ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ ПОХІДНИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Буртняк І.В.

Д.е.н., професор кафедри економічної кібернетики,

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

м. Івано-Франківськ, Україна

Малицька Г.П.

К.фіз-мат.н., доцент кафедри математичного і функціонального аналізу,

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

м. Івано-Франківськ, Україна

Моделювання та прогнозування динаміки цін фінансових інструментів є важливим елементом інвестиційної діяльності. Оскільки вони володіють високим рівнем фінансового важелю і виконання зобов'язань за ними здійснюється у майбутньому. Ціни на деривативи мають тенденцію до змін і передбачити їх поведінку стає все складніше. За допомогою похідних фінансових інструментів здійснюються різноманітні операції з фінансовими продуктами, придатними для купівлі-продажу [1]. Ефективність прийняття інвестиційних рішень під час діяльності на фондовому ринку України є головним чинником зацікавленості в ньому інвесторів. Для успішних фінансових результатів діяльності учасникам ринку цінних паперів необхідно добре орієнтуватися в процесах ціноутворення деривативів. Операції з похідними цінними паперами займають важливе місце у фінансовій діяльності фондового ринку бо кожному учаснику потрібно хеджувати ризики, що отримати додатковий прибуток на основі спекуляцій на фондовому ринку [2]. Тому деривативи є одним із основних інструментів ринку цінних паперів. Важливим завданням є дослідження стану і динаміки вітчизняного фондового ринку в тісному взаємозв'язку з фондовими ринками інших країн, аналіз волатильності фінансових інструментів з метою підвищення ефективності інвестиційних операцій. Використання розвинення за допомогою рядів залежить від структури моделі, зокрема від властивостей функції які використовуються в моделі та від можливостей моделі утримувати стійкість при зміні часу.

У нашій роботі розглянуто моделі без дефолту процесу дифузії з інерцією, коефіцієнти яких залежать від змінних (t, x, y) і для знаходження цін деривативів використовуємо розвинення у ряди Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Випадкові процеси, які описуються рівнянням дифузії з інерцією широко використовуються в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Найчастіше такі процеси відбуваються на фінансових ринках при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийняття управлінських стратегічних рішень менеджерами [3]. Ми розглядаємо ринок є без арбітражу, нульових відсоткових ставок і без дивідендів. Без втрати загальності ці міркування можуть бути поширені на детерміністичні відсоткові ставки. Ми розглядаємо ймовірнісний простір з мартингальною мірою Ξ, з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ що задає історію ринку. Нехай актив S репрезентує такі явища як запаси, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. причому $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau>t\}}\, \mathrm{e}^{X_t}$, а процеси X_t та Y_t задаються такою системою рівнянь

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t, Y_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t)dB_t, X_0 = x \in R,$$

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(t, X_t, Y_t)dt, Y_0 = y \in\ R, \qquad (1)$$

де τ це час зупинки, $\tau = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t r(s, X_s, Y_s)ds \geq \varepsilon\right\}$, з експоненціальним розподілом ε, що не залежить від X, функція дрейфу μ має вигляд

$$\mu(t, X_t, Y_t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t, Y_t) + r(t, X_t, Y_t),$$

Нехай U не арбітражна ціна європейського опціону, яка в момент часу T є виграшем $\mathcal{K}(S_T)$, що $U_t = K + \mathbb{I}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}\ \left\{\mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} r(s,X_s,Y_s)ds}(k(X_t) - \mathrm{K})|X_t, Y_t\right\}, t < T.$

$K = \mathcal{K}(0), k(x) = \mathcal{K}(e^x)$. Для знаходження ціни європейського опціону, потрібно обчислити математичне сподівання від $e^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} r(s,X_s,Y_s)ds}(\mathrm{k}(X_t) - \mathrm{K})$ зокрема

$$w(t, x, y) = \mathbb{E}\ \left\{e^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} r(s,X_s,Y_s)ds}(\mathrm{k}(X_t) - \mathrm{K})|X_t = x, Y_t = y\right\} \qquad (2)$$

Функція w задовольняє рівняння Колмогорова дифузії з інерцією [4]

$$-\partial_t\big(x\partial_y + \mathrm{P}\big)w = 0,\ \ w(T,x,y)\big|_{\ \ t=T} = k(x,y), \tag{3}$$

де оператор P має вигляд

$$P = a(t,x,y)(\partial_x^2 - \partial_x) + r(t,x,y)(\partial_x - 1) \tag{4}$$

де $a(t,x,y) \coloneqq \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,y)$.

Нехай $(\bar{x},\bar{y})\in \mathrm{R}^2$ фіксована точка тоді для будь-якої аналітичної функції $k = k(t,x,y)$ можна записати розвинення в ряд Тейлора

$$k(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} k_{n-l,l}(t)\,(x-\bar{x})^{n-l}(y-\bar{y})^{l}, \qquad k_{n-l,l}(t) \coloneqq \frac{1}{(n-l)!\,l!}\partial_x^{n-l}\partial_y^{l}k(t,\bar{x},\bar{y}).$$

Застосувавши вище викладені міркування до коефіцієнтів a та $,r$ отримуємо, що формально оператор P в (4) має вигляд

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\,, \qquad P_n\!: = \sum_{l=0}^{n}(x-\bar{x})^{n-l}(y-\bar{y})^{l}\,P_{n-l,l}, \tag{5}$$

де $\{P_{n-l,l}\}$ є операторами виду $P_{n-l,l} \coloneqq a_{n-l,l}(t)(\partial_x^2 - \partial_x) + r_{n-l,l}(t)(\partial_x - 1)$.

Оператор P параболічного типу по x та має вироджену параболічність по y (бо немає похідної другого порядку по y), що як правило діє у фінансових просторах, тобто на фінансових ринках. На основі розвинення в ряд Тейлора для P функція ціноутворення w має вигляд [5]

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\,, \tag{6}$$

Підставляючи (5) та (6) в (3), отримуємо такі задач Коші для рівнянь дифузії з інерцією

$$\big(-\partial_t + x\partial_y + P_0\big)w_0 = 0, \qquad w_0(T,x,y) = k(x,y), \tag{7}$$

$$\big(-\partial_t + x\partial_y + P_0\big)w_n = -\sum_{k=1}^{n} P_k w_{n-k}\,,\ \ w_n(T,x,y) = 0, \tag{8}$$

Ми побудували фундаментальний розв’язок однорідної задачі Коші (7) і використавши властивості фундаментального розв’язку (7) знайдемо w_n $\forall\, n$ як розв’язок задачі (8) при цьому ми використовуємо тільки властивості функції розподілу для рівняння дифузії з інерцією які виражаються класичними рівняннями Чепмена-Колмогорова-Планка та принципу Дюамеля застосованого до рівнянь в частинних похідних [5].

$$w_n(t,x,y) = e^{\int_t^T r_0(s)ds} \int_{R^2} \mathcal{E}_0(t,x,y;T,\xi,\eta)k(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{9}$$

де $\mathcal{E}_0(t,x,y;T,\xi,\eta)$ є двомірною гаусівською щільністю процесу дифузії з інерцією.

Якщо коефіцієнти $a(t,x,y), r(t,x,y)$ мають обмежені і неперервні частинні похідні по x і y до m -го порядку включно та задовольняють умову Ліпшиця то правильне асимптотичне наближення

$$w(t,x,y) = \sum_{n=1}^{m} w_n(t,x,y) + O\left((T-t)^{\frac{m+1}{2}}\right), \qquad \forall m \in N, \qquad t \to T^- \ .$$

На прикладі виродженої моделі Хестона, що описує процес динаміки ціноутворення та розвиток імплікованої волатильності, при початковому наближенні функцією ціни Блека-Шоулза проведено обчислення волатильності та дохідності за другим наближенням Тейлора та методом найменших квадратів. Отримані результати майже ідентичні, що свідчить про високу точність наближення.

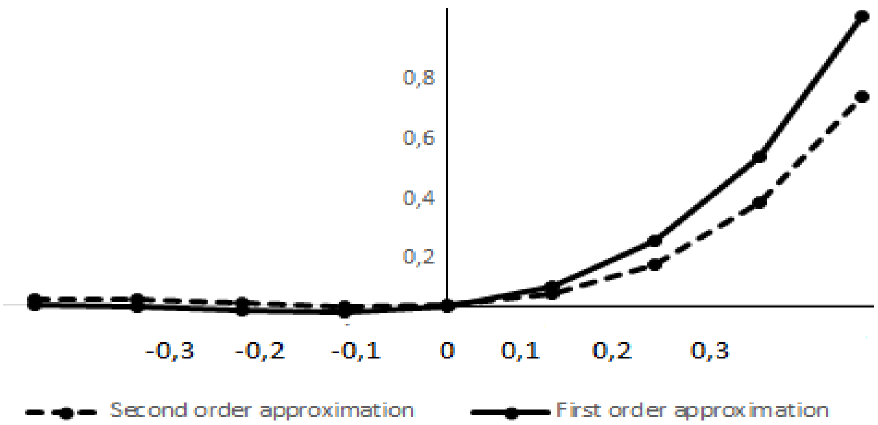

Рис. 1: Крива дохідності аппроксимації першого та другого порядку отримані за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона. $e^y = 0{,}249^2, T = 0.125, t = 0$.

Знання наближеної ціни та імплікованої волатильності на кожному кроці в фіксований момент часу дає можливість позбутися спекулятивних змін у ціноутворенні.

Висновки. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від x, тоді розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від t і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку щільності розподілу випадкового процесу.

Впроваджено підхід до ціноутворення похідних цінних паперів та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора коли стохастичний процес описується рівнянням дифузії з інерцією (виродженим параболічним рівнянням). Для виродженого параболічного рівняння знаходження наближеної ціни опціонів є достатньо простим оскільки використовує тільки оцінки похідних щільності розподілу дифузії з інерцією.Покрокове знаходження зміни дохідності і волатильності при відповідному аналізі дає можливість приймати обгрунтовані стратегічні рішення трейдерами на фінансових ринках.

Література

1. Aboulaich, R., Baghery, F. & A. Jrai (2013) Option Pricing for a Stochastic Volatility Jump-Diffusion Model, International Journal of Mathematics and Statistics, 13 (1), 1 - 19.
2. Andersen, L., (2011), "Option pricing with quadratic volatility: a revisit", Finance and Stochastics, Volume 15, Issue 2, pp. 191–219
3. Carr, P. & V. Linetsky (2006). A jump to default extended CEV model: An application of Bessel processes. Finance and Stochastics 10 (3), 303–330.
4. Corielli, F., Foschi, P. and Pascucci, A., (2010), "Parametrix approximation of diffusion transition densities", SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 1, pp. 833–867.
5. Forde, M., Jacquier, A. and Lee, R., (2012), "The small-time smile and term structure of implied volatility under the heston model", SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 3, Issue 1, pp. 690–708.