Буртняк І.В., Малицька Г. П.

ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ ДЕРИВАТИВІВ

В статті здійснено дослідження ціноутворення та обчислення волатильності європейських опціонів із загальною локально-стохастичною волатильністю за допомогою методики використання рядів Тейлора для вироджених дифузійних процесів, зокрема для дифузії з інерцією. Застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язку задачі Коші диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією, наближення волатильності є повністю явними, тобто вони не вимагають спеціальних функцій. Таким чином, наближену вартість опціонів можна обчислювати так само ефективно, як і ціну Блека-Шоулса для похідних цінних паперів.

Ключові слова: Фондовий ринок, ціноутворення деривативів, опціони, ряди Тейлора, локальна волатильність.

Burtnyak I.V., Malytska A.P.

APPLICATION OF TAYLOR SERIES FOR DERIVATIVES PRICING

The paper investigates pricing and volatility calculation of European options with general local-stochastic volatility using the Taylor series technique for degenerate diffusion processes, in particular for inertia diffusion. The application of this idea requires new approaches caused by the difficulties of degeneration. The approximation of the price is obtained by solving the Cauchy problem of differential equations in partial derivatives of inertia diffusion, the volatility approximations are quite explicit, that is, they do not require special functions. Thus, the approximate value of the options can be calculated as effectively as the Black-Scholes price for derivative securities.

Keywords: Stock market, derivatives pricing, options, Taylor series, local volatility.

1. Вступ. Моделювання та прогнозування динаміки цін фінансових інструментів є важливим елементом інвестиційної діяльності. Оскільки вони володіють високим рівнем фінансового важелю і виконання зобов'язань за ними здійснюється у майбутньому. Ціни на деривативи мають тенденцію до змін і передбачити їх поведінку стає все складніше. За допомогою похідних фінансових інструментів здійснюються різноманітні операції з фінансовими продуктами, придатними для купівлі-продажу [1]. Ефективність прийняття інвестиційних рішень під час діяльності на фондовому ринку України є головним чинником зацікавленості в ньому інвесторів. Для успішних фінансових результатів діяльності учасникам ринку цінних паперів необхідно добре орієнтуватися в процесах ціноутворення деривативів. Операції з похідними цінними паперами займають важливе місце у фінансовій діяльності фондового ринку бо кожному учаснику потрібно хеджувати ризики, що отримати додатковий прибуток на основі спекуляцій на фондовому ринку [2]. Тому деривативи є одним із основних інструментів ринку цінних паперів. Важливим завданням є дослідження стану і динаміки вітчизняного фондового ринку в тісному взаємозв'язку з фондовими ринками інших країн, аналіз волатильності фінансових інструментів з метою підвищення ефективності інвестиційних операцій. В даний час розроблено багато підходів до обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу, за допомогою моделей CEV [3-4], але застосування цих моделей вимагає використання спеціальних функцій та чисельного інтегрування складних функцій. Це означає що можуть бути великі похибки в обчисленнях, але при розгляді часових залежностей значна частина моделей стає нестійкою. Для безпосереднього обчислення потрібні інші методи знаходження ціни деривативів [5]. Використання розвинення за допомогою рядів залежить від структури моделі, зокрема від властивостей функції які використовуються в моделі та від можливостей моделі утримувати стійкість при зміні часу.

У нашій роботі розглянуто моделі без дефолту процесу дифузії з інерцією, коефіцієнти яких залежать від змінних (t, x, y) і для знаходження цін деривативів використовуємо розвинення у ряди Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Зокрема в працях [6] кореляційні матриці є невироджені, а в нашій роботі є виродженими, тому застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження.

Метою статті є впровадження єдиного підходу до ціноутворення та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора. Тому наближену вартість опціонів можна обчислювати так само ефективно, як і ціну Блека-Шоулса [7] для похідних цінних паперів

Постановка завдання. Ми розглядаємо ринок є без арбітражу, нульових відсоткових ставок і без дивідендів. Без втрати загальності ці міркування можуть бути поширені на детерміністичні відсоткові ставки. Ми розглядаємо ймовірнісний простір з мартингальною мірою Ξ, з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ що задає історію ринку. Нехай актив S репрезентує такі явища як запаси, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. причому $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \mathrm{e}^{X_t}$, а процеси X_t та Y_t задаються такою системою рівнянь

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t, Y_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t)dB_t, X_0 = x \in R,$$
$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(t, X_t, Y_t)dt, Y_0 = y \in R, \quad (1)$$

де τ це час зупинки, $\tau = \inf\left\{t \geq 0 \colon \int_0^t r(s, X_s, Y_s)ds \geq \varepsilon\right\}$, з експоненціальним розподілом ε, що не залежить від X, функція дрейфу μ має вигляд

$$\mu(t, X_t, Y_t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t, Y_t) + r(t, X_t, Y_t),$$

Нехай U не арбітражна ціна європейського опціону, яка в момент часу T є виграшем $\mathcal{K}(S_T)$. [8], що

$$U_t = K + \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}\mathbb{E}\left\{\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s, X_s, Y_s)ds}(k(X_t) - \mathrm{K})|X_t, Y_t\right\}, t < T.$$

$K = \mathcal{K}(0), k(x) = \mathcal{K}(e^x)$. Для знаходження ціни європейського опціону, потрібно обчислити математичне сподівання від $e^{-\int_t^T r(s, X_s, Y_s)ds}(\mathrm{k}(X_t) - \mathrm{K})$ зокрема

$$w(t, x, y) = \mathbb{E}\left\{e^{-\int_t^T r(s, X_s, Y_s)ds}(\mathrm{k}(X_t) - \mathrm{K})|X_t = x, Y_t = y\right\} \quad (2)$$

Функція $w(t, x, y)$ задовольняє рівняння Колмогорова дифузії з інерцією

$$-\partial_t\left(x\partial_y + \mathrm{P}\right)w = 0, \; w(T, x, y)|_{t=T} = k(x, y), \quad (3)$$

де оператор P має вигляд

$$P = a(t,x,y)(\partial_x^2 - \partial_x) + r(t,x,y)(\partial_x - 1) \tag{4}$$

де $a(t,x,y)$ дорівнюють

$$a(t,x,y) := \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,y).$$

Якщо розглядати детерміновані відсоткові ставки то потрібно обчислити математичне сподівання такого вигляду

$$\widetilde{w}(t,\tilde{x},y) = \mathbb{E}\left\{\mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} r(s,\tilde{X}_s,Y_s)ds}\big(\mathrm{k}(\tilde{X}_t) - \mathrm{K}\big)\middle|\tilde{X}_t = \tilde{x}, Y_t = y\right\},$$

$d\tilde{X}_t = dX_t + \gamma(t)dt.$

Безпоседньою перевіркою встановлюється, що $w(t,x(t,\tilde{x}),y)$, задовольняє (3).

Наближений розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії з інерцією (3) отримано на основі адаптації ідей [9] які застосовуються до невироджених дифузійних процесів. Ми розглядаємо вироджені дифузійні процеси з інерцією на які поширюємо сингулярні інтегро-диференціальні оператори ціноутворення типу Леві. Ми впровадили єдиний підхід до ціноутворення та оцінки імплікованої волатильності за допомогою розвинення в ряд Тейлора. Вважаємо що коефіцієнти a та r є нескінчено диференційовні функції змінних (x,y), неперервні по t і обмежені $\forall(t,x,y) \in [0,T] \times R^2$

Нехай $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{R}^2$ фіксована точка тоді для будь-якої аналітичної функції $h = h(t,x,y)$ можна записати розвинення в ряд Тейлора

$$h(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} h_{n-l,l}(t)\,(x-\bar{x})^{n-l}(y-\bar{y})^l,$$

$$h_{n-l,l}(t) := \frac{1}{(n-l)!\,l!}\partial_x^{n-l}\partial_y^l h(t,\bar{x},\bar{y}).$$

Застосувавши вище викладені міркування до коефіцієнтів a та $,\gamma$ отримуємо, що формально оператор P в (4) має вигляд

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\,, \qquad P_n := \sum_{l=0}^{n}(x-\bar{x})^{n-l}(y-\bar{y})^l\,P_{n-l,l}, \tag{5}$$

де $\{P_{n-l,l}\}$ є диференціальні оператори виду

$$P_{n-l,l} := a_{n-l,l}(t)(\partial_x^2 - \partial_x) + r_{n-l,l}(t)(\partial_x - 1).$$

Оператор P параболічного типу по x та має вироджену параболічність по y (бо немає похідної другого порядку по y), що як правило діє у фінансових просторах, тобто на фінансових ринках. На основі розвинення в ряд Тейлора для P функція ціноутворення w має вигляд [10]

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \tag{6}$$

Результати. Підставляючи (5) та (6) в (3), отримуємо такі задач Коші для рівнянь дифузії з інерцією

$$\left(-\partial_t + x\partial_y + P_0\right)w_0 = 0, \qquad w_0(T, x, y) = k(x, y), \tag{7}$$

$$\left(-\partial_t + x\partial_y + P_0\right)w_n = -\sum_{k=1}^{n} P_k w_{n-k}, \;\; w_n(T, x, y) = 0, \tag{8}$$

Ми побудуємо фундаментальний розв'язок однорідної задачі Коші (7) і використавши властивості фундаментального розв'язку (7) знайдемо $w_n \;\forall\, n$ як розв'язок задачі (8) при цьому ми використовуємо тільки властивості функції розподілу для рівняння дифузії з інерцією які виражаються класичними рівняннями Чепмена-Колмогорова-Планка та принципу Дюамеля застосованого до рівнянь в частинних похідних.

Розглянемо задачу Коші (7). Оператор P_0 - це вироджений параболічний оператор дифузії з інерцією, або оператор Колмогорова з залежними від часу t коефіцієнтами. Таким чином, розв'язок w_0 має вигляд

$$w_0(t, x, y) = e^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} r_0(s)ds} \int_{R^2} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \eta) k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{9}$$

де $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \eta)$ є двомірною гаусівською щільністю процесу дифузії з інерцією.

Знайдемо $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \eta)$ для цього розв'яжемо задачу Коші для рівняння дифузії з інерцією із змінними коефіцієнтами залежними від t

$$\partial_t w - x\partial_y w = a_0(t)(\partial_x^2 w - \partial_x w) + r_0(t)(\partial_x - 1)u \tag{10}$$

$$w(t, x, y)|_{t=T} = k(x, y). \tag{11}$$

Застосуємо перетворення Фур'є для розв'язання задачі Коші (10),(11) вважаючи що $w, w_t, w_x, w_{x^2}, w_y$ абсолютно інтегровні по (x, y).

$$F\big(w(t,x,y)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} \exp\{ix\xi + i\eta y\}\, u(t,x,y)dxdy = v(t,\xi,\eta),$$

$$(\xi,\eta) \in R^2, 0 < t \le T.$$

Оскільки

$$F\big(\partial_t w(t,x,y)\big) = \partial_t v(t,\xi,\eta),$$

$$F\left(x\partial_y w(t,x,y)\right) = -\eta\partial_\xi v(t,\xi,\eta),$$

$$F\big(\partial_x w(t,x,y)\big) = -i\xi v(t,\xi,\eta),$$

$$F\big(\partial_x^2 w(t,x,y)\big) = -\xi^2 v(t,\xi,\eta),$$

то будемо мати

$$\left(\partial_t + \eta\partial_\xi\right)v(t,\xi,\eta) = \{a_0(t)[(-i\xi)^2 + i\xi] + r_0(t) - i\xi - 1\}v(t,\xi,\eta), \quad (12)$$

$$v(t,\xi,\eta)|_{t=T} = \tilde{k}(\xi,\eta). \quad (13)$$

де $\tilde{k}(\xi,\eta) = F\big(k(x,y)\big)$.

Задача (10), (11) звелася до (12), (13) це задача Коші для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого [11].

Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$dt = \frac{d\xi}{\eta} = \frac{dv}{v\big(-\xi^2 a_0(t) + i\xi a_0(t) - i\xi r_0(t) - r_0(t)\big)}.$$

Рівняння характеристик

$$dt = \frac{d\xi}{\eta};\ \ dt = \frac{dv}{v\left(-\xi^2 a_0(t) + i\xi\big(a_0(t) - r_0(t)\big) - r_0(t)\right)}.$$

Звідси маємо перший інтеграл $\xi = \eta t + C_1$; із

$$\frac{dv}{v} = \big(-\xi^2 a_0(t) + i\xi a_0(t) - i\xi r_0(t) - r_0(t)\big)dt,$$

отримаємо

$$\ln v = \int_t^T [(-\xi^2 + i\xi)a_0(\beta) + r_0(\beta)(-i\xi - 1)]\, d\beta + \ln C_2, \qquad C_2 > 0,$$

враховуючи що $\xi = \eta t + C_1$, маємо

$$v(t,\eta t + \mathrm{C}_1,\eta) = C_2 \exp\left\{\int_t^T \{[-(\eta\beta + C_1)^2 + i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) +\right.$$

$$\left. r_0(\beta)(-i(\eta\beta + C_1) - 1)\right\} d\beta\},$$

при

$$t = T, \quad v(T,\eta T + \mathrm{C}_1,\eta) = \tilde{k}(\eta T + \mathrm{C}_1,\eta) = C_2, \quad C_2 = \tilde{k}(\eta T + \mathrm{C}_1,\eta).$$

$$v(t,\eta t + \mathrm{C}_1,\eta) = \tilde{k}(\eta T + \mathrm{C}_1,\eta) \exp\left\{\int_t^T \{[-(\eta\beta + C_1)^2 + i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) +\right.$$

$$\left. r_0(\beta)(-i(\eta\beta + C_1) - 1)\right\} d\beta\},$$

оскільки $C_1 = \xi - \eta t$, то

$$v(t,\xi,\eta) = \tilde{k}(\eta(T-t) + \xi,\eta) \exp\left\{\int_t^T \{[-(\eta(\beta - t) + \xi)^2 + i(\eta(\beta - t) +\right.$$

$$\left. \xi)]a_0(\beta) + r_0(\beta)(-i(\beta - t)\eta - \xi i - 1)\right\} d\beta\},$$

Візьмемо обернене перетворення Фур'є від $v(t,\xi,\eta)$

$$F^{-1}\big(v(t,\xi,\eta)\big) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} \exp\{-ix\xi - i\eta y\}\, v(t,\xi,\eta) d\xi d\eta = w(t,x,y),$$

$$w(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} \tilde{k}(\xi + \eta(T-t),\eta) \exp\left\{\int_t^T \{[-(\eta(\beta - t) + \xi)^2 +\right.$$

$$i(\eta(\beta - t) + \xi)]a_0(\beta) + r_0(\beta)[-i(\beta - t)\eta - \xi i - 1]\} d\beta\, \{-ix\xi - i\eta y\}\, d\xi d\eta. \tag{14}$$

В (14) зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \xi + \eta(T-t) = \gamma, \quad \xi = \gamma - \eta(T-t), \\ \qquad\qquad \eta = \eta, \end{cases}$$

тоді

$$w(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} \tilde{k}(\gamma,\eta) \exp\left\{-ix\big(\gamma - \eta(T-t)\big) - iy\eta + \int_t^T \{[-(\eta(\beta - T) +\right.$$

$$\gamma)^2 + i\eta(\beta - T) + ir]a_0(\beta) + r_0(\beta)[-i\eta(\beta - T) - ir - 1]\} d\beta\} d\gamma d\eta \tag{15}$$

підставивши значення $\tilde{k}(\gamma,\eta) = Fk(x,y)$ в (15) одержимо

$$w(t,x,y) = \int_{R^2} k(x',y')\, e^{\int_t^T r_0(\beta) d\beta} \mathcal{E}_0(t,x,y;T,x',y') dx' dy'. \tag{16}$$

де $\mathcal{E}_0(t,x,y;T,\xi,\eta)$ щільність двовимірного процесу дифузії з інерцією, із коефіцієнтами залежними від часової змінної.

$\mathcal{E}_0(t,x,y;T,x',y') = (4\pi c^*)^{-1}\left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\left(4\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-1}\left(x' -\right.\right.$

$\left.x - \int_t^T\big(a_0(\beta)-r_0(\beta)\big)d\beta\right)^2 - (2c^*)^{-2}\left[y' - y + x(T-t) - \left(x' - x -\right.\right.$

$\left.\int_t^T\big(a_0(\beta)-r_0(\beta)\big)d\beta\right)\int_t^T(\beta-T)a_0(\beta)d\beta\left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-1} - \int_t^T(\beta -$

$\left.\left.T)\big(a_0(\beta)-r_0(\beta)\big)d\beta\right]^2\right\}, 0 \le t < T,\ (x,y)\in R^2,\ (x',y')\in R^2.$

(t,x,y)-початкова точка, (T,x',y')- кінцева точка (поточна),

$$c^{*2} = \int_t^T(\beta-T)^2 a_0(\beta)d\beta - \left(\int_t^T(\beta-T)a_0(\beta)d\beta\right)^2\left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-1}.$$

Спершу ми розв'яжемо задачу Коші (8) при $n=1$ з виплатою $k=\sigma(X,Y)$, $w(t,x,y)=\mathcal{E}_0(t,x,y;T,X,Y)$. Ми маємо

$w_1(t,x,y)e^{\int_t^T r_0(s)ds} = \int_t^{\mathrm{T}} ds\int_{R^2} d\xi d\eta\,\mathcal{E}_0(t,x,y;s,\xi,\eta)P_1\,\mathcal{E}_0(s,\xi,\eta;T,X,Y) = \int_t^{\mathrm{T}} dsB_1^{(x,y)}(t,s)\,\mathcal{E}_0(s,\xi,\eta;T,X,Y).$

Помножимо обидві сторони на $e^{\int_t^T r_0(s)ds}$ та використавши (9) маємо

$$w_1(t,x,y) = A_1\,w_0(t,x,y),\ \ A_1 := \int_t^{\mathrm{T}} dsB_1\ (t,s),$$

Методом математичної індукції використовуючи властивості фундаментального розв'язку одержимо

$w_n(t,x,y) = A_n\,w_0(t,x,y),\ \ A_n :=$
$\sum_{k=1}^n\int_t^T ds_1\ldots\int_{s_{n-1}}^T ds_n\ \ \sum_{i\in I_{n,k}} B_{i_1}(t,s_1)\big(B(t,s_2)+B(s_1,s_2,0)+(1+s_2-s_1)B(t,s_1,0)-B(t,s_2,0)\big)_{i_2}\ldots\big(B(t,s_n)+B(s_{n-1},s_n,0)+(1+s_{k-1}-s_k)B(t,s_{k-1},0)-B(t,s_k,0)\big)_{i_k},$

$$I_{n,k} = \{i=(i_1,\ldots i_k)\in N^k\ \ |i_1+\cdots+i_k=n\},\ \ 1\le k\le n,$$

$B_{i_k}(t,s) := B_{i_k}(t,s,x,y,\bar{x},\bar{y}),\ B_{i_k}(t,s)_{|(x,y)=(\bar{x},\bar{y})} = B(t,s,0),$

$$B_n(t,s) := \sum_{k=1}^n \mathcal{M}_{n-k,k}(t,s)P_{n-k,k}(s)\,,\qquad \mathcal{M}_{k,l} = \big(\mathcal{M}_1(t,s)\big)^k\big(\mathcal{M}_2(t,s)\big)^l,$$

де

$$M_1(t,s) := \left(x - X + \int_t^s \left(a_0\,(\beta) - r_0\,(\beta)\right) d\beta + 2\int_t^s a_0\,(\beta)\, d\beta\, \partial_x \right.$$
$$\left. + 2\left(\int_t^s (\beta - s) a_0\,(\beta)\, d\beta + (s-t)\int_t^s a_0\,(\beta)\, d\beta\right)\partial_y\right)^n,$$

$M_2(t,s) := \Big(y - Y - \int_t^s (\beta - s) a_0\,(\beta)\, d\beta \big(\int_t^s a_0\,(\beta)\, d\beta\big)^{-1} \int_t^s \big(a_0\,(\beta) - r_0\,(\beta)\big)\, d\beta + \int_t^s (\beta - s)\big(a_0\,(\beta) - r_0\,(\beta)\big)\, d\beta + 2\int_t^s (\beta - s) a_0\,(\beta)\, d\beta \partial_x + 2c^{*2}\partial_y + \Big(2\int_t^s (\beta - s) a_0\,(\beta)\, d\beta \big(\int_t^s a_0\,(\beta)\, d\beta\big)^{-1}\Big)\big(\int_t^s (\beta - s) a_0\,(\beta)\, d\beta + (s - t)\int_t^s a_0\,(\beta)\, d\beta\big)\partial_y 2c^{*2}\Big)^n,$

Результати асимптотичного наближення доведені в [3, 12]. Ці формули значно спрощуються коли коефіцієнти не залежать від часу

Якщо коефіцієнти $a(t,x,y), r(t,x,y)$ мають обмежені і неперервні частинні похідні по x і y до m -го порядку включно та задовольняють умову Ліпшиця то правильне асимптотичне наближення

$$w(t,x,y) = \sum_{n=1}^{m} w_n(t,x,y) + \mathcal{O}\left((T-t)^{\frac{m+1}{2}}\right), \qquad \forall m \in N, \qquad t \to T^- \ .$$

Висновки. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від x, тоді розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від t і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку. Впроваджено підхід до ціноутворення похідних цінних паперів та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора коли стохастичний процес описується рівнянням дифузії з інерцією (виродженим параболічним рівнянням). Для виродженого параболічного рівняння знаходження наближеної ціни опціонів є достатньо простим оскільки використовує тільки оцінки похідних щільності розподілу дифузії з інерцією.

References

1. Aboulaich, R., Baghery, F. & A. Jrai (2013) Option Pricing for a Stochastic Volatility Jump-Diffusion Model, International Journal of Mathematics and Statistics, 13 (1), 1 - 19.
2. Andersen, L., (2011), “Option pricing with quadratic volatility: a revisit”, Finance and Stochastics, Volume 15, Issue 2, pp. 191–219
3. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. Problems and Perspectives in Management, 2018, 16(1), 224-231. doi:10.21511/ppm.16(1).2018.22.
4. Burtnyak, I.V. Malytska A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. Carpathian Math. Publ. 2018, 10 (2), 273–287. doi:10.15330/cmp.10.2.273-287..
5. Carr, P. & V. Linetsky (2006). A jump to default extended CEV model: An application of Bessel processes. Finance and Stochastics 10 (3), 303–330.
6. Corielli, F., Foschi, P. and Pascucci, A., (2010), “Parametrix approximation of diffusion transition densities”, SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 1, pp. 833–867.
7. Forde, M., Jacquier, A. and Lee, R., (2012), “The small-time smile and term structure of implied volatility under the heston model”, SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 3, Issue 1, pp. 690–708.
8. Gatheral, J., Hsu, E. P., Laurence, P., Ouyang, C. and Wang, T.-H., (2012), “Asymptotics of implied volatility in local volatility models”,Mathematical Finance, Volume 22, Issue 4, pp. 591–620.
9. Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, Review of Financial Studies, 6 (2), 327 – 343. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.3204&rep=rep1&type=pdf
10. Jeanblanc, M., M. Yor, and M. Chesney (2009). Mathematical methods for financial markets. Springer Verlag.
11. Lorig, M. (2013). The exact smile of certain local volatility models. Quantitative Finance 13 (6), 897–905.
12. Lorig, M., Pagliarani, S. and Pascucci, A., (2013), “A Taylor series approach to pricing and implied vol for LSV models”, Working Paper available at ArXiv: http://arxiv.org/abs/1308.5019.