000}{5}\right]+\left[\frac{8000}{5^2}\right]+\left[\frac{8000}{5^3}\right]+\left[\frac{8000}{5^4}\right]+\left[\frac{8000}{5^5}\right]=1600 + 320 + 64 + 12 + 2 = 1998,$$

а при $k \geq 6$ числа $\left[\frac{8000}{5^k}\right]$ дорівнюють нулю, то число $n = 8000$ шукане. (Символом $[\,x\,]$ позначається ціла частина числа x.) Оскільки при $n < 8000$ числа $n!$ закінчуватимуться не більше, ніж 1995-ми нулями, то для чисел n, рівних 8001, 8002, 8003, 8004, числа $n!$ теж закінчуватимуться 1998 нулями.

Задача 2.21. (9-10). Чи можна в добутку 1! 2! 3! ... 20! викреслити один з двадцяти факторіалів так, щоб добуток, який залишиться, був квадратом цілого числа?

Розв'язання. Можна, наприклад, викресливши 10!. Тоді решта множників згрупуємо в пари 2!3!, 4!5!, 6!7!, 8!9!, 11!12!, 13!14!, 15!16!, 17!18!, 19!20!. В кожній парі $k!(k+1)! = k!k!(k+1) = (k!)^2 \cdot (k+1)$ виділимо множник $(k!)^2$. Зрозуміло, що добуток таких множників є квадратом цілого числа. Тому достатньо показати, що й добуток решти множників, тобто число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20$, теж є точним квадратом. У цьому легко переконатися, розклавши цей добуток на прості множники. □

Відзначимо, що задача 2.21 допускає узагальнення на випадок $4n$ факторіалів, причому до точного квадрата завжди приводить викреслювання множника $(2n)!$. Наприклад, при $n = 1$ число $1!\,3!\,4! = 3^2 \cdot 4^2$ є квадратом цілого числа 12.Для доведення зручно скористатись тим, що ми вже знаємо: при деякому $n = n_0$ (наприклад, при $n = 1$) число $a = 1!2!3!\ldots(2n_0-1)!(2n_0+1)!(2n_0+2)!\ldots(4n_0)!$ є точним квадратом. Тому досить показати, що при кожному збільшенні числа n на одиницю, тобто при $n = n_0 + 1$, число $b = 1!\,2!\,3!\ldots(2n_0-1)!(2n_0)!(2n_0+1)!(2n_0+3)!\ldots(4(n_0+1))!$ також є точним квадратом. (Отже, викреслюється множник $(2n_0+2)!$). Але ж це справді так, оскільки

$$b = a(4n_0+1)!(4n_0+2)!(4n_0+3)!(4n_0+4)!\frac{(2n_0)!}{(2n_0+2)!} =$$
$$= 4a((4n_0+1)!)^2((4n_0+3)!)^2$$

(правильність обрахунків перевірте самостійно), а число a за припущенням є точним квадратом. Доведення завершено.

Задача 2.22. (9-10). Чи існують 2002 послідовні натуральні числа, серед яких немає жодного простого?

Розв'язання. Зауважимо, що число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ділиться на кожне з чисел 2, 3, . . . , n. Тому при таких натуральних k, для яких $2 \le k \le n$, число $n! + k$ буде ділитися на k. Якщо вибрати $n = 2003$, то k зможе набути 2002 послідовних значень від 2 до 2003 включно. При кожному з них число $2003! + k$ ділитиметься на $k \ge 2$, а отже, буде складеним. Тому серед 2002 послідовних натуральних чисел $2003! + 2$, $2003! + 3$, . . . , $2003! + 2003$ немає жодного простого.

Безумовно, читачі вже здогадалися, що при кожному натуральному m знайдеться m послідовних складених натуральних чисел. Тим цікавішим виглядає твердження наступної теореми:

Теорема. Існує нескінченно багато простих чисел.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай тоді $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – усі прості числа. Розглянемо число $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Воно більше від кожного з чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а отже, згідно припущення, повинно бути складеним. Але A не ділиться на жодне із чисел p_K, і тому складеним бути не може. Отже, ми отримуємо протиріччя, яке й доводить, що множина простих чисел є нескінченною.

Задача 2.23. (10-11). Учень виписав на дошці чотири множини натуральних чисел, які складалися відповідно з усіх дільників наступних чисел: $a = 2^{2001} - 11$, $b = 2001^2 - 11$, $c = 2^{2002} + 11$, $d = 2002^2 + 11$. Встановіть, які числа йому довелося виписувати тричі.

Розв'язання. Якщо число p виписане тричі, то воно спільний дільник або лише пари (a, c), або лише пари (b, d). У першому випадку p буде дільником числа $a + c = 2^{2001} \cdot 3$. Оскільки a, c – непарні, то $p = 3$, бо, як легко перевірити (зробіть це самостійно!), a та c діляться на 3. У другому випадку p буде дільником числа $d - b = 2002^2 - 2001^2 + 22 = 4025 =$ $= 7 \cdot 23 \cdot 25$. Оскільки b та d не діляться ні на 25, ні на 7, ні на 23, то *НСД* $(b, d) = 5$. Перевіривши, що d ділиться на 3, c ділиться на 5, одержимо відповідь, що тричі учень виписав лише числа 3 та 5.

Вправи до § 2

1. (7-8). Петрусь сказав своєму другові Миколці: "Я придумав приклад на ділення, в якому ділене, дільник, частка та остача закінчуються відповідно на 1, 3, 5 та 7". Чи можуть його слова бути правдою?
2. (7-9). Чи існує таке число, яке збільшується вдвічі, якщо його першу цифру перенести у кінець числа?
3. (7-9). Знайдіть усі такі прості числа p, для яких $2p+1$ та $4p+1$ також є простими.
4. (8-9). Знайдіть усі натуральні числа n, при яких n^2+8n+9 ділиться на $n+3$.
5. (8-9). Доведіть, що при всіх натуральних n дріб $\frac{21n+4}{14n+3}$ є нескоротним.
6. (7-9). Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума їх кубів також ділиться на 6.
7. (8-9). Доведіть, що число $2222^{5555}+5555^{2222}$ ділиться на 7.

8. (8-9). Жодне з десяти чисел на 5 не ділиться. Доведіть, що сума їх четвертих степенів ділиться на 5.
9. (8-9). Доведіть, що куби натуральних чисел при діленні на 9 можуть давати лише остачі 0, 1 або 8.
10. (7-9). Числа $p,\ p^2+2$ прості. Доведіть, що p^3+2 теж є простим.
11. (8-9). Доведіть, що всяке складене число може бути подане у вигляді суми $1+xy+yz+zx$, де x,y,z – натуральні числа.
12. (9-10). Доведіть, що існує безліч натуральних чисел, які не можна подати у вигляді: а) суми квадратів трьох цілих чисел, б) суми кубів трьох цілих чисел.
13. (8-9). а) Доведіть, що не існує таких натуральних чисел k та n, що 5^n+1 ділиться на 5^k-1. б) Знайдіть хоч одну пару (k,n), для якої 5^k-1 ділиться на 5^n+1.
14. (8-9). Доведіть, що число $\overline{abcdef}$ ділиться на 37 тоді і тільки тоді, коли $\overline{abc}+\overline{def}$ ділиться на 37. Виведіть на основі цього факту ознаку подільності на 37.
15. (9-10). Кожне з чисел x_i таке, що $|x_i|=1$. Крім того $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$.

    а) Доведіть, що n ділиться на 4. б) Чи обов’язково n є квадратом натурального числа?

§ 3. Елементи комбінаторики

Задачі цього параграфа пов'язані з підрахунком елементів у деякій множині або кількості способів виконання тих чи інших операцій. Як правило, в більшості олімпіадних задач комбінаторні обчислення носять допоміжний характер. Безумовно, можна було би виписати основні формули комбінаторики на початку параграфа і використовувати їх безпосередньо для розв'язування конкретних задач. Але, бажаючи зробити читання цього параграфа доступним і для учнів 7-8 класів, вважаю за доцільне проілюструвати окремі комбінаторні ідеї на елементарних прикладах. Учні, знайомі з основами комбінаторики, при читанні цієї книги даний параграф можуть пропустити.

Задача 3.1. (7-8). Скільки існує двоцифрових чисел, обидві цифри яких різні?

Розв'язання. Запис довільного двоцифрового числа можна здійснити послідовним записом двох його цифр. Зрозуміло, що першою може бути записана будь-яка з десяти цифр, відмінна від нуля. Тоді другою можна записати будь-яку з решти дев'яти цифр, крім уже записаної першої цифри. Отже, для кожної з дев'яти можливостей запису першої цифри існує по 9 можливостей запису другої. Таким чином дістаємо $9 \cdot 9 = 81$ двоцифрових чисел, обидві цифри яких різні.

Звернемо увагу читачів, що задачу 3.1 можна було б розв'язати і простіше. Справді, легко підрахувати, що всіх двоцифрових чисел 90. З них лише 9 чисел 11, 22, ... , 99 мають обидві однакові цифри. Отже, у 90 - 9 = 81 числа обидві цифри різні.

Задача 3.2. (7-8). Скільки існує трицифрових чисел, всі цифри яких різні?

Розв'язання. Беручи до уваги розв'язання задачі 3.1, зауважимо, що запис будь-якого трицифрового числа можна розглядати як запис спочатку перших двох його цифр з наступним дописуванням третьої цифри. Але перші дві цифри ми могли записати 81-им способом. Третьою ж може бути записана будь-яка з решти восьми цифр (крім двох цифр, записаних раніше). Отже, для кожної із 81 можливості запису перших двох цифр є по 8 можливостей запису третьої цифри. Тому існує 81 · 8 = 648 трицифрових чисел, всі цифри яких різні.

Задача 3.3. (7-9). Яких семицифрових чисел більше: тих, в десятковому записі яких використовується цифра 7, чи тих, в записі яких вона відсутня?

Розв'язання. Міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні задач 3.1 і 3.2, дістаємо, що всіх семицифрових чисел $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$. З них чисел, в записі яких відсутня цифра 7, буде $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^6$. Отже, чисел, в записі яких вона використовується, є $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$. Оскільки

$$(9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6) - 8 \cdot 9^6 = 9 \cdot (10^6 - 16 \cdot 9^5) = 9 \cdot 16 \cdot (100 \cdot 5^4 - 9^5) = \; = 9 \cdot 16 \cdot (62500 - 59049) > 0$$

то семицифрових чисел, в записі яких використовується цифра 7, більше, ніж тих, в яких вона відсутня.

А зараз підведемо деякі підсумки. Припустимо, що нам потрібно підрахувати кількість елементів деякої множини, які задовольняють певним умовам. Припустимо також, що вибір довільного елемента такої множини можна розбити на декілька послідовних етапів. Нехай на першому етапі для вибору конкретного елемента у нас є n_1 можливостей. Далі, незалежно від результату першого вибору, на другому етапі для вибору того ж елемента є n_2 можливостей. Потім, незалежно від результатів перших двох етапів, на третьому етапі є n_3 можливостей, і т.д. Нарешті, на останньому *k*-тому етапі, незалежно від раніше здійсненого вибору, є n_k можливостей. Тоді загальна кількість елементів даної множини дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Цей висновок часто називають *правилом множення*. Зрозуміло, що це правило можна використовувати і при розв'язуванні задач, пов'язаних не тільки з багатоцифровими числами.

Задача 3.4. (7-8). В Країні Чудес є три міста: *А, Б, В*. З міста *А* у місто *Б* веде 6 доріг, а з міста *Б* у місто *В* – 4 дороги. Доріг із *А* у *В*, які б не проходили через *Б*, немає. Скількома способами можна проїхати з міста *А* у місто *В*?

Розв'язання. Розіб'ємо проїзд із *А* у *В* на два етапи: на проїзд із *А* у *Б* та із *Б* у *В*. Перший з них може бути здійснений шістьма способами; другий – чотирма. Отже, за правилом множення, з міста *А* у місто *В* можна проїхати $6 \cdot 4 = 24$-ма способами.

А зараз ще раз повернемося до розв'язування задачі 3.3. Читач напевно звернув увагу на те, що для підрахунку кількості семицифрових чисел, в записі яких використовується цифра 7, ми знаходили різницю між кількістю усіх семицифрових чисел і кількістю семицифрових чисел, в записі яких цифра 7 відсутня. При цьому ми двічі скористались правилом множення. Але бачимо також, що й операція віднімання відіграє тут важливу роль.

Ось ще один характерний приклад такого роду із Всеукраїнської Internet-олімпіади школярів.

Задача 3.5. (7-9). Назвемо трамвайний квиток із шестицифровим номером "чудовим", якщо в записі його номера є дві сусідні цифри, котрі відрізняються на п'ять. Скільки серед квитків із номерами від 000000 до 999999 є "чудовими"?

Розв'язання. Очевидно, що всіх квитків із такими номерами є 1000000. Порахуємо, скільки серед них є "чудовими", у яких перша цифра довільна із десяти можливих, а друга не може відрізнятися від неї на 5. Отже, маємо вибір із дев'яти варіантів. Аналогічний вибір із дев'яти можливостей одержимо і для решти цифр. Отже, всього будемо мати $10 \cdot 9^5$ квитків, які не є "чудовими". Таким чином є $10^6 - 10 \cdot 9^5$ "чудових" квитків.

Вживаною є і операція додавання.

Задача 3.6. (7-9). Скільки існує чисел, менших від 10^5, всі цифри яких різні?

Розв'язання. Знайдемо за допомогою правила множення окремо кількість таких одно-, дво-, три-, чотири- та п'ятицифрових чисел. Відповідно дістанемо 9, $9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 8$, $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ та $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ чисел. Залишилося додати ці числа, щоб дістати відповідь на запитання задачі.

Зауважимо, що й кількість семицифрових чисел, в записі яких використовується цифра 7 (див. задачу 3.3), також можна було б одержати за допомогою поєднання операції додавання та правила множення, тобто подати її у вигляді суми:

$$1\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10+8\cdot1\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10+8\cdot9\cdot1\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10+$$
$$+8\cdot9\cdot9\cdot1\cdot10\cdot10\cdot10+8\cdot9\cdot9\cdot9\cdot1\cdot10\cdot10+8\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot1\cdot10+8\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot1.$$

Справді, перший доданок тут визначає кількість усіх семицифрових чисел з першою цифрою 7. Другий – кількість семицифрових чисел, друга цифра яких дорівнює 7. Але, щоб не враховувати повторно чисел з першою цифрою 7, беруться лише ті з них, у яких перша цифра не 0 і не 7. Тобто для першої цифри залишається лише 8 можливостей. В інших доданках аналогічні міркування стосуються цифри 7 на інших позиціях. Але тут уже є 9 можливостей, бо можна використовувати цифру 0. Зрозуміло, що такий спосіб розв'язування задачі більш громіздкий і при його застосуванні легко припуститись помилки.

За правилом множення знаходять також кількість можливих перестановок елементів заданої множини.

Задача 3.7. (7-9). Скількома способами можна скласти список 25 учнів класу?

Розв'язання. Очевидно, що першим у списку можна записати будь-якого з учнів. Для цього маємо 25 різних можливостей. Наступним можна записати одного з решти 24 учнів. Тут уже маємо 24 можливості. Для запису третього учня буде 23 можливості, і т.д. Очевидно, 25-е місце у списку можна заповнити єдиним способом. Тому, за правилом множення, дістанемо $25\cdot24\cdot23\cdot\ldots\cdot1=25!$ способів для складання списку учнів даного класу.

Зауважимо, що задача 3.7 є частковим випадком загальної задачі про число перестановок у множині з *n* елементів. Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що множину, яка складається з *n* елементів, можна впорядкувати *n*! способами.

Задача 3.8. (7-9). Скільки різних слів можна одержати, використовуючи по одному разу всі букви слова "вектор"? (Під "словом" тут розуміємо довільну перестановку букв слова "вектор").

Розв'язання. Оскільки запис даного слова складається із 6-ти різних букв, то кількість різних слів, які можна утворити, використовуючи кожну букву по одному разу, дорівнює числу перестановок із шести елементів, тобто $6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=120$.

Звернемо увагу: у розв'язанні наголошено, що всі букви слова "вектор" різні. Що ж буде, якщо деякі з букв повторюватимуться? – Знову розглянемо приклад.

Задача 3.9. (7-9). Скільки різних слів можна одержати перестановкою букв слова "парабола"?

Розв'язання. Вважатимемо спочатку, що три букви *а*, які використовуються у записі заданого слова, є різними, позначивши їх, наприклад, a_1, a_2, a_3. В результаті усіх перестановок букв заданого слова дістанемо 8! слів. Але, в свою чергу, букви a_1, a_2, a_3 можна переставити між собою 3! способами і при цьому жодне із записаних слів не зміниться. Тому записані 8!

слів розбиваються на групи, в кожній з яких 3! однакових слів. Отже, різних слів матимемо $\frac{8!}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6720$.

Аналогічно аналізується випадок, коли повторюються декілька букв.

Задача 3.10. (8-9). Скільки різних слів можна одержати перестановкою букв слова "математика"?

Розв'язання. Усіх перестановок букв даного слова є 10! Оскільки буква "а" зустрічається тричі, то слів, які відрізняються одне від одного розташуванням даної букви, буде $\frac{10!}{3!}$. Але ще букви "м" і "т" зустрічаються два рази. Тому одержане останнім число необхідно послідовно розділити на 2! (щоб одержати кількість слів, які відрізняються розташуванням букви "м"), а потім ще на 2! (щоб одержати кількість слів, які відрізняються розташуванням букви "т").

Остаточно дістанемо $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ різних слів.

Два останні приклади показують, що і операція ділення теж відіграє в комбінаторних задачах важливу роль. Адже спочатку буває зручнішим знайти кількість елементів деякої ширшої множини, ніж вимагається умовою задачі (користуючись правилом множення), а вже потім, віднімаючи чи ділячи цей результат, знайти потрібну кількість елементів заданої множини.

Задача 3.11. (8-9). Скільки діагоналей можна провести в опуклому 2001-кутнику?

Розв'язання. З кожної вершини опуклого 2001-кутника можна провести 1998 діагоналі. Але при цьому кожна діагональ буде врахована двічі. Тому всього матимемо $\frac{2001\cdot 1998}{2} = 2001\cdot 999$ діагоналей.

Читачі легко узагальнять одержаний результат на випадок довільного опуклого n-кутника. Як легко здогадатись, у ньому можна провести $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ діагоналей.

Звернемо увагу на те, що схожа ідея уже була використана при розв'язуванні задачі 1.9.

Задача 3.12. (7-9). Із класу, в якому навчається 20 учнів, потрібно сформувати команду із трьох учнів для участі в математичній олімпіаді. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Припустимо, що серед учнів класу проведено олімпіаду і три переможці візьмуть участь у наступному етапі олімпіади. Перше місце міг посісти будь-який із 20 учнів, друге – будь-який з інших 19 учнів, третє – будь-який з решти 18 однокласників. Тоді за правилом множення, трійку призерів можна визначити $20\cdot 19\cdot 18$ способами. В наступному етапі олімпіади візьме участь кожен учень із цієї трійки, незалежно від того, перше, друге чи третє місце він посів. Тому способів сформувати команду класу на наступний етап олімпіади буде менше в стільки разів, скільки існує всіх перестановок серед трійки призерів. А їх, як ми вже знаємо, є 3!. Отже, вибрати трьох учнів із 20 можна $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ способами.

Якби для участі в олімпіаді довелося вибирати k учнів з класу, в якому навчається n учнів, то, міркуючи аналогічно, встановили б, що для такого вибору є $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k-1)}{k!}$ можливостей. Це число називається <u>числом комбінацій із n елементів по k елементів</u> і позначається C_n^k. Якщо $k = 0$, то є один спосіб не вибрати нікого (вибрати 0) із n учнів. Тому $C_n^0 = 1$. У зв'язку з цим доречно вважати, що 0! = 1. Тоді C_n^0 може бути визначене за вказаною нижче формулою.

Домножуючи чисельник та знаменник дробу у формулі для визначення C_n^k на $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)$, одержимо рівність $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Звідси відразу випливає, що $C_n^{n-k} = C_n^k$. Зауважимо, що ця остання рівність може бути доведена і без додаткових математичних перетворень. Справді, вибір k учнів, які візьмуть участь у олімпіаді, рівносильний вибору (n-k) учнів, які в олімпіаді участі не братимуть.

Її використання вдало ілюструє такий приклад.

Задача 3.13. (7-9). Скільки існує восьмицифрових чисел, цифри яких ідуть у порядку спадання.

Розв'язання. Випишемо у рядок усі 10 цифр у порядку спадання і викреслимо довільним чином дві цифри. Оскільки це можна зробити $C_{10}^2 = 45$ способами, то і шуканих восьмицифрових чисел теж є 45.

Відзначимо, що при розв'язуванні деяких задач використання формули для числа комбінацій доводиться поєднувати з правилом множення.

Задача 3.14. (7-9). В одного учня є 5 книг з математики, а в іншого – 6 книг з фізики. Скількома способами ці учні можуть обміняти один в одного по 3 книги ?

Розв'язання. Перший учень може C_5^3 способами вибрати для обміну три з п'яти своїх книжок, а другий – C_6^3 способами три з шести своїх. Отже, для вказаного обміну існує $C_5^3 \cdot C_6^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 200$ різних можливостей.

Поряд з множенням чисел комбінацій може використовуватись і їх додавання. Припустимо, що нам треба вибрати команду із k учнів класу, в якому навчається (n + 1) учень. Візьмемо довільного учня цього класу. Якщо він не входить у задану конкретну команду із k учнів, то ця команда сформована із решти n учнів класу, для чого існує C_n^k можливостей. Якщо ж він входить в цю команду, то інших (k - 1)-го члена цієї команди можна вибрати із решти n учнів класу. Тому загальна кількість способів формування такої команди з одного боку дорівнює C_{n+1}^k, а з іншого – сумі $C_n^k + C_n^{k-1}$. Отже, справедлива рівність $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Зауважимо, що цю рівність можна було б встановити, користуючись формулами для чисел C_{n+1}^k, C_n^k, та C_n^{k-1}. Але перевага проведених логічних міркувань у тому, що на цьому конкретному прикладі проілюстровано плідну комбінаторну ідею. Встановлена формула дає можливість за відомим числом комбінацій множини із n елементів визначити число комбінацій для множини із (n+1)-го елемента. Формули такого виду називаються *рекурентними формулами*.

Числа C_n^k мають найрізноманітніші застосування. Зокрема, вони виступають в ролі коефіцієнтів у так званій формулі бінома Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$. Справді, $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. (Тут у правій частині рівності n множників (a+b). Перемножуючи їх, діставатимемо доданки вигляду $a^{n-k}b^k$, $0 \le k \le n$, причому множник a^{n-k} означає, що число a взято із (n-k) множників вигляду (a+b), а множник b^k – що число b взято з решти k таких множників. Але C_n^k якраз і є кількістю усіх можливих способів вибору числа b.

Підставляючи у формулу бінома Ньютона $a = b = 1$, одержимо рівність $C_n^0 + C_n^1 + ..C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$, якою визначається кількість усіх можливих підмножин множини, що складається із n елементів. Справді, при кожному $k(0 \le k \le n)$ числом C_n^k визначається кількість усіх підмножин цієї множини, які складаються із k-елементів. При k=0 єдиною такою підмножиною є порожня множина.

У наступній задачі матимемо приклад ще однієї цікавої рекурентної формули.

Задача 3.15. (7-9). Маленька Надійка хоче займатися у математичному гуртку. Але вона також любить стрибати шкільними сходами. За один раз Надійка може або стрибнути на одну сходинку вгору, або перестрибнути вгору через одну сходинку. Вчитель математики пообіцяв взяти Надійку у свій гурток, якщо вона прострибає по сходах усіма різними можливими способами і правильно порахує кількість цих способів. Скільки днів доведеться чекати дівчинці здійснення своєї мрії про гурток, якщо кожного дня вона стрибатиме лише одним способом, а сходи мають 13 сходинок?

Розв'язання. Очевидно, що на першу сходинку можна попасти лише одним способом – з підлоги. Для попадання на другу сходинку таких способів уже два: безпосередньо з підлоги або з першої сходинки. Аналогічно, на третю сходинку можна попасти або з другої, або з першої сходинок. Тому загальна кількість способів опинитися на третій сходинці дорівнює сумі кількості способів попадання на першу та на другу сходинки, тобто 1+2=3. Аналогічно встановлюємо, що кількість способів опинитися на четвертій сходинці дорівнює сумі кількостей способів попадання на другу та на третю сходинки, тобто 2+3=5, і т.д. Тому, якщо A_n, A_{n+1} та A_{n+2} – це кількості способів, якими можна попасти відповідно на n-ну, (n + 1)-у та (n + 2)-у сходинки, то $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$. Користуючись одержаною формулою, послідовно знаходимо: $A_n = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 5$, $A_5 = 8$, $A_6 = 13$, $A_7 = 21$, $A_8 = 34$, $A_9 = 55$, $A_{10} = 89$, $A_{11} = 144$, $A_{12} = 233$, $A_{13} = 377$. Отже, Надійці доведеться чекати більше року.

Та, мабуть, варто прийняти її до математичного гуртка, якщо вона успішно справиться із математичною частиною запропонованої задачі. Читачам же повідомимо, що одержані тут числа A_k є елементами так званої *послідовності Фібоначчі.*

Вправи до § 3

1. (7-9). Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 склали всі можливі семицифрові числа , у десятковому записі яких кожна цифра зустрічається по одному разу. Визначте кількість одержаних чисел і доведіть, що їх сума ділиться на 9.
2. (7-9). Скільки існує п'ятицифрових чисел , які діляться на 3 і в десятковому записі яких: а) не використовується цифра 3; б) використовується цифра 3.
3. (7-9). Скільки існує семицифрових чисел , в яких кожні дві сусідні цифри різної парності ?
4. (7-9). Скількома способами можна розмістити 7 учнів у 3 кімнати – одномісну, двомісну та чотиримісну ?
5. (8-9). На полиці стоїть 8 книг. Скількома способами можна вибрати 3 книги, кожні дві з яких не стоять поруч ?
6. (8-9). $A=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, де $p_1, p_2, ..., p_n$ – прості, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – натуральні числа. Доведіть, що загальна кількість натуральних дільників числа А дорівнює $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$.
7. (8-9). На зборах мають виступити *A, B, C, D, E*. Скількома способами їх можна розташувати у списку виступаючих, якщо *B* має виступати: а) не раніше , ніж *A*; б) зразу після *A*?
8. (8-9). Скількома способами можна вибрати 4 карти з колоди із 36 карт так, щоб отримати : а) одну ; б) чотири різні масті ?
9. *(8-10). На кожному борту човна мають сидіти по 4 гребці. Скількома способами можна вибрати їх із 31-го претендента , якщо 10 з них хотіли б сидіти зліва, 12 – справа , а 9 – байдуже де сидіти ?*
10. (8-10). На колі вибрали $n \geq 3$ точок. Однією з них є точка *A*. Яких опуклих многокутників з вершинами в цих точках більше – тих, які мають вершиною точку *A*, чи тих, у яких *A* не є вершиною, і на скільки?
11. *(9-11). На дошці були записані числа 1, 2, 3, ..., 105. Спочатку змінили знаки всіх чисел, які діляться на 3, після цього – знаки всіх чисел, які діляться на 5, і, нарешті, – знаки всіх чисел, які діляться на 7. Обчисліть суму одержаних таким чином 105 чисел.*
12. (8-9). Знайдіть C_k^6, якщо $C_{18}^k = C_{18}^{k+2}$.
13. (9-11). Спростіть вирази: а) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$,

    б) $C_n^0 + 3C_n^1 + \ldots + (2n+1)C_n^n$.

14. (9-11). Доведіть рівності: а) $C_n^k = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \ldots + C_{n-1}^{k-1}$, б) $C_{n-1}^0 + C_n^1 + \ldots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k$, в) $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$.
15. (8-10). Квадрат розмірами 5×5 розділено на 25 одиничних квадратиків. Скількома способами можна попасти із лівого нижнього квадратика у верхній правий, якщо дозволяється рухатися: а) тільки вправо або вгору; б) вправо, вгору та по діагоналі вправо вгору. В обох випадках заходити в центральну клітинку квадрата заборонено.

§ 4. Принцип Діріхле

Німецький математик XIX ст. Лежен Діріхле у своїх наукових дослідженнях часто користувався міркуваннями, які пізніше дістали назву принципу Діріхле.

Ознайомлення з цим принципом розпочнемо з такої простої задачі: Чи можна розмістити 5 кроликів у 4-х клітках так, щоб у жодній з кліток не містилося більше одного кролика? – Міркування, безумовно, будуть такими. Якби у кожній клітці сиділо не більше одного кролика, то у 4 клітках помістилося б не більше чотирьох кроликів. А тому 5 кроликів розмістити обумовленим способом не можна.

А якщо в тих же чотирьох клітках потрібно буде розмістити 9 кроликів? – Міркуємо аналогічно. Якщо в кожній клітці буде не більше двох кроликів, то в чотирьох клітках всі 9 кроликів не помістяться. Отже, принаймні в одній із кліток слід буде помістити не менше трьох кроликів.

Нехай тепер маємо n кліток і m кроликів ($m > n$), причому відомо, що $m = kn + p$, де k і p – натуральні числа ($p \geq 1$). Тоді в одну з кліток доведеться помістити не менше, ніж (k + 1) кролика.

Замінюючи клітки та кроликів довільними множинами A та B, що складаються відповідно із n та m елементів ($m > n$), приходимо до такого твердження. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність деякий елемент множини B, то принаймні одному елементу із A відповідатиме не менше двох елементів із B. Це твердження і називається принципом Діріхле. У випадку, коли $m = kn + p$, де $p \geq 1$, одержуємо найпростіше його узагальнення: принаймні одному елементу із A відповідатиме не менше, ніж (k + 1) елемент із B.

Задача 4.1. (7-8). Довести, що серед довільних 2005-ох цілих чисел можна вибрати не менше двох таких, різниця яких ділиться на 2004.

Розв'язання. При діленні цілого числа на 2004 можна дістати лише 2004 різні остачі: 0, 1, ..., 2003. Оскільки задано 2005 цілих чисел, то принаймні два з них при діленні на 2004 дають одну і ту ж остачу. А тому різниця цих чисел ділитиметься на 2004.

Роль кліток у цій задачі відіграють 2004 з можливих остач, а роль кроликів – 2005 заданих чисел. Проте спочатку були задані лише "кролики", а "клітки" для них треба було придумати. В наступному прикладі заданими будуть "клітки", а шукати треба буде "кроликів".

Задача 4.2. (7-8). Кожну точку площини замалювали в один із двох кольорів. Довести, що існує відрізок довжиною 1, кінці якого мають однаковий колір.

Розв'язання. Розглянемо довільний рівносторонній трикутник з довжиною сторони 1. Оскільки у нього 3 вершини, а кольорів лише 2, то принаймні дві його вершини будуть одного кольору. Вони і є кінцями шуканого відрізка.

Особливо цікавими, звичайно, є задачі, в яких явно не виділені ні "клітки", ні "кролики".

Задача 4.3. (7-9)Чи може число, в десятковому записі якого використовуються лише одиниці, ділитися на 2003?

Розв'язання. Розглянемо 2004 числа вигляду 1, 11, 111, ..., 11...1, останнє з яких записане 2004-ма одиницями. Оскільки різних остач від ділення на 2003 є лише 2003, то принаймні два із цих чисел при діленні на 2003 дають однакові остачі. Тому їх різниця, що має вигляд 11...100...0, ділитиметься на 2003. Але число 2003 не має своїми дільниками чисел 2 та 5. Через те число 11...1, одержане із цієї різниці відкиданням нулів, теж ділитиметься на 2003.

Звертаємо увагу читачів на не конструктивність такого доведення. Адже ми не вказали конкретного числа, записаного лише одиницями, яке ділиться на 2003. Проте, як легко переконатися, спроба розв'язати задачу безпосередньою перевіркою подільності чисел 1,11,111,... на 2003 приводить до значно більших труднощів.

Друга обставина, на яку варто звернути увагу, – це те, що при відсутності конкретно заданих "кліток" та "кроликів" вибір відповідних множин здійснюється не довільно, а на основі певних принципів. Основний з них полягає в тому, що "кроликів" повинно бути більше, ніж "кліток". Наприклад, в задачах 4.1, 4.3 розглядається більше чисел, ніж можливих остач, а в задачі 4.2 – більше вершин, ніж кольорів. Цього часто вдається добитися, виділивши за якоюсь характерною властивістю максимальну можливу кількість "кліток". В задачах 4.1, 4.3 ця кількість визначалася максимальною кількістю остач при діленні на 2001. В наступному прикладі для досягнення мети буде використана ознака подільності на 3.

Задача 4.4. (8-9). Відомо, що для простого числа $p > 3$ число p^k записується 20-ма цифрами. Довести, що принаймні три його цифри однакові.

Розв'язання. Зауважимо, що жодні три цифри числа p^k не будуть однаковими лише тоді, коли кожна цифра буде використана двічі. Але тоді сума його цифр дорівнювала б $2\cdot(0+1+...+9)=90$, і таке число ділилося б на 3. Але для простих чисел $p > 3$ число p^k на 3 ділитись не може.

Розглянутий приклад цікавий ще й тим, що тут узагальнення принципу Діріхле вдалося застосувати і у випадку $m = 2n$. Звідси випливає, що з невиконання нерівності $m > kn$ ще не можна зробити висновок, що кожному елементу множини A може відповідати не більше k елементів із B.

А якщо $m > kn$? – Тоді часто до успіху приводить сам принцип Діріхле.

Задача 4.5. (8-9). Кожна точка на колі замальована в один із двох кольорів. Доведіть, що існує вписаний у це коло рівнобедрений трикутник, всі вершини якого мають однаковий колір.

Розв'язання. Розглянемо правильний п'ятикутник, вписаний у це коло. Принаймні три його вершини матимуть однаковий колір. Виберемо їх за вершини трикутника. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що такий трикутник буде рівнобедреним.

Задача 4.6. (7-9). У квадраті зі стороною 1 взяли 51 точку. Довести, що деякі 3 із цих точок можна накрити квадратом зі стороною 0,2.

Розв'язання. Розіб'ємо заданий "великий" квадрат на 25 менших квадратів зі стороною 0,2. Оскільки 51=2 ·25+1, то принаймні в один з менших квадратів попаде принаймні три точки. Що й треба було довести.

Зауважимо, що розбиття квадрата на 25 квадратиків привело б до успіху і за вимоги накриття трьох точок фігурами іншого вигляду, якщо тільки кожною такою фігурою можна накрити квадрат зі стороною 0,2. Відзначимо також, що якщо спочатку всі точки були всередині квадрата, то можна було б розглянути дещо менший квадрат, який також містить всі задані точки. Розбивши його на 25 однакових квадратиків і виділивши з них той, який містить не менше трьох точок, ми змогли б покрити останній квадратом зі стороною 0,2, у якому такі три точки будуть також всередині.

У деяких задачах застосуванню принципу Діріхле передують комбінаторні підрахунки.

Задача 4.7. (8-9). Учень мав 100 табличок з числами 1, 2, ... 100 і загубив 79 із них. Чи обов'язково серед решти табличок знайдуться 4 такі, що сума чисел на двох із них дорівнюватиме сумі чисел на двох інших?

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що коли $a + b = c + d$, причому по одному доданку зліва та справа у цій рівності співпадають, то два інші доданки теж співпадають. Із 21-єї таблички, які залишилися, можна утворити $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ різних пар. Оскільки усі пари з чисел 1, 2,..., 100 дають лише 197 різних сум (від 3 до 199), і 197 < 210, то принаймні у двох парах із 210-ти, суми співпадатимуть. А зроблене на початку зауваження виключає можливість попадання у такі пари спільної таблички. Адже в протилежному випадку це була б одна і та ж пара. Отже, відповідь на запитання задачі позитивна.

Задача 4.8. (8-10). Вісім шахістів провели турнір в одне коло. Виявилось, що серед будь-яких трьох шахістів принаймні двоє зіграли внічию. Знайти найменшу можливу кількість нічиїх на цьому турнірі.

Розв'язання. Розіб'ємо шахістів на дві групи по чотири особи. Припустимо, що в кожній із цих груп усі шахісти зіграли між собою внічию. Кількість зіграних партій у кожній групі така ж, як і кількість способів вибору двох шахістів із чотирьох, тобто $C_4^2 = 6$. Отже, разом маємо 12 нічиїх. Яких би трьох шахістів ми не взяли, принаймні два з них попадуть в одну групу. Отже, при 12-ти нічиїх умови задачі будуть виконані. При цьому звернемо увагу на те, що кожен шахіст зіграв внічию тричі. Очевидно, меншою кількість нічиїх могла б бути тоді, коли б хтось зіграв внічию не більше двох разів. Припустимо, що таким є гравець *A*. Тоді знайдуться принаймні 5 шахістів, з якими він не розійшовся миром. Складемо трійку, в яку входить *A* та довільні два гравці із вказаних п'яти. Оскільки *A* із вибраними гравцями не зіграв внічию, то вони мусили зіграти внічию між собою. А, отже, і всі партії гравців з даної п'ятірки завершилися внічию. А таких було $C_5^2 = 10$. Якщо з двома іншими шахістами А зіграв внічию, то разом маємо не менше 12-ти нічийних зустрічей. Якщо ж ні – то аналогічними міркуваннями уже для шістки гравців встановлюємо, що нічиїх було не менше $C_6^2 = 15$. Отже, найменша можлива кількість нічиїх на турнірі дорівнює 12.

Іноді принцип Діріхле доводиться застосовувати послідовно декілька разів, поєднуючи його з іншими міркуваннями.

Задача 4.9. (8-10). Кожний із 17-ти вчених листується з 16-ма іншими. В листуванні йдеться про три наукові проблеми. Кожні 2 вчені листуються лише з приводу однієї проблеми. Довести, що є троє вчених, які листуються один з одним з приводу однієї і тієї ж проблеми.

Розв'язання. Виділимо одного із вчених, який листується з 16-ма іншими. Оскільки проблем 3, а 16=5·3 +1, то принаймні з однієї проблеми він листується не менше, ніж з 6-ма вченими. Якщо серед цих шести ще двоє листуються між собою з приводу цієї ж проблеми, то ми зразу одержуємо трьох вчених, які листуються з приводу однієї проблеми. Якщо таких двох немає, то всі шестеро листуються з приводу двох інших проблем. Виділимо серед них одного вченого, який листується з цих двох проблем з іншими п'ятьма. Оскільки 5=2·2+1, то принаймні з однієї проблеми він листується не менше, ніж з трьома вченими. Якщо серед цих трьох є двоє, які листуються з цієї ж проблеми, то знову задача розв'язана. Якщо ж таких немає, то всі троє листуються між собою з приводу третьої проблеми. А отже, в кожному із випадків знайдуться троє вчених, які листуються з приводу однієї проблеми.

Часто принцип Діріхле використовують в якій-небудь геометричній формі, наприклад:

а) якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша l, то принаймні два з цих відрізків мають спільну точку;

б) якщо на колі радіуса R розташовано декілька дуг, сума довжин яких більша $2\pi R$, то принаймні дві з цих дуг мають спільну точку. ($2\pi R$ – довжина кола радіуса R, $\pi \approx 3{,}14$);

в) якщо всередині фігури з площею S розташовано декілька фігур, сума площ яких більша S, то принаймні дві з цих фігур мають спільну точку.

Обґрунтування кожного з тверджень: а) – в) елементарне: припустивши відсутність спільної точки обумовлених фігур, легко прийдемо до протиріччя стосовно суми довжин чи суми площ цих фігур.

Задача 4.10. (9-10). Всередині квадрата зі стороною 1 розташовано декілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Довести, що існує пряма, яка перетинає принаймні чотири із цих кіл.

Розв'язання. Спроектуємо всі кола на одну із сторін квадрата. Проекцією кола довжини l є відрізок довжини $\frac{l}{\pi}$. Тому сума довжин проекцій усіх даних кіл дорівнюватиме $\frac{10}{\pi}$. Але $\frac{10}{\pi} > 3$. Отже, на стороні квадрата знайдеться точка, яка належить принаймні чотирьом проекціям. Тому пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до сторони квадрата, перетне принаймні 4 кола.

Задача 4.11. (8-10). У квадраті з площею 6 розташовані 3 прямокутники, кожний із площею 3. Довести, що площа спільної частини принаймні двох із прямокутників не менша 1.

Розв'язання. Нехай S_{12}, S_{13} та S_{23} – відповідно площі спільних частин першого і другого, першого і третього та другого і третього прямокутників. Тоді разом ці три прямокутники покривають площу, не меншу за $3\cdot 3-(S_{12}+S_{13}+S_{23})$, де $3\cdot 3=9-$ сума площ даних прямокутників (величину $S_{12}+S_{13}+S_{23}$ слід відняти, щоб не враховувати двічі площі спільних частин). Оскільки всі три прямокутники помістились у квадраті з площею 6, то $9-(S_{12}+S_{13}+S_{23})\le 6$. Тому $S_{12}+S_{13}+S_{23}\ge 3$ А отже, принаймні одне з чисел S_{12}, S_{13}, S_{23} не менше 1.

Примітка. Можна показати, що насправді дані три прямокутники займають площу $9-(S_{12}+S_{13}+S_{23})+S_{123}$, де S_{123} – площа спільної частини усіх трьох прямокутників.

Задача 4.12. (8-10). На сторонах опуклого чотирикутника як на діаметрах побудовані круги. Довести, що ці круги повністю покривають даний чотирикутник.

Розв'язання. З кожної внутрішньої точки сторони чотирикутника видно під кутами, сума яких дорівнює 360°. Тому принаймні один із цих кутів не менший 90°. А отже, кожна внутрішня точка належить принаймні одному із побудованих чотирьох кругів.

Ще з одним напрямом застосування принципу Діріхле ми зустрінемося в наступному параграфі. А тут проаналізуємо розв'язання ще однієї цікавої задачі.

Задача 4.13. (9-11). На листку паперу знаходиться пляма невизначеної форми із площею, меншою за 1 см^2. Доведіть, що на цьому листку можна побудувати систему координат із одиницею в 1 см так, що жодна точка з обома цілочисловими координатами не лежатиме на плямі.

Розв'язання. Намалюємо спочатку довільну систему координат із одиницею 1 см. Кожній точці M плями із координатами (x, y) поставимо у відповідність точку P із координатами $(\{x\},\{y\})$ де $\{x\} = x - [x]$ – дробова частина числа x. Зрозуміло, що всі точки P опиняться в одиничному квадраті, причому площа фігури, складеної із точок P, не перевищить площі плями, складеної з точок M. Отже, всередині цього одиничного квадрата знайдеться точка, яка не співпадає із жодною точкою P. Виберемо її за початок нової системи координат із осями, паралельними осям попередньої системи. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що побудована таким чином система координат буде шуканою.

Вправи до § 4

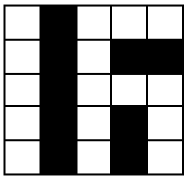
1. (7-8). Доведіть, що серед будь-яких трьох цілих чисел можна знайти два, сума яких ділиться на 2.
2. *(7-9). Доведіть, що серед будь-яких 10 цілих чисел можна вибрати одне чи декілька, сума яких ділиться на 10.*

3. *(8-9). Доведіть, що серед будь-яких 52-ох цілих чисел є 2, різниця квадратів яких ділиться на 100.*
4. *(8-9). Чи можна зі 100 довільних цілих чисел вибрати: а) 15; б) 16 таких, що різниця будь-яких двох із них ділиться на 7?*
5. *(8-9). Доведіть, що існує число вигляду 20022002 ... 2002 яке ділиться на 2003.*
6. *(8-9). Чи для кожного натурального* k *існують різні натуральні числа* m *та* n*, що* $2^m - 2^n$ *ділиться на* k*?*
7. *(8-9). Сума 101 натурального числа дорівнює 200. Доведіть, що з них можна вибрати одне чи декілька чисел, сума яких дорівнює 100.*
8. *(8-9). 50 каменів розташовані в порядку спадання їхньої маси. Перший важить 468 кг, а кожен наступний – на 2 кг легший від сусіднього з ним. Якою найменшою кількістю вантажівок можна перевезти ці камені, якщо на кожну з них дозволяється вантажити не більше трьох тон?*
9. *(8-10). У класі 25 учнів. Серед будь-яких трьох із них двоє дружать між собою. Доведіть, що є учень, у якого не менше 12 друзів.*
10. *(8-9). Всередині рівностороннього трикутника зі стороною 2 довільно вибрали 5 точок. Доведіть, що знайдуться дві точки на відстані, меншій за 1.*
11. *(8-10). Круг радіуса 1 покрили сімома однаковими кругами. Який найменший радіус можуть мати такі круги?*
12. *(8-10). а) Доведіть, що у довільному опуклому 2004–кутнику існує діагональ, яка не паралельна жодній його стороні. б) Для яких інших опуклих* n*-кутників попереднє твердження залишається справедливим?*
13. *(9-10). На площині розташовано 2004 прямі, жодні дві з яких не паралельні між собою. Доведіть, що серед них знайдуться такі дві прямі, кут між якими менший 11′.*
14. *(9-11). У прямокутнику 3 × 4 довільним чином розташували 6 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані, яка не перевищує* $\sqrt{5}$.
15. *(9-11). На площині розташовано* $2n + 1$ *точку так, що будь-які три з них є вершинами трикутника з найменшою стороною, що не перевищує 1. Доведіть, що принаймні* $n + 1$ *точку можна покрити кругом з радіусом 1.*

§ 5. Розфарбування фігур

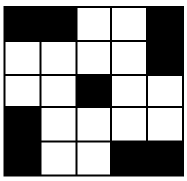
Повернемося знову до розглянутої в § 1 задачі 1.3. За рахунок чого там вдалося досить просто досягти успіху при її розв’язуванні? – Очевидно, суттєвим було чергування білих і чорних полів, які міг займати кінь за правилами шахової гри. В свою чергу, опиратися на таке чергування ми могли завдяки тому, що шахівниця розмальована в два кольори. Виявляється, що розфарбування в шаховому порядку можна використовувати і для розв’язування інших задач, спочатку ніяк не зв’язаних із шахівницею.

Задача 5.1. (7-9). У кожній клітинці дошки 5×5 сидить жук. В деякий момент часу всі жуки переповзають у сусідні по горизонталі чи по вертикалі клітинки. Довести, що при цьому принаймні одна клітинка залишиться порожньою.



Мал.1

Розв’язання. Розфарбуємо дошку 5×5 в шаховому порядку. Нехай в результаті цього одержали 13 клітинок чорного та 12 білого кольору. Зрозуміло, що переповзаючи в сусідню клітинку, жук опиняється в клітинці протилежного кольору. Тому 12 жуків, які знаходилися спочатку у клітинках білого кольору, не зможуть зайняти всі 13 клітинок чорного кольору. Принаймні одна із таких клітинок залишиться вільною. (Знову принцип Діріхле!).



Мал.2

Цікаво вияснити на якій мінімальній кількості клітинок могли зібратися всі жуки після такого переповзання. Легко переконатися, що вистачить, наприклад, 9 клітинок. (див мал. 1)

Щоб довести, що ця кількість є мінімальною розглянемо малюнок 2.

Жодні два жуки із виділених на ньому клітинок після переповзання не можуть опинитися в одній клітинці дошки. А тому зайнятими виявляться не менше дев’яти клітинок.

Звертаємо увагу читачів, що крім розмальовування дошки у шаховому порядку, ми використали тут також і інші розмальовування.

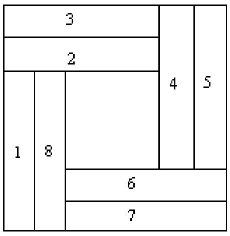
Неважко переконатися, що в наступній задачі розфарбування “шахівницею” нічим не змогло б зарадити. Тут до успіху приводить розмальовування іншого виду.

Задача 5.2. (7-9). Довести, що дошку 6×6 не можна покрити дев’ятьма плитками розміром 4×1.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Мал.3

Розв’язання. Розфарбуємо дошку в 4 кольори, як показано на малюнку 3. Які б 4 клітинки не покривала поставлена плитка, всі вони, як легко переконатися, матимуть різні кольори. Але тоді для того, щоб 9 плиток покрили всю дошку, клітинок кожного кольору теж повинно бути по 9. Але це не так, бо, наприклад, кольором 2 замальовано 10 клітинок, а кольором 4 — лише 8.



Мал.4

Зауважимо, що цю задачу можна розв’язати і без розфарбування. Припустимо, що таке покриття можливе. Тоді знайдеться плитка, яка покриває одну із кутових клітинок дошки. Наприклад, такою є плитка 1 (див. мал. 4). Цим однозначно визначаються положення плиток 2 та 3, бо при іншому їх розташуванні залишаються вільні клітинки, які покрити вже не вдасться. За ними аналогічно знаходимо положення плиток 4 та 5, а потім і плиток 6 та 7. Очевидно, що плитка 8 може прилягати лише більшою стороною до плитки 1. Але внутрішній квадратик 2×2 покрити плиткою 4×1 так і не вдасться. Аналогічно розглядається випадок горизонтального розташування плитки 1 чи покриття нею іншої кутової клітинки.

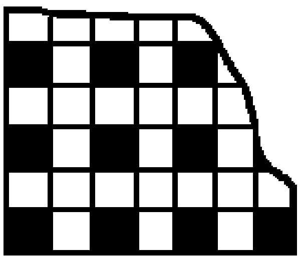
Цікаво, що коли спробувати розв’язати останнім методом аналогічну задачу, збільшивши розміри дошки до 10×10, то дуже швидко прийдемо до висновку, що такої однозначності в заповненні дошки плитками вже не буде. А ось метод розфарбування в 4 кольори знову буде ефективним. Пропонуємо читачам переконатися в цьому самостійно.

Із таким розфарбуванням пов’язане також розв’язання наступної задачі.

Задача 5.3. (7-9). Яку мінімальну кількість “пострілів” у морському бої слід зробити, щоб гарантовано “поранити” на дошці розміром 10×10 чотирьохпалубний корабель розмірами 4×1?

Розв’язання. Розфарбуємо дошку 10×10 у чотири кольори аналогічно, як на мал. 3. Тоді клітинок першого і третього кольору виявиться по 25, другого – 26, четвертого – 24. Зрозуміло, що 24 постріли, зроблені у клітинки четвертого кольору гарантують “поранення” чотирьохпалубного корабля. Щоб довести, що меншої кількості може бути недостатньо, намалюємо на цій дошці 24 прямокутники 4×1 та один квадрат 2×2. Очевидно, що у випадку відсутності “пострілу” хоч в один із таких прямокутників, ми могли б у чотирьохпалубний корабель і не попасти.

Не слід думати, що при розфарбуванні дошки обов’язково розфарбовувати в якийсь із кольорів кожну її клітинку.


Мал.5

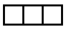
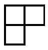
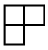
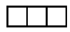
Задача 5.4. (7-9). Дно прямокутної коробки було викладене прямокутними плитками 2×2 та 4×1. Плитки висипали із коробки і при цьому загубили плитку розміром 2×2. Її замінили плиткою 4×1. Чи можна при цьому знову викласти дно коробки?

Розв’язання. Розіб’ємо дно коробки на квадрати 1×1 і розмалюємо його так, як показано на малюнку 5. Кожна плитка 2×2 накриває рівно одну зафарбовану клітинку, а плитка 4×1 – або дві, або жодної. Тому при вказаній в умові задачі заміні принаймні одна із замальованих клітинок або виявиться непокритою, або покритою двічі. В обох із цих випадків дно коробки викласти не вдасться. Адже при такій заміні сумарна площа всіх плиток не змінилася.

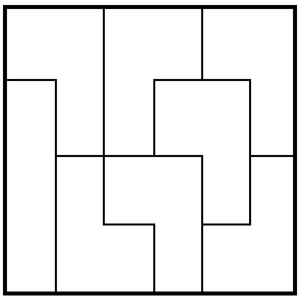
Застерігаємо читача від двох характерних помилок:

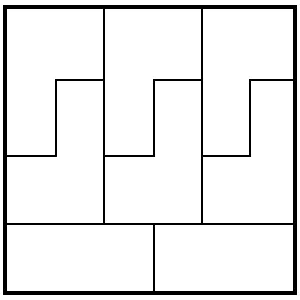
1. Якщо деякий спосіб розфарбування не приводить до протиріччя, то це ще не означає, що відповідь повинна бути ствердного. Наприклад, розфарбовуючи в задачі 5.2 дошку у шаховому порядку, ми одержали б, що кожна плитка 4×1 покриває по дві клітинки чорного і білого кольорів. Та хоч кількість клітинок кожного з кольорів однакова і притому парна, звідси ще аж ніяк не випливає, що твердження задачі хибне. Більше того, не можна було зразу сказати, що покриття можливе лише на підставі того, що площі квадрата 6×6 та дев'ятьох прямокутників 4×1 співпадають. Подібне стосується і задачі 5.4 із площею плитки 2×2 та її заміни на плитку 4×1.

2. Не у кожній задачі подібного змісту відповідь має негативний характер. Тоді спроби знайти потрібне розфарбування не даватимуть очікуваного результату, і для розв'язування задачі необхідно буде вказати конкретний спосіб виконання описаних в умові операцій. Ось один із найпростіших прикладів.

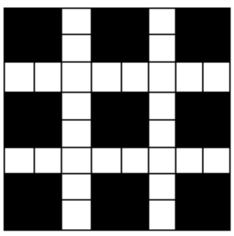
Задача 5.5. (7-9). У Петрика є набір "Юний паркетник", що складається із дощечок вигляду  та , якими можна заповнити прямокутну коробку. Одна дощечка  загубилася і її замінили дощечкою . Петрусь стверджує, що він і після таких змін зможе заповнити свою коробку. Чи справді це так?

Розв'язання. Може бути і так. Наприклад, для прямокутної коробки 6×4 заповнення можливе в обох випадках (див. мал. 6 - до загублення дощечки та мал. 7 – після).


Мал.6

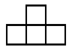

Мал.7

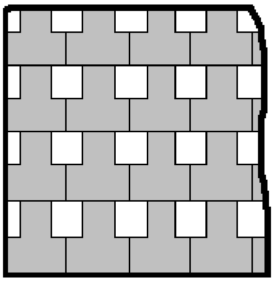
В наступних двох прикладах розмальовування дошки вдало поєднується із застосуванням принципу Діріхле.


Мал.8

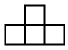
Задача 5.6. (7-9). На шахівницю 8×8 поклали 8 квадратиків 2×2 так, що кожен з них покриває рівно 4 клітинки дошки, а жодні два із квадратиків не перекриваються між собою. Довести, що за цими ж правилами на дошку можна покласти ще один квадратик.

Розв'язання. Виділимо на дошці 9 квадратиків 2×2 так, як показано на мал. 8. Як не був би поставлений на дошку квадратик 2×2 за вказаними в умові правилами, він не перекриється більше, ніж з одним із виділених квадратиків. А тому 8 покладених квадратиків можуть мати спільні клітинки не більше, ніж з вісьмома виділеними. Отже, принаймні на один із виділених квадратиків можна буде поставити ще один квадратик 2×2.

Задача 5.7. (8-10). На шаховій дошці 100×100 розташовано 800 фігурок вигляду . Кожна з фігурок покриває 4 клітинки дошки, і жодні дві з фігурок не покривають одну і ту ж клітинку. Довести, що тут можна покласти ще одну фігурку, яка повністю покриє 4 вільні клітинки.



Мал.9

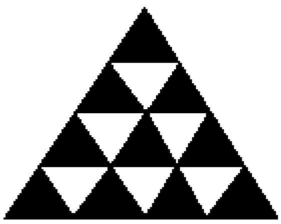
Розв'язання. Розмалюємо дошку з використанням фігурок заданого виду так, як показано на мал. 9. Всього по горизонталі поміститься 33 фігурки, а по вертикалі – 50. Разом будемо мати $33 \cdot 50 = 1650$ фігурок. Як би не була розташована на дошці фігурка вигляду  за вказаними в умові задачі правилами, вона зможе перекритися не більше, ніж з двома намальованими фігурками. Тому, як би не були розташовані на дошці задані 800 фігурок, принаймні $1650 - 2 \cdot 800 = 50$ намальованих позицій залишаться вільними для виставлення нових фігурок. Це значно більше однієї, як того вимагається в умові задачі.

Аналізуючи усі наведені розв'язання, можна помітити одну цікаву особливість. А саме: якщо в умові задачі йдеться про сусідні клітинки чи про можливість певних чергувань, то зручним є розмальовування дошки у шаховому порядку. Якщо йдеться про можливість покриття дошки, то часто до успіху приводить розмальовування дошки у стільки кольорів, із скількох клітинок складаються фігурки, які здійснюють покриття. Якщо ж мова йде про можливість докладання нової фігурки, то результату іноді вдається добитися виділенням на дошці певного числа фігурок заданого вигляду, які можуть або примикати одна до одної, або ж їх розміщення повторюється із певною закономірністю. Тоді при вдало вибраній закономірності на допомогу приходить принцип Діріхле.

Безумовно, при розв'язуванні конкретних задач можливі й відхилення від зроблених тут висновків. Та все ж перш, ніж шукати інший шлях, рекомендуємо спробувати розв'язати задачу саме вказаними способами.

Щоб у читачів не склалося враження, що методом розмальовування можна розв'язувати лише задачі, в яких фігурують квадрати чи прямокутники, пропонуємо наступний приклад.

Задача 5.8. (8-10). Замок має форму рівностороннього трикутника зі стороною 36 см. Він розбитий на 16 трикутних залів зі сторонами 9 м. Між сусідніми залами є двері. Довести, що коли людина захоче пройти по замку, побувавши в кожному залі не більше одного разу, то вона зможе оглянути не більше 13 залів.



Мал.10

Розв'язання. Розмалюємо зали так, як показано на малюнку 10. При обході замку людина змушена буде почергово переходити із замальованих у не замальовані зали, кількість яких відповідно дорівнює 10 та 6. Тому вона зможе відвідати не більше семи замальованих залів, а отже, разом не більше $7 + 6 = 13$ всіх залів замку.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися що обхід рівно 13 залів справді можливий.

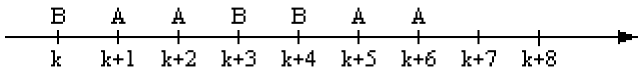
Задача 5.9. (7-9). Мишка гризе куб, складений із 27 одиничних кубиків. З'ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка з'їсти таким способом весь куб, крім центрального кубика?

Розв'язання. Розмалюємо кубики в два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики, що мають спільну грань, були різного кольору. Тоді кубиків, колір яких співпадає із кольором центрального кубика буде 13, а кубиків другого кольору – 14. Дотримуючись умови задачі, мишка почергово мінятиме кольори з'їдених кубиків, а тому серед 26 таких кубиків буде по 13 кубиків кожного кольору. Тому центральний кубик залишитися не може.

А зараз повернемось на хвильку до задачі 4.2 із розмальованою площиною, а потім розглянемо в чомусь аналогічну задачу із розмальованою прямою. Для обох цих задач характерним є вдалий вибір із нескінченної кількості замальованих точок саме тих, які дають можливість зробити необхідний висновок.

Задача 5.10. (8-10). Кожна точка прямої замальована в один з двох кольорів. Довести, що існує відрізок цієї прямої, середина і кінці якого замальовані в один колір.

Розв'язання. Розглянемо дану пряму як координатну вісь і виділимо на ній точки з



Мал.11

цілими координатами. Якщо кольори в таких точках чергуються, то вже серед п'яти послідовних точок є середина і кінці потрібного відрізка. Якщо ні — то знайдуться дві сусідні виділені точки, колір яких однаковий. Для визначеності будемо вважати, що це точки $k+1$ та $k+2$, а їхній колір *A* (див. мал. 11.). Інший колір позначимо через *B*.

Припустимо, що вказаного відрізка не існує. Тоді точки k та $k+3$ повинні бути кольору B . А отже, точка $k+6$ знову матиме колір *A*. Але тоді точка $k+4$ повинна мати колір *B*, а точка $k+5-$ знову колір *A*. Та яким би не був колір точки $k+8$, один з відрізків $[k, k+8]$ чи $[k+2, k+8]$ буде мати середину і кінці одного кольору. Одержане протиріччя і доводить наявність вказаного відрізка.

Відзначимо також, що розмальовування фігур буває корисним для аналізу табличної інформації. Доведемо, наприклад, що від таблиці 1 до таблиці 2 (див. малюнок 12) не вдасться перейти за жодне число кроків, якщо за один хід дозволяється поміняти в будь-якому рядку чи в будь-якому стовпчику всі знаки на протилежні.

Справді, виділимо у кожній з таблиць верхній лівий куток розміром 2×2. На кожному кроці вказаних перетворень у таблиці 1 число плюсів у виділеному кутку або не змінюється,

+	+	−
+	+	−
−	−	+

Табл.1

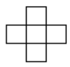
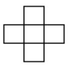
−	−	+
+	−	−
−	−	+

Табл.1

Мал.12

або змінюється на 2. Тому від чотирьох плюсів у таблиці 1 не вдасться перейти до одного плюса у таблиці 2. (Знову-таки зауважте, що наявність в обох таблицях непарного числа плюсів не є підставою для висновку про можливість переходу від таблиці 1 до таблиці 2).

Вправи до § 5

1. (7-9). Із дошки розмірами 13×13 вирізали 8 квадратиків 3×3. Доведіть, що з цієї дошки можна вирізати ще й дев'ятий такий квадратик.
2. *(7-9). Кутове поле таблиці: а) 7×7, б) 8×8 замальоване у чорний колір. За один раз дозволяється поміняти колір усіх клітинок будь-якого рядка чи будь-якого стовпчика таблиці. Чи вдасться через деяке число кроків всю таблицю замалювати у чорний колір?*
3. *(8-9). У кожній клітинці таблиці 8×8 записано по одиниці. За один крок дозволяється вибрати в таблиці будь-який квадрат 3×3 і збільшити на одиницю кожне з чисел вибраного квадрата. Доведіть, що після 1998-ми кроків в таблиці можна буде знайти квадрат, у чотирьох кутових клітинках якого записані числа, сума яких дорівнює 2002.*
4. *(8-9). У кожній клітинці таблиці 5×5 сидить жук. В деякий момент часу всі жуки переповзли на сусідні клітинки паралельно діагоналям таблиці. Яка: а) мінімальна; б) максимальна кількість клітинок таблиці могла при цьому звільнитися?*
5. *(8-10). У кожній клітинці шахової дошки 8×8 знаходилося по два жуки. В деякий момент часу всі вони переповзли на сусідні по горизонталі чи вертикалі клітинки, причому жуки з однієї клітинки переповзали у різних напрямках. Яка максимальна кількість клітинок могла при цьому звільнитися?*
6. *(8-10). Із дошки 8×8 вирізали кутову клітинку. Чи можна решту дошки покрити плитками 1×3?*
7. *(9-11). Із дошки 7×7 вирізали кутову клітинку. Чи можна решту дошки покрити плитками 1×2 так, щоб рівно половина з них лежали горизонтально?*
8. *(7-8). Чи можна шахову дошку покрити плитками таких двох видів:*  *та*  *із загальною площею 64?*
9. *(7-9). Яку мінімальну кількість фігурок вигляду* *, які складаються із п'яти клітинок, можна вирізати з дошки 8×8 так, щоб із решти дошки не вдалося вирізати ще принаймні одну таку фігурку?*
10. *(8-10). Кожна точка кола розмальована в один з двох кольорів. Доведіть, що в коло можна вписати рівнобедрений трикутник з вершинами одного кольору.*
11. *(9-11). Чи можна дошку розміру 2003x2003 розрізати на квадрати розмірів 2x2 та 3x3 ?*
12. *(9-11). а) Розмалюйте площину у 9 кольорів так, щоб не знайшлося жодних двох точок одного кольору на відстані 1 одна від одної. б) Чи не можна обійтися для розмалювання у попередньому випадку меншою кількістю кольорів?*
13. *(9-11). Площина розмальована у 2 кольори. Відомо, що у довільному правильному трикутнику зі стороною 1 є вершини обох кольорів. Доведіть, що існує правильний трикутник зі стороною $\sqrt{3}$, всі вершини якого одного кольору.*
14. *(9-11). Площина розмальована у 3 кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, які знаходяться на відстані 1 одна від одної.*
15. *(9-11). Кожна клітинка таблиці 9×9 розмальована в один із двох кольорів. Доведіть, що в цій таблиці можна виділити прямокутник, всі кутові клітинки якого мають однаковий колір.*

§ 6. Інваріанти

При розв'язуванні задач інколи доводиться мати справу з такою ситуацією: задана система послідовно змінює свій стан, і необхідно визначити певну характеристику її кінцевого стану. Повністю прослідкувати за всіма переходами буває складно, а то і неможливо. Тоді знайти розв'язок допомагає обчислення деякої величини, що характеризує стан системи і зберігається при всіх її переходах. Таку величину називають *інваріантом* (українською мовою – незмінний) даної системи. Зрозуміло, що при цьому значення інваріанта в початковому та кінцевому станах співпадають. А отже, інваріант може служити об'єктивною характеристикою.

Ми поняттю інваріанта надамо дещо ширшого змісту. А саме, називатимемо інваріантом системи не лише її кількісну характеристику, яка не змінюється при заданих перетвореннях, але й кожну якісну характеристику, що має властивість зберігатися при таких перетвореннях.

Однією з таких якісних характеристик може бути парність. Так, при розв'язуванні задачі 1.5 ми встановили, що незалежно від розміщення знаків, значення виразу в лівій частині рівності залишається непарним числом. А в задачі 1.6 із парністю пов'язані вже аж два інваріанти: парність суми усіх виписаних чисел та непарність кількості виписаних непарних чисел.

Інваріантом може служити і така якісна характеристика, як чергування чи, в більш загальному випадку, періодичність. Як інваріанти можна розглядати і різні ознаки подільності. Наприклад, яким би не був набір цифр, сума яких ділиться на 3, при довільних перестановках цих цифр ми завжди діставатимемо число, що ділиться на 3. Подібний інваріант в задачі 2.6 пов'язаний з подільністю на 11.

До інваріантів, що характеризуються періодичністю повторювань, часто приводять задачі, в яких доводиться розглядати остачі від ділення. Наприклад, в задачі 1.8 відповідний період складався аж із 20-ти різних чисел. А в задачі 2.4 періодично повторювалися остачі від ділення на 3 при парних n та від ділення на 4 при непарних n.

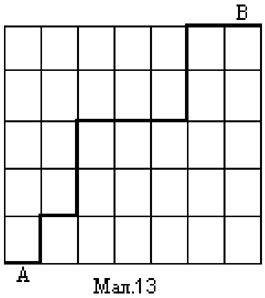
А ось приклад розв'язання ще однієї задачі, в якому інваріантом служить остача від ділення.

Задача 6.1. (8-9). Для числа 1997^{1997} підрахували суму його цифр. В одержаному числі знову підрахували суму цифр, і т.д. аж поки не одержали одноцифрове число. Визначити це останнє число.

Розв'язання. При діленні на 9 число 1997 дає остачу 8. Тому остача від ділення на 9 числа 1997^{1997} така ж, як і числа 8^{1997}. Але числа 8^n при діленні на 9 дають таку послідовність остач: 8, 1, 8, 1, 8, ..., елементи якої повторюються з періодом 2. Тому число 8^{1997}, а з ним і число 1997^{1997}, при діленні на 9 дає остачу 8. Оскільки, крім того, остача від ділення на 9 довільного числа та суми цифр цього числа однакові, то скільки б разів не застосовувати описану в умові задачі операцію, кожного разу одержуватимемо числа, які при діленні на 9 дають остачу 8. А тому одноцифрове число, яке дістанемо на останньому етапі, дорівнюватиме 8.

Комбінаторні обчислення також часто базуються на міркуваннях, пов'язаних з інваріантами.

Задача 6.2. (8-9). План міста має схему, зображену на мал. 13. На всіх вулицях введено односторонній рух: можна їхати (див. план) тільки вправо, або тільки вгору. Скільки є різних маршрутів, які ведуть із точки *A* в точку *B*? (Один із таких маршрутів показано на плані).



Мал.13

Розв'язання. Назвемо вулицею відрізок зображеної сітки, який з'єднує два сусідні вузли. Для того, щоб попасти в точку *B*, очевидно, необхідно проїхати 5 "вертикальних" та 7 "горизонтальних вулиць". Отже, кожний такий маршрут складається із 12 (інваріант!) вулиць. Оскільки при цьому 5 із них (ще один інваріант!) потрібно обов'язково проїхати вгору, то кількість усіх можливих маршрутів визначається тим, скількома способами можна вибрати 5 із 12 етапів для руху в цьому напрямку. Отже всього дістанемо C_{12}^5 різних маршрутів.

Зауважимо, що акцентуючи увагу на семи напрямках вправо, ми дістали б число C_{12}^7. Але, як нам уже відомо, $C_{12}^7 = C_{12}^5$.

Характерним прикладом інваріанта в задачах на принцип Діріхле є властивість: "принаймні в одній клітинці розміститься не менше двох кроликів".

Що стосується розмальовування фігур, то ми вже згадували задачу 1.3, в якій інваріантом є чергування білих і чорних полів шахівниці. Подібний інваріант ми мали і в задачі 5.2. Дещо складніша ситуація у випадку розмальовування у більшу кількість кольорів. Так, в задачі 5.4 інваріантом служить можливість покриття кожною плиткою 4 × 1 чотирьох клітинок різних кольорів (на чому і ґрунтується розв'язання цієї задачі). Зауважимо, що узагальнюючи цю задачу на випадок дошки 10 × 10, а потім і дошки $(4n+2)\times(4m+2)$, інваріантом можна вважати і сам метод розв'язування таких задач з допомогою розмальовування у 4 кольори.

Пропонуємо читачам проаналізувати також інші задачі попередніх параграфів з точки зору поняття інваріанта. Розглянемо тепер приклади використання інваріантів інших видів.

Задача 6.3. (8-10). Задано числа $\sqrt{2}$, 2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Дозволяється будь-які два з них замінити їх сумою та різницею, поділеними на $\sqrt{2}$. Чи можна, провівши цю операцію декілька разів, дістати трійку чисел 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$?

Розв'язання. Припустимо, що на якомусь кроці ми дістали трійку чисел *a, b, c*. Тоді після виконання наступних перетворень дістанемо трійку $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}, c$. Оскільки $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2$, то сума квадратів заданих чисел є інваріантом для таких перетворень. Але $\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\neq 1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. Тому із трійки $\sqrt{2}$, 2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ трійку 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ дістати не вдасться.

Зауважимо, що у випадку, коли остання рівність мала б місце, висновок про можливість одержання потрібної трійки був би поспішним. Необхідно було би ще й вказати конкретні перетворення, якими цього можна досягти.

Задача 6.4. (8-10). Пару чисел $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$ одним елементарним перетворенням дозволяється замінити на одну із пар $\left(\frac{a+b}{b},\frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b},\frac{c-d}{d}\right)$, $\left(\frac{b}{a},\frac{c}{d}\right)$, причому скорочення в одержаних дробах не допускаються. Чи можна таким способом із пари $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ дістати пару $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$?

Розв'язання. Ні, не можна, бо якщо пара вигляду $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$ переходить у пару $\left(\frac{m}{n},\frac{p}{q}\right)$ то у кожному з трьох можливих випадків справджується рівність $|mq-np|=|ad-bc|$. Але $|1\cdot 2-4\cdot 3|\neq|1\cdot 4-2\cdot 3|$.

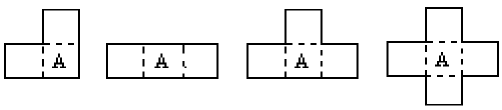
Задача 6.5. (8-10). На дошці виписали 1997 додатних чисел. Дозволяється стирати будь-які два з них a та b , а замість того записати число $\frac{a+b}{4}$. Після 1996 таких ходів залишиться одне число. Довести, що коли спочатку було записано 1997 одиниць, то число, яке залишилось, не менше $\frac{1}{1997}$.

Розв'язання. Оскільки $(a-b)^2\geq 0$, то, додавши до обох частин цієї нерівності $4ab$, дістанемо: $(a+b)^2\geq 4ab$. Звідси $\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}$, тобто $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}=\frac{1}{\frac{a+b}{4}}$. Тому на кожному кроці сума обернених величин усіх записаних чисел не збільшується (властивість-інваріант!) Спочатку ця сума дорівнювала 1997, а отже, для числа c, яке залишиться, маємо $\frac{1}{c}\leq 1997$, тобто $c\geq\frac{1}{1997}$.

А ось приклад використання інваріанта, пов'язаного з геометричними міркуваннями.

Задача 6.6. (8-10). Квадратне поле розбите на 100 однакових квадратних ділянок, 9 із яких заросли бур'янами. Всяка інша ділянка заростає бур'янами тоді і тільки тоді, коли в бур'янах опиняється принаймні дві сусідні (через межу) ділянки. Довести, що при таких умовах все поле не зможе заrости бур'янами.

Розв'язання. Можливі 4 принципово різні розташування поки-що незабур'яненої



Мал.14

ділянки A (див. мал. 14) в оточенні не менше двох забур'янених ділянок:

Межі ділянки A з її забур'яненими "сусідами" позначені пунктирними лініями. Якщо a - довжина сторони однієї ділянки, то суми периметрів забур'янених "сусідів" ділянки A відповідно дорівнюють $8a$, $8a$, $12a$ та $16a$. Після забур'янення ділянки A периметри нової "критичної" площі (без врахування пунктирних ліній) уже будуть відповідно $8a$, $8a$, $10a$ та $12a$. Таким чином, при забур'яненні нової ділянки сумарний периметр забур'яненої площі не збільшується (інваріант!). Але спочатку периметр 9-ти таких ділянок не перевищував (був меншим, якщо деякі з них межували) $36a$. Тому він не міг стати рівним $40a$, тобто рівним периметру всього поля. Отже, все поле зарости бур'янами не може.

Задача 6.7. (8-9). Для участі в розіграші кубка країни з футболу подали заявки 2006 команд. Як скласти календар зустрічей між ними, щоб для визначення володаря кубка провести найменшу кількість ігор? (Між собою команди зустрічаються по одному разу. Нічиїх не буває. Команда, яка програла, вибуває із змагань.)

Розв'язання. Для визначення володаря кубка необхідно, щоб із розіграшу вибули 2005 команд. Тому, як не складай календар зустрічей, для виявлення переможця доведеться провести 2005 (інваріант!) ігор.

Задача 6.8. (8-9). В першості країни бере участь 16 команд. Кожна команда має свій стадіон і повинна зіграти з усіма своїми суперниками. У кожному із 15 турів відбуваються одночасно всі 8 матчів. Чи можна скласти календар зустрічей так, щоб усі команди почергово проводили ігри вдома та на виїзді?

Розв'язання. Виділимо дві команди, які розпочинали чемпіонат іграми вдома. Тоді ці команди, проводячи почергово ігри вдома та на виїзді, в жодному з турів не змогли б зустрітися між собою. Отже, такий календар скласти не можна.

Пропонуємо читачам самостійно визначити, що служить інваріантом у цій задачі.

Від футболу перейдемо до "чаювання".

Задача 6.9. (8-9). Є два двістіграмових стакани. У першому із них знаходиться 100 г чаю, а у другому – 100 г молока. Із першого стакана 50 г чаю перелили у другий стакан. Після перемішування 50 г суміші перелили назад у перший стакан. Потім 50 г нової суміші із першого стакана перелили у другий, і знову 50 г суміші із другого стакана у перший. Таку процедуру повторили 2002 рази. Чого залишилось більше: чаю у першому стакані чи молока у другому?

Розв'язання. Однаково, оскільки після таких переливань загальні об'єми рідини в обох стаканах не змінилися, то скільки чаю перелили у другий стакан, стільки ж молока із другого стакана було перелито у перший.

Після "чаю" знову повернемось до математики.

Задача 6.10. (8-10). Встановити, скінченою чи нескінченою є множина чисел, які є точними квадратами, мають суму цифр 9 і не закінчуються нулем.

Розв'язання. Шуканими є, наприклад, числа вигляду $(10^n+2)^2$ та $(2\cdot 10^n+1)^2$, де n – довільне натуральне число. Тому така множина нескінченна.

У цьому випадку інваріантом є форма запису чисел із шуканої множини. Ще з одним прикладом подібного інваріанта зустрічаємося в наступній задачі.

Задача 6.11. (8-10). Доведіть, що число 4…48…89, у десятковому записі якого використано 2006 четвірок, 2005 вісімок та одну дев'ятку , є точним квадратом.

Розв'язання. Зауважимо, що $49 = 7^2$, $4489 = 67^2$, $444889 = 667^2$. Можна припустити, що $a = 4\ldots48\ldots89$, у записі якого використали n четвірок, $(n-1)$-у вісімку та одну дев'ятку є точним квадратом при кожному натуральному n. Справді, $a = 4\ldots4\cdot 10^n +$

$$+8\ldots8\cdot 10+9=\frac{4}{9}\cdot 9\ldots9\cdot 10^n+\frac{8}{9}\cdot 9\ldots9\cdot 10+9=\frac{4}{9}\left(10^n-1\right)\cdot 10^n+\frac{8}{9}\cdot\left(10^{n-1}-1\right)\cdot 10+9=$$

$=\dfrac{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^n+1}{9}=\left(\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$. Оскільки сума цифр числа $2\cdot 10^n + 1$ дорівнює 3, то a – точний квадрат. Покладемо $n = 2006$ і задача розв'язана.

При обчисленні сум інваріанти можна одержати шляхом групування доданків.

Задача 6.12. (7-9). Обчислити суму усіх натуральних чисел від 1 до 2002 включно.

Розв'язання. Згрупуємо доданки в пари: 1 + 2002, 2+2001, …, 1001 + 1002. У кожній парі сума чисел дорівнює 2003 (інваріант). Оскільки таких пар є 1001, то шукана сума дорівнює $2003 \cdot 1001 = 2005003$.

Звернемо увагу читачів на те, що при сумуванні непарної кількості доданків буває зручно добавити ще один нульовий доданок. Таким способом для обчислення суми натуральних чисел від 1 до 2001 дістанемо 1001-у пару: 0 + 2001, 1 + 2000, ..., 1000 + 1001. Звідси знаходимо шукану суму: $2001 \cdot 1001 = 2003001$.

Ще один подібний приклад такого роду. Для розбиття чисел 1, 2, 3, …, 1999 на дві групи, в яких суми квадратів чисел є рівними, добавимо до заданих чисел нуль, а після цього кожну вісімку чисел розіб'ємо на групи по 4 числа на основі рівності:
$(8n)^2+(8n+3)^2+(8n+5)^2+(8n+6)^2=(8n+1)^2+(8n+2)^2+(8n+4)^2+(8n+7)^2$ Залишилось лише вилучити тепер уже зайвий нуль.

Використовувати інваріанти можна також для аналізу табличної інформації.

Задача 6.13. (8-9). Чи можна таблицю $n\times n$ заповнити числами 1, –1, 0 так, щоб усі суми по стовпчиках, по рядках та по обох діагоналях були різними?

Розв'язання. Ні, не можна, бо усіх таких сум $2n+2$, а із чисел 1, -1, 0 можна утворити лише $2n+1$ різних сум (цілих чисел від $-n$ до n). Тому принаймні дві суми будуть однаковими.

Задача 6.14. (8-10). В таблиці $m\times n$ записані числа. Дозволяється одночасно міняти знаки усіх чисел одного рядка чи одного стовпчика. Довести, що таким способом можна досягти того, що усі суми чисел по рядках і по стовпчиках будуть невід'ємними.

Розв'язання. Нехай M – максимальна із можливих сум усіх чисел таблиці при обумовлених перетвореннях. Доведемо, що таблиця з такою сумою є шуканою. Дійсно, якби в деякому рядку чи в деякому стовпчику сума чисел була від'ємною, то, змінивши знаки усіх чисел цього рядка чи стовпчика, ми одержали б загальну суму, більшу, ніж M.

Зауважимо, що для обох останніх задач характерним є те, що кінцевий результат не залежить від розміщення елементів, а в задачі 6.14 – і від самих елементів таблиці.

Задача 6.15. (7-9). В одній вершині куба записано число 1, а в усіх решта – нулі. Дозволяється за один крок до чисел на кінцях одного ребра додавати по одиниці. Чи можна за декілька кроків всі числа зробити рівними?

Розв'язання. Ні, не можна, бо на кожному кроці до загальної суми додається число 2. Тому сума усіх записаних чисел залишається непарною (інваріант!), а число усіх вершин куба парне.

Задача 6.16. (8-9). У вершинах куба записані деякі числа. Кожне з чисел замінили середнім арифметичним трьох сусідніх (через спільні ребра), причому всі заміни проводяться одночасно. Після 2002 таких операцій в кожній вершині виявилось початкове число. Чи обов'язково всі початкові числа були рівними між собою?

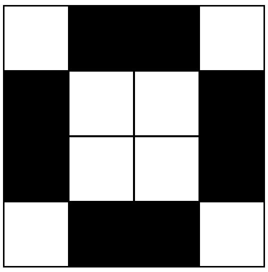
Розв'язання. Нехай в одній з вершин куба записане число a. Запишемо це ж число у діагонально протилежних вершинах трьох граней куба, які сходяться у вибраній нами вершині. В усіх інших вершинах куба запишемо число $b \neq a$. При цьому для кожного записаного числа a трьома сусідніми виявляться числа b, і для кожного записаного числа b сусідніми будуть числа a. Тоді при кожному ході всі числа a та b по черзі мінятимуться одне на одне. Тому після кожного парного ходу в кожній вершині куба знову буде початкове число. Отже, початкові числа не обов'язково мають бути рівними між собою.

+	–	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Мал.15

Задача 6.17. (8-10). На мал. 15 задана таблиця, заповнена плюсами та одним мінусом. Дозволяється міняти знаки на протилежні у довільному рядку, у довільному стовпчику, на довільній діагоналі чи прямій, паралельній діагоналі (зокрема, в будь-якій із кутових клітинок). Довести, що в результаті таких операцій не вдасться одержати таблицю з одними тільки плюсами.

Розв'язання. Розмалюємо задану таблицю так, як показано на мал.16. Тоді пряма, що проходить по рядку, стовпчику, діагоналі чи паралельно діагоналі таблиці, перетинатиме парне число заштрихованих клітинок або не перетинатиме жодної з них. Тому парність числа мінусів, що знаходиться у заштрихованих клітинках, не змінюватиметься. Отже, одержати таблицю з одними тільки плюсами не вдасться.



Мал.16

Пропонуємо читачам проаналізувати цю задачу для випадків, коли мінус знаходиться не в заштрихованих клітинках мал.16.

Широкий спектр інваріантів зустрічаємо в геометрії: сума кутів трикутника; величина вписаних кутів, що спираються на одну дугу; суми протилежних кутів у вписаному чотирикутнику; суми довжин протилежних сторін в описаному чотирикутнику тощо. Зупинятися на них ми тут не будемо. Розглянемо лише одну цікаву задачу, розв'язання якої знову ж таки пов'язано з принципом Діріхле.

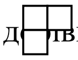
Задача 6.18. (8-10). На площині задано 2004 точки і коло радіуса 1. Довести, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до заданих 2004 точок не менша за 2004.

Розв'язання. Розглянемо дві довільні діаметрально протилежні точки на колі. Відстань між ними дорівнює 2. Тому для довільної точки площини сума відстаней від цієї точки до вибраних точок на колі не менша двох. А тому сума відстаней від 2004 точок до двох вибраних точок не менша за $2 \cdot 2004$. Отже, принаймні для однієї точки на колі сума таких відстаней не менша за 2004. Більше того, вказаною властивістю володіє не менше половини точок кола.

До інших задач, пов'язаних із геометричними інваріантами, повернемось у § 20.

Вправи до § 6

1. (7-9). На колі довільним чином виписали 4 одиниці і 5 нулів. Після цього між двома однаковими числами записали 1, а між різними – 0 і витерли початкові числа. Так повторили кілька разів. Чи могли в результаті одержати: а) 9 нулів, б) 9 одиниць?
2. (7-9). На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 2002. Дозволяється витерти будь-які два числа і замість них записати остачу від ділення їхньої суми на 13. Яке число залишиться після 2001-го кроку?
3. (8-10). У числі 2^{2006} закреслили останню цифру і додали її до числа, яке утворилось. З одержаним при цьому числом поступили аналогічно, і так – аж поки не утворилося 10-цифрове число. Доведіть, що у ньому принаймні одна цифра повторюється.
4. (7-9). На дошці записано 2005 чисел, кожне з них або +1, або –1. Дозволяється записати –1 замість двох різних чи 1 замість двох однакових витертих чисел. Доведіть, що число, яке залишиться після 2004-ьох таких замін, не залежить від порядку зроблених витирань.
5. (8-9). На дошці записані числа 2002, 2003, 2004. Дозволяється замість будь-яких двох записаних чисел x та y записати $\frac{3x-y}{2}$ та $\frac{3y-x}{2}$. Чи вдасться за декілька кроків одержати набір 2003, 2004, 2005? Якщо так, то яка мінімальна кількість кроків для цього потрібна?
6. (8-9). Дано не менше двох чисел, які не дорівнюють нулю. Дозволяється замість будь-яких двох записаних чисел x та y записати $x+\frac{y}{2}$ та $y-\frac{x}{2}$. Чи вдасться після кількох таких операцій повернутися до початкового набору?
7. (8-9). а) На дошці записана пара чисел (19, 97). За один хід дозволяється до вже наявної пари (a, b) дописати пари $(a + 1, b + 1)$ та $(a - 1, b - 1)$, а за наявності пар (a, b) та (b, c) – також і пару (a, c). Чи можна через декілька кроків одержати пару (1, 997)? б) Розв'яжіть дану задачу за умови, що додатково дозволено за наявності пари (mk, nk) записувати пару (m, n).
8. (7-9). Десять шашок розмістили в ряд. Чи можна розташувати їх у зворотному порядку, якщо дозволяється міняти місцями будь-які дві шашки, які стоять: а) через одну; в) через дві?

9. (8-9). Турист піднімався на Говерлу з 8 год. ранку до 12 год. дня. Наступного дня він опускався вниз з 9 год. ранку до 12.30 год. по тому ж маршруту. Доведіть, що на маршруті туриста є точка, в якій годинник кожного дня показував однаковий час.
10. (8-9). Є лампа з сімома штирями і розетка на 7 гнізд. Пронумеруйте штирі та гнізда цифрами від 1 до 7 так, щоб при довільному втиканні лампи хоч один штир попав у гніздо з тим самим номером.
11. (8-9). Клітинки таблиці 2005×2005 заповнено числами так, що сума чисел у кожних трьох клітинках, які покриває фігура , дорівнює 3. Доведіть, що всі записані числа – одиниці.
12. (8-9). Знайдіть всі двоцифрові числа, сума цифр яких не змінюється при множенні на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
13. (9-11). На дошці записані числа 1, 2, ... ,10. Дозволяється витерти будь-які два записані числа x та y і записати замість них: а) $x + y + 1$; б) $xy + x + y$; в) $x + y + 5xy$. Яке число залишиться в кожному з цих випадків після дев’яти кроків?
14. (9-11). На дошці записано 100 одиниць. За один крок дозволяється замість будь-яких двох записаних чисел x та y записати число $\frac{xy\sqrt{2}}{x+y}$. Після 99 кроків залишилось одне число. Доведіть, що воно не менше за $\frac{1}{10}$.
15. (8-11). У парламенті у кожного його члена не більше трьох ворогів. Доведіть, що парламент можна розбити на 2 палати так, щоб у кожного депутата в одній з ним палаті було не більше одного ворога.

§ 7. Ігри двох осіб

Розглянемо ще один клас олімпіадних задач, під час розв'язування яких важливу роль відіграють інваріанти. Це задачі на ігри двох осіб. Зауважимо, що сучасна теорія ігор має досить широкі практичні застосування. Ми ж обмежимося лише розглядом окремих найпростіших задач, типових для різного роду математичних олімпіад. У кожній такій грі беруть участь двоє. Вони роблять ходи почергово. У задачі вимагається встановити, у котрого з гравців (того, що починає гру, чи його суперника) є виграшна стратегія, тобто шлях, який неминуче приведе до перемоги незалежно від ходів суперника, і в чому вона полягає. Повний перебір усіх можливих ходів та ходів-відповідей, як правило, здійснити не вдається. Тому при розв'язуванні таких задач доводиться шукати деяку властивість-інваріант, на основі якої можна побудувати виграшну стратегію.

Задача 7.1. (7-8). Двоє по черзі розламують шоколадну плитку 6×8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків вздовж заглиблення. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. При кожному розламуванні кількість шматків збільшується на 1. Спочатку був 1 шматок. В кінці гри, коли не можна зробити уже жодного ходу, таких шматків 48. Отже, гра триватиме рівно 47 ходів. Оскільки при цьому кожний непарний хід робить гравець, який розпочинає гру, то він же зробить і останній 47-ий хід. Тому перший гравець переможе, незалежно від того, як буде грати він сам та його суперник.

Таким чином, число 47 виявилося інваріантом даної задачі. Читачам надаємо можливість самостійно порівняти метод його встановлення з міркуваннями, використаними під час розв'язування задачі 6.7.

Задача 7.2. (7-8). На дошці записані 10 одиниць та 10 двійок. За один хід дозволяється стирати будь-які дві цифри і, якщо вони були однаковими, записати двійку, а якщо різними – одиницю. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці, – одиниця, то виграє перший гравець, якщо ж двійка – то другий. У котрого з гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. При кожному ході кількість одиниць або не змінюється, або зменшується на 2. Оскільки спочатку було парне число одиниць, то одиниця залишитися не може. Отже, незалежно від гри суперників, виграє другий гравець.

Читачі тут легко побачать зв'язок із методами, які розглядались в §1.

Виграшної стратегії може не бути і в жодного з гравців. Ось два приклади.

Задача 7.3. (7-8). На столі стоїть 9 стаканів вверх дном. Грають двоє, роблячи ходи по черзі. За один хід дозволяється перевернути будь-які 4 стакани або доставити нові 2 стакани вверх дном. Виграє той, після ходу якого всі стакани стоятимуть вниз дном. У котрого із гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Незалежно від ходів кожного із суперників, кількість стаканів, які стоять вверх дном, залишається непарною. А тому досягти того, щоб усі стакани стояли вниз дном, не вдасться жодному із гравців.

Задача 7.4. (7-9). На дошці записане число 10. Грають двоє, роблячи ходи почергово. За один хід дозволяється дописати справа від числа, записаного останнім, число 10 або 1010. Виграє той, хто першим одержить число, що ділиться на 1996. У котрого із гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Незалежно від гри суперників, кожного разу одержуватимуться числа, які закінчуються на 10, а отже, не діляться на 4. Але 1996 на 4 ділиться. Тому виграшної стратегії немає в жодного з гравців.

Зауважимо, що в ігрових задачах можуть використовуватись також інші ознаки подільності. Наприклад.

Задача 7.5. (8-9). Два учні виписують цифри 2001-цифрового числа, починаючи з ненульової цифри старшого розряду і далі – по порядку. Починаючий гру виграє, якщо записане ними число ділиться на 11. Чи може суперник завадити йому здобути перемогу?

Розв'язання. Може, для цього йому треба написати другу цифру числа на 1 меншу, ніж перша цифра цього числа, записана починаючим гру гравцем, а далі повторювати ходи суперника. Перед останнім ходом першого гравця цифри на позиціях від третьої до 2000-ої будуть попарно рівними. Отже, якщо перша цифра a, друга цифра – $(a - 1)$, то для подільності числа на 11 першому гравцеві доведеться записати таку цифру x, щоб різниця $a + x - (a - 1)$ ділилась на 11. Але легко переконатися, що такої не існує.

Повернемося ще раз до задачі 7.1. Хоч у ній перемога першого гравця і досягається незалежно від його гри, все ж можна було б запропонувати для нього цілком осмислену стратегію. Припустимо, що своїм першим ходом він розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6×4. Тоді, яку б із цих частин не розламав другий гравець, у першого є можливість зробити аналогічний розлом у тотожній їй другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Тоді, який би шматок не розламав другий гравець, перший знову має змогу зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в ту ж саму пару. Таким чином, скільки б не продовжувалася гра, ходи першого гравця не зможуть вичерпатися раніше, ніж ходи другого.

Та чи доведено цим, що така стратегія приводить першого гравця до перемоги? – Очевидно, що ні. Адже, і в задачах 7.3 та 7.4 починаючий гру теж не міг програти (хоч не міг і виграти). Але зауваживши, що число розломів плитки є скінченним, ми дістаємо, що врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. А з попередніх міркувань випливає, що останній хід при цьому буде за починаючим гру, який і здобуде перемогу.

Подібна стратегія ґрунтується на так званому *принципі симетрії.* А сама можливість займати симетричні позиції є важливим інваріантом в задачах на ігри двох осіб.

Задача 7.5. (8-9). У рівностях * + * + * = *, * + * = *, * = * двоє вписують по черзі на свій розсуд замість зірочок цілі числа. Довести, що той, хто починає гру, завжди може досягти правильності усіх числових рівностей.

Розв'язання. Починаючий гру повинен записати довільне ціле число замість однієї із зірочок другої рівності. Далі, записуючи числа в тій же рівності, що і його суперник, він матиме змогу записати останні числа кожної рівності, а отже, і добитися їх виконання.

Зауважимо, що відступ від описаної стратегії може привести починаючого і до поразки. Наприклад, суперник негайно міг би скористатися із вписування числа у третю рівність.

Задача 7.7. (8-9). Дано шахівницю 8×8 і прямокутні доміно 1×2. За один хід дозволяється накрити дві сусідні клітинки шахівниці так, щоб плитки доміно не перекривались. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Виграшна стратегія є у другого гравця. Для перемоги він кожного разу повинен ставити плитку доміно симетрично відносно центра дошки до плитки, поставленої перед цим його суперником.

Задача 7.8. (8-9). На дошці записане рівняння $x^3 + \_\_ x^2 + \_\_ x + \_\_ = 0$. Два учні по черзі вписують на вільних місцях цілі числа – коефіцієнти рівняння. Довести, що починаючий гру може досягти того, щоб усі корені рівняння були цілими числами.

Розв'язання. Для перемоги першому гравцю слід записати перед *x* число -1. Тоді, де і яке б число не записав його суперник, перший гравець на останньому вільному місці записує число протилежного знаку. В результаті рівняння набуде такого загального вигляду: $x^3 + ax^2 - x - a = 0$. Розкладаючи його ліву частину на множники, дістанемо: $(x+a)\cdot(x^2-1) = 0$. Звідси $x_1 = -a$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Отже, всі одержані корені є цілими числами.

Задача 7.9. (8-10). Двоє гравців по черзі замінюють у виразі $f(x) = a_1 x + a_2(x^2+1) + a_3 x^3 + a_4(x^4+1) + \ldots + a_{2000}(x^{2000}+1) + a_{2001}x^{2001}$ коефіцієнти a_k довільними дійсними числами. Починаючий гру виграє, якщо після заміни усіх a_k рівняння $f(x) = 0$ має корінь з інтервалу (–0,5; 0,5). В протилежному випадку перемагає його суперник. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Перший гравець може досягти того, щоб коренем рівняння було число 0. Для цього він повинен спочатку замінити довільний коефіцієнт з непарним індексом, а потім на будь-яку заміну a_k його суперника відповідати заміною a_n з тим же по парності індексом на число, протилежне до числа, записаного суперником. В результаті виконуватиметься рівність $f(0) = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2000} = 0$, тобто число 0 буде коренем рівняння $f(x) = 0$.

Зрозуміло, що "симетричному" ходу може завадити попередній хід суперника. Тому необхідно шукати таку симетрію, при якій попередній хід не ставав би на заваді реалізації вибраного плану. Наприклад, в задачі 7.7 було використано симетрію відносно центра дошки. В той же час симетрія відносно прямої, що ділить дошку навпіл, до успіху не привела б. Адже в такому випадку перший гравець міг би перекрити цю вісь і тоді у другого гравця симетричного ходу не було б.

Іноді для розв'язування задач-ігор зручно скористатися методом розмальовування.

Задача 7.10. (8-10). Задана дошка 2004×2005. Грають двоє, роблячи ходи почергово. За один хід дозволяється вирізати одну, дві чи три довільні клітинки цієї дошки. Кожен із гравців повинен зробити по 2000 ходів. Виграє другий гравець, якщо поля, які залишилися невирізаними, можна покрити плитками 1×2, що не перекриваються між собою і не покривають вирізаних клітинок. Довести, що у цього гравця існує виграшна стратегія.

Розв'язання. Розділимо (розмалюємо) дошку на 2005×1002 частин, що мають форму плиток 1×2. Якщо перший гравець своїм ходом вирізає повністю одну з таких частин, то другий у відповідь вирізає довільну іншу частинку 1×2. Якщо ж після ходу першого гравця в деяких із виділених частинок вирізано по одній клітинці, то другий своїм ходом вирізає всі інші клітинки цих же частинок. Таким чином, після 2000 ходів, зроблених кожним із гравців, на дошці залишаться лише виділені частинки 1×2, з яких не вирізано жодної клітинки. Кожну з них можна буде покрити плиткою 1×2.

"Симетрія" тут полягає в тому, щоб не залишати на дошці частково "пошкоджених" виділених частинок 1×2. Взагалі, в різних стратегіях "симетрія" проявляється по-різному. Але, як правило, перемагає той з гравців, кому вдається своїм ходом створити симетричну позицію. Починаючий же може сподіватись на успіх, якщо його перший хід виключає можливість створення такої "симетрії" з боку суперника.

Більш точно, замість терміну "симетрія" тут можна було б використати термін "*взаємно-однозначна відповідність*".

Інший підхід до розв'язування задач на ігри двох осіб пов'язаний з аналізом так званих виграшних позицій.

Задача 7.11. (8-10). На дошці записане число 2006. За один хід дозволяється відняти від нього будь-яке натуральне число, що є степенем двійки і не перевищує записаного $(1 = 2^0)$. Виграє той, хто одержить число 0. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Зауважимо, що 2^n не ділиться на 3, причому при діленні на 3 числа 2^{2k+1} дають остачу 2, а числа 2^{2k} – остачу 1 (згадайте твердження 2 із §2). Перший гравець, віднявши своїм першим ходом число 2, залишить суперникові число 2004, яке ділиться на 3. Якщо надалі другий гравець відніме двійку в непарному степені, то перший відповість відніманням двійки у парному степені, і навпаки, на віднімання двійки в парному степені – відніманням двійки в непарному степені. Таким чином, перший гравець завжди має змогу займати виграшні позиції – діставати числа, що діляться на 3, а другий – весь час змушений записувати числа, що на 3 не діляться. Отже, дістати 0 другому гравцеві не вдасться. А оскільки при кожному ході записувані числа весь час зменшуються, залишаючись невід'ємними, то через певне скінченне число кроків перший гравець справді дістане число 0 і виграє.

Як бачимо, і тут використані міркування, пов'язані із симетрією. А зайняття першим гравцем позиції 2004 – це не що інше, як хід, що не дає можливості займати суперникові симетричну позицію.

Задача 7.12. (8-10). На столі лежить 2003 сірники. Двоє гравців по черзі беруть сірники зі столу. За один хід дозволяється взяти 1 або 2 сірники. Але один і той же гравець не має права взяти 2 сірники двічі підряд. Виграє той, хто взяв останній сірник. Який з гравців має виграшну стратегію?

Розв'язання. Виграшна стратегія є у другого із гравців. Незалежно від ходу першого гравця, він може своїм ходом залишити суперникові 2000 сірників. Далі помічаємо, що за кожні два послідовні ходи перший гравець може взяти або $2 = 1 + 1$, або $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ сірники. Тому, починаючи з 2000 сірників, другий гравець може грати так, щоб за кожні два послідовні ходи брати 2 сірники, якщо суперник взяв за два ходи 3 сірники, та 3 сірники, якщо суперник за два ходи взяв 2 сірники. Для цього в кожній серії таких двох послідовних ходів він своїм першим ходом повинен взяти 1 сірник. Таким чином, другий гравець матиме змогу щоразу зменшувати кількість сірників на 5. А отже, він зможе взяти і останній сірник.

Як видно з наведеного розв'язання, виграшними у цій задачі були позиції для числа сірників, що діляться на 5. Другий із гравців завжди мав можливість займати ці позиції і врешті-решт здобути перемогу.

Так що ж таке ***виграшна позиція***? Які ознаки є характерними для неї? Насамперед, будемо вважати виграшною кінцеву позицію, яка, у відповідності з умовою задачі, відповідає перемозі одного із гравців. Всі позиції, з яких можна дістатися до кінцевої за один хід, назвемо програшними. Адже гравець, який займе їх своїм ходом, зазнає поразки вже після наступного ходу суперника. В той же час позицію, після довільного ходу з якої суперник займе програшну позицію, знову можна вважати виграшною. Відповідно, всі позиції, з яких хід веде у виграшну позицію, знову будуть програшними. Таким чином одержуємо, що за один хід із попередньої виграшної позиції не можна потрапити в наступну виграшну позицію. Навпаки, із програшної позиції у виграшну за один хід потрапити можна. Отже, для здобуття перемоги при правильній грі потрібно весь час займати виграшні позиції. Таким чином, знаходження множини виграшних позицій рівносильне визначенню стратегії гри. Справді, зайняття гравцем виграшних позицій у випадку скінченного числа ходів неодмінно приводить його до перемоги, незалежно від гри суперника. Тому, якщо початкова позиція була програшною, то при правильній грі перемогу одержить гравець, який вступає в гру першим, а якщо виграшна – то його суперник, який, не доклавши ще ніяких зусиль, уже займає виграшну позицію.

Проаналізуємо з цієї точки зору дві попередні задачі. В задачі 7.11, очевидно, виграшними будуть позиції, для яких записані числа діляться на 3, а всі інші позиції – програшними. В тому числі і позиція 2006, завдяки чому перемогу зміг здобути перший гравець.

В задачі 7.12 ситуація складніша. Проведемо аналіз з кінця. Число 0 є виграшною позицією. Число 1, безумовно, програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, виграє суперник. З числами 2 та 3 однозначно визначитися не вдається. Справді, 2 буде виграшною позицією, якщо суперник в даний час не має права брати 2 сірники, і програшною – якщо у нього таке право є. Аналогічно, число 3 буде виграшною позицією лише при одній додатковій умові, що своїм попереднім ходом було взято 1 сірник. Такі позиції будемо називати умовно виграшними. Від виграшних вони відрізняються тим, що їх використання приводить до виграшу лише за певної додаткової умови, яка залежить не тільки від останнього, а й від попередніх ходів суперників. Таким чином, пошук наступної виграшної позиції необхідно продовжити. Число 4 – програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, суперник має змогу зайняти уже точно виграшну для себе позицію 3. Оцінимо тепер число 5. Якщо суперник забирає 1 сірник, то він попадає у програшну позицію 4, а якщо забирає 2 сірники, то позиція 3 для нього теж є програшною. Адже, якщо перед наступним його ходом залишити 2 сірники, то взяти обидва з них він уже не має права. Отже, число 5 є виграшною позицією. Аналогічно встановлюємо, що наступною виграшною позицією є число 10, а потім – і всі числа, кратні 5. Сама ж стратегія виграшу описана в розв'язанні задачі 7.12.

Зауважимо, що початкова позиція 2003 виявилася виграшною. Міркуючи аналогічно, можна встановити, що виграшними будуть усі початкові позиції вигляду $5k$ та $5k+3$, а програшними – позиції $5k+1$, $5k+2$ та $5k+4$. Нагадаємо також, що у виграшній початковій позиції перемогу одержить другий гравець, а у програшній – перший.

На завершення пропонуємо проаналізувати розв'язання ще двох задач.

Задача 7.13. (8-10). Тура стоїть на шахівниці на полі $a1$. Грають двоє. За один хід дозволяється пересунути туру на будь-яке число кліток вправо чи на будь-яке число кліток вгору. Виграє той, хто поставить туру на поле $h8$. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Виграшна стратегія є у другого гравця. Для перемоги він повинен кожним своїм ходом повертати туру на діагональ $a1 - h8$. Оскільки перший гравець весь час змушений буде забирати туру з цієї діагоналі (займати програшні позиції), а поле $h8$ лежить на ній, то на це поле зможе стати саме другий гравець, зробивши не більше 7 ходів.

Задача 7.14.(8-10). Гра починається з числа 7. За один хід дозволяється додати до наявного числа довільне, менше від нього натуральне число. Грають двоє, роблячи ходи почергово. Виграє той, хто дістане число 1997. У котрого з гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Проаналізуємо задачу з кінця. 1997 – виграшна позиція. Із позицій 999 – 1996 її можна досягнути за один хід. Тому всі ці позиції програшні. Із позиції 998 всі ходи ведуть у програшну позицію, тому 998 – виграшна позиція. Аналогічно встановлюємо: позиції 500 – 997 – програшні, 499 – виграшна, 250 – 498 – програшні, 249 – виграшна, 125 – 248 – програшні, 124 – виграшна, 63 – 123 – програшні, 62 – виграшна, 32 – 61 – програшні, 31 – виграшна, 16 –30 – програшні, 15 – виграшна, 8 – 14 – програшні, і, нарешті, 7 – виграшна позиція. Отже, перемогу здобуде другий гравець, якщо своїми ходами послідовно займатиме такі виграшні позиції: 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1997.

Сподіваємось, що читачі зрозуміють не лише закономірність утворення послідовності виграшних позицій у даній конкретній задачі, але й сутність аналізу з кінця – як загального методу для одержання множини виграшних позицій.

Для закріплення матеріалу запропонуємо декілька, подібних за формулюванням, але різних за виграшними стратегіями, ігрових завдань.

Задача 7.15. (8-10). На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 21. Грають двоє, роблячи ходи почергово. За один хід дозволяється витерти одне або два записані числа. Програє той, хто не зможе зробити хід. У котрого із гравців є виграшна стратегія, якщо:

а) дозволяється витирати будь-які одне або два числа;

б) при витиранні двох чисел вони мають бути сусідніми натуральними числами;

в) при витиранні двох чисел вони мають бути сусідніми числами, причому менше з них – непарне;

г) двічі підряд один і той же гравець не має права витирати два числа;

д) двічі підряд один і той же гравець не має права витирати одне число.

Вправи до § 7

1. (7-9). Із дошки 10×10 двоє по черзі вирізають по 2 клітини зі спільною стороною. Програє той, хто не може зробити хід. У котрого зі гравців є виграшна стратегія?
2. (7-9). Гра починається з числа 1. За один хід можна замінити написане число його добутком на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 чи 9. Виграє той, хто першим одержить число, більше за 2002. У котрого з двох гравців, які ходять почергово, є виграшна стратегія?
3. (8-9). Гра починається з числа 2002. За один хід дозволяється зменшити наявне число на один із його дільників. Програє той, хто одержить нуль. Котрий з двох гравців, які роблять ходи по черзі, має виграшну стратегію?
4. (8-9). На столі 2002 сірники. За один хід дозволяється взяти не більше половини наявних на столі сірників. Сірники беруться по черзі. Програє той, хто не може зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія?
5. (8-10). На столі 25 сірників. Грають двоє, які беруть сірники по черзі. За один хід можна взяти 2, 4 або 7 сірників. Програє той, хто не може зробити наступний хід. У котрого з гравців є виграшна стратегія?
6. (8-10). Є 27 сірників. За один хід можна взяти 1, 2, 3 або 4 сірники. Виграє той, у кого вкінці виявиться парна кількість сірників. Хто з двох гравців, які ходять по черзі, має виграшну стратегію?
7. (8-10). Двоє по черзі викреслюють числа від 1 до 27, поки не залишиться два числа. Якщо їх сума ділиться на 5, то виграє перший, а якщо ні – то другий. Хто виграє при правильній грі?
8. (8-10). В ряд записані 12 зірочок. Двоє по черзі замінюють зірочки цифрами. Доведіть, що другий завжди може добитися, щоб одержане 12-цифрове число ділилося на 77.
9. (8-10). На дошці записана рівність $*x^2+*x+*=0$. Перший називає три довільні цілі числа, а другий розставляє їх на свій вибір замість зірочок. Чи може перший гравець добитися, щоб одержане рівняння мало обидва раціональні корені? Які числа йому слід називати?
10. (8-10). Є 31 сірник. Двоє ходять по черзі. За один хід дозволяється кожну купку, в якій більше одного сірника, розділити на дві купки. Програє той, хто не матиме що ділити. У котрого зі гравців є виграшна стратегія?
11. (8-10). Є дві купки з 33 і 35 цукерок. За один хід можна забрати одну купку, а другу розділити на дві, причому, якщо в другій купці залишається лише одна цукерка, то гравець з’їдає її і виграє. У котрого з гравців, що ходять почергово, є виграшна стратегія?
12. (8-10). Є m та n сірників у двох купках. Можна брати скільки завгодно сірників, але тільки з однієї з них. Виграє той, хто візьме останній сірник. Як закінчиться гра двох осіб, які роблять ходи по черзі, не допускаючи при цьому помилок, в залежності від m та n?

13. (8-11). Шашка стоїть на полі дошки 8×8. Двоє по черзі пересувають її на одне із чотирьох сусідніх по вертикалі чи горизонталі полів. Повторно ставити шашку на поля, на яких вона вже побувала, не дозволяється. Хто виграє при правильній грі?
14. (8-11). Є поле розмірами 2003×2003. Перший гравець ставить хрестик у його центрі. Другий – нулик на одну з сусідніх клітинок. Далі по черзі ставлять хрестики (перший) чи нулики (другий) поряд з уже поставленим нуликом чи хрестиком суперника в одну з вільних клітинок. Доведіть, що перший завжди зможе поставити хрестик в одну з кутових клітинок раніше, ніж другий поставить у деяку з кутових клітинок нулик.
15. (8-11). У 50-ти коробках є 100 цукерок. Дівчинка і хлопчик по черзі беруть по одній цукерці. Чи може хлопчик, який вступає в гру другим, добитися того, щоб останні дві цукерки лежали в одній коробці?

§ 8. Квадратний тричлен

Вираз вигляду ax^2+bx+c, де $a \neq 0$, називається квадратним тричленом. Його дискримінант $D=b^2-4ac$. Якщо $D>0$, то, як відомо із шкільного курсу математики, рівняння $ax^2+bx+c=0$ має два дійсні корені: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. При цьому $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Додаючи та перемножуючи дані корені, одержуємо формули Вієта: $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$. Якщо $D=0$, то обидва корені співпадають і дорівнюють $-\dfrac{b}{2a}$. При цьому формули Вієта залишаються справедливими. Якщо ж $D<0$, то квадратне рівняння дійсних коренів не має. У цих випадках часто зручно вважати, що $\sqrt{D}=\sqrt{(-D)(-1)}=\sqrt{(-D)}i$, де i – уявне число, для якого $i^2=-1$, $-D>0$. Визначаючи x_1 та x_2 за записаними вище формулами при $D<0$, одержимо два так звані комплексні корені даного квадратного рівняння. Зауважимо, що для них теж справедливі формули Вієта.

Графіком функції $y=ax^2+bx+c$ при $a \neq 0$ є парабола з вершиною у точці $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{D}{4a}\right)$ і віссю, паралельною осі ординат. При $a>0$ її вітки направлені вгору, а при $a<0$ – вниз. Якщо $D>0$, то парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що відповідають кореням рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо $D=0$, то парабола дотикається до осі абсцис у точці $\left(-\dfrac{b}{2a},0\right)$. Якщо ж $D<0$, то при $a>0$ парабола розташована повністю над віссю абсцис, а при $a<0$ під нею. Таким чином, при $D<0$ і $a>0$ для всіх дійсних x виконується нерівність $ax^2+bx+c>0$, а при $D<0$ і $a<0$ – нерівність $ax^2+bx+c<0$.

Розглянемо застосування властивостей квадратного тричлена до розв'язування конкретних задач.

Задача 8.1. (8-9) Довести тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

якщо a, b, c – попарно різні дійсні числа.

Розв'язання. Вираз, що знаходиться у лівій частині записаної рівності, є многочленом відносно змінної x не вище другого степеня. Тому, розглядаючи цю рівність як рівняння з невідомим x, ми одержали б не більше двох різних коренів. Але легко перевірити, що її задовольняють принаймні три різні значення x: $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$. А отже, записана рівність є тотожністю.

Безумовно, довести цю тотожність можна й іншими способами. Проте знаходження трьох різних коренів відповідного рівняння приводить, як можна переконатися, до успіху значно швидше.

Принагідно зауважимо, що коли многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x^1+a_n$ набуває одного і того ж значення A більше, ніж у n точках, то $P_n(x)\equiv A$.

З врахуванням значень квадратного тричлена пов'язане і розв'язання наступної задачі.

Задача 8.2. (8-9). Петрусь виписав на дошці 2005 зведених квадратних рівнянь і переконався, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав всі ці рівняння. Доведіть, що і отримане таким чином рівняння також не має дійсних коренів.

Розв'язання .Оскільки коефіцієнти біля x^2 у всіх рівняннях дорівнюють одиниці і рівняння не мають дійсних коренів, то їх ліві частини набувають лише додатних значень. А отже, і ліва частина отриманого рівняння також набуватиме лише додатних значень. А тому таке рівняння не матиме дійсних коренів.

Задача 8.3. (8-9). При яких значеннях параметра p сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px + p - 1 = 0$ є найменшою?

Розв'язання. Користуючись формулами Вієта, знаходимо:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2\cdot(p-1) = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2 + 1 .$$

Отже, така сума буде найменшою при $p = 1$.

Зауважимо, що для знаходження найменшого значення ми скористалися виділенням повного квадрата. Такий прийом буває корисним і при розв'язуванні складніших задач. Розглянемо приклад.

Задача 8.4. (8-9). Знайти найменше значення функції $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Розв'язання. Згрупувавши перший множник з четвертим, а другий – з третім, одержимо: $y = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$. Покладемо $x^2 + 5x + 5 = t$. Тоді $y = t^2 - 1$. Таким чином, найменше значення функції дорівнює –1. Воно досягається при $t = 0$, тобто при тих значеннях x, які є коренями рівняння $x^2 + 5x + 5 = 0$. Легко переконатися, що обидва корені останнього рівняння є дійсними.

До дослідження квадратного тричлена може бути зведена і наступна задача на знаходження множини значень функції.

Задача 8.5. (8-10). Знайти область значень функції $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. Задачу можна сформулювати таким чином: знайти всі значення p, при кожному з яких рівняння $\dfrac{x}{(x-1)^2} = p$ має дійсні корені. Записане рівняння, як легко переконатися, рівносильне рівнянню $px^2 - (2p+1)x + p = 0$. Якщо $p = 0$, то $x = 0$ є його коренем. Якщо ж $p \neq 0$, то наявність дійсних коренів випливає з умови $D \geq 0$, тобто $(2p+1)^2 - 4p^2 \geq 0$, або $4p + 1 \geq 0$. Отже, множина значень даної функції $\left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

Використовувати властивості квадратного тричлена можна і у випадку залежності досліджуваного виразу не лише від однієї, а й від кількох змінних.

Задача 8.6. (8-10). Знайти найменше значення виразу $A = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 7$.

Розв'язання. Перетворимо даний вираз наступним чином:

$$A = (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 2y + 1) + 2 = (x-2)^2 + (x-2y)^2 +$$

$+ (y-1)^2 + 2$. Тепер, зрозуміло, що значення цього виразу не менше двох. Оскільки при $x = 2$, $y = 1$ одержуємо $A = 2$, то число 2 і є найменшим значенням для A.

Аналізуючи розв'язання задач 8.3 – 8.6, приходимо до висновку, що властивості квадратного тричлена можна використовувати і для доведення нерівностей. До пов'язаних з цим задач ми ще повернемося у параграфі 13. А зараз розглянемо декілька задач, пов'язаних з обчисленням значень квадратного тричлена в конкретних точках.

Задача 8.7. (8-10). Відомо, що $a + b + c < 0$ і що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має дійсних коренів. Визначити знак коефіцієнта c.

Розв'язання. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів, а, отже, зберігає один і той самий знак для всіх дійсних x. Оскільки $f(1) = a + b + c < 0$, то і $c = f(0) < 0$.

Зауважимо, що при $a = 0$ також $b = 0$, а отже, знову мали б $c < 0$.

Задача 8.8. (8-10). Довести, що коли $(a + b + c) \cdot c < 0,$ то $b^2 > 4ac$.

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то достатньо довести, що $b^2 > 0$, тобто $b \neq 0$. А це справді так, бо при $b = 0$ одержали б з умови задачі, що $c^2 < 0$. Якщо ж $a \neq 0$, то для квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ маємо: $f(1) \cdot f(0) < 0$. А, отже, графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис між нулем і одиницею. Оскільки цим графіком є парабола, вісь якої паралельна осі ординат, то існує також і друга точка її перетину з віссю абсцис, симетрична до першої відносно осі параболи. Таким чином, квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні дійсні корені. А тому його дискримінант $D = b^2 - 4ac$ додатний. Звідси $b^2 > 4ac$.

Звертаємо увагу, що значення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ при $x = 1$ дорівнює сумі його коефіцієнтів, а при $x = 0$ – вільному члену. Аналогічні твердження залишаються справедливими і для многочленів вищих степенів. Як приклад застосування цих властивостей пропонуємо розв'язання наступної задачі.

Задача 8.9. (8-10). Обчислити суму коефіцієнтів многочлена, який дістанемо після піднесення до степеня і зведення подібних членів у виразі $(x^2 - 2x + 2)^{2002}$.

Розв'язання. Оскільки значення даного виразу при $x = 1$ дорівнює $(1^2 - 2 \cdot 1 + 2)^{2002} = 1$, то й сума одержаних коефіцієнтів також дорівнює 1.

Зауважимо, що аналогічними міркуваннями можна було б довести таке твердження: Якщо в кожного з двох многочленів сума коефіцієнтів дорівнює 1, то й у многочлена, що є їх добутком, сума коефіцієнтів також дорівнює 1 (пропонуємо читачам зробити це самостійно).

Таким чином, властивість многочленів мати суму коефіцієнтів, що буде дорівнювати одиниці, зберігається при множенні.

А ось ще приклади збереження властивостей при виконанні операцій з квадратними тричленами.

Задача 8.10. (8-10). Відомо, що квадратні тричлени $a_1x^2+2b_1x+c_1$ та $a_2x^2+2b_2x+c_2$ при всіх дійсних x набувають лише додатних значень. Довести, що цю властивість має також квадратний тричлен $a_1a_2x^2+2b_1b_2x+c_1c_2$.

Розв'язання. Якщо квадратні тричлени набувають лише додатних значень, то їхні дискримінанти від'ємні, а коефіцієнти при x^2 додатні. Звідси одержуємо, що $b_1^2<a_1c_1$ та $b_2^2<a_2c_2$. Перемноживши ці нерівності, будемо мати $(b_1b_2)^2<a_1a_2c_1c_2$. Отже, дискримінант тричлена $a_1a_2x^2+2b_1b_2x+c_1c_2$ також від'ємний. Оскільки $a_1a_2>0$, то даний тричлен набуває лише додатних значень.

Задача 8.11. (9-10). Для квадратного тричлена $f(x)$ допускаються такі його перетворення: $f(x)\to x^2f\left(\frac{1}{x}\right)$ та $f(x)\to(x-1)^2f\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Чи можна, застосувавши кілька перетворень вказаного вигляду, із тричлена $x^2-2x+2001$ отримати тричлен $x^2+x-2002$?

Розв'язання. При заданих в умові задачі перетвореннях маємо:

$$ax^2+bx+c\to x^2\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)=cx^2+bx+a;$$

$$ax^2+bx+c\to(x-1)^2\left(\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+c\right)=cx^2+(b-2c)x+a+c-b.$$

Якщо числа a, b, c – цілі, то й коефіцієнти новоутворених квадратних тричленів також будуть цілими. Але при кожному такому перетворенні коефіцієнт при x або не змінюється, або ж змінюється на парне число, що дорівнює подвоєному вільному члену. А оскільки числа –2 та 1 різної парності, то із тричлена $x^2-2x+2001$ не вдасться дістати тричлен $x^2+x-2002$.

Нам уже доводилося розглядати деякі властивості, що виконуються не лише для квадратних тричленів, але й для многочленів вищих степенів. А зараз подивимося з цієї точки зору на формули Вієта. Нагадаємо, що у випадку квадратного тричлена вони справедливі не лише для дійсних, але й для комплексних коренів. То ж чи не можна одержати аналогічні формули для многочленів вищих степенів? Розглянемо многочлен третього степеня.

Задача 8.12. (9-10). (*Теорема Вієта*). Довести, що коли x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq0$, то

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

Розв'язання. Оскільки x_1, x_2, x_3 – корені заданого рівняння, то ліва частина цього рівняння розкладається на множники, серед яких є й такі $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$. У випадку, коли деякі корені є кратними, відповідні їм множники можуть входити в квадраті чи в кубі. Добуток цих трьох множників уже є многочленом третього степеня. Тому крім цих множників, розклад на множники лівої частини даного рівняння може містити лише сталу. Прирівнюючи коефіцієнти при x^3 в обох виразах для лівої частини рівняння, дістанемо, що значення цієї сталої дорівнює a. Отже, виконується тотожність $ax^3+bx^2+cx+d \equiv a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Оскільки ця тотожність виконується при всіх значеннях x, то коефіцієнти при однакових степенях x в обох її частинах співпадають. Прирівнюючи їх, а також вільні члени з обох частин тотожності, переконаємося в справедливості твердження задачі.

Співвідношення для коренів кубічного рівняння, одержані в задачі 8.12, також називаються формулами Вієта. Аналогічними міркуваннями можна дістати формули Вієта і для рівнянь вищих степенів. Зокрема, для коренів многочлена $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ будемо мати $x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1$; $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_2$; …; $x_1x_2..x_n=(-1)^n a_n$.

Зауважимо, що формули Вієта залишаються справедливими і у випадку, коли деякі або й усі з коренів многочлена n-го степеня є комплексними числами. Наголошуємо також на необхідності брати до уваги усі n коренів такого многочлена. При цьому кожен кратний корінь слід враховувати стільки разів, якою є його кратність.

Задача 8.13. (9-11). Обчислити:

$$\frac{7+1996xy}{7+7x+xy}+\frac{7+1996yz}{7+y+yz}+\frac{1+1996xz}{1+z+xz}.$$

якщо x, y, z – корені рівняння $t^3+9t^2-9t-7=0$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник другого дробу на x, а третього дробу — на xy. Враховуючи, що за формулами Вієта для заданого рівняння $xyz=7$, дістанемо, що значення заданого виразу буде дорівнювати

$$\frac{(7+1996xy)+(7x+1996\cdot 7)+(xy+1996\cdot 7\cdot x)}{7+7x+7y}=\frac{1997\cdot(7+7x+xy)}{(7+7x+xy)}=1997.$$

Відзначимо, що оскільки для функції $f(t)=t^3+9t^2-9t-7$ виконуються нерівності $f(-10)<0$, $f(-1)>0$, $f(0)<0$, $f(2)>0$ то задане в задачі 8.13 рівняння має три дійсні корені. Проте безпосереднє їх обчислення пов'язане з певними труднощами. Та, навіть, і за наявності конкретних значень цих коренів їх підстановка у заданий вираз привела б до громіздких обчислень з радикалами. Таким чином, застосування однієї з формул Вієта дає тут подвійний виграш.

Звертаємо також увагу читачів на те, що при виведенні формул Вієта в задачі 8.12 ми скористалися розкладом многочлена третього степеня на множники. Аналогічний розклад можна було б дістати також для многочлена n-го степеня, усі n коренів x_1, x_2, …, x_n, якого є дійсними числами

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

У загальному ж випадку можна дістати розклад вигляду:

$$P_n(x) = a_0(x - c_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_m)^{\alpha_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_ex + q_e)^{\beta_e},$$

де $c_1, \ldots, c_m$ – дійсні числа, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_e) = n$. На доведенні цієї рівності зупинятися не будемо, а лише вкажемо на ключову роль у ній поняття квадратного тричлена, винесеного в заголовок даного параграфа. Як приклад розкладання на множники многочлена, що не має дійсних коренів, розглянемо таку задачу.

Задача 8.14. (8-9). Розкласти на множники многочлен $x^4 + 1$.

Розв'язання.

$$x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).$$

(Відзначимо, що дискримінанти обох одержаних квадратних тричленів-множників від'ємні).

А наступний приклад ілюструє застосування розкладу на множники під час розв'язування складніших задач.

Задача 8.15. (10-11). Чи існує многочлен $P_n(x)$, $n \geq 1$ із коефіцієнтом 1 при старшому степені, який при всіх x з проміжку $[0;3^n]$ задовольняє нерівність $|P_n(x)| \leq 1$?

Розв'язання. Скористаємося розкладом многочлена $P_n(x)$ на лінійні та квадратичні множники. Назвемо проміжок $[a;b]$ забороненим, якщо у всіх його точках принаймні один із множників набуває лише таких значень, які за абсолютною величиною не перевищують 1.

Зауважимо, що лінійний множник $x - c$ набуває таких значень лише на проміжку $[c-1; c+1]$. Квадратний тричлен $x^2 + px + q$ із від'ємним дискримінантом набуває мінімуму при $x = -\dfrac{p}{2}$, причому значення цього мінімуму додатне. Тоді для всіх x таких, що $\left|x + \dfrac{p}{2}\right| \geq 1$, будемо мати:

$$x^2 + px + q \geq \left(-\frac{p}{2} \pm 1\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} \pm 1\right) + q = -\frac{p^2}{4} + 1 + q > 1.$$

Таким чином, кожен із множників розкладу визначає заборонений проміжок, довжина якого не перевищує 2. А оскільки усіх таких множників не більше n, то і загальна довжина усіх заборонених проміжків не перевищує $2n$. Але для кожного натурального n виконується нерівність $2n < 3^n$. Тому на відрізку $[0;3^n]$ знайдеться принаймні одна точка x_0, яка не належить жодному забороненому проміжку. Тоді $|P_n(x_0)| > 1$. Отже, такого многочлена $P_n(x)$, $n \geq 1$ із коефіцієнтом 1 при старшому степені, який при всіх x відрізка $[0;3^n]$ задовольняє нерівність $|P_n(x)| \leq 1$, не існує.

Вправи до § 8

1. (8-9). Не розв'язуючи рівняння $2x^2 - 5x + 2 = 0$, знайдіть суму кубів його коренів.
2. (8-9). Знайдіть всі значення параметра a, при яких обидва корені рівняння $x^2 + ax + 2003 = 0$ є цілими.

3. (8-9). Доведіть, що якщо обидва корені рівняння $x^2+px+q=0$ з цілими коефіцієнтами є раціональними, то вони є цілими числами.
4. (8-10). Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ має два корені, які задовольняють умову $x_1<a<x_2$.
5. (8-10). Не користуючись поняттям похідної, знайдіть: а) найменше значення функції $y=(x^2+x)(x^2+9x+20)$; б) множину значень функції $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.
6. (8-10). Відомо, що $a+c<b$ і квадратний тричлен $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів. Визначте знак коефіцієнта c.
7. (8-10). Корені рівняння $x^2+ax+b+1=0$ є натуральними числами. Доведіть, що a^2+b^2 – складене число.
8. (8-10). Відомо, що модулі всіх коренів рівнянь $x^2+bx+c=0$ та $x^2+px+q=0$ менші за 1. Доведіть, що й модулі коренів рівняння $x^2+\frac{b+p}{2}x+\frac{c+q}{2}=0$ також менші за 1.
9. (8-10). Доведіть, що якщо $bp=2(c+q)$, то хоч одне з рівнянь $x^2+bx+c=0$ та $x^2+px+q=0$ має дійсні корені.
10. (9-10). Один із коефіцієнтів тричлена x^2+px+q змінили на 0,001. Чи міг при цьому його корінь змінитися на 1000?
11. (9-10). Дано два твердження: а) рівняння $x^2+(a+1)x+1=0$ має два від'ємні корені; б) нерівність $4x^2+(a-2)x+1\ge 0$ справедлива при всіх дійсних значеннях x. При яких a якесь одне з цих тверджень істинне, а інше – хибне?
12. (9-10). Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ такий, що рівняння $f(x)=x$ не має дійсних коренів. Доведіть, що і рівняння $f(f(x))=x$ також не має дійсних коренів.
13. (9-10). Доведіть, що для будь-яких дійсних x, y виконується нерівність $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\ge 0$.
14. (9-11). Числа a, b, c задовольняють нерівностям $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. Доведіть, що всі вони додатні.
15. (8-10). Розкладіть на множники вирази: а) x^4+x^2+1; б) x^5+x+1.

§ 9. Деякі нестандартні методи розв'язування рівнянь

Розглянемо рівняння вигляду $f(x)=0$. Якщо вираз $f(x)$ можна розкласти на множники $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$, то початкове рівняння можна замінити сукупністю рівнянь $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, …, $f_n(x)=0$ корені кожного з яких, якщо вони належать області визначення функції $f(x)$, є також і коренями початкового рівняння.

Задача 9.1. (8-9). Розв'язати рівняння $x^3+x-2=0$.

Розв'язання. $x^3+x-2=(x^3-1)+(x-1)=(x-1)\cdot((x^2+x+1)+1)=(x-1)\cdot(x^2+x+2)$. Отже, задане рівняння можна записати у вигляді $(x-1)\cdot(x^2+x+2)=0$, що рівносильно сукупності двох рівнянь $x-1=0$, $x^2+x+2=0$. З першого знаходимо корінь $x=1$. Друге рівняння дійсних коренів не має.

На перший погляд може здатись, що при розкладанні на множники в останній задачі випадково виділено доданки x^3-1 та $x-1$. Справді, чому саме їх, а не якісь інші? Річ у тім, що одразу легко переконатися, що $x=1$ є коренем заданого рівняння. А тому в розклад многочлена з лівої його частини на множники має входити множник $x-1$. Через це і були сформовані доданки, що діляться на $x-1$.

Таким чином, "вгадування" одного з коренів рівняння значно спростило подальше розв'язування задачі. Зауважимо, що цілочислові корені рівняння $P_n(x)=0$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня з цілими коефіцієнтами, завжди є дільниками вільного члена цього многочлена, взятими із знаками плюс чи мінус. Якщо, наприклад, один з таких дільників $x=a$ задовольняє умову $P_n(a)=0$, то серед множників розкладу многочлена $P_n(x)$ буде і множник $(x-a)$. Розділивши тоді $P_n(x)$ на $(x-a)$, одержимо многочлен нижчого степеня. Процедуру такого ділення, яка повністю нагадує ділення цілих чисел, проілюструємо на прикладі задачі 9.1. Оскільки в результаті ділення многочлена x^3+x-2 на $(x-1)$ в остачі одержали нуль, то має місце розклад $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$.

$$
\begin{array}{rl}
-\,x^3+x-2 & \big|\ \underline{x-1} \\
\underline{x^3-x^2} & \ \ x^2+x+2 \\
-\,x^2+x-2 & \\
\underline{x^2-x} & \\
-\,2x-2 & \\
\underline{2x-2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Відзначимо також, що для знаходження розкладу многочлена на множники можна скористатися і так званим методом невизначених коефіцієнтів. У тій же задачі 9.1 нам відомо, що при діленні многочлена x^3+x-2 на $(x-1)$ має вийти квадратний тричлен. Зрозуміло, що його коефіцієнт при x^2 дорівнює 1. Тому шуканий тричлен можна записати у вигляді x^2+px+q, де p і q – невідомі числа. Тоді $x^3+x+2\equiv(x-1)(x^2+px+q)=x^3+(p-1)x^2+(p-q)x-q$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x та вільні члени в обох частинах цієї тотожності, дістанемо $p=1$, $q=2$. Отже, $x^3+x+2=(x-1)(x^2-x-2)$.

Метод невизначених коефіцієнтів часто приходить на допомогу і тоді, коли корені многочлена $P_n(x)$ не є цілими і жоден з них не вдається вгадати. Розглянемо приклад.

Задача 9.2. (9-10). Розв'язати рівняння $x^4+3x^3+3x^2-2=0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники вигляду x^2+bx+c та x^2+px+q. Перемноживши їх, дістанемо тотожність $x^4+3x^3+3x^2-2 \equiv x^4+(p+b)x^3+(c+q+pb)x^2+(bq+pc)x+cq$. Отже, коефіцієнти b, c, p, q задовольняють таким співвідношенням $b+p=3$, $c+q+bp=3$, $bq+pc=0$, $cq=-2$. Легко перевірити, що для цього підходять числа: $b=1$, $c=-1$, $p=q=2$. Тому $x^4+3x^3+3x^2-2=(x^2+x-1)(x^2+2x+2)$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: $x^2+x-1=0$ та $x^2+2x+2=0$. З першого рівняння знаходимо:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Друге рівняння дійсних коренів не має.

Перейдемо до ознайомлення з іншими можливими методами розв'язування рівнянь. Одним з них є метод підстановки. Розглянемо декілька прикладів, розв'язання яких вдається звести до розв'язування квадратних рівнянь.

Задача 9.3. (8-10). Розв'язати рівняння

$$(x^2-10x+24)(x^2-12x+35)=24.$$

Розв'язання. Розкладемо вираз у лівій частині рівняння на множники: $(x-4)(x-6)(x-5)(x-7)$ і згрупуємо перший множник з четвертим, а другий – з третім. Перемноживши згруповані множники, запишемо рівняння у вигляді $(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=24$. Нехай $y=x^2-11x+29$. Тоді матимемо: $(y-1)(y+1)=24$. Звідси $y^2=25$; $y=5$ або $y=-5$. Отже, для визначення x дістанемо два рівняння $x^2-11x+29=5$ та $x^2-11x+29=-5$. Коренями першого з них є $x_1=3$, $x_2=8$. Друге рівняння дійсних коренів не має.

Задача 9.4. (9-10). Розв'язати рівняння

$$\frac{3x}{2x^2-3x+4}-\frac{2x}{2x^2-x+4}=\frac{3}{5}.$$

Розв'язання. У знаменниках обох доданків у лівій частині рівняння співпадають коефіцієнти при x^2 та вільні члени. Оскільки $x=0$ не є коренем, то перепишемо задане рівняння у вигляді: $\frac{3}{2x-3+\frac{4}{x}}-\frac{2}{2x-1+\frac{4}{x}}=\frac{3}{5}$. Нехай $y=2x-1+\frac{4}{x}$. Тоді $\frac{3}{y-2}-\frac{2}{y}=\frac{3}{5}$, звідки $3y-2(y-2)=\frac{3}{5}y(y-2)$ при $y\neq 0$, $y\neq 2$. Розв'язавши останнє квадратне рівняння, знаходимо $y_1=5$, $y_2=-\frac{4}{3}$. Отже, $2x-1+\frac{4}{x}=5$ або $2x-1+\frac{4}{x}=-\frac{4}{3}$. З першого з цих рівнянь знаходимо $x_1=1$, $x_2=2$. Друге рівняння дійсних коренів не має.

Зауважимо, що підстановка вигляду $y=ax+b+\frac{c}{x}$ може бути використана і для розв'язування рівнянь вигляду: $(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)=Ax^2$ або $p(ax^2+b_1x+c)^2+q(ax^2+b_2x+c)^2=Ax^2$.

Приклад застосування аналогічної підстановки, але з іншими "технічними деталями" дає розв'язання наступного рівняння.

Задача 9.5. (9-11). Розв'язати рівняння $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$. Тоді $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2+8=3y^2+8$. Тому задане рівняння можна записати у вигляді $3y^2-10y+8=0$. Звідси знаходимо $y_1=2$, $y_2=\frac{4}{3}$. Отже, для визначення x одержуємо рівняння $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$ та $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$. З них відповідно знаходимо $x_1=3+\sqrt{21}$, $x_2=3-\sqrt{21}$, $x_3=-2$, $x_4=6$.

Звернемо увагу читачів на той факт, що коли обидві частини початкового рівняння задачі 9.5 помножити на 3, то утворене рівняння можна записати у вигляді $\left(x-\frac{12}{x}\right)^2-10\left(x-\frac{12}{x}\right)+25=1$, або $\left(x-\frac{12}{x}-5\right)^2=1$. Завершити розв'язання останнього рівняння пропонуємо читачам самостійно.

Для розв'язування наступної задачі скористаємось тотожністю $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, довести яку можна, наприклад, перемноживши $a+b+c$ на себе.

Задача 9.6. (9-10). Розв'язати рівняння $x^4-10x^3+28x^2-15x-4=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $(x^2-5x+1)^2+(x^2-5x+1)-6=0$ і проведемо заміну: $y=x^2-5x+1$. Дістанемо рівняння $y^2+y-6=0$, звідки $y_1=2$, $y_2=-3$. Тоді з рівнянь $x^2-5x+1=2$ та $x^2-5x+1=-3$ відповідно знаходимо:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{29}}{2},\ x_1=\frac{5-\sqrt{29}}{2},\ x_3=1,\ x_4=4.$$

Звичайно, запропонований метод розв'язування задачі 9.6 є досить штучним. Природніше було б спочатку спробувати вгадати корені $x=1$ та $x=4$, шукаючи їх серед дільників вільного члена. Але останній метод далеко не завжди можна реалізувати. І щоб у читача не склалося враження, що рівняння четвертого степеня завжди можна розв'язувати вгадуванням одного-двох коренів чи більш-менш очевидним розкладом на множники методом невизначених коефіцієнтів або нескладною підстановкою, пропонуємо наступну задачу.

Задача 9.7. (9-10). Розв'язати рівняння

$$x^4-2\sqrt{7}x^2+x+7-\sqrt{7}=0.$$

Розв'язання. Введемо параметр $\sqrt{7}=a$. Тоді задане рівняння може бути переписане у вигляді $a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$. Воно є квадратним відносно параметра a. Знаходимо:

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4(x^4+x)}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2};$$

$a_1=x^2+x$, $a_2=x^2-x+1$. Врахувавши, що $a=\sqrt{7}$, для визначення x одержуємо рівняння $x^2+x=\sqrt{7}$ та $x^2-x+1=\sqrt{7}$. З них відповідно знаходимо корені:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{7}}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{7}}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2},\ x_4=\frac{1-\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}.$$

Запропонований щойно метод називається методом розв'язування рівнянь відносно параметра. В окремих задачах такий параметр може фігурувати у самій умові, а в інших, як у задачі 9.7, його доводиться вводити самостійно. Інколи може бути доречним введення кількох параметрів.

Задача 9.8. (9-10). Розв'язати рівняння

$$2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)\cdot(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$$

Розв'язання. Нехай $x^2+6x+1=u$, $x^2+1=v$. Тоді рівняння запишеться у вигляді $2u^2+5uv+2v^2=0$. Розклавши ліву частину на можники, дістанемо $(u+2v)(2u+v)=0$. Повертаючись до змінної x, матимемо $(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)=0$. Звідси знаходимо, що $x^2+2x+1=0$ або $x^2+4x+1=0$. Тоді $x_1=x_2=-1$; $x_3=-2+\sqrt{3}$; $x_4=-2-\sqrt{3}$.

А ось приклад розв'язування таким способом кубічного рівняння.

Задача 9.9. (9-10). Розв'язати рівняння $x^3-(\sqrt{3}+1)x^2+3=0$.

Розв'язання. Введемо параметр $a=\sqrt{3}$. Тоді рівняння набуває вигляду $x^3-(a+1)x^2+a^2=0$. Розв'язуючи його як квадратне відносно параметра a, знаходимо $a_1=x$, $a_1=x^2-x$. Тоді, враховучи, що $a=\sqrt{3}$, маємо:

$$x_1=\sqrt{3};\ x_2=\frac{1+\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2};\ x_3=\frac{1-\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}.$$

У багатьох випадках кубічне рівняння можна розв'язати зведенням його до бікубічного рівняння. Нехай маємо кубічне рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$. Заміною $x=t-\frac{a}{3}$ воно просто зводиться до рівняння вигляду $t^3+pt+q=0$. Покладемо, далі, $t=y-\frac{p}{3y}$. Дістанемо рівняння $\left(y-\frac{p}{3y}\right)^3+p\left(y-\frac{p}{3y}\right)+q=0$. Дістанемо рівняння, яке після елементарних спрощень набуває вигляду $\left(y^3\right)^2+q\cdot y^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$. Якщо $D=q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3\geq 0$, то обчислити y^3, а потім y, t та один з коренів початкового рівняння можна буде без жодних принципових труднощів. Знаючи ж один з коренів, інші корені можна знайти, наприклад, розкладом лівої частини рівняння на множники.

Зрозуміло, що даний метод застосовний для всіх кубічних рівнянь вигляду $t^3 + pt + q = 0$, для яких $p \geq 0$. Але не лише для них. Пропонуємо самостійно розв'язати вказаним методом рівняння $x^3 + x - 2 = 0$ із задачі 9.1, а також рівняння $x^3 + x - 1 = 0$. Відзначимо, що при $p > 0$ знайдений описаним способом корінь кубічного рівняння буде єдиним дійсним його коренем.

Зауважимо також, що не завжди доцільно спішити застосовувати даний метод. Наприклад, для рівняння $2002x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ він привів би до досить громіздких викладок. Тоді як запис рівняння у вигляді

$$(x-1)^3 = \left(-\sqrt[3]{2001}x\right)^3$$

зразу дає змогу одержати $x - 1 = -\sqrt[3]{2001}x$, звідки $x = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2001}}$.

Наступний метод розв'язування рівнянь ґрунтується на міркуваннях симетрії. Ми вже використовували цю ідею при розв'язуванні задачі 9.3, коли заміна $y = x^2 - 11x + 29$ привела нас до найпростішого квадратного рівняння. А зараз використаємо цю ж ідею для розв'язування рівнянь інших видів.

Задача 9.10. (9-10). Розв'язати рівняння $(x+2)^4 + x^4 = 82$.

Розв'язання. Покладемо $y = x + 1$. Тоді задане рівняння запишеться у вигляді $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82$. Після піднесення до степенів та очевидних спрощень дістанемо біквадратне рівняння $y^4 + 6y^2 - 40 = 0$, звідки $y^2 = 4$ та $y^2 = -10$. Отже, $y_1 = 2$, $y_1 = -2$. Тоді $x_1 = 1$ та $x_1 = -3$.

Задача 9.11. (9-10). Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Розв'язання. Покладемо $y = 3 - x$. Тоді задане рівняння запишеться у вигляді $\sqrt[4]{1-y} + \sqrt[4]{1+y} = 2$. Після піднесення обох частин до четвертого степеня одержимо таке рівняння:

$$1 - y + 4\cdot\sqrt[4]{1-y}\sqrt[4]{1+y}\left(\sqrt{1-y} + \sqrt{1+y}\right) + 6\cdot\sqrt{1-y}\cdot\sqrt{1+y}\ +1 + y = 16$$

Оскільки $\sqrt[4]{1-y}\cdot\sqrt[4]{1-y} = \sqrt[4]{1-y^2}$, $\sqrt{1-y} + \sqrt{1+y} = \left(\sqrt[4]{1-y} + \sqrt[4]{1+y}\right)^2 - \ -2\cdot\sqrt[4]{1-y}\sqrt[4]{1+y} = 4 - 2\cdot\sqrt[4]{1-y^2}$ то, покладаючи $z = \sqrt[4]{1-y^2}$, дістанемо квадратне рівняння $2 + 4z(4-2z) + 6z^2 = 16$. Розв'язуючи його, знаходимо $z_1 = 1$, $z_2 = 7$. Тоді $y = 0$, $x = 3$.

Результативним є використання ідей симетрії при розв'язуванні так званого симетричного рівняння вигляду $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$, де $A \neq 0$. Справді, значення $x = 0$ не є його коренем. Тому рівняння може бути переписане у вигляді $Ax^2 + Bx + C + \dfrac{B}{x} + \dfrac{A}{x^2} = 0$. Покладемо $y = x + \dfrac{1}{x}$ і врахуємо, що $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$. Тоді прийдемо до квадратного рівняння $Ay^2 + By + C - 2A = 0$, при розв'язуванні якого труднощів уже не виникає.

Зауважимо, що симетричні кубічні рівняння, тобто рівняння вигляду $Ax^3+Bx^2+Bx+A=0$, завжди мають одним із своїх коренів число $x=-1$, а тому їх розв'язування також легко зводяться до розв'язування квадратних рівнянь. Такий же корінь має і всяке симетричне рівняння непарного степеня. Що ж стосується симетричних рівнянь парних степенів $2n$, то після ділення на x^n і заміни $y=x+\frac{1}{x}$ вони легко зводяться до рівнянь n-го степеня відносно y.

А ось ще один оригінальний спосіб використання ідей симетрії.

Задача 9.12. (9-11). Розв'язати рівняння

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

Розв'язання. Перепишемо ліву частину рівняння у вигляді

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

Звідси видно, що разом з коренем $x=x_1$, розв'язком рівняння буде також і число $x=x_2$ для якого $x_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-x_2$, тобто $x_2=1-x_1$. Переписуючи далі ліву частину рівняння у вигляді

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}+1\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}.$$

встановлюємо, що разом з коренем $x=x_1$, розв'язком буде і $x_3=\frac{1}{x_1}$. Оскільки $x=a$ є коренем рівняння, то, враховуючи сказане, послідовно знаходимо: $x_1=a$; $x_2=1-x_1=1-a$; $x_3=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{a}$; $x_4=1-x_3=\frac{a-1}{a}$; $x_5=\frac{1}{x_4}=\frac{a}{a-1}$, $x_4=1-x_5=\frac{1}{1-a}$. Інших коренів немає, бо це рівняння можна звести до рівняння шостого степеня, яке, як відомо, має не більше шести дійсних розв'язків.

Крім властивостей типу симетрії, при розв'язуванні рівнянь можуть використовуватися інші властивості функцій.

Задача 9.3. (10-11). Розв'язати рівняння $3^x+4^x=5^x$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$.

Легко переконатися, що $x = 2$ є його коренем. А оскільки обидві функції $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ та $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ у лівій частині перетвореного рівняння монотонно спадають, то знайдений корінь єдиний.

Задача 9.14. (9-10). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{32-x} + 2\sqrt{23-x} + 3\sqrt{16-x} + 4\sqrt{8-x} = 4x - 2.$$

Розв'язання. Усі функції-доданки у лівій частині рівняння при $x \le 8$ визначені і монотонно спадні, а функція $y = 4x - 2$ монотонно зростає. Тому задане рівняння може мати не більше одного кореня. Ним є $x = 7$.

Задача 9.15. (9-10). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2.$$

Звідси видно, що значення лівої частини не менші за $2 + 3 = 5$, а значення правої частини не перевищують 5. Рівність досягається лише при $x = -1$.

Зазначимо, що виділення повних квадратів чи інші способи оцінки границь множини значень функцій можуть бути застосовані і для розв'язування рівнянь з кількома невідомими. Розглянемо приклад.

Задача 9.16. (9-10). Розв'язати рівняння $x^2 + \frac{1}{4x^2} + \sin y = 0$.

Розв'язання. $x^2 + \frac{1}{4x^2} + \sin y = \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2 + \sin y + 1 \ge \sin y + 1 \ge 0$, причому рівність досягається лише при $x - \frac{1}{2x} = 0$, $\sin y + 1 = 0$ Звідси знаходимо $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, де n – довільне ціле число.

Виділення повних квадратів приходить на допомогу і при розв'язуванні наступної задачі.

Задача 9.17. (9-10). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1.$$

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $\sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2} = 1$. Або $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = 1$. Розглянемо окремо три випадки: $0 \le \sqrt{x-1} < 1$; $1 \le \sqrt{x-1} \le 2$; $\sqrt{x-1} > 2$. Розкриваючи в кожному з цих випадків знак абсолютної величини, одержимо, що у першому та третьому випадках рівняння не має розв'язків, а в другому випадку перетворюється в тотожність. З нерівності $1 \le \sqrt{x-1} \le 2$ знаходимо: $2 \le x \le 5$. Отже, $x \in [2;5]$.

А зараз розглянемо приклад рівняння, розв'язання якого ґрунтується на використанні множини значень і парності функції.

Задача 9.18. (10-11). При яких значеннях параметра *a* рівняння $e^{|x|} - \cos x = a^2 - 2a + 1$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Оскільки функція $e^{|x|} - \cos x$ є парною, то разом із розв'язком x_0 даного рівняння його розв'язком буде також і число $-x_0$. Тому єдиним може бути лише розв'язок $x = 0$. Підставляючи його в рівняння, одержимо $0 = a^2 - 2a + 1$, звідки $a = 1$. При цьому значенні а рівняння набирає вигляду $e^{|x|} - \cos x = 0$. Оскільки при $x \ne 0$, $e^{|x|} > 1$, а $\cos x \le 1$, то при $a = 1$ число $x = 0$ – справді єдиний розв'язок.

Пропонуємо читачам аналогічним методом дослідити рівняння $a^2 \cos \pi x - a(1 + 2x^2) - 6 = 0$. При $x = 0$ маємо $a_1 = 3$, $a_2 = -2$. Але лише при $a = 3$ корінь $x = 0$ буде єдиним. Доведіть це самостійно.

Іноді при розв'язуванні рівнянь зручно скористатися поняттям похідної. Так, зокрема, легко встановити, що рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ має не більше одного дійсного кореня. Справді, похідна його лівої частини дорівнює $3x^2 + 1 > 0$. А тому жодне значення лівої частини не може набуватися більше, ніж в одній точці. Єдину точку-корінь можна знайти, наприклад, зведенням до бікубічного рівняння.

Розглянемо складніші приклади.

Задача 9.19. (11). Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \left(\sqrt{3}\right)^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x$. Областю її визначення є вся числова вісь. Маємо: $y' = \left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^x \ln 2$. Рівність $y' = 0$ приводить до рівняння $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, звідки $x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3}$ – єдина критична точка даної функції. Отже, на кожному з проміжків $(-\infty; x_0)$ та $(x_0; +\infty)$ дана функція є монотонною. Тому вона може набувати значення 1 не більше, ніж у двох точках. Легко переконатися, що такими точками є $x_1 = 2$ та $x_2 = 4$. Ці числа і є коренями заданого рівняння.

Задача 9.20. (11). Розв'язати рівняння $x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$.

Розв'язання. Оскільки $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^3 + \frac{1}{a^3}$, то $x = a + \frac{1}{a}$ є коренем даного рівняння. Розглянемо функцію $y(x) = x^3 - 3x - \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$. Маємо: $y' = 3x^2 - 3$. Отже, $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$

– критичні точки даної функції. Легко переконатися, що x_1 точка максимуму, а x_2 – точка мінімуму:

$$y(-1)=2-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right),\ y(1)=-2-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right).$$

Оскільки $\left|a^3+\frac{1}{a^3}\right|\geq 2$, то при $a>0$ $y(-1)\leq 0$, а при $a<0$ $y(1)\geq 0$. Тому при $|a|\neq 1$в кожному із цих випадків рівняння має лише єдиний знайдений нами розв'язок $x=a+\frac{1}{a}$.

Пропонуємо читачам самостійно зробити графічну ілюстрацію до наведеного розв'язання, нарисувавши схематично графіки функції $y(x)$ при $a<0$, $a>0$, $|a|\neq 1$.

Задача 9.21. (11). Встановити кількість коренів рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$ в залежності від значень параметра а.

Розв'язання. Нехай $y(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}$. Областю визначення функції $y(x)$ є проміжок $[2;4]$, а $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{8-2x}}$. Із рівняння $y'=0$ знаходимо $x=\frac{8}{3}$. Легко встановити, що на проміжку $\left[2;\frac{8}{3}\right]$ дана функція зростає, а на проміжку $\left[\frac{8}{3};4\right]$ – спадає. При цьому $y(2)=2$, $y\left(\frac{8}{3}\right)=\sqrt{6}$, $y(4)=\sqrt{2}$. Тому при $a\in\left[2;\sqrt{6}\right)$ рівняння має два корені; при $a=\sqrt{6}$ та при $a\in\left[\sqrt{2};2\right)$ – один корінь; при інших значеннях параметра a дійсних коренів немає.

Задача 9.22. (11). Чи може рівняння $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}=0$ мати кратні корені при деякому натуральному n?

Розв'язання. Якщо $x=a$ – корінь кратності m рівняння $P_n(x)$, то $P_n(x)=(x-a)^m P_{n-m}(x)$, де $P_{n-m}(a)\neq 0$.

Тоді $P_n'(x)=m(x-a)^{m-1}\cdot P_{n-m}(x)+(x-a)P_{n-m}'(x)$. Тому при $m>1$ рівняння $P_n'(x)=0$, а, отже, а, отже, і рівняння $P_n(x)-P_n'(x)=0$ також має корінь $x=a$. У цій задачі останнє рівняння набуває вигляду $\frac{x^n}{n!}=0$ і має єдиний корінь $x=0$, який, однак, не є коренем початкового рівняння. А тому задане в задачі рівняння не має кратних коренів при жодному натуральному n.

На особливостях поведінки функцій ґрунтується і розв'язання наступної задачі.

Задача 9.23. (10-11). Розв'язати рівняння $\sqrt{a-\sqrt{a-...-\sqrt{a-x}}}=x$, якщо кількість радикалів дорівнює 2005.

Розв'язання. Зрозуміло, що $x\geq 0$ і $a-x\geq 0$. Тому рівняння може мати розв'язки лише при $a\geq 0$. Якщо $a=0$, то $x=0$. Якщо $a>0$, то на області визначення функції $y(x)$, заданої лівою частиною рівняння, послідовно одержимо: функція $\sqrt{a-x}$ – спадаюча, функція

$\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ – зростаюча, і т. д. Оскільки в рівнянні кількість радикалів непарна, то функція $y(x)$ – монотонно спадаюча. Але функція $y=x$ – монотонно зростаюча. Тому задане рівняння не може мати більше одного кореня. Нехай x_0 – корінь рівняння $\sqrt{a-x}=x$: $x_0=\frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}$. Тоді $\sqrt{a-x_0}=x_0$; $\sqrt{a-\sqrt{a-x_0}}=\sqrt{a-x_0}=x_0$ і т. д.; $y(x_0)=x_0$, тобто x_0 є єдиним коренем заданого рівняння. Цей корінь існує при всіх $a\geq 0$.

Знаходження кореня x_0 тут ґрунтувалося на використанні принципу суперпозиції функцій, суть якого полягає в тому, що коли x_0 – корінь рівняння $f(x)=x$, то x_0 є також коренем рівняння $f(f(x))=x$. Але звідси ще не випливає, що рівняння $f(f(x))=x$ не може мати інших коренів. У задачі 9.23 їх відсутність було доведено на основі монотонності функцій. Проте навіть, якщо б такі корені існували, використання суперпозиції може полегшити їх знаходження.

Задача 9.24. (9-11). Розв'язати рівняння

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x.$$

Розв'язання. Позначимо $f(x)=x^2+2x-5$. Тоді дане рівняння можна переписати у вигляді $f(f(x))=x$. Якщо x_0 – корінь рівняння $x^2+2x-5=x$, то x_0 також і корінь заданого рівняння. Легко знайти, що такими коренями є $x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Перепишемо тепер початкове рівняння у вигляді $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$. Маючи вже два його корені, розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. В результаті дістанемо рівняння $(x^2+x-5)\cdot(x^2+3x-2=0)$. Тоді з рівняння $x^2+3x-2=0$ визначимо

$$x_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\ x_4=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Іноді пошукові успішного розв'язання сприяє множення обох частин рівняння на деякий вираз, область визначення якого не вужча, ніж область визначення даного рівняння. Можливість появи при цьому сторонніх коренів цілком компенсується простотою розв'язування одержаного рівняння.

Задача 9.25. (9-10). Розв'язати рівняння $1+x+x^2+...+x^n=0$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $1-x$. В результаті дістанемо $(1-x)(1+x+x^2+...+x^n=0)$, що після розкриття дужок і очевидних спрощень приводить до рівняння $1-x^{n+1}=0$.

Звідси $x=1$, а при непарних n також і $x=-1$. Легко бачити, що $x=1$ не задовольняє початкове рівняння. Отже, дане рівняння має єдиний розв'язок $x=-1$ і тільки при непарних n.

Задача 9.26. (10-11). Розв'язати рівняння $\cos x\cdot\cos 2x=\frac{1}{4}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини заданого рівняння на $4\sin x$. Користуючись формулою синуса подвійного аргумента, дістанемо рівняння $\sin 4x = \sin x$, або $\sin 4x - \sin x = 0$. Після переходу до добутку тригонометричних функцій, отримаємо рівняння $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$. Звідси $\sin\frac{3x}{2} = 0$ або $\cos\frac{5x}{2} = 0$. Тобто $x = \frac{2\pi n}{3}$ або $x = \frac{\pi(2n+1)}{5}$, де $n \in Z$. Оскільки при $\sin x = 0$ $\cos x = \pm 1$, $\cos 2x = 1$, то з одержаних розв'язків слід вилучити числа вигляду $x = \pi k$ де $k \in Z$, що не задовольняють початковому рівнянню.

Зауважимо, що в окремих випадках корисним може бути навіть множення на сталу.

Задача 9.27. (9-10). Розв'язати рівняння $(x-1)(500x-501)(1000x-1001)^2 = 2001$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 2000 і запишемо його у вигляді

$$(1000x-1000)(1000x-1002)(1000x-1001)^2 = 2000 \cdot 2001.$$

Позначимо $y = 1000x - 1001$. Тоді

$$(y+1)(y-1)y^2 = 2000 \cdot 2001.$$

Отримане біквадратне рівняння читач вже легко зуміє розв'язати і самостійно.

При розв'язуванні окремих рівнянь буває доцільним помножити обидві їх частини на вираз, спряжений до виразу в одній з них, і використовувати одержане таким способом нове рівняння в системі із заданим.

Задача 9.28. (9-11) Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}}$, спряжений до його лівої частини. Дістанемо рівняння $x^2 - x = x\left(\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}}\right)$. Оскільки $x = 0$ не є коренем початкового рівняння, то маємо, що $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x - 1$. Віднімаючи це рівняння від заданого, одержимо, що $2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = 1$, звідки дістаємо $4x^3 - x^2 - 28 = 0$. Одним з коренів останнього рівняння є $x = 2$. Тому, розкладаючи його ліву частину на множники, будемо мати $(x-2)(4x^2 + 7x + 14) = 0$. Тепер легко переконатися, що інших дійсних коренів це рівняння не має. Перевіркою встановлюємо, що $x = 2$ задовольняє також і початкове рівняння.

До систем двох рівнянь, але вже з двома невідомими, можна звести і розв'язування наступних двох задач.

Задача 9.29. (10-11). Розв'язати рівняння $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{a+x}=y$. Тоді $\sqrt{a-y}=x$. Підносячи обидві частини одержаних різностей до квадрата, одержимо таку систему рівнянь: $\begin{cases} a+x=y^2 \\ a-y=x^2 \end{cases}$. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, знайдемо: $x+y=y^2-x^2$, звідки $x+y=0$ або $y-x=1$. Враховуючи, що $x\ge 0$, $y\ge 0$, з першої з цих рівностей знаходимо $x=y=0$, що можливо лише при $a=0$. Далі, з другої рівності, маємо: $y=x+1$. Підставляючи це значення в друге рівняння системи, дістанемо $a-x-1=x^2$. Оскільки $x\ge 0$, то при $a\ge 1$ одержуємо розв'язок $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$. При інших a, відмінних від нуля, задане рівняння не має дійсних коренів.

Зауважимо, що, позбуваючись радикалів піднесенням до квадрата, рівняння задачі 9.29 можна звести до рівняння четвертого степеня, яке є квадратним відносно параметра a. Пропонуємо читачам зробити це самостійно і порівняти одержані результати.

Задача 9.30. (9-11). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{1+x}=u$, $\sqrt[3]{1-x}=v$. Тоді $u+v=2$, $u^3+v^3=2$. Розв'язуючи одержану систему, послідовно матимемо: $v=2-u$; $u^2-u(2-u)^2+(2-u)^2=1$; $3u^2-6u+3=0$; $u=1$. Отже, $\sqrt[3]{1+x}=1$, звідки, $x=0$.

Ще один цікавий метод розв'язування рівнянь пов'язаний з тригонометричними підстановками.

Задача 9.31. (10-11. Розв'язати рівняння $x^2\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що разом з розв'язком $x=x_0$ коренем заданого рівняння буде також $x=-x_0$. Тому знайдемо спочатку його невід'ємні корені. Враховуючи область визначення функції $y=\sqrt{1-x^2}$, бачимо, що невід'ємні корені слід шукати на відрізку $[0;1]$, Покладемо $x=\sin t$, $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тоді задане рівняння послідовно набуває вигляду:

$\sin^2 t\cos t=\sin^3 t-\sin t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin^2 t\cos t+\sin t\cos^2 t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin t\cos t(\sin t+\cos t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Нехай $y=\sin t+\cos t$. Тоді $\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}\left((\sin t+\cos t)^2-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(y^2-1\right)$, $y\left(y^2-1\right)=\sqrt{2}$.

Оскільки $y_1=\sqrt{2}$ є коренем цього рівняння, то, розкладаючи на множники різницю його лівої і правої частини, дістанемо рівняння $\left(y-\sqrt{2}\right)\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)=0$. Рівняння $y^2+\sqrt{2}y+1=0$ дійсних коренів не має. Тому $\sin t\cos t=y_1^2-1=1$ Отже, $\sin 2t=1$ і $t=\dfrac{\pi}{4}$ – єдиний корінь цього рівняння на відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Звідси знаходимо $x_1=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Враховуючи зроблене на початку зауваження, знаходимо також $x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Відзначимо, що при наявності в рівнянні виразів вигляду $\sqrt{1+x^2}$ на допомогу могла б прийти підстановка $x = tgy$.

А ось цікавий випадок використання тригонометричної підстановки при наявності суперпозиції функцій.

Задача 9.32. (10-11). Нехай $f(x) = 2x^2 - 1$. Розв'яжіть рівняння $f(f..(f(x))) = x$, якщо відомо, що функція f у його лівій частині використана 2002 рази.

Розв'язання. Зауважимо, що при $|x| > 1$, $f(x) > 1$. Тому і весь вираз зліва буде більшим за одиницю, а отже, також $x > 1$. Але тоді $f(x) - x = 2x^2 - 1 - x = (x-1)(2x+1) > 0$, тобто $f(x) > x > 1$. Звідси знаходимо, що $f(f(x)) > f(x) > x > 1$ і т. д. Остаточно вся ліва частина є більшою за x. Тому корені рівняння можливі лише при $|x| \le 1$. Позначимо $x = \cos t$. Тоді $f(x) = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $f(f(x)) = \cos 4t$ і т. д. Остаточно одержуємо рівняння $\cos 2^{2002} t = \cos t$. Звідси маємо

$$\left[\begin{aligned} 2^{2002} t &= t + 2\pi n, \\ 2^{2002} t &= -t + 2\pi n, \end{aligned}\right. \qquad n \in Z.$$

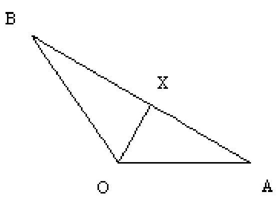
Отже, $t = \dfrac{2\pi n}{2^{2002} \pm 1}$, $x = \cos\dfrac{2\pi n}{2^{2002} \pm 1}$, $n \in Z$.

На завершення параграфа розглянемо приклад, що ілюструє можливість застосування геометрії до розв'язування рівнянь.

Задача 9.33. (9-11). Нехай a та b – додатні числа. Знайти додатні значення x, що задовольняють рівняння

$$\sqrt{a^2 - ax + x^2} + \sqrt{x^2 - bx + b^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$$

Розв'язання. Нехай $OA = a$, $OB = b$, $OX = x$, $\angle XOA = \angle XOB = 60°$ (див. мал. 17). Тоді за теоремою косинусів $\sqrt{a^2 - ax + x^2} = AX$, $\sqrt{x^2 - bx + b^2} = BX$, $\sqrt{a^2 + ab + b^2} = AB$. На основі заданого рівняння маємо, що $AX + BX = AB$. Тому точка X лежить на відрізку AB. Але тоді для площ відповідних трикутників маємо рівність $S_{AOB} = S_{AO} + S_{BOX}$, тобто



Мал.17

$$\frac{1}{2} ab \sin 120° = \frac{1}{2} ax \sin 60° + \frac{1}{2} bx \sin 60°.$$

Звідси дістанемо, що $ab = ax + bx$. Отже, $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

Вправи до § 9

1. (8-9). Розв'яжіть рівняння $x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0$, розклавши його ліву частину на множники.
2. (9-10). Розв'яжіть рівняння $x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$: а) методом невизначених коефіцієнтів; б) з допомогою заміни $y = x - \dfrac{1}{x}$.

3. (9-10). Доведіть, що рівняння $x^3+x-1=0$ має лише один дійсний корінь і знайдіть його.
4. (9-10). Розв'яжіть рівняння:

   а) $x(x+1)(x^2+x+1)=6$; б) $(x^2+x)(x^2+9x+20)=100$.

5. (8-10). Доведіть, що рівняння $x^4+7x^2-12x+5=0$ не має дійсних коренів.
6. (8-10). Розв'яжіть рівняння: а) $x^3-(\sqrt{7}+1)x^2+x+7-\sqrt{7}=0$;

   б) $x^3-(4a+3)x^2+4a(a+2)x-4(a^2-1)=0$.

7. (9-10). Розв'яжіть рівняння, використавши властивість суперпозиції функцій:

   а) $\sqrt{12+\sqrt{12+x}}=x$; б) $(x^2+x-1)^2+(x^2+x-1)-1=x$.

8. (9-10). Розв'яжіть рівняння: а) $(x-4)^4+(x+2)^4=2002$;

   б) $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$.

9. (10-11). Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$, скориставшись тригонометричною підстановкою.
10. (10-11). Розв'яжіть рівняння $\cos(x^3+y+1)=x^2+x+2$.
11. (9-10). Знайдіть всі дійсні розв'язки рівняння $x^2+y^2+z^2+t^2=t(x+y+z)$.
12. (9-10). Розв'яжіть рівняння $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=ax^2$.
13. (9-10). Розв'яжіть рівняння: а) $x\dfrac{5-x}{x+1}\left(x+\dfrac{5-x}{x+1}\right)=6$.

    б) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2=0$;

14. (10-11). Доведіть, що рівняння: а) $8^x(3x+1)=4$, б) $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$ можуть мати не більше одного дійсного кореня і знайдіть ці корені.
15. (10-11). Розв'яжіть рівняння $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=a(a+1)$.

§ 10. Діофантові рівняння

Діофантовими називають алгебраїчні рівняння з раціональними коефіцієнтами з вимогою визначити розв'язки у цілих або раціональних числах. Як правило, діофантові рівняння містять більше однієї невідомої величини, у зв'язку з чим їх ще називають невизначеними рівняннями.

Важливим класом діофантових рівнянь є лінійні рівняння вигляду $ax+by=c$, де a, b, c – цілі числа. Зрозуміло, що коли c не ділиться на спільний дільник чисел a та b, то таке рівняння не має розв'язків у цілих числах. Якщо ж a та b взаємно прості, то існує нескінченна множина розв'язків: $x=x_0+bn$, $y=y_0+an$, де $(x_0;y_0)$ – який-небудь один (частковий) із розв'язків, $n\in Z$. Справді, якщо $(x_0;y_0)$ – розв'язок, то $ax_0+by_0=c$. Віднімаючи цю рівність від заданого рівняння, дістанемо $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, звідки $x=x_0+\frac{b}{a}(y_0-y)$. Для того, щоб x було цілим, необхідно, щоб другий з доданків в останній рівності був цілим числом. Оскільки a та b – взаємно прості, то (y_0-y) має ділитися на a. Отже, $y_0-y=an$, $n\in Z$. Звідси і знаходимо всі цілочислові розв'язки $(x;y)$ за вказаними вище формулами.

Задача 10.1. (8-9). Розв'язати у цілих числах рівняння $19x+97y=1997$.

Розв'язання. Виразимо x через y: $x=\frac{1997-97y}{19}$.

Надаватимемо змінній y послідовних значень 0, 1, ... , 18, перебираючи всі можливі остачі від ділення $1997-97y$ на 19. Оскільки 19 та 97 – взаємно прості, то $1997-97y$ ділитиметься на 19 лише для одного такого y. Легко пересвідчитись, що таким значенням є $y_0=1$. Тоді $x_0=100$. Отже, всі розв'язки даного рівняння у цілих числах задаються рівностями $x=100+97n$ та $y=1-19n$, $n\in Z$.

Зауважимо, що, виражаючи x через y при розв'язуванні останнього рівняння, ми могли б записати його також у вигляді $x=105-5y+\frac{2-2y}{19}$. Зрозуміло, що тоді перевіряти подільність чисельника одержаного дробу на 19 було б значно простіше.

Розглядають також лінійні діофантові рівняння з більшою кількістю невідомих. Якщо серед чисел a, b, c є принаймні два взаємно прості, то діофантове рівняння $ax+by+cz=d$ просто зводиться до рівняння з двома невідомими. Справді, припустивши, що взаємно простими є числа a та b, дістанемо $ax+by=d-cz$. Тоді для кожного цілого z матимемо нескінченне число розв'язків $(x;y)$. При цьому елементи x_0 та y_0 часткового розв'язку $(x_0;y_0)$ виявляться деякими функціями змінної z.

Якщо серед чисел a, b, c немає жодної пари взаємно простих, але найбільший спільний дільник усіх трьох цих чисел дорівнює 1, то для розв'язування рівняння $ax+by+cz=d$ поступають так. Нехай p – найбільший спільний дільник чисел a та b. Тоді $a=pa_1$, $b=pb_1$, і задане рівняння набирає вигляду $a_1x+b_1y=\frac{d-cz}{p}$. Для того, щоб це рівняння мало розв'язки в цілих числах, необхідно, щоб дріб у його правій частині був цілим числом. Позначаючи $d-cz=pn$, матимемо:

$a_1x + b_1y = n$, $cz + pn = d$. Оскільки a_1 та b_1 – взаємно прості, то $x = x_0 + b_1y = n$, $cz + pn = d$, $k \in Z$, причому x_0 та y_0 лінійно залежать від n. Оскільки c та p – теж взаємно прості, то рівняння $cz + pn = d$ має розв'язки вигляду $z = z_0 + pm$, $n = n_0 - cm$, $m \in Z$. Підставляючи значення n у формули для x та y, одержимо разом з формулою для z шукані розв'язки $(x; y; z)$.

Задача 10.2. (9-11). Розв'язати в цілих числах рівняння $12x + 15y + 20z = 181$.

Розв'язання. Жодні два з чисел 12, 15, 20 не є взаємно простими, але найбільший спільний дільник усіх трьох чисел дорівнює 1. Отже, це рівняння має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах. Запишемо його у вигляді $4x + 5y = \frac{181 - 20z}{3}$. Тоді $181 - 20z = 3n$. Звідси маємо $20z + 3n = 181$. Оскільки значення $z_0 = 8$ та $n_0 = 7$ задовольняють останнє рівняння, то $z = 8 + 3m$, $n = 7 - 10m$, $m \in Z$. Отже, для визначення x, y дістаємо рівняння $4x + 5y = 7 - 20m$. Одним із його розв'язків є $x_0 = 3 - 5m$, $y_0 = -1$. Тому остаточно маємо: $x = 3 - 5m + 5k$, $y = -1 - 4k$, $z = 8 + 3m$, де $k \in Z$, $m \in Z$.

Ще одним прикладом діофантового рівняння є рівняння $x^2 + y^2 = z^2$, розв'язки $(x; y; z)$ якого є цілочисловими довжинами відповідно катетів та гіпотенузи у прямокутних трикутниках. Взаємно прості розв'язки цього рівняння знаходять за формулами: $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ де m, n – взаємно прості натуральні числа і $m > n$. Помноживши кожен із цих розв'язків на натуральні числа k, можна дістати всі розв'язки заданого рівняння.

Задача 10.3. (9-11). Знайти всі прямокутні трикутники з цілочисловими довжинами сторін, одна з яких дорівнює 1997.

Розв'язання. Сторони таких трикутників задовольняють співвідношенню $a^2 + b^2 = c^2$. Оскільки 1997 – просте число, то числа a, b, c мають бути попарно взаємно простими. Зрозуміло, що $2mn \neq 1997$. Якщо ж $m^2 - n^2 = 1997$, то $(m+n)(m-n) = 1997$, звідки $m + n = 1997$, $m - n = 1$. Отже, $m = 999$, $n = 998$. Якщо $m^2 + n^2 = 1997$, то повним перебором по $m \in [1; p]$, де $p = 44$ – ціла частина числа $\sqrt{1997}$, знаходимо, що дану рівність при умові $m > n$ задовольняють лише числа $m = 34$, $n = 29$. Отже, сторони шуканих трикутників є такими: 1997, $2 \cdot 999 \cdot 998 = 1994004$, $999^2 + 998^2 = 1994005$ та $34^2 - 29^2 = 315$, $2 \cdot 34 \cdot 29 = 1972$, 1997.

Звичайно, розв'язування діофантового рівняння значно спрощується, якщо його вдається звести до знаходження взаємно простих розв'язків. Наприклад, рівняння $m^2 + n^2 = kmn$ при кожному фіксованому цілому k разом з парою $(m; n)$ задовольняє також пара $(mp; np)$, де p – довільне ціле число, і навпаки, якщо розв'язки m та n мають спільний дільник p, то після ділення обох цих чисел на p одержимо нову пару чисел, які теж є розв'язками даного рівняння. Якщо ж m та n – взаємно прості, то з рівняння випливає, що m^2 має ділитися на n, а n^2 на m. Зокрема, при натуральних m та n це можливо лише при $m = n = 1$. Звідси одержуємо, що задане рівняння має розв'язки в натуральних числах лише при $k = 2$. При цьому $m = n$, де n – довільне натуральне число.

Серед діофантових рівнянь другого степеня варто виділити рівняння вигляду $x^2 - ky^2 = 1$, де k – деяке натуральне число. Зрозуміло, що пари $(1;0)$ та $(-1;0)$ є розв'язками цього рівняння при довільному k. Якщо $k=n^2$, то дане рівняння можна записати у вигляді $(x-ny)(x+ny)=1$. Звідси $x-ny=x+ny=\pm 1$, а отже, $y=0$. Інших цілочислових розв'язків таке рівняння не має. При $k\neq n^2$ можливі також інші розв'язки заданого рівняння. Оскільки разом з парою $(x;y)$ його розв'язками є також пари $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$, то обмежимося знаходженням розв'язків у натуральних числах. Для цього діємо таким чином. Запишемо дане рівняння у вигляді $\left(x+y\sqrt{k}\right)\left(x-y\sqrt{k}\right)=1$. Якщо $(x_0;y_0)$ – один з його розв'язків, то $\left(x_0+y_0\sqrt{k}\right)\left(x_0-y_0\sqrt{k}\right)=1$, а також $\left(x_0+y_0\sqrt{k}\right)^2\cdot\left(x_0-y_0\sqrt{k}\right)^2=1$. Оскільки останню рівність можна переписати у вигляді $\left(x_0+ky_0+2x_0y_0\sqrt{k}\right)^2\cdot\left(x_0+ky_0-2x_0y_0\sqrt{k}\right)^2=1$, звідки $\left(x_0^2+ky_0^2\right)^2-k\left(2x_0y_0\right)^2=1$ то пара $(x_1;y_1)$, де $x_1=x_0^2+ky_0^2$, $y_1=2x_0y_0$, теж є розв'язком цього рівняння, причому $x_1>x_0$, $y_1>y_0$. Аналогічно, використовуючи співвідношення $\left(x_0+y_0\sqrt{k}\right)^n\cdot\left(x_0-y_0\sqrt{k}\right)^n=1$, можна знайти нескінченну множину розв'язків.

До того ж результату можна прийти і таким способом. Нехай $(x_0;y_0)$ – один із розв'язків рівняння $x^2-ky^2=1$. Визначимо для натуральних n числа $x_n=x_0x_{n-1}+ky_0y_{n-1}$, $y_n=y_0x_{n-1}+x_0y_{n-1}$. Тоді

$$x_n^2-ky_0^2=(x_0x_{n-1}+ky_0y_{n-1})^2-k(y_0x_{n-1}+x_0y_{n-1})^2=$$

$$=x_{n-1}^2\cdot(x_0^2-ky_0^2)+ky_{n-1}^2(ky_0^2-x_0^2)=x_{n-1}^2-ky_{n-1}^2.$$

Оскільки при $n=1$ маємо $x_{n-1}^2-ky_{n-1}^2=1$, то звідси встановлюємо, що при кожному натуральному n також справджується рівність $x_n^2-ky_n^2=1$.

Зауважимо, що коли $(x_0;y_0)$ – найменший розв'язок заданого рівняння у натуральних числах, то обома описаними вище способами одержимо всі розв'язки цього рівняння у натуральних числах. Подібними міркуваннями можна розв'язувати і деякі інші діофантові рівняння другого степеня.

Задача 10.4. (9-11). Скільки розв'язків у натуральних числах має рівняння $x(x+1)=2y^2$?

Розв'язання. Очевидно, що пара $(1;1)$ є розв'язком даного рівняння. Покажемо, що коли $x=a$, $y=b$ – розв'язок, то $x=3a+4b+1$, $y=2a+3b+1$ – також розв'язок. Справді,

$$(3a+4b+1)\cdot(3a+4b+2)-(2a+3b+1)^2=$$

$$=9a^2+12ab+6b+12ab+16b^2+8b+3a+4b+2-$$

$$-2(4a^2+9b^2+1+12ab+4a+6b)=a^2+a-2b^2=a(a+1)-2b^2=0.$$

Оскільки $3a+4b+1>a$, $2a+3b+1>b$, то множина розв'язків заданого рівняння у натуральних числах нескінченна.

Зауважимо, що, помноживши обидві частини рівняння із задачі 10.4 на 4, його можна було б записати у вигляді $(2x+1)^2-2(2y)^2=1$, а потім скористатися описаними вище методами для розв'язування рівняння вигляду $t^2-2z^2=1$. Звідси можна було б дістати також формули $x=3a+4b+1$, $y=2a+3b+1$. Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що разом із розв'язком $x=a$, $y=b$ це рівняння задовольняють також числа $x=a^2+4a$, $y=(4a+2)b$.

Як частковий випадок діофантових рівнянь можна розглядати рівняння, розв'язки яких пропонується знайти у простих числах. Звернемося до вже знайомого нам рівняння вигляду $x^2-ky^2=1$.

Задача 10.5. (8-9). Розв'язати у простих числах рівняння $x^2-2y^2=1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що x повинно бути непарним числом, тобто $x=2k+1$. Якщо $y=2m+1$, то $x^2-2y^2=(2k+1)^2-2(2m+1)^2= =4(k^2+k+2m^2+2m)-1\neq 1$. Отже, y повинно бути парним (і простим). Тому $y=2$. Легко пересвідчитись, що тоді $x=3$. Отже, $x=3$, $y=2$ – єдиний розв'язок заданого рівняння у простих числах.

Які ж загальні методи розв'язування діофантових рівнянь? Шукаючи їх, постараємось спочатку проаналізувати з єдиних позицій ті часткові способи, які застосовувались у даному параграфі.

Насамперед, при розв'язуванні лінійного рівняння ми скористалися подільністю чисельника відповідного дробу на знаменник. Цей метод можна розглядати як частковий випадок методу остач, суть якого полягає в тому, що за наявності розв'язків у цілих числах остачі від ділення лівої та правої частини рівняння на одне і те ж натуральне число повинні бути однаковими. Наприклад, у задачі 10.5 були використані остачі від ділення на 2 для доведення непарності числа x та на 4 – для доведення парності числа y.

Метод остач може бути використаний і при розв'язуванні інших рівнянь. Розглянемо приклади.

Задача 10.6. (7-9). Чи існують натуральні числа x, y, які задовольняють рівняння $x^3-x=3y^2+2003$?

Розв'язання. $x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$. Отже, при цілих x ліва частина рівняння ділиться на 3 – як добуток трьох послідовних цілих чисел. Але $3y^2+2003$ при всіх цілих y при діленні на 3 дає остачу 2. Тому задане рівняння не має розв'язків у натуральних числах.

Задача 10.7. (10-11). Знайти всі розв'язки рівняння $19^x+97^y=116^z$ у натуральних числах.

Розв'язання. При натуральних $z\geq 2$, права частина рівняння ділиться на 8. Оскільки $19=2\cdot 8+3$, $97=12\cdot 8+3$, а 3^{2k} при діленні на 8 дає остачу 1, 3^{2k+1} - остачу 3, то 19^x+97^y при діленні на 8 може давати лише остачі 2 або 4. Отже, $z<2$. Оскільки далі, при $x\geq 2$, $y\geq 2$ виконуються нерівності $19^x>116$, $97^y>116$, то $x<2$, $y<2$. Нарешті, легко перевірити, що трійка $x=y=z=1$ задовольняє дане рівняння, а, значить, є його єдиним розв'язком у натуральних числах.

При розв'язуванні задачі 10.3 ми одержали рівняння вигляду $m^2+n^2=1997$. Для знаходження його розв'язків у натуральних числах було використано повний перебір натуральних чисел з відрізка $[1;44]$. Отже, метод повного перебору теж заслуговує на увагу при розв'язуванні діофантових рівнянь. В окремих випадках він може поєднуватися з іншими методами. Наприклад, в задачі 10.7 ми спочатку відкинули числа $x>1$, $y>1$, $z>1$ після чого перебір звівся до перевірки єдиної трійки $x=y=z=1$. Зрозуміло, що такий метод застосовний лише тоді, коли множини значень кожної із змінних є обмеженими і не надто об'ємними.

Для отримання розв'язків рівняння $x^2-ky^2=1$ в одному із розглянутих вище способів був використаний розклад на множники. Таким же способом можна розв'язувати наступну задачу.

Задача 10.8. (7-9). Знайти всі цілі числа x, y що є розв'язками рівняння $x^2-4y^2=1997$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $(x-2y)(x+2y)=1997$. Оскільки 1997 – просте число, то приходимо до такої сукупності систем двох рівнянь:

$$\begin{cases} x-2y=1, \\ x+2y=1997; \end{cases} \begin{cases} x-2y=1997, \\ x+2y=1; \end{cases} \begin{cases} x-2y=-1, \\ x+2y=-1997; \end{cases} \begin{cases} x-2y=-1997, \\ x+2y=-1; \end{cases}$$

З них відповідно знаходимо $x=999$, $y=499$; $x=999$, $y=-499$; $x=-999$, $y=-499$; $x=-999$, $y=499$.

Звичайно, безпосередньому розкладу на множники можуть передувати тотожні перетворення. Розглянемо приклад.

Задача 10.9. (8-9). Знайти всі натуральні числа x, y, що є розв'язками рівняння $xy-3x+5y=25$.

Розв'язання. Задане рівняння можна записати у вигляді $(x+5)(y-3)=10$. Оскільки при натуральних x: $x+5>5$, а єдиним дільником числа 10, більшим за 5, є число 10, то $x+5=10$, $y-3=1$. Отже, маємо єдиний розв'язок $x=5$, $y=4$.

Повернемося знову до рівняння $x^2+y^2=z^2$. Вище було знайдено всі трійки його взаємно простих розв'язків у натуральних числах. Ми також зауважували, що всі розв'язки у натуральних числах можуть бути знайдені множенням кожного взаємно простого розв'язку на довільне натуральне число k. Таким чином, зведення розв'язування діофантового рівняння до знаходження його взаємно простих розв'язків теж можна розглядати як один з методів розв'язування таких рівнянь.

Ще одним із методів розв'язування діофантових рівнянь є метод рекурентних формул. Приклад таких формул ми мали під час розгляду рівняння $x^2-ky^2=1$. Ця ж ідея була використана під час розв'язування задачі 10.4.

У деяких випадках легко знайти один “очевидний” розв’язок рівняння, а інших розв’язків ніяк не вдається відшукати. Та не завжди вони й існують. У таких випадках необхідно обґрунтувати єдиність знайденого розв’язку. Умовно такий метод можна назвати методом єдиності. Але при цьому, як правило, у кожному конкретному випадку доводиться проводити різні додаткові міркування. Розглянемо декілька прикладів таких міркувань, окремі з яких можна розглядати як самостійні методи розв’язування діофантових рівнянь.

Задача 10.10. (8-9). Розв’язати у цілих числах рівняння $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=-14$.

Розв’язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0$. Зрозуміло тепер, що $x=1$, $y=-2$, $z=3$ – єдиний розв’язок не лише в цілих, але і в дійсних числах.

Задача 10.11. (9-11). Знайти всі цілі числа x, y, z, що є розв’язками рівняння $x^3+3y^3=9z^3$.

Розв’язання. Очевидно, що трійка $x=y=z=0$ є розв’язком даного рівняння. Припустимо, що рівняння має інші цілочислові розв’язки. Тоді принаймні одне з чисел x, y, z відмінне від нуля. Нехай p – найбільший спільний дільник чисел x, y, z. При цьому, якщо одне з цих чисел дорівнює нулю, то будемо вважати, що p – найбільший спільний дільник двох інших чисел. Два числа одночасно дорівнювати нулю не можуть, бо в такому випадку ми знову одержали б трійку $x=y=z=0$. Нехай $x=px_1$, $y=py_1$, $z=pz_1$. Тоді принаймні в одній парі чисел x_1, y_1, z_1 маємо два взаємно прості числа. Підставляючи x, y, z в рівняння, одержимо після скорочення на p^3, що $x_1^3+3y_1^3=9z_1^3$. Звідси x_1^3, а з ним і x_1, ділиться на 3. Отже $x_1=3x_2$. Підставляючи це значення x в рівняння, після скорочення на 3 матимемо $9x_2^3+y_1^3+3z_1^3$. Аналогічними міркуваннями встановлюємо, що $y_1=3y_2$ і $3x_2^3+9y_2^3=z_1^3$. А тому $z_1=3z_2$. Отже, серед чисел x_1, y_1, z_1, немає жодної пари взаємно простих. Одержане протиріччя з припущенням доводить, що задане рівняння не має інших цілочислових розв’язків, крім $x=y=z=0$.

Такий метод доведення єдиності розв’язку називається методом доведення від супротивного. Зауважимо, що він може бути використаний і для доведення відсутності розв’язків. Розглянемо приклад.

Задача 10.12. (8-9). Довести, що рівняння $x^2-y^2=2006$ не має розв’язків у цілих числах.

Розв’язання. Припустимо, що існує розв’язок $(x_0;y_0)$. Тоді $(x_0-y_0)(x_0+y_0)=2006$. Але числа (x_0-y_0) та (x_0+y_0) однакової парності. Тому їх добуток – або непарне число, або число, що ділиться на 4. Отже, за жодних умов цей добуток не може дорівнювати 2006.

Повернемося тепер ще раз до задачі 10.11. Під час її розв’язування ми встановили, що числа x_1, y_1, z_1 діляться на 3. Аналогічно можна показати, що числа x_2, y_2, z_2 теж повинні ділитися на 3 і т.д. Припустивши, що $x\neq 0$, ми таким способом одержали б нескінченну послідовність цілих чисел з властивістю

$|x|>|x_1|>|x_2|>...>|x_n|>...>0$. Але оскільки число x скінченне, то така послідовність не може бути нескінченною. Одержане протиріччя теж доводить відсутність ненульових розв'язків заданого рівняння.

Метод одержання послідовності аналогічного вигляду носить назву методу нескінченного спуску. У певному розумінні двоїстим до методу нескінченного спуску виступає наступний метод розв'язування задачі 10.11. Із заданого рівняння послідовно знаходимо, що числа x, y, z діляться на 3. Оскільки числа x_1, y_1, z_1 теж діляться на 3, то x, y, z діляться на 9. Продовжуючи аналогічні міркування, прийдемо до висновку, що x, y, z діляться на 3^n при будь-якому натуральному n. А це можливо лише при $x=y=z=0$.

Для встановлення нескінченності множини розв'язків діофантового рівняння із кількістю змінних, більшою двох, одну із змінних можна розглядати як параметр. Але можливі і значно оригінальніші розв'язки. Наприклад, для рівняння $x^2+y^2+z^2=k(xyz+1)$ можна просто покласти $k=x^2+y^2$ і одержати залежність $z^2=kxyz$, звідки $z=kxy$. Залишається відзначити, що x та y можуть набувати довільних цілочислових значень.

Аналогічно покладаючи $z=1$ у виразі $xy+yz+zx+1$, легко довести, що у такому вигляді можна подати будь-яке складене натуральне число при деяких натуральних *x*, *y*, *z*. Обґрунтуйте це самостійно, скориставшись розкладом на множники.

Зауважимо також, що у ряді діофантових рівнянь степені доданків можуть виявитись різними. У таких випадках на допомогу часто приходить метод вирівнювання степенів.

Задача 10.13. (10-11). Доведіть, що рівняння $x^3+y^4=z^5$ має безліч розв'язків у натуральних числах.

Розв'язання. Зрозуміло, що $x_0=2^8$, $y_0=2^6$, $z_0=2^5$ – один із розв'язків цього рівняння. Оскільки *НСК*(3, 4, 5) = 60, то при кожному натуральному *n* трійки

$$x_n=x_0n^{20},\ y_n=y_0n^{15},\ z_n=z_0n^{12}$$

теж будуть розв'язками. Пропонуємо читачам перевірити це самостійно.

На завершення параграфа розглянемо одне цікаве діофантове рівняння, розв'язання якого служитиме ілюстрацією до так званого методу ланцюгових дробів.

Задача 10.14. (10-11). Розв'язати у натуральних числах рівняння $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $x+\frac{z}{yz+1}=1+\frac{3}{7}$. Оскільки $\frac{z}{yz+1}<1$, то x – ціла частина виразу $x+\frac{z}{yz+1}$. Тому $x=1$. Тоді $\frac{yz+1}{z}=\frac{7}{3}$ і тобто $y+\frac{1}{z}=2+\frac{1}{3}$. Оскільки число $2+\frac{1}{3}$ не є цілим, то $z \neq 1$. Отже, y – ціла, а $\frac{1}{z}$ – дробова частина виразу $y+\frac{1}{z}$. Тому $y=2$, $z=3$.

Зауважимо, що цей же результат можна було б одержати і з єдиності розкладу числа y так званий ланцюговий дріб. Оскільки $\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$, то звідси одержуємо: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Вправи до § 10

1. (8-9). Знайдіть всі розв'язки рівняння $19x+99y = 2002$ у натуральних числах.
2. (8-9). Шалтай-Болтай ходить лише вздовж однієї прямої. При русі вліво він за хвилину робить 37, а при русі вправо – 47 кроків. Чи може він так організувати свої рухи, щоб менш ніж за годину опинитись через ціле число хвилин на відстані одного кроку від свого початкового розташування?
3. (8-9). Учневі прислали 20 задач. За кожну розв'язану задачу він отримує 8 балів, неправильно розв'язану – мінус 5 балів і задачу, яку він не брався розв'язувати, – 0 балів. Скільки задач пробував розв'язати учень, якщо він набрав 13 балів?
4. (9-10). Дослідіть, скільки розв'язків у цілих числах мають рівняння: а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2002}$, б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2002}$.
5. (9-10). Доведіть, що коли рівняння $x^2 + y^2 = n$ має розв'язки у цілих числах, то і рівняння $x^2 + y^2 = 2n$ також має розв'язки у цілих числах. Чи вірне обернене твердження ?
6. (9-10). Знайдіть всі натуральні числа a, b, c, які задовольняють рівняння $ab + bc + ca = abc$.
7. (9-10). Доведіть, що рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$ має безліч розв'язків у цілих числах, а рівняння $x^2 - 3y^2 = -1$ не має жодного такого розв'язку.
8. (9-11). Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівнянь: а) $x^3 - y^3 = 98$, б) $19x^3 - 98y^2 = 1998$.
9. (10-11). Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівнянь: а) $2^x + 1 = 3^y$, б) $2^x + 1 = y^z$.
10. (9-10). Розв'яжіть у простих числах рівняння: а) $x^y + 1 = z$, б) $xyz = 5(x+y+z)$.
11. (9-10). Доведіть, що не існує простих чисел a, b, c, d, які задовольняють рівняння $a^2+b^2+c^2+d^2 = abcd+4$. Чи може це рівняння мати розв'язки у натуральних числах?
12. (10-11). Доведіть, що рівняння $x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0$ не має розв'язків у натуральних числах.
13. (10-11). Доведіть, що рівняння $x^2+y^2+z^2=3xyz$ має безліч розв'язків у натуральних числах.
14. (10-11). Розв'яжіть рівняння: а) $1!+2!+\ldots+x! = y^2$, б) $1!+2!+\ldots+x! = y^z$.
15. (10-11). Доведіть, що рівняння: а) $x^2+y^3+z^5=t^7$, б) $x^4+y^6+z^{12}=t^4$ мають безліч розв'язків у натуральних числах.

§ 11. Функціональні рівняння

Функціональним називають таке рівняння, з якого необхідно визначити невідому функцію $f(x)$ на основі заданих співвідношень між значеннями цієї функції при деяких значеннях її аргумента. Для позначення функції поряд з традиційним $f(x)$ вживається запис $f: R \to R$, який означає, що функція f визначена на множині дійсних чисел і набуває дійсних значень (не обов'язково всіх).

Серед усіх функціональних рівнянь окремо виділимо рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$, яке ще називається рівнянням Коші.

Задача 11.1. (10-11). Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, для яких при всіх дійсних x, y виконується рівність $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Розв'язання. Покладемо в даній рівності $x=y=0$. Тоді $f(0)=2f(0)$, тобто $f(0)=0$. Будемо шукати функцію $f(x)$ у вигляді $f(x)=x\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – неперервна функція, $\varphi(0)=a$. За яких саме значень a така функція існує, визначимо пізніше. Тоді $(x+y)\varphi(x+y)=x\varphi(x)+y\varphi(y)$. Покладаючи тут $x=y$, дістанемо $2x\cdot\varphi(2x)=2x\varphi(x)$. І при всіх дійсних $x\neq 0$ маємо $\varphi(2x)=\varphi(x)$. Зрозуміло, що ця рівність вірна також для $x=0$, бо тоді обидві її частини дорівнюють a. Далі, для довільного $x\neq 0$ з цієї ж рівності маємо $\varphi(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi\left(\frac{x}{4}\right)=\ldots=\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)=\ldots$. Оскільки $\frac{x}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, а функція $\varphi(x)$ неперервна, то $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\to\varphi(0)=a$ при $n\to\infty$. Тоді $\varphi(x)=\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\to a$. Оскільки $\varphi(x)$ не залежить від n, то $\varphi(x)=a$. Значення x можна вибрати довільно. Тому для всіх дійсних x маємо $\varphi(x)\equiv a$. Звідси $f(x)=ax$. Підстановкою у задане рівняння переконуємось, що знайдені функції $f(x)=ax$ задовольняють його при довільному дійсному значенні a.

Аналогічний результат можна було б одержати і на основі геометричних міркувань. Справді, для шуканої функції маємо

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x+y)=$$

$$=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$

Отже, дана функція не є ні опуклою, ні вгнутою. А тому вона може бути лише лінійною, тобто $f(x)=ax+b$. Але, як ми вже встановили, $f(0)=0$, тому $b=0$.

Ще один підхід до розв'язування цього рівняння називається методом Коші. Проаналізуємо суть цього методу.

Нехай $x=y=0$. Звідси маємо $f(0)=0$. Підставимо тепер $y=-x$. Отже, $f(0)=f(x)+f(-x)$. Звідси $f(-x)=-f(x)$, тобто $f(x)$ є непарною. Покладемо $f(1)=a$. Якщо $x=y=1$, то одержимо $f(2)=2a$. Оскільки з рівняння Коші випливає, що $f(x_1+\ldots+x_n)=f(x_1)+\ldots+f(x_n)$, то при $x_1=\ldots=x_n=1$ будемо мати $f(n)=na$. А покладаючи

$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, знайдемо $a = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, звідки $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}a$. Вибираючи m аргументів, рівних $\frac{1}{n}$, одержимо $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}a$. Враховуючи непарність функції $f(x)$, будемо мати $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n}a$. Також $f(0) = 0 = 0 \cdot a$. Отже, для всіх раціональних x маємо $f(x) = ax$. Якщо ж x ірраціональне, то розглянемо послідовність раціональних чисел x_n, яка збігається до x (наприклад, десяткових наближень числа x). Оскільки $f(x)$ неперервна, то $f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n = ax$. Тому $f(x) = ax$ для всіх $x \in R$. Підстановкою у початкове рівняння переконуємося, що a – довільне дійсне число.

До розглянутого щойно рівняння можна звести розв'язання деяких інших функціональних рівнянь Розглянемо приклади.

Задача 11.2. (10-11). Знайти всі многочлени $f(x)$, для яких при всіх дійсних x, y виконується рівність $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$.

Розв'язання. Функція $f_0(x) = x^3$ задовольняє дане рівняння. Справді, $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$. Тому всі розв'язки заданого функціонального рівняння шукатимемо у вигляді $f(x) = x^3 + g(x)$. Підставляючи цей вираз для $f(x)$ у задане рівняння, дістанемо для функції $g(x)$ співвідношення $g(x+y) = g(x) + g(y)$, справедливе для всіх дійсних x, y. Оскільки функція $g(x)$, як різниця двох многочленів, має бути неперервною, то на основі розв'язання задачі 11.1 маємо $g(x) = ax$, $a \in R$. А тому всі шукані многочлени записуються у вигляді $f(x) = x^3 + ax$.

Задача 11.3. (10-11). Знайти всі неперервні функції $f(x)$, що визначені на множині невід'ємних чисел і які для будь-яких невід'ємних x, y задовольняють рівність $f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f_0(x) = x$, $x \ge 0$ задовольняє дане рівняння. Покладемо $f(x) = x + g(x)$. Тоді для функції $g(x)$ при невід'ємних x, y виконується рівність $g((x+y)^2) = g(x^2) + g(y^2)$. Нехай $g(x) = \varphi\left(\sqrt{x}\right)$. Тоді $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всіх невід'ємних x, y. Отже, $\varphi(x) = ax$, $a \in R$, $x \ge 0$. Тому $g(x) = a\sqrt{x}$, $a \in R$, $x \ge 0$, а $f(x) = x + a\sqrt{x}$, $a \in R$, $x \ge 0$.

Зауважимо, що коли вимагати виконання заданої в задачі 11.3 рівності для всіх дійсних x, y, то матимемо єдиний розв'язок $f(x) = x$. Справді, покладаючи у заданому рівнянні $x = y = 0$, дістанемо $f(0) = 2f(0)$, звідки $f(0) = 0$. А тоді при $y = -x$ будемо мати $0 = 2f(x^2) - 2x^2$. Звідси $f(x^2) = x^2$, тобто $f(x) = x$. Перевірка показує, що функція $f(x) = x$ задовольняє задане рівняння при довільних дійсних x, y.

Звертаємо увагу читачів на необхідність перевірки знайдених аналогічними міркуваннями розв'язків функціональних рівнянь. Адже ми визначали функцію $f(x)$ лише на основі конкретного співвідношення між її аргументами. Тому рівність не обов'язково повинна справджуватись, якщо таке співвідношення виявиться іншим. Наприклад, розв'язки

$f(x)=x+a\sqrt{x}$ рівняння із задачі 11.3 на множині невід'ємних чисел є розв'язками цього рівняння на множині всіх дійсних чисел лише при $a=0$.

На основі розв'язань рівнянь із задач 11.1 – 11.3 можна зробити певні висновки щодо деяких загальних методів розв'язування функціональних рівнянь. Зокрема, якщо вдалося знайти деяку функцію $f_0(x)$, яка задовольняє задане рівняння, то заміна $f(x)=g(x)+f_0(x)$ або $f(x)=g(x)f_0(x)$ часто приводить до розв'язування простішого функціонального рівняння або до рівняння, метод розв'язування якого відомий. Приклад іншої заміни – $g(x)=\varphi\left(\sqrt{x}\right)$ використаний в задачі 11.3.

Проілюструємо використання такого роду замін на інших прикладах, які теж зводяться до рівняння Коші.

Задача 11.4. (10-11). Знайти всі неперервні функції $f: R\to R$, для яких при всіх дійсних *x*, *y*, виконується рівність $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

Розв'язання. Покладемо $y=x$. Тоді $f(2x)=f^2(x)\geq 0$. Отже, значення функції $f(x)$ невід'ємні. Якщо існує y_0, для якого $f(y_0)=0$, то для всіх $x\in R$ маємо $f(x+y_0)=f(x)\cdot f(y_0)=0$, тобто $f(x)\equiv 0$. Якщо ж для всіх $x\in R$ $f(x)>0$, то $\log_b f(x+y)=\log_b f(x)+\log_b f(y)$. Нехай $\varphi(x)=\log_a f(x)$. Тоді $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, причому $\varphi(x)$, як і $f(x)$, неперервна функція. Тому $\varphi(x)=ax$, $f(x)=b^{ax}=\left(b^a\right)^x=c^x$, де c – довільне додатне число.

Зауважимо, що із рівнянь $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ та $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, які функція $f(x)$ задовольняє при всіх додатних *x*, *y*, одержимо відповідно розв'язки $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=\log_a f(x)$ для першого рівняння і $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=x^a$ – для другого. Подумайте самостійно, як звести їх до рівняння Коші.

Зауваження до задачі 11.3 показує, що іноді функціональне рівняння вдається спростити, а то й розв'язати, розглядаючи лише конкретні співвідношення між аргументами. Такий метод розв'язування заслуговує на увагу в зв'язку з тим, що всяка функція, яка задовольняє задане рівняння за довільних значень аргументів, задовольнятиме його і у випадку конкретного співвідношення між аргументами. Але, оскільки обернене твердження не завжди вірне, то необхідно робити перевірку, шляхом безпосередньої підстановки знайденої функції у початкове рівняння.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування функціональних рівнянь описаними методами.

Задача 11.5. (10-11). Знайти всі функції $f: R\to R$, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність

$$f(x+y)=f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-f\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$

Розв'язання. Покладемо $y=\frac{\pi}{2}$. Тоді $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(0)\sin x$.

Якщо $f(0)=a$, то $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-a\sin x$. Звідси $f(x)=a\cos x$. Перевіркою встановлюємо, що знайдена функція задовольняє задане рівняння при всіх $a\in R$.

Задача 11.6. (9-11). Знайти всі функції $f:R\to R$, для яких при будь-яких дійсних x,y справджується рівність $f(x-f(y))=1-x-y$.

Розв'язання. Покладемо $x=f(y)$. Тоді $f(0)=1-f(y)-y$. Якщо $y=0$, то звідси маємо $f(0)=1-f(0)$, тобто $f(0)=\frac{1}{2}$. Тоді $f(y)=\frac{1}{2}-y$. Отже, якщо розв'язок $f(x)$ даного функціонального рівняння існує, то $f(x)=\frac{1}{2}-x$. Оскільки при цьому $x-f(y)=x-\left(\frac{1}{2}-y\right)=x+y-\frac{1}{2}$, $f(x-f(y))=\frac{1}{2}-\quad-\left(x+y-\frac{1}{2}\right)=1-x-y$, то така функція задовольняє задане рівняння при довільних дійсних x,y. Отже, функція $f(x)=\frac{1}{2}-x$ є його єдиним розв'язком.

Звертаємо увагу читачів, що підстановка $x=f(y)$ дала змогу позбутися суперпозиції функцій у лівій частині рівняння, а, отже, сприяла його спрощенню. Тому підстановки аналогічного вигляду теж можна розглядати як один із методів розв'язування функціональних рівнянь.

До речі, така ж підстановка у рівнянні $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$, ($x,y\in R$) сорокової Міжнародної математичної олімпіади тільки у вигляді $f(y)=x$ одразу ж дає нам $f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$. Звідси $f(x)=\frac{f(0)+1-x^2}{2}=a-\frac{x^2}{2}$.

Пропонуємо читачам самостійно знайти *a*, підставивши знайдену функцію $f(x)$ у початкове рівняння, а також переконатися, що при такому *a* ця функція задовольняє рівняння для будь-яких дійсних *x*, *y*.

Задача 11.7. (10-11). Знайти всі функції $f:R\to R$, які при будь-яких дійсних x,y задовольняють рівність $f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)$.

Розв'язання. Покладаючи $x=y=0$, одержимо $f(0)=2f(0)$, звідки $f(0)=0$. Якщо тепер $y=-x^2$, то звідси маємо $f(x)+f(x^4)=0$. Якщо $y=0$, а $x-$ довільне дійсне число, то $f(x^2)=f(x)$. Замінюючи тут *x* на x^2, одержимо $f(x^4)=f(x^2)=f(x)$. Тому функцію $f(x)$ можна визначити із системи двох рівнянь $f(x)+f(x^4)=0$ та $f(x^4)=f(x)$, звідки $f(x)\equiv 0$. Перевірка показує, що така функція справді задовольняє задане рівняння при довільних дійсних x,y.

Зауважимо, що міркуючи аналогічно, можна було б встановити, що при кожному натуральному n правильні рівності $f(x)=f(x^2)=\ldots=f\left(x^{2^n}\right)=\ldots$ для всіх дійсних x, та $f(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=\ldots=f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)=\ldots$ для всіх $x\geq 0$. Оскільки при $x>0$ маємо, що $\sqrt[2^n]{x}\to 1$ при $n\to\infty$, то для неперервних функцій $f(x)$ одержимо, що $f(x)=f(1)$ при всіх $x>0$. Оскільки для від'ємних x маємо $f(x)=f(x^2)=f((-x)^2)=f(-x)$, то $f(x)=f(1)$ для всіх $x\neq 0$. З неперервності функції $f(x)$ випливає також, що $f(0)=f(1)$. З іншого боку $f(0)=0$. Тому $f(x)=0$.

Такий метод розв'язування функціональних рівнянь суттєво спирається на використання неперервності функції. При цьому, правда, не можна гарантувати відсутність інших – розривних розв'язків.

Відзначимо також, що для граничного переходу ми для кожного елемента *x* будували деяку послідовність елементів, яка прямувала до певної границі, зокрема до 1 в задачі 11.7 (підсиленої умовою неперервності розв'язку) та до нуля в задачі 11.1. У зв'язку з цим даний метод можна розглядати як аналог методу нескінченного спуску.

А тепер ще раз повернемося до розв'язування задачі 11.7, в якому для визначення функції $f(x)$ з допомогою певних підстановок було знайдено систему функціональних рівнянь. Такий метод особливо зручний для розв'язування рівнянь вигляду $F(x, f(x), f(-x))=0$ та $F\left(x, f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$. Розглянемо приклади.

Задача 11.8. (9-11). Знайти всі такі функції $f:R\to R$, для яких при кожному дійсному x виконується рівність $3xf(x)-f(-x)=3x^2+x$.

Розв'язання. Замінимо у заданій рівності x на $-x$. Одержимо співвідношення $-3xf(-x)-f(x)=3x^2-x$. Додамо цю рівність до початкової рівності, помноженої на $-3x$. Матимемо: $-9x^2f(x)-f(x)=-9x^3-3x^2+3x^2-x$. Скорочуючи тоді обидві частини на $9x^2+1$, знайдемо $f(x)=x$. Ця функція задовольняє задане рівняння.

Задача 11.9. (9-11). Знайти всі такі функції $f(x)$, які при всіх дійсних $x\neq 0$ задовольняють рівність $2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+1$.

Розв'язання. Замінимо в заданій рівності *x* на $\frac{1}{x}$. Одержимо: $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{2}{x}+1$. Розглянемо це рівняння в системі із заданим рівнянням. Виключаючи з цієї системи $f\left(\frac{1}{x}\right)$, знаходимо $f(x)=x$. Легко пересвідчитись, що така функція задовольняє задане рівняння при всіх дійсних $x\neq 0$.

Узагальнюючи, приходимо до рівнянь вигляду $F(x, f(x), f(\varphi(x)))=0$. Якщо тут підставити замість x вираз $\varphi(x)$, то одержимо рівняння $F(\varphi(x), f(\varphi(x)), f(\varphi(\varphi(x))))=0$. Припустимо, що $\varphi(\varphi(x))=x$. Тоді друге рівняння набуде вигляду $F(\varphi(x), f(\varphi(x)), f(x))=0$, і його можна розглядати у системі з початковим рівнянням. Виключаючи $f(\varphi(x))$, знаходимо шукану функцію $f(x)$. У задачах 11.8 та 11.9 функція $\varphi(x)$ відповідно дорівнювала $-x$ та $\frac{1}{x}$.

Відзначимо, що часто такий метод приводить до успіху, якщо $\varphi(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Зауважимо також, що якщо $\varphi(\varphi(x))\neq x$, то в одержаному на першому кроці розв'язання варто попробувати знову замінити x на $\varphi(x)$, продовживши такий процес замін до тих пір, поки на якомусь кроці не одержимо аргумент x. Разом із початковим рівнянням одержані такими замінами рівності складуть систему рівнянь, з яких вдасться визначити функцію $f(x)$. Поява на проміжних етапах аргументів $-x$, $\frac{1}{x}$ чи $-\frac{1}{x}$ – вірна ознака того, що ми – на правильному шляху.

Задача 11.10. (10-11). Знайдіть всі функції $f: R\setminus\{-1,0,1\}\to R$, які задовольняють рівнянню

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1.$$

Розв'язання. Тут $\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $\varphi(\varphi(x))=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=-\frac{1}{x}$, $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=-\frac{x+1}{x-1}$ і, нарешті, $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))=x$. Отже, ми одержали таку систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1, \\ \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1, \\ -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=1, \\ -\frac{x+1}{x-1}f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=1. \end{cases}$$

З неї знаходимо $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$. Зробіть це самостійно, не забудьте виконати перевірку.

А ось інший приклад визначення шуканої функції за допомогою переходу до систем з більшим числом рівнянь.

Задача 11.11. (10-11). Знайти всі такі функції $f: R\to R$, для яких при довільних дійсних x, y виконується рівність $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$.

Розв'язання. Нехай t – довільне дійсне число. Тоді задана рівність повинна виконуватися, зокрема, і для таких пар чисел: $x, y: (0,t), \left(\frac{\pi}{2}, t+\frac{\pi}{2}\right), \left(t+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тому приходимо до такої системи:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t, \\ f(t+\pi)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t, \\ f(t+\pi)+f(t)=0. \end{cases}$$

Позначимо $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a, f(0)=b$. Тоді, віднімаючи друге рівняння системи від суми першого рівняння з третім, дістанемо: $f(t)=a\sin t+b\cos t$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдена функція $f(t)=a\sin t+b\cos t$ задовольняє задане рівняння при довільних дійсних a та b. Пропонуємо читачам виконати таку перевірку самостійно, скориставшись при цьому формулами для синуса та косинуса суми і різниці двох аргументів.

Під час розв'язування окремих функціональних рівнянь на допомогу приходить врахування області визначення або множини значень шуканої функції.

Задача 11.12. (10-11). Функція $f(x)$ визначена тільки на відрізку $[0;1]$ і для всіх $x\in[0;1]$ задовольняє рівняння $f(x+f(x))=f(x)$. Довести, що $f(x)=0$.

Розв'язання. Виконання в усіх точках відрізка $[0;1]$ рівності $f(x+f(x))=f(x)$ вимагає належності точки $x+f(x)$ цьому відрізку при всіх $x\in[0;1]$. Нехай в деякій точці $a\in[0;1]$ функція $f(x)$ набуває значення $b=f(a)>0$. Тоді точка $a+f(a)=a+b$ належить відрізку $[0;1]$, причому $f(a+b)=f(a+f(a))=b$. Точка $a+b+f(a+b)=a+2b$ також належить цьому відрізку. Аналогічно доводиться, що точки $a+3b$, ..., $a+nb$, ... належать відрізку $[0;1]$. Але при $n>\frac{1-a}{b}$ ці точки виходять за межі відрізка $[0;1]$. З отриманої суперечності випливає, що $f(a)\le 0$. Так само доводиться і відсутність від'ємних значень функції $f(x)$. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що функція $f(x)\equiv 0$ задовольняє задане рівняння.

Задача 11.13. (10-11). Функція $f(n)$ визначена на множині невід'ємних цілих чисел і набуває значень на цій же множині. Для всіх n із цієї множини виконується рівність $f(f(n))+f(n)=2n+3$. Обчислити *f*(2005).

Розв'язання. $f(f(0))+f(0)=3$. Оскільки $f(n)$ набуває невід'ємних значень, то $0\le f(0)\le 3$. Розглянемо різні можливі значення для $f(0)$. Зрозуміло, що значення $f(0)=0$ неможливе, бо тоді $f(f(0))+f(0)=0\ne 3$. $f(0)=3$ теж неможливе, бо тоді $3=f(f(0))+f(0)=f(3)+3$, тобто $f(3)=0$. Але при цьому $f(f(3))+f(3)=f(0)+0=3$, що суперечить умові $f(f(3))+f(3)=2\cdot 3+3$. Аналогічно розглядаємо випадок $f(0)=2$. Тоді $3=f(f(0))+f(0)=f(2)+2$. Звідси *f*(2) = 1. Отже, $2\cdot 2+3=f(f(2))+f(2)=f(1)+1$, тобто $f(1)=6$. Але тоді $2\cdot 1+3=f(f(1))+f(1)=f(6)+6$, звідки знаходимо $f(6)=-1$, що суперечить умові задачі.

Нарешті, останній можливий варіант $f(0)=1$. Тоді $3=f(f(0))+f(0)=f(1)+1$, звідки f(1) = 2. Аналогічно при $n=1$ знаходимо $2\cdot 1+3=f(f(1))+f(1)=f(2)+2$, звідки маємо $f(2)=3$. Припустивши, що при $n=k$ виконується рівність $f(k)=k+1$, з умови задачі одержимо, що $2k+3=f(f(k))+f(k)=f(k+1)+k+1$, тобто $f(k+1)=k+2$. Звідси на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що $f(n)=n+1$ для всіх невід'ємних цілих n. Отже, $f(2005)=2006$.

Зауважимо, що сам метод математичної індукції ми детальніше розглянемо у наступному параграфі.

Цікаво також виділити рівняння, в яких аргументи функції $f(x)$ відрізняються на цілі числа, а сама функція $f(x)$ входить до рівняння лінійно.

Задача 11.14. (10-11). Знайдіть всі функції $f: N \to R$, які задовольняють наступним умовам:

а) $f(1) = 3$;

б) $f(2) = 7$;

в) $f(n + 2) = 3f(n + 1) - 2f(n)$

при всіх $n \in N$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді $f(n) = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$. Тоді одержимо:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Отже, $f_1(n) = 1^n = 1$, $f_2(n) = 2^n$. Легко переконатися, що при довільних сталих c_1 та c_2 функція $f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$ теж задовольняє умову в). А тому $f(n) = c_1 + c_2 \cdot 2^n$. Підставляючи сюди $n = 1$ та $n = 2$, одержимо $c_1 + c_2 \cdot 2 = 3$ та $c_1 + c_2 \cdot 4 = 7$. Отже, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$. Тому $f(n) = 2^{n+1} - 1$.

Зауважимо, що якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $f(n)$ слід було би взяти у вигляді $(c_1 + nc_2)\lambda^n$. Якщо ж маємо *k* різних сталих λ_1, λ_2, ..., λ_k, то покладаємо $f(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$. Якщо дійсний корінь λ повторюється *k* разів, то йому відповідає у розв'язку доданок

$$(c_1 + nc_2 + \ldots + n^{k-1}c_k)\lambda^n.$$

Відзначимо також, що рівняння в задачі 11.14 було лінійним однорідним різницевим рівнянням. Якщо б до нього входив доданок вигляду $a^n P_m(n)$, де $P_m(n)$ – многочлен *m*-го степеня, то розв'язок $f(n)$ слід шукати у вигляді суми $c_1 + c_2 \cdot 2^n + \varphi(n)$, де $\varphi(n) = a^n \cdot n^k Q_m(n)$. Тут $k = 1$, якщо $a = 1$ чи $a = 2$, і $k = 0$ – при інших *a*. $Q_m(n)$ – многочлен *m*-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Для їх знаходження функцію $\varphi(n)$ слід підставити у початкове рівняння і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях *n*. Наприклад, для доданка $2n + 1$ функція $\varphi(n) = n(An + B)$. Коефіцієнти *A* та *B* знайдіть самостійно.

Звернемо також увагу читачів на те, що невідомі функції можна визначати не лише з функціональних рівнянь, а й з деяких функціональних нерівностей.

Задача 11.15. (10-11). Знайти всі функції $f: R \to R$, які при довільних дійсних x, y задовольняють нерівність $f(x) \le x$ та $f(x + y) \le f(x) + f(y)$.

Розв'язання. Підставимо у задані нерівності $x = y$. Матимемо $f(0) \le 0$ та $f(0) \le 2f(0)$. Звідси $f(0) = 0$. Тепер для довільного $x \in R$ одержимо: $f(x) \ge f(x + (-x)) - f(-x) = -f(-x) \ge -(-x) = x$. Звідси та з нерівності $f(x) \le x$ знаходимо: $f(x) \equiv x$, $x \in R$.

Задача 11.16. (10-11). Чи існує функція $f: R \to R$, яка не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці, і при всіх дійсних x задовольняє нерівність $f(x^2)-(f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$?

Розв'язання. Доведемо, що такої функції не існує. Справді, покладаючи $x=0$ та $x=1$, одержуємо $f(0)-(f(0))^2 \geq \frac{1}{4}$ та $f(1)-(f(1))^2 \geq \frac{1}{4}$. Записуючи ці нерівності у вигляді $\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ та $\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ знаходимо, що $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$. Отже, значення $\frac{1}{2}$ всяка така функція буде набувати принаймні у двох точках.

На завершення параграфа відзначимо, що деякі функціональні рівняння можна розглядати як характеристичні властивості функцій. Зокрема, для лінійної функції $f(x)=ax$ таким є рівняння із задачі 11.1. При додатковій умові $f(1)=a$ це рівняння визначає єдину неперервну функцію із заданими властивостями. Відзначимо також, що для функції $f(x)=a^x$ характеристичним є функціональне рівняння $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. При цьому функція $f(x)=a^x$ є його єдиним неперервним розв'язком, для якого $f(1)=a$. Подумайте, які є характеристичні рівняння для функцій $f(x)=x^a$ та $f(x)=\log_a x$.

Вправи до § 11

1. (9-11). Знайдіть всі функції $f: R \to R$, для яких при будь-яких дійсних х та у виконується рівність $f(x+y)=f(x)+y$.
2. (10-11). Знайдіть всі неперервні функції $f: R \to R$, які при довільних дійсних x та y задовольняють рівняння:

   а) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$; б) $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$.
3. (9-11). Чи існує така функція $f: R \to R$, що $f(x+y)=f(x)+f(y)+x$ для будь-яких дійсних х та у ?
4. (9-11). Чи існують такі монотонні функції $f: R \to R$, які при кожному дійсному x задовольняють рівняння
$$f(x+2005)=(x+2005)f(x)?$$
5. (10-11). Знайдіть всі неперервні функції, які при всіх додатних *x, y* задовольняють рівняння а) $f(xy)=f(x)+f(y)$, б) $f(xy)=f(x)f(y)$.
6. (9-11). Доведіть, що якщо для всіх дійсних x та y виконується рівність $f(x+y)=f(x)+f(y)$, то для них також справедливе твердження $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$.
7. (10-11). Розв'яжіть функціональні рівняння у класі неперервних на своїх областях визначення функцій:

   а) $f(x+y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, б) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

8. (10-11). Знайдіть всі неперервні функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння: а) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, б) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$ – рівняння Лобачевського.

9. (10-11). Знайдіть всі функції $f: R \to R$, для яких при довільних дійсних x та y виконується рівність $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$.

10. (9-11). Розв'яжіть функціональні рівняння:

а) $2002f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2002x$; б) $xf(x)+f(-x)=2f(x)-2x$.

11. (10-11). Знайдіть всі функції $f(x)$, для яких при всіх x, відмінних від 0, 1 та –1, виконується рівність $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$.

12. (10-11). Розв'яжіть рівняння: а) $f(2x-1)=f(x)$ у класі неперервних, б) $f(2x)=2f(x)$ у класі диференційовних функцій.

13. (10-11). Доведіть, що для довільної функції $\Phi(x)$ функція $f(x)=\Phi\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$ є розв'язком рівняння $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=f(x)$.

14. (10-11). Розв'яжіть систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2; \\ f(x+y)-f(x-y)=4xy. \end{cases}$$

Чи є обидва рівняння цієї системи рівносильними?

15. (10-11). Знайдіть всі можливі значення $f(0)$ та $g(0)$, якщо для довільних дійсних x та y:

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y); \\ g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y). \end{cases}$$

§ 12. Метод математичної індукції та його модифікації

Слово індукція означає логічний перехід від часткових фактів до деякого загального твердження. Спочатку проаналізуємо наступний елементарний приклад.

Задача 12.1. (8-9). Довести, що множина $\{1,4,9,16,25\}$ складається з чисел, які є точними квадратами.

Розв'язання. Оскільки $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, $25=5^2$, то справді всі числа даної множини є точними квадратами.

У чому ж полягає такий метод доведення? Встановивши, що властивість "бути точним квадратом" виконується для кожного елемента заданої множини, ми зробили відповідний висновок і про всю множину в цілому. Такий метод доведення називається методом повної індукції. Зрозуміло, що він застосовний, якщо повний перебір можна здійснити за скінченне число операцій, а кількість таких операцій не надто велика.

А як бути, коли досліджувана множина містить нескінченну кількість елементів? Адже тоді повний перебір стає неможливим.

Задача 12.2. (8-9). Послідовність x_n визначена формулою $x_n=(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-2002)+n$. Чи правильно, що $x_n=n$ при всіх натуральних n?

Розв'язання. Ні, неправильно, бо для $n>2002$ матимемо $x_n>n$.

Зауважимо, що перевіряючи перші 2002 значення x_n, ми кожного разу мали б $x_n=n$. Але на основі такого, здавалося б значного перебору, загальний висновок все одно зробити не можна. Часто нескінченну кількість можливостей можна розбити на скінчену кількість у певному розумінні однотипних і вже до цього розбиття застосувати метод повної індукції.

Задача 12.3. (8-9). Довести, що число n^3-4n ділиться на 3 при кожному натуральному n.

Розв'язання. Натуральні числа *n* при діленні на 3 можуть давати лише остачі 0, 1, 2. При цьому остачу 0 дають числа $n=3k$, остачу 1 – числа $3k+1$, остачу 2 — числа $3k+2$, де k – ціле невід'ємне число. Оскільки при кожному такому k числа $(3k)^3-4\cdot 3k$, $(3k+1)^3-4\cdot(3k+1)=3\cdot(9k^3+9k^2-k-1)$, $(3k+2)^3-4\cdot(3k+2)=3\cdot(9k^3+18k^2+12k)$ діляться на 3, то n^3-4n ділиться на 3 при кожному натуральному n.

Зауважимо, що спроба послідовно надавати числу n значень 1, 2, 3, ... знову не привела б до успіху. Хоча ми при цьому кожного разу і діставали б числа, що діляться на 3, та гарантувати, що така властивість збережеться і надалі, все ж не змогли б.

Інший шлях доведення тверджень, що залежать від натурального параметра дає метод математичної індукції. Його застосування ґрунтується на принципі математичної індукції. Твердження $A(n)$, залежне від натурального параметра n, вважається доведеним для всіх натуральних n, якщо воно доведене для $n=1$ і з припущення про виконання твердження $A(k)$ для якого-небудь натурального k виведено, що справджується твердження $A(k+1)$ для натурального числа $k+1$. Справді, якби при деякому $n>2$ твердження $A(n)$ було неправильним, то ми могли б вибрати із всіх таких n найменше. Нехай таким найменшим є $n=n_0$. Оскільки тоді для всіх $n<n_0$ твердження $A(n)$ вірне, то $A(n-1)$ теж правильне. Але в такому разі воно повинно справджуватися і для $n=(n_0-1)+1=n_0$. Одержане протиріччя і доводить правильність $A(n)$ для всіх натуральних значень n.

Відзначимо, що доведення правильності твердження $A(1)$ називається базою індукції, а доведення правильності $A(k+1)$ після припущення правильності $A(k)$ – індукційним переходом. В деяких задачах властивість $A(n)$ попередньо може бути не заданою. Припущення про твердження $A(n)$ в такому випадку називається індукційним припущенням. Наприклад, в задачі 11.13 таким було припущення, що $f(n)=n+1$.

Наведемо приклади. Спочатку розв'яжемо методом математичної індукції розв'язану вище задачу 12.3. При $n=1$ маємо: $n^3-4n=1^3-4=-3$. Це число на 3 ділиться. Припустимо, що при $n=k$ число k^3-4k теж ділиться на 3. Тоді для $n=k+1$ дістанемо: $(k+1)^3-4(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-4k-4=k^3-4k+3(k^2+k-1)$. Оскільки за припущенням k^3-4k ділиться на 3, то звідси випливає, що й $(k+1)^3-4(k+1)$ ділиться на 3. Отже, на основі принципу математичної індукції число n^3-4n ділиться на 3 при кожному натуральному n.

Задача 12.4. (9-11). Довести, що при кожному натуральному n справджується рівність $1+3+5+...+\ +(2n-1)=n^2$.

Розв'язання. При $n=1$ маємо $1=1^2$. Припустимо, що при $n=k$ правильна рівність $1+3+...+(2k-1)=k^2$. Тоді при $n=k+1$ одержимо $1+3+...+(2k-1)+2(k+1)-1=k^2+2(k+1)-1=(k+1)^2$. Отже, індукційний перехід вірний, а тому для всіх натуральних n правильна рівність $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Звертаємо особливу увагу читачів на необхідність перевірки індукційного припущення для $n=1$. Без цього важливого кроку висновок може виявитися невірним, навіть, якщо із припущення справедливості $A(k)$ випливає справедливість $A(k+1)$. Справді, припустивши в задачі 12.4, що $1+3+...+(2k-1)=k^2+1$, ми одержали б для $n=k+1$, що

$$1+3+...+(2(k+1)-1)=k^2+1+2(k+1)-1=(k+1)^2+1.$$

Але зробити звідси висновок про те, що для всіх натуральних n така сума дорівнює n^2+1 не можна, бо вже для $n=1$ це невірно. А якщо точніше, – то й при жодному n.

З іншого боку, якщо при $n=1$ твердження невірне, то це ще не означає, що воно невірне і для інших n, зокрема, для всіх натуральних $n\geq n_0>1$. Для застосування методу математичної індукції у цьому випадку доведення справедливості твердження $A(1)$ замінюють доведенням справедливості твердження $A(n_0)$. Це ж саме стосується і випадків, коли $A(1)$ вірне, але для скінченого числа значень n твердження $A(n)$ невірне. Розглянемо приклади.

Задача 12.5. (9-11). Довести, що $2^n>n^2$ для всіх натуральних $n\geq 5$.

Розв'язання. Для $n_0 = 5$ маємо $2^5 \geq 5^2$. Припустимо справедливість нерівності для $n = k \geq 5$. Тоді для $n = k+1$ одержимо $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2$. Справді, $2^k > k^2$ за індукційним припущенням, а $2k^2 > (k+1)^2$, бо квадратний тричлен $k^2 - 2k - 1$ при $k \geq 5$ набуває додатних значень. Отже, нерівність справедлива для всіх натуральних $n \geq 5$.

Зауважимо, що при $n = 1$ нерівність теж має місце. Але здійснити індукційний перехід при $k \leq 2$ неможливо.

Задача 12.6. (8-9). Довести, що сума внутрішніх кутів довільного опуклого n-кутника дорівнює $(n-2)180°$.

Розв'язання. При $n = 3$ дане твердження справедливе. Припустимо, що для довільного опуклого k- кутника сума внутрішніх кутів дорівнює $(k-2)180°$. Тоді довільний опуклий $(k+1)$- кутник можна розбити діагоналлю на трикутник та опуклий k-кутник. Отже, сума його внутрішніх кутів буде дорівнювати $180° + (k-2)\cdot 180° = ((k+1)-2)\cdot 180°$. Звідси на основі принципу математичної індукції робимо висновок про справедливість твердження задачі для довільного $n \geq 3$.

Зауважимо, що практично в усіх розглянутих прикладах індукційне припущення випливало із самої умови задачі, а в задачі 11.13 було достатньо очевидним. Проте в окремих випадках для побудови такої гіпотези доводиться докласти чимало зусиль. Розглянемо приклад.

Задача 12.7. (9-11). Вивести формулу для обчислення суми кубів перших n натуральних чисел.

Розв'язання. $1^3 = 1$, $1^3 + 2^3 = 9$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$. Бачимо, що ці суми дорівнюють квадратам натуральних чисел 1, 3, 6, 10 відповідно. Можна помітити також, що $1 = 1$, $3 = 1+2$, $6 = 1+2+3$, $10 = 1+2+3+4$. Тому висловимо гіпотезу про те, що $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. При $n = 1$ дане твердження справедливе. Припустимо, що воно справедливе і при $n = k$. Тоді для $n = k+1$ дістанемо

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^2 = (\mathrm{k}+1)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Отже, на основі принципу математичної індукції маємо, що $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ для кожного натурального n.

Інколи принцип математичної індукції застосовують у наступній видозміненій, але еквівалентній формі. Якщо справедливе твердження $A(1)$ і для всякого натурального $n > 1$ із припущення про справедливість твердження $A(k)$ для будь-якого натурального $k < n$ випливає справедливість твердження $A(n)$, то твердження $A(n)$ справедливе при всіх натуральних n.

Задача 12.8. (10-11). Довести, що будь-яке натуральне число можна записати у вигляді суми одного чи кількох різних степенів двійки, можливо, включаючи і $2^0 = 1$.

Розв'язання. Для $n = 1$ маємо запис $1 = 2^0$. Припустимо, що вказані записи можливі для всіх $k < n$. Тоді, якщо $n = 2^m$, то n уже записано у вказаному вигляді. Якщо ж n не є степенем двійки, то розглянемо таке максимальне значення m, для якого $2^m < n$. Тоді $k = n - 2^m < n$. Зрозуміло, що k є натуральним числом і $k < 2^m$, бо інакше одержали б, що $n = k + 2^m \geq 2^{m+1}$, і число m не було б найбільшим. Оскільки за припущенням число k можна записати у вигляді суми різних степенів двійки і серед доданків немає 2^m, то і число n можна записати у такому ж вигляді. Отже, вказаний запис можливий для всіх натуральних n.

Зауважимо, що спроба застосувати звичайний метод математичної індукції до успіху тут не приводить через труднощі з проведенням індукційного переходу.

Іншу модифікацію методу математичної індукції одержуємо, якщо база індукції складається з перевірки k тверджень, а висновок про $(n+k)$-е твердження робиться на основі k попередніх тверджень: $A(n),\ A(n+1),\dots,A(n+k-1)$.

При $k = 1$ як частковий випадок одержуємо традиційний метод математичної індукції.

Задача 12.9. (10-11). Довести, що при кожному натуральному n члени послідовності $a_{n+1} = \dfrac{3a_n - \sqrt{5a_n^2 + 16}}{2}$, $a_1 = 0$ є цілими числами.

Розв'язання. $a_1 = 0$ та $a_2 = 2$ – цілі числа. Для кожного натурального n виконуються рівності:

$$a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - \sqrt{5a_{n+1}^2 + 16}}{2} = 3a_{n+1} - \frac{3a_{n+1} + \sqrt{5a_{n+1}^2 + 16}}{2} =$$

$$= 3a_{n+1} - \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{3a_n - \sqrt{5a_n^2 + 16}}{2} + \sqrt{5 \cdot \left(\frac{3a_n - \sqrt{5a_n^2 + 16}}{2}\right)^2 + 16}\right) =$$

$$= 3a_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{3a_n - \sqrt{5a_n^2 + 16}}{2} + \frac{\sqrt{\left(3\sqrt{5a_n^2 + 16} - 5a_n\right)^2}}{2}\right) = 3a_{n+1} - a_n .$$

Тому, якщо числа a_n та a_{n+1} будуть цілими, то число a_{n+2} теж ціле. Оскільки a_1 та a_2 – цілі числа, то звідси випливає, що для всіх натуральних n члени заданої послідовності є цілими числами.

Зауважимо, що у деяких випадках індукційний перехід теж може складатися із k послідовних тверджень. Наприклад, в задачі 12.3 можна було перевірити подільність на 3 чисел $n^3 - 4n$ для $n = 1;2;3$. Тоді із припущення справедливості тверджень про подільність на 3 значень заданого виразу для чисел $n = 3m - 2$; $3m - 1$; $3m$ легко одержати висновок про подільність і для чисел $n = 3m + 1$; $3m + 2$; $3m + 3$. Відзначимо також, що подібну індукцію із складною базою можна розглядати як три звичайні індукції на множинах чисел $3m-2$, $3m-1$, $3m$, де m пробігає множину всіх натуральних чисел.

Метод математичної індукції застосовний також і для аналізу тверджень, залежних від кількох натуральних аргументів. Розглянемо приклад.

Задача 12.10. (10-11). Довести, що $2^{m+n-2} \geq mn$ для будь-яких натуральних m та n.

Розв'язання. Запишемо дану нерівність у вигляді $2^{m-1} \cdot 2^{n-1} \geq mn$. Тепер достатньо показати, що при кожному натуральному n виконується нерівність $2^{n-1} \geq n$. При $n=1$ вона очевидна, а із припущення $2^{k-1} \geq k$ легко одержуємо, що $2^{k} = 2 \cdot 2^{k-1} \geq 2k \geq k+1$. Отже, дана нерівність справедлива для всіх натуральних m та n.

Як бачимо, доведення твердження задачі фактично розпалося на розгляд двох цілком ідентичних випадків. Проте інколи метод математичної індукції застосовується спочатку по змінній n, вважаючи число m фіксованим, а потім по змінній m, вважаючи n фіксованим.

Двоїстим до методу математичної індукції виступає метод зворотної індукції чи індукції вниз. При цьому перехід індукції полягає у доведенні справедливості твердження $A(n-1)$ за припущення, що справедливе твердження $A(n)$. Оскільки процедура такого доведення цілком аналогічна здійсненню індукційного переходу від $A(n)$ до $A(n+1)$, то зупинятися на цьому окремо не будемо. Відзначимо лише, що цей метод може бути корисним для доведення того, що деяка властивість не виконується при жодному натуральному n. Справді, припустивши, що $A(n)$ вірне при деякому $n_0 \geq 2$, ми послідовно одержали б, що $A(n)$ вірне для всіх натуральних $n \leq n_0$. Але, якщо при цьому виявиться, що $A(1)$ невірне, що легко встановити безпосередньо, то приходимо до протиріччя. Цей метод також може мати різні модифікації.

При розв'язуванні окремих задач можливе поєднання методів математичної індукції та зворотної індукції. Яскравою ілюстрацією такого поєднання служитиме доведення нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним, яке буде проведене у наступному параграфі.

Зауважимо, що із доведенням нерівностей пов'язані також такі модифікації методу математичної індукції:

а) якщо $a_0 \geq b_0$ і для всіх $n \in N$ $a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}$, то для всіх $n \in N$ $a_n \geq b_n$,

б) якщо $a_0 \geq b_0 > 0$ і для всіх $n \in N$ $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \geq \dfrac{b_n}{b_{n-1}} > 0$, то для всіх $n \in N$ $a_n \geq b_n$.

Для обґрунтування справедливості сформульованих тверджень досить відповідно додати нерівності $a_0 \geq b_0$, $a_1 - a_0 \geq b_1 - b_0$, ..., $a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}$ чи перемножити нерівності $a_0 \geq b_0 > 0$, $\dfrac{a_1}{a_0} \geq \dfrac{b_1}{b_0} > 0$, ..., $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \geq \dfrac{b_n}{b_{n-1}} > 0$.

Пропонуємо читачам самостійно скористатися цими модифікаціями для доведення двох наступних нерівностей:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

б) $n^n \ge (n+1)^{n-1}$.

Застерігаємо також читачів від непродуманого застосування методу математичної індукції, бо, по-перше, не всяка задача, в якій фігурує твердження $A(n)$, може бути розв’язана з допомогою цього методу, а, по-друге, використання інших методів іноді приводить до успіху значно швидше.

Вправи до § 12

1. (9-10). Доведіть, що при всіх натуральних n: а) 4^n+6n-1 ділиться на 9, б) $5^n+2\cdot3^{n-1}+1$ ділиться на 8.
2. (9-10). Доведіть, що $1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1))/6$.
3. (9-10). Доведіть, що: а) $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=(n(n+1)(n+2))/3$, б) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots n(n+1)(n+2)=(n(n+1)(n+2)(n+3))/4$.
4. (9-10). Доведіть, що: а) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, б) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
5. (9-10). Обчисліть суми: а) $1^3+2^3+\ldots+(2n)^3$, б) $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3$.
6. (9-10). Послідовність $\{a_n\}$ така, що $a_1=3$, $a_2=5$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$. Доведіть, що $a_n=2^n+1$ для всіх натуральних n.
7. (9-10). $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами.
8. (9-11). Число $x+\frac{1}{x}$ є цілим. Доведіть, що при кожному натуральному n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ - також ціле.
9. (9-11). Числа N_1, N_2, … N_n є сумами квадратів двох цілих чисел. Доведіть, що і їх добуток є сумою квадратів двох цілих чисел.
10. (10-11). Доведіть, що при кожному натуральному $n \ge 3$ число 2^n можна подати у вигляді суми $7x^2+y^2$, де x, y – непарні числа.
11. (9-10). Доведіть, що будь-який (не обов’язково опуклий) многокутник можна розбити на трикутники діагоналями, які попарно не перетинаються.
12. (9-11). Площина розрізана скінченим числом прямих на декілька областей. Доведіть, що ці області можна розмалювати кожну одним із двох кольорів так, що будь-які дві області, які мають спільною границею деякий відрізок, будуть замальовані у різний колір.
13. (9-11). Дано n квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, щоб з одержаних частин вдалося скласти один великий квадрат.
14. (10-11). Доведіть, що при всіх натуральних $n \ge 2$ виконується нерівність $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$.
15. (9-11). Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ для всіх натуральних n.

§ 13. Доведення нерівностей

Задачі на доведення нерівностей, як правило, є необхідним елементом кожної математичної олімпіади. У зв'язку з цим читачам корисно буде ознаймитись з деякими загальними методами розв'язування цих задач.

Задача 13.1. (8-9). Довести, що $100! < 50^{100}$.

Розв'язання. $1 \cdot 50 \cdot 99 \cdot 100 < 50^4$, $2 \cdot 98 < 50^2$, $3 \cdot 97 < 50^2$, …, $49 \cdot 51 < 50^2$. Перемноживши ці нерівності, одержимо, що $100! < 50^{100}$.

Наведений приклад ілюструє метод групування множників з метою зведення заданої нерівності до сукупності простіших нерівностей. Переслідуючи аналогічну мету, інколи групують задані доданки.

Задача 13.2. (8-9). Довести нерівність $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2002}>6$.

Розв'язання. $1 \ge 1$; $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2};\ldots;\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+\ldots+\frac{1}{1024} > 512 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{1}{2};\quad \frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\ldots+\frac{1}{2002} > 0.$$

Додавши записані нерівності, дістанемо нерівність, задану умовою задачі.

Задача 13.3. (8-9). Довести нерівність

$$\frac{77}{60} < \frac{1}{1996}+\frac{1}{1997}+\ldots+\frac{1}{9975} < \frac{25}{12}.$$

Розв'язання. Згрупуємо записані доданки у чотири групи по 1995 доданків у кожній. Тоді для першої групи матимемо

$$\frac{1}{2} = 1995 \cdot \frac{1}{1995 \cdot 2} < \frac{1}{1996}+\ldots+\frac{1}{1995 \cdot 2} < 1995 \cdot \frac{1}{1995} = 1.$$

Аналогічно для другої групи дістанемо оцінку зліва, що дорівнює $\frac{1}{3}$, а справа – $\frac{1}{2}$. Для третьої групи матимемо відповідно оцінки $\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{3}$, а для четвертої – $\frac{1}{5}$ та $\frac{1}{4}$. Додавши одержані нерівності, приходимо до нерівності з умови задачі.

Наступним виділимо метод підсилення. Його суть полягає у тому, що замість нерівності $a > b$ доводять дві: $a > c$ та $c > b$.

Задача 13.4. (8-10). Довести нерівність

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{1997^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

Розв'язання.

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{1997^3}\right) > \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{1997^2}\right) =$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(1997-1)(1997+1)}{1997^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 3}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1996\cdot 1998}{1997^2}=\frac{1\cdot 1998}{2\cdot 1997^2}>\frac{1}{2}.$$

Як частковий випадок підсилення можна вважати ситуацію, коли на якомусь кроці замість нерівності одержуємо рівність.

Задача 13.5. (9-10). Довести нерівність

$$A=\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<5,$$

де в кожному доданку записано по 2006 радикалів.

Розв'язання.

$$A<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

Зауважимо, що доведення нерівностей, зокрема методом підсилення, може використовуватись і при розв'язуванні окремих нерівностей. Наприклад, для розв'язання нерівності $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt[6]{27-x^2}$ досить знайти множину допустимих значень для невідомої x. Нею є відрізок $\left[-3;3\sqrt{3}\right]$. Тоді при $x=0$ нерівність очевидна, при допустимих $x<0$ маємо: $\sqrt{3+x}\geq 0$, $\sqrt[4]{9-x}>\sqrt{3}>\sqrt[6]{27-x^2}$, а при допустимих $x>0$ одержуємо: $\sqrt{3+x}>\sqrt{3}>\sqrt[6]{27-x^2}$, $\sqrt[4]{9-x}\geq 0$. Отже, розв'язком даної нерівності є усі допустимі значення x.

Повертаючись до задачі 13.4, відзначимо, що при її розв'язуванні здійснювались тотожні перетворення, які суттєво спростили обчислення одержаних добутків. Використання тотожних перетворень може бути корисним і при доведенні нерівності методом зведення до очевидної.

Задача 13.6. (8-9). Довести, що при $a>0$ виконується нерівність $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

Розв'язання. Оскільки при $a>0$ $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$, то $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

Тотожні перетворення можуть бути використані і для заміни даної для доведення нерівності на рівносильну їй нерівність. Зокрема, ефективною може бути заміна $a>b\Leftrightarrow a>2b-a$. Використання цієї заміни проілюструємо на такому прикладі.

Задача 13.7. (9-11). Довести нерівність

$$\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}+\ldots-\sqrt{2}+1>\sqrt{n}.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності через a, праву – через b. Тоді

$$2b-a=\sqrt{4n}-\left(\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}+\ldots-\sqrt{2}+1\right)=$$

$$=\left(\sqrt{4n}-\sqrt{4n-1}\right)+\left(\sqrt{4n-2}-\sqrt{4n-3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4n}+\sqrt{4n-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n-3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2}+1}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-4}}+\ldots+\frac{1}{1+0}=$$

$$=\left(\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}\right)+\left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-4}\right)+\ldots+(1-0)=a\,.$$

Оскільки $2b-a<a$, то $a>b$, що й треба було довести.

Ось ще один приклад такого роду.

Задача 13.8. (9-10). Знайти найбільше та найменше значення виразу $A=\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$, якщо *a*, *b*, *c* належать відрізку [2; 3].

Розв'язання. Оскільки $A>0$, то розглянемо вираз $\frac{1}{A}=\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$. Зрозуміло, що

$$\frac{1}{3+3}+\frac{1}{3+3}\leq\frac{1}{A}\leq\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2}\,.$$

Отже, $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{A}\leq\frac{1}{2}$, $2\leq A\leq 3$. Рівності досягаються відповідно при $a=b=c=2$ та $a=b=c=3$.

Подібно, замість нерівності $a<b$ при додатніх *a*, *b* можно доводити нерівності $a^2<b^2$, $ab<b^2$, $a^2<ab$ тощо.

Задача 13.9. (9-10). Доведіть, що $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Розв'язання. $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, ..., $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Тому $a^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$. Звідси випливає, що $a<\frac{1}{10}$.

Зверніть увагу, що попутно ми використали тут також метод підсилення.

Для доведення нерівностей можуть використовуватись уже відомі нерівності, при потребі записані у рівносильному їм вигляді. Наприклад, нерівність $(a-b)^2\geq 0$ при $b>0$ рівносильна нерівності $\frac{a^2}{b}\geq 2a-b$, причому рівність досягається лише при $a=b$.

Задача 13.10. (9-10). Довести, що для всіх додатних чисел a, b, c для яких $abc=1$, виконується нерівність $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

Розв'язання. Якщо x, y, z – додатні числа і $xyz=1$, то

$$\frac{1}{x^3(y+z)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{xy+xz}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\geq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right),$$

причому рівність досягається лише при $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Звідси матимемо, що

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{1}{4}\cdot\left(4\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{2}.$$

Зрозуміло, що рівність досягається лише при $a=b=c=1$.

Пропонуємо читачам самостійно скористатися такою ідеєю для доведення нерівності $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$ для додатніх *a*, *b*, *c*.

Під час розв'язуванн задачі 13.10 використана нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$, справедливість якої доведемо окремо. Більш загально покажемо, що для довільних додатних чисел x_1, x_2, …, x_n виконується ***нерівність Коші*** між середнім арифметичним та середнім геометричним цих чисел: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2..x_n}$ причому рівність досягається лише при $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Для доведення застосуємо метод математичної індукції.

При $n=2$ нерівність $\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}$ безпосередньо випливає з очевидної нерівності $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\geq 0$, причому рівність тут можлива лише при $x_1=x_2$. Припустимо справедливість нерівності Коші для $n=2^k$, $k\in N$. Тоді для $n=2^{k+1}$ покладемо $y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y_2=\frac{1}{2}(x_3+x_4)$, …, $y_{2^k}=\frac{1}{2}(x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}})$. Звідси дістаємо:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{2^k}}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{y_1y_2\ldots y_{2^k}}=\sqrt[2^k]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}}}{2}}\geq$$

$$\geq\sqrt[2^k]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{x_{2^{k+1}-1}x_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2..x_{2^{k+1}}}.$$

Тому нерівність Коші справедлива для всіх n вигляду 2^k. Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати, чому рівність досягається тут лише при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

А тепер доведемо, що із справедливості нерівності Коші для $n=m$ випливає її справедливість для $n=m-1$. Позначимо $a=x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}$, $b=x_1x_2..x_{m-1}$ і покладемо $x_m=\frac{a}{m-1}$. Тоді матимемо:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m}\ge\sqrt[m]{x_1x_2\ldots x_m}\Leftrightarrow\frac{a+\dfrac{a}{m-1}}{m}\ge\sqrt[m]{b\cdot\frac{a}{m-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{m-1}\ge\sqrt[m]{\frac{ab}{m-1}}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{m-1}\right)^{m-1}\ge b\Leftrightarrow\frac{a}{m-1}\ge\sqrt[m-1]{b}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}}{m-1}\ge\sqrt[m-1]{x_1x_2\ldots x_{m-1}}\,.$$

Легко побачити, що рівність досягається лише при $x_1=x_2=\ldots=x_{m-1}$, бо саме при цих умовах вона мала місце для $n=m$. Нерівність Коші доведено повністю.

Наведемо приклади її застосування до доведення інших нерівностей.

Задача 13.11. (9-10). Довести, що для додатних чисел x_1, x_2, …, x_n виконується нерівність $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2$.

Розв'язання. $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n\cdot\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\cdot n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}}=n^2$. Зауважимо, що рівність досягається лише при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

З нерівності Коші також одержуємо, що, наприклад, для додатніх *a*, *b*, *c* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3=\left(\frac{a}{b}\right)^0+\left(\frac{b}{c}\right)^0+\left(\frac{c}{a}\right)^0$. Припустивши для $n=k$ $\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{a}\right)^k\ge\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}+\left(\frac{b}{c}\right)^{k-1}+\left(\frac{c}{a}\right)^{k-1}$ легко встановити, що

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1}+\left(\frac{b}{c}\right)^{k+1}+\left(\frac{c}{a}\right)^{k+1}=\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a^{k-1}}{b^k}+\frac{b^2}{c}\cdot\frac{b^{k-1}}{c^k}+\frac{c^2}{a}\cdot\frac{c^{k-1}}{a^k}\ge$$

$$\ge(2a-b)\frac{a^{k-1}}{b^k}+(2b-c)\frac{b^{k-1}}{c^k}+(2c-a)\frac{c^{k-1}}{a^k}=$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{a}\right)^k+\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{a}\right)^k-\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}-\left(\frac{b}{c}\right)^{k-1}-\left(\frac{c}{a}\right)^{k-1}\right]\ge$$

$\ge\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{a}\right)^k$. Отже, для всіх натуральних *n* маємо $\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n\ge\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}+\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1}$. Рівність досягається тільки при $a=b=c$.

Звичайно, безпосередньому застосуванню нерівності Коші можуть передувати перетворення виразів з метою виділення потрібних доданків. Розглянемо приклад.

Задача 13.12. (9-10). Для довільних додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{a^3}{a+2b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\,.$$

Розв'язання. Додамо до обох частин нерівності рівність $\frac{a(b+2c)}{9}+\frac{b(c+2a)}{9}+\frac{c(a+2b)}{9}=\frac{ab+bc+ac}{3}$. Тоді за нерівністю Коші матимемо: $\frac{a^3}{b+2c}+\frac{a(b+2c)}{9}\ge\frac{2a^2}{3}$; $\frac{b^3}{c+2a}+\frac{b(c+2a)}{9}\ge\frac{2b^2}{3}$; $\frac{c^3}{a+2b}+\frac{c(a+2b)}{9}\ge\frac{2c^2}{3}$. Додавши усі ці нерівності, одержимо, що для розв'язання задачі достатньо довести нерівність $\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)$ чи рівносильну їй нерівність $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Остання легко випливає з нерівності $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

Штучний прийом, пов'язаний із додаванням до обох частин нерівності одного і того ж числа, або, що те саме, додавання і віднімання одного і того ж числа в одній із частин нерівності, приходить на допомогу і під час розв'язування наступної задачі.

Задача 13.13. (9-10). Довести, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Розв'язання.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3=$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=\frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\ge\frac{1}{2}\cdot 3^2-3=\frac{3}{2}.$$

Відзначимо, що для доведення нерівності із задачі 13.13. можна поступити і таким чином. Позначимо $b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$. Тоді $a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{x-y+z}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$. Отже,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right)-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

При доведенні окремих нерівностей доводиться поєднувати кілька методів.

Задача 13.14. (9-10). Доведіть, що якщо додатні числа a, b, c задовольняють нерівність $ab+bc+ca>a+b+c$, то $a+b+c>3$.

Розв'язання. Оскільки при виконанні заданої нерівності

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ge 3ab+3bc+3ca>3(a+b+c)$$

і $a+b+c>0$, то, скоротивши на $a+b+c$, одержимо $a+b+c>3$.

Задача 13.15. (9-10). Для додатних a, b, c знайти найменше значення виразу

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Розв'язання. На основі задачі 13.13 маємо $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$. Крім того,

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 2+2+2=6.$$

Оскільки в кожній з нерівностей рівність досягається при $a=b=c$, то найменше значення заданого виразу при додатних a, b, c дорівнює 7,5.

Застерігаємо читачів від можливої помилки при спробі одразу згрупувати доданки в пари взаємно обернених. Стверджувати в такому випадку, що найменше значення виразу дорівнює 6, ми не змогли б, бо для цього мали б одночасно виконуватися рівності $a=b+c$, $b=a+c$, $c=a+b$, сумісне виконання яких при додатних a, b, c неможливе.

Ще з одним штучним прийомом зустрічаємося при розв'язуванні такої задачі.

Задача 13.16. *(*9-10). Додатні числа x та y задовольняють співвідношення $x-y=x^3+y^3$. Довести, що $x^2+y^2<1$.

Розв'язання. Якщо x та y додатні, то $x^3+y^3>0$, $x-y>0$. Помножимо тепер ліву частину заданої рівності на x^2+y^2, а праву – на 1 і розглянемо різницю цих добутків: $(x-y)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)\cdot 1= =-xy(x-y)-2y^3<0$. Тому $x^2+y^2<1$.

А зараз методом математичної індукції доведемо ще одну класичну нерівність – ***нерівність Бернуллі***.

Задача 13.17. (9-11). Довести, що для $x>-1$ при всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n\geq 1+nx$ *(нерівність Бернуллі)*.

Розв'язання. При $n=1$ маємо рівність. Припустимо при $n=k$, що $(1+x)^k\geq 1+kx$ для всіх $x>-1$. Тоді $(1+x)^{k+1}= =(1+x)(1+x)^k\geq(1+x)(1+kx)=1+(k+1)x+x^2\geq 1+(k+1)x$. На основі принципу математичної індукції нерівність справедлива при $x>-1$ для всіх натуральних n.

Нерівність Бернуллі можна довести також з використанням похідної. Справді, при $n=1$ нерівність очевидна. При $n>1$ розглянемо функцію $y=(1+x)^n-1-nx$. Тоді $y'=n((1+x)^{n-1}-1)$. З рівняння $y'=0$ знаходимо при $x>-1$ єдину точку екстремуму $x=0$. Легко бачити, що це точка мінімуму. А тому для всіх $x>-1$, виконується нерівність $y(x)\geq y(0)$, тобто $(1+x)^n-1-nx\geq 0$. Звідси і випливає нерівність Бернуллі.

Зауважимо, що її можна було би записати і у загальнішому вигляді

$$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$$

для всіх $x>-1$, $\alpha\notin(0{,}1)$. А якщо $\alpha\in(0{,}1)$, то знак нерівності слід замінити на протилежний. Продумайте самостійно, як це можна довести з використанням похідної.

Відзначимо, що аналогічним способом можна було би встановити, що для всіх дійсних x виконується нерівність $e^x\geq 1+x$. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

Як бачимо, використання похідної можна вважати окремим методом доведення нерівностей. Зокрема, для доведення числових нерівностей буває доцільним ввести в розгляд функцію, яка набуває заданих числових значень за певних значень своїх аргументів. Якщо на проміжку між виділеними значеннями аргументів ця функція монотонна, то звідси можна зробити необхідний висновок про виконання заданої нерівності.

Для доведення ще однієї класичної нерівності – ***нерівності Коші-Буняковського*** – скористаємося властивостями квадратного тричлена.

Задача 13.18. (9-11). Довести, що для будь-яких дійсних чисел a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n справджується нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

(нерівність Коші-Буняковського).

Розв'язання. При кожному дійсному значенні x виконуються нерівності $(a_kx - b_k)^2 \ge 0$, $1 \le k \le n$. Додавши їх, для всіх дійсних x матимемо нерівність

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \ge 0.$$

Тому дискримінант одержаного квадратного тричлена $D \le 0$, тобто $4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \le 0$. Звідси і випливає необхідна нерівність.

Зауважимо, що рівність у ній досягається, якщо набори чисел a_1, a_2, …, a_n, і b_1, b_2, …, b_n пропорційні, тобто, якщо існує таке x_0, що $a_kx_0 = b_k$ або $b_kx_0 = a_k$ для всіх k одночасно.

Аналогічні міркування приводять до успіху і при розв'язуванні наступної задачі.

Задача 13.19. (9-11). Нехай a_1, a_2, …, a_n – додатні числа, b_1, b_2, …, b_n та c_1, c_2, …, c_n – довільні дійсні числа, для яких справджуються нерівності $a_1c_1 \ge b_1^2$, $a_2c_2 \ge b_2^2$, …, $a_nc_n \ge b_n^2$. Довести, що

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \ge (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2.$$

Розв'язання. З умови задачі випливає, що для всіх дійсних x виконуються нерівності: $a_kx^2 + 2b_kx + c_k \ge 0$, $1 \le k \le n$. Додавши їх, дістанемо для всіх дійсних x нерівність $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^2 + 2(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)x + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \ge 0$. З того, що дискримінант квадратного тричлена у лівій частині останньої нерівності не додатний, випливає справедливість заданої в задачі нерівності.

Зауважимо, що іноді і саму нерівність доцільно розглядати як квадратичну відносно якоїсь змінної. Наприклад для нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$ можна записати її у вигляді $\varphi(a) = a^2 - (b + c) + b^2 + c^2 - bc \ge 0$ і переконатися, що дискримінант $D = -3(b - c)^2 \le 0$. Отже, при будь-якому a така квадратична функція відносно $\varphi(a)$ набуває невід'ємних значень, причому $\varphi(a) = 0$ лише при $b = c$. Звідси також $a = b = c$.

А тепер розглянемо деякі нерівності між середніми степеневими додатних чисел. **Середнім степеневим** додатних чисел x_1, x_2, …, x_n порядку k, де $k \ne 0$ – довільне дійсне число, називають число $C_k=\left(\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$. Зокрема, при $k=1$ число C_k є **середнім арифметичним**, при $k=2$ – **середнім квадратичним**, а при $k=-1$ – **середнім гармонійним** заданих чисел. Нагадаємо також, що число $G=\sqrt[n]{x_1x_2..x_n}$ називається **середнім геометричним** чисел x_1, x_2, …, x_n. Таким чином, нерівність Коші стверджує, що $C_1\ge G$. Деякі інші нерівності встановимо для випадку $n=2$.

Задача 13.20. (9-11). Довести нерівності $C_{-1}\le G\le C_1\le C_2$.

Розв'язання. Нерівність $G\le C_1$, тобто $\sqrt{x_1x_2}\le\frac{x_1+x_2}{2}$ – частковий пипадок доведеної раніше нерівності Коші. Отже, залишається довести нерівності $\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}\le\sqrt{x_1x_2}$ та $\frac{x_1+x_2}{2}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$. Перша з них рівносильна нерівності $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\le\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow G\le C_1$, а друга – нерівності $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\le\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\Leftrightarrow 2x_1x_2\le x_1^2+x_2^2$. Зауважимо, що рівності досягаються всюди лише при $x_1=x_2$.

Відзначимо також, що аналогічні нерівності виконуються при довільному натуральному n. Справедливе також наступне твердження: якщо $k_1<k_2$, то $C_{k_1}\le C_{k_2}$, причому рівність досягається тільки при умові, що $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Зауважимо, що поширити цю нерівність можна і на випадок $k=0$, покладаючи, що $C_0=G$.

Більше того, покладаючи $C_k^*=\left(\frac{p_1x_1^k+\ldots+p_nx_n^k}{p_1+\ldots+p_n}\right)^{\frac{1}{k}}$, $k\ne 0$, $C_0^*=\left(x_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+\ldots+p_n}}$ для додатніх x_1, ..., x_n та p_1, ..., p_n, одержимо, що при $k_1<k_2$ виконується нерівність $C_{k_1}^*\le C_{k_2}^*$, причому рівність досягається при $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Якщо тут $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$, то маємо класичні нерівності між середніми степеневими.

Для розгляду наступного методу доведення нерівностей нам потрібне буде таке означення: дві скінченні послідовності дійсних чисел $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$, $(k=1,2,\ldots,n)$, називаються **однаково впорядкованими**, якщо для будь-яких k, p, не більших n, виконується нерівність $(a_k-a_p)(b_k-b_p)\ge 0$, і **зворотньо впорядкованими**, якщо $(a_k-a_p)(b_k-b_p)\le 0$.

За аналогією із скалярним добутком векторів введемо позначення $(\{a_k\},\{b_k\})=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$. Припустимо, що при цьому послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$, $1\le k\le n$ – однаково впорядковані, а $\{b_k'\}$ – довільна перестановка членів послідовності $\{b_k\}$. Тоді справедлива нерівність $(\{a_k\},\{b_k\})\ge(\{a_k\},\{b_k'\})$. Справді, якщо $\{b_k\}$ не співпадає з $\{b_k'\}$, то знайдеться така пара індексів k та p, що послідовності з двох елементів a_k, a_p та b_k', b_p' – зворотньо впорядковані. Але тоді, помінявши місцями b_k' та b_p', дістанемо, що $(a_kb_k'+a_pb_k')-(a_kb_k'+a_pb_p')=(a_k-a_p)(b_p'-b_k')\ge 0$, тобто в результаті такої заміни загальна сума $(\{a_k\},\{b_k'\})$ не зменшується. А тому найбільшою з усіх можливих сум буде сума $(\{a_k\},\{b_k\})$.

Аналогічно доводиться, що коли $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ – зворотно впорядковані, а $\{b_k'\}$ – довільна перестановка членів послідовності $\{b_k\}$, то $(\{a_k\},\{b_k\}) \le (\{a_k\},\{b_k'\})$.

Проілюструємо застосування властивостей однаково впорядкованих послідовностей на конкретних прикладах доведення нерівностей. Зокрема, для нерівності $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ із задачі 13.13 при додатних a, b, c маємо однаково впорядковані послідовності $\{a,b,c\}$ та $\left\{\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right\}$. Тому

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\{a,b,c\},\left\{\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right\}\right)\ge \ \ge\left(\{a,b,c\},\left\{\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b},\frac{1}{b+c}\right\}\right)=\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}.$$

Аналогічно доводимо, що $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Додаючи ці дві нерівності, дістанемо; $2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge 3$ звідки й випливає необхідна нерівність.

Задача 13.21. (9-11). Довести, що для додатних чисел x_1, x_2, …, x_n виконується нерівність

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\ge x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Розв'язання. Оскільки при додатних x_1, x_2, …, x_n послідовності $\{x_k^2\}$, та $\left\{\frac{1}{x_k}\right\}$ зворотньо впорядковані, то задана нерівність безпосередньо випливає з нерівності $\left(\{x_k^2\}\cdot\left\{\frac{1}{x_k}\right\}\right)\le\left(\{x_k^2\}\cdot\left\{\frac{1}{x_k'}\right\}\right)$, де $x_n'=x_1$, $x_k'=x_{k+1}$, $k=1;2;\ldots;n-1$.

А ось приклад доведення даним методом ще однієї класичної нерівності – ***нерівності Чебишева***.

Задача 13.22. (9-11). Нехай послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$, однаково впорядковані. Довести, що

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \text{ (нерівність Чебишева).}$$

Розв'язання. При кожному k, $1\le k\le n$ справедлива нерівність $(\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},\{b_1,b_2,\ldots,b_n\})\ge(\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},\{b_k,b_{k+1},\ldots,b_n,b_1,\ldots,b_{k-1}\})$. Додаючи n таких нерівностей, дістаємо нерівність Чебишева.

Аналогічні нерівності можна дістати і для більшої кількості однаково впорядкованих послідовностей. Як приклад застосування таких нерівностей розглянемо наступну задачу.

Задача 13.23. (10-11). Для додатних чисел a, b, c довести нерівність $a^7+b^7+c^7\ge a^2b^2c^2(a+b+c)$.

Розв'язання. Для цієї нерівності не можна підібрати дві відповідні однаково впорядковані послідовності. Але існують три такі послідовності, а саме: $\{a^3,b^3,c^3\}$, $\{a^2,b^2,c^2\}$, $\{a^2,b^2,c^2\}$, що

$$a^7+b^7+c^7=\left(\{a^3,b^3,c^3\},\{a^2,b^2,c^2\},\{a^2,b^2,c^2\}\right);\ a^2b^2c^2(a+b+c)=\left(\{a^3,b^3,c^3\},\{b^2,c^2,a^2\},\{c^2,a^2,b^2\}\right).$$

Звідси і випливає необхідна нерівність.

Зауважимо, що коли елементи x_1, x_2, …, x_n входять в задану нерівність симетрично, тобто, при заміні місцями x_k та x_p, вид нерівності не змінюється при довільних k та p, тому без порушення загальності міркувань можна вважати, що ці елементи впорядковані у порядку зростання. Проте розгляду лише такого випадку буде недостатньо, якщо дані елементи входять у нерівність циклічно, тобто, коли вигляд нерівності не змінюється, якщо всі x_k замінити на x_{k+1}, причому вважати, що $x_{n+1}=x_1$.

Часто при доведенні нерівностей на допомогу приходить і так званий принцип крайнього. В неявному вигляді він уже був використаний нами при обґрунтуванні методу однаково впорядкованих послідовностей. А ось ще два приклади його застосування.

Задача 13.24. (10-11). Довести, що для додатних чисел a_1, a_2, …, a_n, $n>1$, таких, що $a_1a_2..a_n=1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\le n-1.$$

Розв'язання. Нехай a_k та a_m – два найбільші із заданих чисел. Тоді $a_ka_m\ge 1$, бо в протилежному випадку добуток всіх чисел був би меншим за 1. Оскільки при цьому $\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}-1=\frac{1-a_ka_m}{(1+a_k)(1+a_m)}\le 0$, то $\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}\le 1$. Але кожен з решти доданків також менший одиниці. Тому й сума всіх їх не перевищує $n-1$, причому рівність досягається лише при $n=2$.

Задача 13.25. (10-11). Знайти найбільше можливе значення виразу $x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_3)+x_3^2(1-x_4)+x_4^2(1-x_1)$, якщо всі числа x_k належать відрізку $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Розв'язання. При кожному фіксованому k, $1\le k\le 4$ заданий вираз є квадратичною функцією вигляду $ax_k^2+bx_k+c$, причому $a>0$. Така функція на будь-якому відрізку свого найбільшого значення набуває на одному з кінців цього відрізка. Тому при будь-яких значеннях x_m, $m\ne k$, взявши потрібне із значень $x_k=\frac{1}{3}$ чи $x_k=\frac{2}{3}$, ми можемо даний вираз тільки збільшити. Отже, максимум цього виразу слід шукати, коли числа x_k дорівнюють $\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$. Оскільки кількість таких наборів скінченна, то знайдеться такий з них, на якому досягається максимальне значення виразу. Щоб не робити повного перебору, зауважимо, що шуканий набір не може утворювати трійка $x_k=x_{k+1}=x_{k+2}=\frac{2}{3}$, яку надалі позначатимемо

$\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$, вважаючи також, що $x_5 = x_1$, $x_6 = x_2$. Справді, замінивши цю трійку на трійку $\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$ ми збільшимо значення даного виразу, бо при цьому замість доданків $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$ з'являться доданки $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$, а інші доданки не зміняться. Аналогічно міркуємо про заміну трійок $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ та $\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ на трійку $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$. Таким чином, приходимо до висновку, що заданий вираз набуває найбільшого значення, якщо його змінні почергово набирають значень $\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$. Неважко порахувати, що це найбільше значення дорівнює $\frac{2}{3}$.

При доведенні окремих нерівностей використовують геометричні міркування. Особливо часто ці міркування пов'язані з поняттями опуклої вгору (кажуть також просто – опуклої) та опуклої вниз (кажуть ще – вгнутої) функції.

Фукнція $y = f(x)$ називається опуклою вгору на відрізку $[a,b]$, якщо для будь-яких двох точок x_1 та x_2 з цього відрізка виконується нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Функція опукла вниз, на $[a,b]$, якщо знак записаної нерівності є протилежним, тобто "$\le$". Геометрично це означає, що хорда, яка з'єднує точки з абсцисами x_1 та x_2 на графіку функції, знаходиться не вище (для опуклої вгору) та відповідно не нижче (для опуклої вниз) графіка функції на проміжку $[x_1; x_2]$.

Задача 13.26. (10-11). Довести, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = x^4$ опукла вниз на будь-якому відрізку, то для довільних дійсних чисел a і b справджується нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \le \frac{a^4+b^4}{2}$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на 16, дістанемо задану нерівність, справедливу, отже, не лише для додатних, але й для будь-яких дійсних чисел a і b.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ опукла вгору на відрізку $[a,b]$, то для будь-яких точок x_1, x_2, …, x_n з цього відрізка справджується ***нерівність Єнсена*** $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\ge$ $\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$. Вона доводиться методом математичної індукції аналогічно до доведення нерівності Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним. Зупинятися на цьому доведенні не будемо. Вкажемо тільки, що для опуклої вниз функції справедлива протилежна нерівність. Як приклад на застосування нерівності Єнсена розглянемо таку задачу.

Задача 13.27. (10-11). Якщо A, B, C – кути трикутника, то $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3}{2}\sqrt{3}$. Довести це.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \sin x$ на відрізку $[0;\pi]$ опукла вгору (доведіть це), то за нерівністю Єнсена маємо:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси просто дістаємо потрібну нерівність.

А тепер ще раз повернемося до нерівності Коші-Буняковського (див. задачу 13.18). Якщо розглянути вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і позначити через $(\vec{a}, \vec{b})$ їх скалярний добуток, тобто число $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, а через $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ – їх довжини $\left(|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x} \cdot \vec{x})}\right)$ то ця нерівність може бути записана у вигляді $|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Така формула запису нерівності Коші-Буняковського дає змогу застосовувати вектори для доведення нерівностей.

Задача 13.28. (10-11). Довести, що нерівність
$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \le 12$ виконується при всіх значеннях a, для яких визначена її ліва частина.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{x} = (1{,}1{,}1)$ та $\vec{y} = (\sqrt{a+1}, \sqrt{2a-3}, \sqrt{50-a})$. Тоді
$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-a} = (\vec{x}, \vec{y}) \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a+1+2a-3+50-3a} = \ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12$.

А тепер дещо складніший приклад, у якому нерівність $(\vec{x}, \vec{y}) \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ доводиться застосовувати двічі.

Задача 13.29. (10-11). Для довільних дійсних чисел a, b, c довести нерівность

$$abc^2 + bca^2 + cab^2 \le a^4 + b^4 + c^4.$$

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{x} = (ac; ba; cb)$ та $\vec{y} = (bc; ca; ab)$. Тоді

$$abc^2 + bca^2 + cab^2 = (\vec{x}, \vec{y}) \le a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2.$$

Розглянемо тепер вектори $\vec{x}_1 = (a^2; b^2; c^2)$ та $\vec{y}_1 = (c^2; a^2; b^2)$. Тоді аналогічно одержимо:

$$a^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1) \le |\vec{x}_1| \cdot |\vec{y}_1| = a^4 + b^4 + c^4,$$

звідки і випливає необхідна нерівність.

Пропонуємо читачам розв'язати задачу також методом однаково впорядкованих послідовностей і порівняти обидва ці розв'язки. Як зразок дивись розв'язання задачі 13.23.

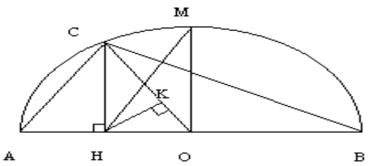
Зауважимо, що нерівність Коші-Буняковського перетворюється в рівність лише при умові, що для всіх k справедливі рівності $a_kx_0 = b_k$ або $b_kx_0 = a_k$. Для векторів ця умова рівносильна їх колінеарності. При цьому рівність $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ можлива лише при умові, що такі вектори ще й однаково напрямлені. Цей факт дає змогу використовувати скалярний добуток векторів також для розв'язування деяких рівнянь та їх систем.

Задача 13.30. (10-11). Розв'язати рівняння

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

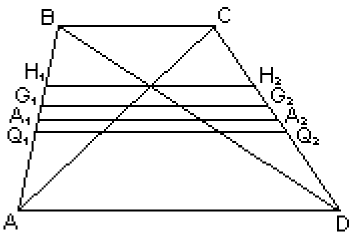
Розв'язання. Нехай $\vec{a}=(x;1)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\right)$. Тоді $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=(\vec{a},\vec{b})\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\sqrt{x^2+1}$. Оскільки рівність можлива лише при умові однакової напрямленості векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то з цього приходимо до співвідношення $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}$. Звідси одержуємо $1+x=x^2(3-x)$, або $x^3-3x^2+x+1=0$, причому $0<x\le 3$. Розкладаючи ліву частину одержаного рівняння на множники, маємо $(x-1)(x^2-2x-1)=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1-\sqrt{2}$. Зрозуміло, що корінь $x_3<0$ є стороннім.

Геометричні ілюстрації можна використовувати і при аналізі класичних нерівностей. Доведемо, наприклад, з допомогою геометричних міркувань нерівності $C_{-1}\le G\le C_1\le C_2$ для двох додатних



Мал.18

чисел a та b. Побудуємо півколо з центром O і діаметром $AB=a+b$ (див. мал. 18). Нехай $AH=a$, $BH=b$, $AO=OB$, $CH\perp AB$, $MO\perp AB$, $HK\perp CO$ (точки M та C лежать на півколі, а точка K – на відрізку CO) Тоді $\angle ACB=90^\circ$, $CH=\sqrt{ab}$, $MO=\frac{a+b}{2}$, $HO=\frac{|b-a|}{2}$. А тому $HM=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. З прямокутного трикутника CHO знаходимо $CK=\frac{CH^2}{CO}=\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Зрозуміло, що $CK\le CH\le MO\le MH$, а це рівносильно нерівностям, які необхідно довести. При $a=b$ усі чотири відрізки CK, CH, MO, MH співпадають, а нерівності перетворюються в рівності.



Мал.19

Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати ще й таку інтерпретацію доведених тут нерівностей (див. мал. 19).

У трапеції з основами a та b проведено чотири відрізки, паралельні основам:

$H_1H_2 = C_{-1}$ – проходить через точку перетину діагоналей,

$G_1G_2 = C_0$ – ділить трапецію на дві подібні трапеції,

$A_1A_2 = C_1$ – середня лінія трапеції,

$Q_1Q_2 = C_2$ – ділить площу трапеції пополам.

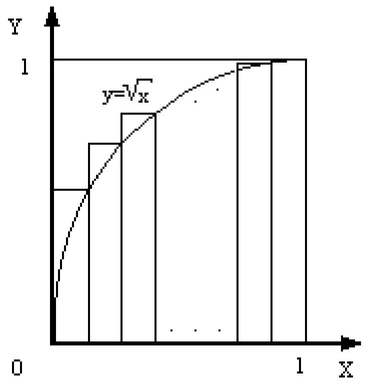
Нагадаємо принагідно і про геометричні міркування, які ми застосували при розв'язуванні задачі 9.34. З їх допомогою можна довести справедливість для додатних чисел a, b, c нерівності

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}\ .$$

Важливим геометричним засобом для доведення нерівностей є поняття площі. Ось характерний приклад.

Задача 13.31. (10-11). Довести, що при будь-якому натуральному n виконується нерівність

$$0<\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}-\frac{2}{3}\le\frac{1}{n}.$$



Мал.20

Розв'язання. Розглянемо на відрізку $[0;1]$ функцію $y=\sqrt{x}$. Розіб'ємо цей відрізок на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{1}{n}$. Тоді $\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n}y\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n}y\left(\frac{2}{n}\right)$, …, $\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n}y\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{n}y(1)$. Отже, сума $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ дорівнює сумі площ виділених на малюнку 20 прямокутників, основи яких дорівнюють $\frac{1}{n}$. З допомогою інтегрального числення можна встановити, що площа фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$ та $x=1$, дорівнює $\frac{2}{3}$. Звідси безпосередньо випливає справедливість лівої частини нерівності. Оскільки далі проекції на вісь Oy тих криволінійних трикутників, які знаходяться вище параболи $y=\sqrt{x}$, не перетинаються, то їх загальна площа не перевищує площі одного прямокутника з основою $\frac{1}{n}$ та висотою 1. Звідси випливає справедливість другої частини нерівності.

Зауважимо, що, скориставшись опуклістю вгору функції $y=\sqrt{x}$, можна було б довести більш сильну нерівність, замінивши в правій частині нерівності $\frac{1}{n}$ на $\frac{1}{2n}$. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

. Ми ж завершимо цей параграф цікавим прикладом на використання тригонометричних міркувань.

Задача 13.32. (10-11). Числа *a, b, c, d* задовольняють умовам $a^2+b^2=c^2+d^2=1$. Доведіть, що $ac+bd\le 1$.

Розв'язання. Нехай $a=\cos\alpha$, $c=\cos\beta$. Тоді $b=\sin\alpha$, $d=\sin\beta$. А отже, $ac+bd=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)\le 1$.

Вправи до § 13

1. (9-10). Доведіть, що $\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\ldots+\frac{1}{2002}<\frac{3}{4}$.
2. (9-10). Доведіть, що для всіх натуральних n виконуються нерівності: а) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$;

   б) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2$.
3. (9-10). Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівності:

   а) $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge a+b+c$;

   б) $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.
4. (10-11). Доведіть, що для всіх дійсних x справедлива нерівність $x^2\sin x+x\cos x+x^2+\frac{1}{2}>0$.
5. (10-11). Використовуючи нерівності між середніми арифметичними та середніми геометричними додатних чисел, доведіть нерівність $\sqrt{n}\le\sqrt[n]{n!}\le\frac{n+1}{2}$.
6. (8-9). Доведіть, що якщо $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{10}$, то $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10}$.
7. (10-11). Доведіть, що для всіх дійсних x: а) $e^x\ge 1+x$; б) $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$.
8. (10-11). Доведіть, що для дійсних чисел $x\ge 0$ та натуральних чисел k, m, n виконується нерівність $(1+x)^k+(1+x)^m+(1+x)^n\ge 6\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{kmn}$.
9. (10-11). Користуючись методом математичної індукції, доведіть нерівність Єнсена: а) для $n=2^k$; б) для довільних $n\ge 2$.
10. (10-11). Нехай $a_1,a_2,\ldots,a_{2003}$ – додатні числа; $b_1,b_2,\ldots,b_{2003}$ – їх довільна перестановка. Користуючись принципом крайнього, доведіть нерівність $1<\frac{a_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_{2003}}{a_{2003}+b_{2003}}<2002$.
11. (10-11). Доведіть, що якщо $a+b+c=1$, то $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\le\sqrt{15}$ для всіх допустимих значень a, b, c.
12. (10-11). Доведіть, що при $n>1$ справедливі нерівності:

    а) $x^n>1+n(x-1)$, якщо $x>1$; б) $x^n<\frac{1}{n(1-x)}$, якщо $0<x<1$.
13. (10-11). Доведіть нерівність $\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ge\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}$.
14. (10-11). Доведіть, що для чисел a, b, c з інтервалу $(0;1)$ хоч один із добутків $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ не більший за 0,25.
15. (10-11). Користуючись геометричними інтерпретаціями, доведіть, що:

    а) $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$ для x, y, z з інтервалу $(0;1)$;

    б) $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ для додатних a, b, c.