ЗМІСТ

Розділ І.
Вимірні множини та вимірні функції

1. Множини та операції над ними

Поняття множини є одним з основних понять у математиці. Воно настільки загальне, що не можна дати йому означення, яке не зводилось би до заміни слова «множина» його синонімом.

Як правило, множини позначають великими, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Якщо ж елемент a не належить множині A, то записують $a \notin A$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Якщо всі елементи множини A є також елементами множини B, то множина A називається *підмножиною* множини B, і записується $A \subset B$, або ж $B \supset A$. Якщо ж, крім $A \subset B$, має місце включення $B \subset A$, то множини A та B *рівні*: $A = B$.

Якщо A та $B-$ дві довільні множини, то їх *об'єднанням* називається множина $A \bigcup B$, яка складається з усіх елементів, які належать хоч одній з множин A та B:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Перетином множин A та B називається множина $A \bigcap B$, яка складається з усіх елементів, які входять у кожну з множин A та B:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Аналогічно визначаються об'єднання та перетини довільної кількості множин.

Різницею множин A та B називається множина $A \setminus B$, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Зокрема, якщо $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$.

У теорії міри важливу роль відіграє й *симетрична різниця* множин:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A),$$

яку ще можна записати у вигляді:

$$A \triangle B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Таким чином, симетрична різниця двох множин складається із всіх елементів їх об'єднання, які не належать перетину цих множин.

У багатьох задачах математики доводиться розглядати підмножини однієї і тієї ж множини S. Різницю $S \setminus A$ називають *доповненням* множини A і позначають CA, або $\overline{A}$.

Для об'єднань та перетинів довільної кількості множин A_α *справедливі наступні рівності*:

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha} \quad \text{та} \quad \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Ці рівності лежать в основі так званого ***принципу двоїстості:*** *з будь якої теореми, яка стосується підмножин деякої фіксованої множини, можна отримати двоїсту теорему, замінивши всі множини їх доповненнями, об'єднання множин – перетинами, а перетини – об'єднаннями.*

2. Зліченні множини та їх властивості.

За кількістю елементів множини поділяються на *скінченні* та *нескінченні* множини. Вилучаючи по одному елементи скінченної множини, ми на деякому кроці отримаємо порожню множину. А для нескінченної множини, скільки б елементів по одному з неї не вилучали, ми на жодному кроці не зможемо отримати порожньої множини.

Серед нескінченних множин важливу роль відіграють *зліченні* множини, тобто множини, між елементами яких і елементами множини натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність – бієкцію. Іншими словами, множина називається *зліченною*, якщо її елементи можна виписати у вигляді нескінченної послідовності: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *Всяка підмножина зліченної множини є скінченною або зліченною.*

Теорема. *Об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що таке об'єднання є нескінченною множиною, і випишемо елементи цього об'єднання у вигляді нескінченної таблиці:

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Тут у першому рядку записані всі елементи першої множини, у другому – другої, і так далі. Елементи цієї таблиці випишемо за зростанням суми їх індексів у наступному порядку: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \dots,$ причому елементи, які повторюються, повторно записувати не будемо. Інакше, виписуємо їх по діагоналях таблиці, перпендикулярних до головної діагоналі. Оскільки на кожній такій діагоналі знаходиться скінченна кількість елементів, то при цьому кожен елемент об'єднання множин отримає свій номер.

Зауважимо, що, міркуючи аналогічно, можна довести й наступні властивості скінченних та зліченних множин:

1. *Об'єднання скінченної кількості скінченних множин є скінченна множина.*

2. *Об'єднання скінченної та зліченної множини є зліченна множина.*

3. *Об'єднання зліченної кількості скінченних множин, які попарно не перетинаються, є зліченна множина.*

Зауважимо також, що вибираючи з довільної нескінченної множини послідовно один за одним елементи і позначаючи їх $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ відповідно, ми завжди можемо виділити з неї зліченну підмножину. Проте існують нескінченні множини, які не є зліченними. Їх називають *незліченними* множинами.

3. Приклади зліченних та незліченних числових множин

Найпростішим прикладом зліченної множини є множина натуральних чисел. Зліченними є також множини парних та непарних натуральних чисел, множина цілих чисел. Наприклад, всі цілі числа можна виписати у такій послідовності:

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$$

Покажемо, що і *множина раціональних чисел є зліченною.*

Справді, кожне раціональне число записується у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$. Назвемо *висотою* такого дробу суму $|p| + q$. Оскільки дробів із кожною конкретною висотою є скінченна кількість, то всі такі дроби можна виписати у нескінченну послідовність за зростанням їхньої висоти, а отже, і встановити цим бієкцію між елементами множин Q та N.

Проте *множина всіх дійсних чисел відрізка* $[0;1]$ *є незліченною.*

Для доведення припустимо, що множина дійсних чисел такого відрізка зліченна, і випишемо всі ці числа у вигляді послідовності нескінченних десяткових дробів:

$$\alpha_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \ldots,$$
$$\alpha_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \ldots,$$
$$\alpha_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

де через a_{kn} позначені відповідні десяткові цифри чисел α_k. Розглянемо тепер число $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$, в якому жодна з цифр b_n не є ні нулем, ні дев’яткою, і, крім того, $b_n \neq a_{nn}$ для всіх $n \in N$. Зрозуміло, що $\beta -$ дійсне число з відрізка $[0;1]$, яке не співпадає з жодним із чисел α_n. А це суперечить тому, що всі дійсні числа цього відрізка були виписані. Отримане протиріччя доводить незліченність множини таких чисел.

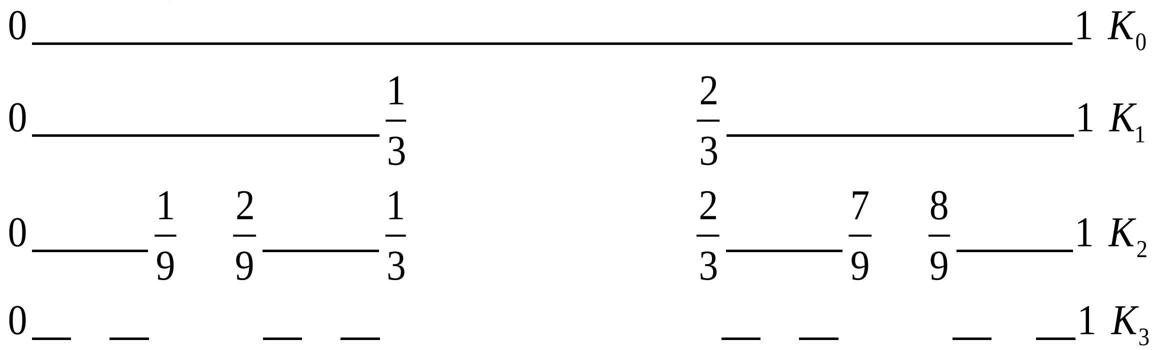
Доведемо, що і *множина всіх ірраціональних чисел відрізка* $[0;1]$ *також незліченна.*

Доведення. Справді, припустивши протилежне, ми отримали би, що її об’єднання зі зліченною множиною раціональних чисел цього відрізка мало би бути зліченною множиною. А це суперечить тільки що доведеному твердженню.

Незліченними будуть також множини дійсних чи ірраціональних чисел будь-якого проміжку числової прямої.

4. Канторова множина

Розглянемо на числовій прямій множину $K_0 = [0;1]$. Поділимо цей відрізок на три рівні частини і вилучимо з нього середній інтервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. В результаті отримаємо множину K_1, яка складається з двох відрізків. Кожен з них знову ділимо на три рівні частини і вилучаємо середні інтервали, отримуючи таким чином множину K_2, яка складається вже з чотирьох відрізків. За аналогічним принципом дістаємо з множини K_2 множину K_3 (див. малюнок).



Продовжуючи цей процес до нескінченності, будемо мати послідовність вкладених одна в одну множин $K_n,\ n \in Z_+$. Множина

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

називається *канторовою множиною*.

Для встановлення структури канторової множини запишемо всі числа відрізка $[0;1]$ у трійковій системі числення. Тоді стає зрозумілим, що до K належать ті і тільки ті числа, які можна хоч одним способом записати у цій системі, не використовуючи цифру 1. Таким чином, кожному елементу $x \in K$ взаємно однозначно відповідає число

$\alpha = 0,a_1a_2...a_n...$ у трійковій системі числення, в якому a_n набувають лише значень 0 або 2. Замінивши у ньому всі двійки одиницями, отримаємо двійковий запис деякого числа $\beta = 0,b_1b_2...b_n...$ з відрізка $[0;1]$. Отже, між точками множини K і всіма точками відрізка $[0;1]$ може бути встановлена взаємно однозначна відповідність. Це означає, що *канторова множина є незліченною.*

На фоні отриманого результату цікаво буде зауважити, що *сума довжин інтервалів, які викидалися при побудові канторової множини, дорівнює довжині всього відрізка* $[0;1]$. Справді, така сума дорівнює

$$\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + ... + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n} + ... = 1.$$

5. Потужність множини. Порівняння потужностей.

Дві множини A та B, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються *еквівалентними*: $A \sim B$. Про такі множини кажуть, що вони мають *однакову потужність* і записують $p(A) = p(B)$.

Якщо ж множина A містить підмножину $A_1 \sim B$, а множина B не містить підмножини $B_1 \sim A$, то вважають, що *потужність множини A більша за потужність множини B*, і записують $p(A) > p(B)$, або ж $p(B) < p(A)$.

Зауважимо, що якщо при цьому і у множині B знайшлася б підмножина $B_1 \sim A$, то множини A та B були би еквівалентними.

Звідси випливає такий важливий ***висновок*: *Якщо $A \subset B \subset C$ і $p(A) = p(C) = p$, то і $p(B) = p$.***

Дві скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. Таким чином, під потужністю скінченної множини можна розуміти кількість елементів цієї множини.

Будь-які дві зліченні множини еквівалентні між собою, оскільки кожна з них еквівалентна множині натуральних чисел. А отже, *всі зліченні множини мають однакову потужність*.

Очевидно також, що *потужність нескінченної множини більша за потужність скінченної множини, а потужність незліченної множини більша за потужність зліченної множини*.

Потужність множини точок відрізка $[0;1]$ називають *потужністю континууму* і позначають буквою c.

Об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості множин потужності континууму також має потужність континууму.

Проте *існують множини, які мають ще більшу потужність.* Зокрема, справедлива наступна ***теорема***: *Потужність множини $\overline{M}$ всіх підмножин множини M більша, ніж потужність множини M.*

За аналогією зі скінченними множинами символічно записують:

$$p\left(\overline{M}\right) = 2^{p(M)}.$$

Для зліченних множин M отримуємо $p\left(\overline{M}\right) = c$, а для множини всіх підмножин відрізка $[0;1]$ будемо мати потужність $f = 2^c$, яку називають *потужністю гіперконтинууму.*

6. Поняття міри. Міра прямокутника та її властивості

Поняття міри множини є природним узагальненням понять довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла тощо. Саме від цих понять і відштовхуються при введенні поняття міри. При цьому для зручності ми спочатку визначимо міру множини на площині.

В теорії міри під *прямокутником* P на площині будемо розуміти множину точок (x, y) цієї площини, координата x яких задовольняє одну з нерівностей першого, а координата y – одну з нерівностей другого стовпчика:

$$\begin{array}{ll} a \le x \le b, & c \le y \le d, \\ a < x \le b, & c < y \le d, \\ a \le x < b, & c \le y < d, \\ a < x < b, & c < y < d, \end{array}$$

де $a \le b,\ c \le d$ – довільні дійсні числа.

Якщо $a < b,\ c < d,$ то в результаті ми отримаємо звичайний прямокутник, сторони якого паралельні до координатних осей. При цьому, в залежності від вибору нерівностей, одна, дві, три, або і всі чотири його сторони даному прямокутнику можуть не належати.

Якщо $a = b$ чи $c = d,$ то матимемо прямокутники, вироджені у відрізки, інтервали, або півсегменти, паралельні до однієї з осей координат, чи в точку (a,c), або, навіть, у порожню множину.

За аналогією з площею, *міру* $m(P)$ такого прямокутника визначимо формулою

$$m(P) = (b-a)(d-c).$$

Зрозуміло, що при цьому *кожен прямокутник* P *матиме міру, і ця міра буде невід'ємною* ($m(P) = 0$ тільки для вироджених прямокутників). Крім того, якщо

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i,$$

де прямокутники P_i попарно не перетинаються, то

$$m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Така властивість називається *адитивністю міри*.

Наше завдання – поширити поняття міри, зберігаючи властивості невід'ємності та адитивності, на ширший клас множин, ніж прямокутники.

Зауважимо тільки, що аналогічна процедура може бути також реалізована на числовій прямій, відштовхуючись від міри відрізка як його довжини, та у трьохвимірному просторі, відштовхуючись від міри прямокутного паралелепіпеда як його об'єму.

7. Міра елементарної множини та її властивості

Плоска множина A називається *елементарною*, якщо її можна хоч одним способом подати у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, які попарно не перетинаються:

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} P_i .$$

Міру $m'(A)$ цієї множини визначають за формулою

$$m'(A)=\sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Зокрема, якщо $A=P,$ то $m'(P)=m(P).$ Тому міру m' називають *продовженням міри* $m.$ Безпосередньо з означення випливає, що *міра* $m'(A)$ *невід'ємна*. Крім того, вона *адитивна*, тобто, якщо елементарна множина

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i ,$$

де елементарні множини A_i попарно не перетинаються, то

$$m'(A)=\sum_{i=1}^{n} m'(A_i).$$

Справедлива також наступна ***теорема:***

Нехай $A-$ *елементарна множина, а* $\{A_n\}-$ *така скінченна або зліченна система елементарних множин, що*

$$A\subset\bigcup_{n} A_n .$$

Тоді

$$m'(A)\le\sum_{n} m'(A_n).$$

Така властивість міри елементарних множин називається *півадитивністю міри* $m'.$ Зауважимо, що при цьому множини A_n могли і попарно перетинатися між собою.

Якщо ж $A-$ така елементарна множина, що

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

де A_n- елементарні множини, які попарно не перетинаються, то внаслідок адитивності міри m' при кожному фіксованому N маємо нерівність:

$$m'(A)\ge m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)=\sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

Перейшовши в ній до границі при $N\to\infty,$ отримаємо, що

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

А оскільки з півадитивності міри m' випливає і виконання протилежної нерівності

$$m'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n),$$

то

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Доведена тут властивість міри зліченного об'єднання елементарних множин, які попарно не перетинаються, називається *зліченною адитивністю,* або $\sigma -$*адитивністю міри елементарних множин.*

8. Зовнішня міра множини та продовження міри за Лебегом

Оскільки елементарні множини не вичерпують всіх множин на площині, то природним є дальше розширення поняття міри. Щоб при цьому зразу не мати справи з множинами нескінченної міри, обмежимось спочатку лише підмножинами A одиничного квадрата

$$E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Зовнішньою мірою множини A називається число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k),$$

де $\{P_k\}-$ довільні скінченні чи зліченні системи прямокутників, об'єднання яких покривають множину A.

Зокрема, якщо $A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ $-$ елементарна множина, то з даного означення отримуємо, що

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A).$$

Отже, *зовнішня міра* μ^* *є продовженням міри* m'.

Але, хоч зовнішню міру має будь-яка підмножина квадрата E, ця міра на сукупності всіх таких підмножин не є адитивною. У зв'язку з цим доводиться розглядати дещо вужчий клас підмножин E.

Множина A називається *вимірною за Лебегом*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така елементарна множина B, що

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Функція $\mu^*(A)$, визначена на сукупності вимірних за Лебегом множин, називається *мірою Лебега* і позначається $\mu(A)$.

Поклавши $B = \varnothing$, отримуємо, що *всяка множина, зовнішня міра якої дорівнює нулю, вимірна за Лебегом.* Така властивість називається *повнотою міри Лебега*.

В*имірною за Лебегом буде і всяка елементарна множина* A (досить взяти $B = A$), *і її міра Лебега* $\mu(A) = m'(A)$. Отже, *міра Лебега* μ *є продовженням міри* m'.

Зауважимо також, що з рівності

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B$$

випливає, що *разом з* $A \subset E$ *вимірною за Лебегом буде і множина* $\overline{A} = E \setminus A$.

Крім того, *разом з двома вимірними за Лебегом множинами* A_1 *та* A_2 *вимірною за Лебегом є і множина* $A = A_1 \bigcup A_2$.

Звідси випливає, що разом із множинами A_1 та A_2 вимірними за Лебегом будуть і множини

$$A_1 \bigcap A_2 = \overline{\overline{A_1} \bigcup \overline{A_2}}, \quad A_1 \setminus A_2 = A_1 \bigcap \overline{A_2},$$
$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \bigcup (A_2 \setminus A_1).$$

Зауважимо, що і довільні скінченні або зліченні об'єднання та перетини вимірних за Лебегом множин є вимірними за Лебегом множинами.

9. Адитивність, $\sigma-$адитивність та неперервність міри Лебега

Як і міри m та m', *міра Лебега є адитивною*, тобто якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – вимірні за Лебегом множини, які попарно не перетинаються, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Зокрема, з її адитивності отримуємо рівність:

$$\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A).$$

Крім того, *ця міра також $\sigma-$адитивна*, тобто якщо

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

де $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – зліченна система вимірних за Лебегом підмножин множини E, які попарно не перетинаються, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Зауважимо, що із $\sigma-$адитивності випливає *неперервність міри Лебега*, яка полягає в наступному:

Теорема. *Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots -$ послідовність вкладених одна в одну вимірних за Лебегом множин і*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доведення. Нехай $A = \varnothing$. Оскільки

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots,$$

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \dots,$$

і множини, які входять у записані об’єднання, попарно не перетинаються, то на підставі $\sigma-$адитивності міри Лебега

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

причому ряд у правій частині першої з цих рівностей збіжний. А отже, його залишок $\mu(A_n) \to 0 = \mu(\varnothing)$ при $n \to \infty$. Загальний випадок зводиться до доведеного заміною множин A_n множинами $A_n \setminus A$.

У двоїстій формі властивість неперервності міри Лебега можна сформулювати ще й так:

Якщо $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots -$ *зростаюча послідовність вимірних за Лебегом підмножин одиничного квадрата* E *і*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

10. Поняття про $\sigma-$скінченні міри

Розглядаючи поняття міри Лебега на площині, ми ввели його тільки для підмножин одиничного квадрата. Для поширення плоскої міри Лебега на інші множини представимо площину у вигляді об'єднання

$$X = \bigcup_{n,k=-\infty}^{\infty} E_{nk},\ E_{nk} = \{(x,y): n \le x < n+1, k \le y < k+1\}.$$

Кожна з множин цього об'єднання є напіввідкритим квадратом зі стороною 1. Тому міри їх підмножин можна визначити аналогічно до того, як ми визначали міри підмножин одиничного квадрата E.

Нехай тепер $A \subset X -$ довільна множина такої площини. Позначимо

$$A_{nk} = A \bigcap E_{nk} \subset E_{nk}.$$

Множину $A \subset X$ називають *вимірною*, якщо вимірними за Лебегом є всі без винятку множини A_{nk}. При цьому *мірою* μ *множини* A називають суму

$$\mu(A) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} \mu(A_{nk}).$$

Такі суми можуть виявитися як скінченними, так і нескінченними. Разом з ними множини матимуть скінченні або нескінченні міри відповідно. Зокрема, нескінченною буде міра всієї площини X.

Зрозуміло, що міра μ є продовженням міри μ.

У загальному випадку, $\sigma-$адитивну міру m, визначену на підмножинах довільного простору X, називають $\sigma-$*скінченною*, якщо весь простір X можна подати у вигляді об'єднання

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

зліченного числа множин X_n скінченної міри, але не можна подати як об'єднання скінченного числа таких множин. При цьому будемо вважати, що множини X_n попарно не перетинаються.

Застосувавши процес лебегового продовження міри, розглянемо систему A множин A, для яких вимірними за Лебегом є всі множини

$$A_n = A \bigcap X_n, \, n \in N.$$

Ці множини попарно не перетинаються, причому

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Міру μ на такій системі множин визначають рівністю

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

11. *Вимірні функції та їх зв'язок з вимірними множинами*

Функцію $f(x)$ вважають визначеною на множині $A \subset X$, якщо кожному $x \in A$ поставлено у відповідність число $f(x)$. При цьому не виключають і можливість набувати функцією $f(x)$ нескінченних значень $+\infty$ та $-\infty$.

Функція $f(x)$, визначена на вимірній множині $A \subset X$, називається *вимірною* на цій множині, якщо при кожному скінченному значенні c вимірними є множини

$$M[f < c] = \{x : x \in A, f(x) < c\}.$$

Безпосередньо з означення випливає, що *функція, визначена на невимірній множині, є невимірною*. Крім того, з повноти міри Лебега отримуємо *вимірність всякої функції, визначеної на множині міри* 0.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ вимірна, то при кожному значенні c множини*

$$M[f \geq c], \; M[f \leq c], \; M[f > c], \; M[f = c]$$

вимірні.

Доведення. Твердження теореми послідовно отримуємо із рівностей

$$M[f \ge c] = A \setminus M[f < c],$$

$$M[f \le c] = \bigcap_{n=1}^{\infty} M\left[f < c + \frac{1}{n}\right],$$

$$M[f > c] = A \setminus M[f \le c],$$

$$M[f = c] = M[f \le c] \setminus M[f < c].$$

Зауваження 1. *Якщо множина A вимірна, і хоч одна з множин*

$$M[f \ge c],\ M[f \le c],\ M[f > c]$$

при кожному значенні c буде вимірною, то функція $f(x)$ вимірна. Таким чином, *в основу означення вимірної функції можна було покласти вимірність будь-якої з чотирьох множин*

$$M[f < c],\ \ M[f \ge c],\ M[f \le c],\ M[f > c]$$

при кожному значенні c.

Зауваження 2. *З вимірності при кожному значенні c множини $M[f = c]$ вимірність функції $f(x)$ не випливає, але, якщо функція $f(x)$ набуває не більш як зліченну кількість значень y_n, і при кожному n множини $M[f = y_n]$ вимірні, то функція $f(x)$ вимірна.* Така функція називається *простою*.

12. Приклади вимірних функцій

Розглянемо конкретні приклади вимірних функцій, визначених на вимірних множинах A:

1. $f(x) = const$. Множина

$$M[f < c] = \begin{cases} \varnothing, & c \le const, \\ A, & c > const, \end{cases}$$

вимірна при кожному c. Тому й функція $f(x) = const$ вимірна.

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \subset A, \\ 1, & x \in A \setminus B. \end{cases}$

Тут маємо

$$M\left[f<c\right]=\begin{cases}\varnothing, \ c\le 0,\\ B, \ 0<c\le 1,\\ A, \ c>1.\end{cases}$$

Отже, дана функція вимірна тоді і тільки тоді, коли вимірною є множина B.

3. $$f\left(x\right)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

Дана функція визначена на вимірній відносно лінійної міри Лебега множині $A=\left[-2;2\right]$. Послідовно знаходимо:

$$M\left[f<c\right]=\varnothing, \ c\le -2;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right), \ -2<c\le -1;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left(1;c+2\right), \ -1<c\le 0;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left[1;2\right], \ 0<c\le 1;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;-\sqrt{2-c}\right)\cup\left(\sqrt{2-c};2\right], \ 1<c\le 2;$$

$$M\left[f<c\right]=\left[-2;2\right], \ c>2.$$

Оскільки в усіх з можливих випадків для чисел c ми отримали вимірні множини, то функція $f\left(x\right)$ вимірна.

13. Лінійні операції над вимірними функціями

Розглянемо властивості вимірних функцій, пов'язані з лінійними операціями над такими функціями:

1. *Якщо $f\left(x\right)-$ вимірна функція, то при кожному $a\in R$ функція $f\left(x\right)+a$ теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[f+a<c\right]=M\left[f<c-a\right]$$

вимірні при всіх дійсних c та a.

2. *Якщо $f\left(x\right)-$ вимірна функція, то при кожному $k\in R$ функція $kf\left(x\right)$ теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[kf<c\right]=\begin{cases} M\left[f<\dfrac{c}{k}\right], & k>0,\\ M\left[0\cdot f<c\right], & k=0,\\ M\left[f>\dfrac{c}{k}\right], & k<0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c та k.

Для доведення вимірності різниці та суми вимірних функцій нам потрібна ще й наступна властивість таких функцій.

3. *Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ вимірні, то множина $M[f<\varphi]$ вимірна.*

Для доведення випишемо всі раціональні числа у вигляді послідовності (r_n). Тоді множина

$$M[f<\varphi]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(M[f<r_n]\cap M[\varphi>r_n]\right)$$

вимірна як об'єднання перетинів вимірних множин.

4. *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ вимірні, то функція $f(x)-g(x)$ вимірна.*

Справді, за властивістю 3 множина

$$M[f-g<c]=M[f<g+c]$$

вимірна при кожному c, бо за властивістю 1 функція $\varphi(x)=g(x)+c$ вимірна.

5. *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ вимірні, то функція $f(x)+g(x)$ вимірна.*

Це випливає з властивостей 2 та 4 і рівності

$$f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x)).$$

14. Нелінійні операції над вимірними функціями

Справедливі і наступні властивості вимірних функцій, пов'язані з нелінійними операціями над ними.

6. *Якщо $f(x)-$ вимірна функція, то функція $|f(x)|$ теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[|f|<c\right]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ M\left[f<c\right]\bigcap M\left[f>-c\right], & c>0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

7. *Якщо* $f(x)-$ *вимірна функція, то функція* $f^2(x)$ *теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[f^2<c\right]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ M\left[f<\sqrt{c}\right]\bigcap M\left[f>-\sqrt{c}\right], & c>0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

8. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *вимірні, то функція* $f(x)\cdot g(x)$ *вимірна.*

Справді, її вимірність випливає з рівності

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left[\left(f(x)+g(x)\right)^2-\left(f(x)-g(x)\right)^2\right]$$

та властивостей 2, 4, 5, 7.

9. *Якщо* $f(x)-$ *вимірна функція і* $f(x)\ne 0,$ *то функція* $\dfrac{1}{f(x)}$ *теж вимірна.*

Справді, при $f(x)\ne 0$ множини

$$M\left[\frac{1}{f}<c\right]=\begin{cases}M\left[f<0\right]\bigcap M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c<0,\\ M\left[f<0\right], & c=0,\\ M\left[f<0\right]\bigcup M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c>0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

10. *Якщо* $f(x)$ *та* $g(x)-$ *вимірні функції і* $g(x)\ne 0,$ *то функція* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *теж вимірна.*

За властивостями 8 та 9 це випливає з рівності

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

15. Послідовності вимірних функцій.

Розглянемо ще одну важливу властивість вимірних функцій, пов'язану з граничним переходом.

Теорема. *Якщо послідовність вимірних на множині* A *функцій* $f_n(x)$ *при кожному* $x \in A$ *збігається до функції* $f(x)$, *то функція* $f(x)$ *вимірна.*

Справедливість твердження цієї теореми випливає з рівності

$$M[f < c] = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{ x : f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

Отже, $M[f < c]$ як об'єднання перетинів вимірних множин буде вимірною множиною при кожному c. Тому функція $f(x)$ теж є вимірною.

Зауважимо, що умови даної теореми можуть бути дещо послаблені. Назвемо послідовність функцій $f_n(x)$ *збіжною майже скрізь на множині* A *до функції* $f(x)$, якщо міра множини тих $x \in A$, для яких $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, дорівнює нулю.

Отже, *нехай послідовність вимірних на множині* A *функцій* $f_n(x)$ *майже скрізь на* A *збігається до функції* $f(x)$. *Тоді функція* $f(x)$ *є вимірною.*

Справді, на множині $A_0 \subset A$, на якій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, функція $f(x)$ вимірна, як і всяка функція на множині міри нуль. А на $A \setminus A_0$ вимірність $f(x)$ випливає з доведеної теореми. Тому $f(x)$ вимірна на всій множині A.

Відзначимо також, що *всяку вимірну функцію можна подати як границю рівномірно збіжної послідовності вимірних функцій, кожна з яких набуває не більше як зліченну кількість різних значень.*

Справді, якщо $f(x)$ – довільна вимірна на множині A функція, то при всіх $m \in Z$, $n \in N$ будуть вимірними множини

$$A_{nm}=\left\{x:\frac{m}{n}\le f(x)<\frac{m+1}{n}\right\}.$$

При цьому

$$A=\bigcup_m A_{nm}$$

при кожному фіксованому $n\in N$. Тому, покладаючи

$$f_n(x)=\frac{m}{n},\ x\in A_{nm},$$

отримаємо шукану послідовність простих функцій, яка рівномірно збігається до функції $f(x)$ на множині A.

16. Збіжність за мірою та її зв'язок зі збіжністю майже скрізь

Послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ *збігається за мірою* до функції $f(x)$, якщо при кожному $\sigma>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\sigma\}=0.$$

Справедлива т***еорема Лебега:*** *Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається майже скрізь на множині A скінченної міри до функції $f(x)$, то вона збігається до цієї функції і за мірою.*

Покажемо, що обернене твердження невірне. Для цього розглянемо при кожному натуральному k функції

$$\varphi_{k1}(x),\varphi_{k2}(x),...,\varphi_{kk}(x),$$

визначені на множині $A=(0,1]$ так, що:

$$\varphi_{ki}(x)=\begin{cases}1,\ x\in\left(\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right],\\ 0,\ x\notin\left(\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right].\end{cases}$$

Пронумерувавши ці функції підряд за зростанням k, а при однакових k – за зростанням i, отримаємо деяку послідовність функцій $f_n(x)$. Зауваживши, що

$$\mu\{x:\varphi_{ki}(x)\ne 0\}=\frac{1}{k}\to 0,\ k\to\infty,$$

отримаємо, що $f_n(x)$ збігається за мірою до функції $f(x)\equiv 0.$ Але, яке б $x_0\in(0;1]$ ми не взяли, при кожному $k\in N$ знайдеться таке $i,$ що

$$x_0\in\left(\frac{i-1}{k};\frac{i}{k}\right],$$

тобто $\varphi_{ki}(x_0)=1.$ Тому послідовність функцій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$ у жодній точці проміжку $(0;1].$

Наведений приклад свідчить, що із збіжності за мірою може не випливати навіть збіжності принаймні в одній точці множини $A.$

Проте справедлива наступна ***теорема Ріса:*** *Якщо послідовність вимірних функцій* $f_n(x)$ *на множині* A *скінченної міри збігається за мірою до функції* $f(x),$ *то з неї можна вибрати підпослідовність функцій* $f_{n_k}(x),$ *яка збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *майже скрізь.*

Як ***наслідок*** з теореми Ріса отримуємо: *границя збіжної за мірою послідовності вимірних функцій є вимірною функцією.*

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, зауважимо, що, обмежуючись у ньому лише функціями

$$\varphi_{11}(x),\varphi_{21}(x),...,\varphi_{k1}(x),...,$$

ми виділимо підпослідовність заданої послідовності, яка збігається до $f(x)\equiv 0$ у кожній точці множини $A=(0;1].$

17. Інтеграл Лебега для простих функцій та його властивості

Нехай $f(x)-$ проста функція, визначена на вимірній множині $A,$ яка набуває різні значення $y_1,y_2,...,y_n,...$ на вимірних множинах $A_1,A_2,...,A_n,...$ відповідно.

Таку функцію називають *інтегровною за Лебегом на множині* $A,$ якщо ряд

$$\sum_n y_n\mu(A_n)$$

збігається абсолютно.

При цьому суму цього ряду називають *інтегралом Лебега простої функції* $f(x)$ *по множині* A і позначають

$$\int_A f(x)d\mu.$$

У випадку, коли проста функція набуває скінченну кількість різних значень, замість ряду матимемо скінченну кількість доданків. Наприклад, для функції Діріхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q,\end{cases}$$

отримуємо

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = 1\cdot\mu([a,b]\cap Q)+0\cdot\mu([a,b]\setminus Q)=1\cdot 0+0\cdot(b-a)=0.$$

Безпосередньо з означення інтеграла Лебега випливає, що *разом з простою функцією* $f(x)$ *інтегровною за Лебегом буде і функція* $|f(x)|$.

Відзначимо також інші властивості інтеграла Лебега від простих функцій, які також легко отримати з його означення:

1. *Якщо проста функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A, *то при кожному* k *функція* $kf(x)$ *також інтегровна за Лебегом на цій множині і*

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu.$$

2. *Якщо прості функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *інтегровні за Лебегом на множині* A, *то функція* $f(x)+g(x)$ *також інтегровна за Лебегом на цій множині, причому*

$$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$$

3. *Якщо* $f(x)-$ *проста обмежена функція на множині* A *скінченної міри така, що* $|f(x)|\le M$ *для всіх* $x\in A$, *то вона інтегровна за Лебегом на цій множині і*

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A).$$

18. Загальне означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри

Функція $f(x)$ називається *інтегровною за Лебегом* на множині A скінченної міри, якщо існує послідовність простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій $f_n(x)$, яка рівномірно збігається до $f(x)$.

При цьому покладають, що

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\,d\mu.$$

Обґрунтуємо *коректність означення інтеграла Лебега:*

1. *Така границя існує*.

Справді, з рівномірної збіжності послідовності функцій $f_n(x)$ до функції $f(x)$ випливає, що при кожному $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

при всіх $n > N,\ m > N,\ x \in A.$ Тоді на підставі властивостей інтеграла Лебега для простих функцій отримуємо:

$$\left| \int\limits_A f_n(x)\,d\mu - \int\limits_A f_m(x)\,d\mu \right| \le \varepsilon\mu(A).$$

А отже, послідовність інтегралів

$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu$$

задовольняє критерій Коші збіжності числових послідовностей.

2. *Ця границя не залежить від вибору послідовності простих функцій $f_n(x)$.*

Справді, вибравши ще одну послідовність простих функцій, для якої послідовність інтегралів збігається до іншої границі, ми могли б, чергуючи елементи таких послідовностей, отримати третю послідовність, для якої послідовність вказаних інтегралів не мала би границі. А це суперечить доведеному вище.

3. *Якщо $f(x)-$ проста функція, то дане означення співпадає з означенням інтеграла Лебега для простих функцій.*

Справді, досить покласти $f_n(x) = f(x)$ при кожному $n \in N$.

Зауважимо також, що згідно даного означення *всяка інтегровна за Лебегом на множині скінченної міри функція є вимірною за Лебегом* як границя послідовності вимірних функцій.

19. Основні властивості інтеграла Лебега

1. *Для кожної вимірної множини* A *скінченної міри*

$$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A).$$

2. *Для кожної сталої* k *та інтегровної за Лебегом на* A *функції* $f(x)$

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu.$$

При $k = 0$ звідси як *наслідок* отримуємо, що

$$\int_A 0 \cdot d\mu = 0.$$

3. *Для будь-яких інтегровних за Лебегом на множині* A *функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$

$$\int_A (f(x) + g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$$

4. *Якщо* $f(x)-$ *така обмежена функція на множині* A *скінченної міри, що* $|f(x)| \le M$ *для всіх* $x \in A$*, то вона інтегровна за Лебегом на цій множині.*

5. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $f(x) \ge 0$ *і функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на* A*, то має місце нерівність*

$$\int_A f(x)d\mu \ge 0.$$

6. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $f(x) \ge g(x)$ *і функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *інтегровні за Лебегом на* A*, то має місце нерівність*

$$\int_A f(x)d\mu \ge \int_A g(x)d\mu.$$

7. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $m \le f(x) \le M$, *то функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на* A *і справедлива нерівність*

$$m\mu(A) \le \int_A f(x)\,d\mu \le M\mu(A).$$

8. *Якщо* $\mu(A)=0$, *то* $\int_A f(x)\,d\mu = 0.$

9. *Якщо на множині* A *скінченної міри функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *еквівалентні*

$$(\, f(x) \sim g(x),\ \text{якщо}\ \mu\{x : f(x) \ne g(x)\} = 0\,)$$

і одна з цих функцій інтегровна на A *за Лебегом, то й друга функція буде інтегровною за Лебегом, причому*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu.$$

10. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри і* $|f(x)| \le \varphi(x)$ *майже скрізь на* A, *то* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A.

11. *Функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри тоді і тільки тоді, коли інтегровною за Лебегом на цій множині є функція* $|f(x)|$.

20. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана

Як показує приклад функції Діріхле, існують навіть обмежені не інтегровні за Ріманом функції, які інтегровні за Лебегом. Але справедлива наступна ***теорема:***

Якщо існує інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

то функція $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a,b]$ *за Лебегом і*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Вона дає спосіб практичного обчислення інтеграла Лебега у випадку інтегровності функції $f(x)$ за Ріманом:

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

З курсу математичного аналізу відомі такі три *класи інтегровних за Ріманом на відрізку* $[a,b]$ *функцій*: неперервні функції; обмежені монотонні функції; обмежені функції зі скінченною кількістю точок розриву.

У загальному вигляді *умова інтегровності за Ріманом* може бути сформульована так: *для того, щоб обмежена на відрізку* $[a,b]$ *функція була інтегровна за Ріманом на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб міра множини точок розриву такої функції на відрізку* $[a,b]$ *дорівнювала нулю.*

Якщо ж функція $f(x)$ не інтегровна за Ріманом, то для обчислення інтеграла Лебега на допомогу може прийти властивість 9 такого інтеграла. Суть такого способу обчислення інтеграла Лебега полягає в тому, що при існуванні еквівалентної до $f(x)$ функції $g(x)$, інтегровної за Ріманом, виконується рівність

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = \int\limits_{[a,b]} g(x)d\mu = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

21. Приклади обчислення інтегралів Лебега

1. Обчисліть інтеграл Лебега функції

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \le 1, \\ 3x^2, & x > 1, \end{cases}$$

на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;2]$:

$$0 \le f(x) \le 12,$$

і має на цьому відрізку лише одну точку розриву $x=1.$ Тому вона інтегровна на $[0;2]$ за Ріманом, а значить, і за Лебегом. При цьому отримуємо

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu = \int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 4xdx + \int\limits_1^2 3x^2dx = 2x^2\Big|_0^1 + x^3\Big|_1^2 = 9.$$

2. Обчисліть інтеграл Лебега функції

$$f(x)=\begin{cases}4x, & x\in Q,\\ 3x^2, & x\notin Q,\end{cases}$$

на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;2]$, але має на цьому відрізку розриви у кожній його точці, крім точок $x=0$ та $x=\frac{4}{3}$. Тому $f(x)$ не інтегровна за Ріманом на відрізку $[0;2]$. Але еквівалентна до неї неперервна функція $g(x)=3x^2$ є інтегровною на відрізку $[0;2]$ за Ріманом. Тому функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом. При цьому

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu=\int\limits_{[0,2]} g(x)d\mu=\int\limits_0^2 g(x)dx=\int\limits_0^2 3x^2dx=x^3\Big|_0^2=8.$$

3. Обчисліть інтеграл Лебега функції

$$f(x)=\begin{cases}4x, & x\in\left\{\frac{1}{n}\right\},\ n\in N,\\ 3x^2, & x\notin\left\{\frac{1}{n}\right\},\ n\in N,\end{cases}$$

на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0;2]$, і має на цьому відрізку розриви у точках множини $\left\{\frac{1}{n}\right\},\ n\in N,$ міра Лебега якої дорівнює нулю. Тому $f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[0;2]$, а отже, інтегровна і за Лебегом. Але еквівалентна до неї неперервна функція $g(x)=3x^2$ теж є інтегровною на відрізку $[0;2]$ за Ріманом. Тому доцільніше, як і у попередньому прикладі, обчислювати заданий інтеграл таким чином:

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu=\int\limits_{[0,2]} g(x)d\mu=\int\limits_0^2 g(x)dx=\int\limits_0^2 3x^2dx=x^3\Big|_0^2=8.$$

22. $\sigma-$*адитивність та абсолютна неперервність інтеграла Лебега*

Для функції $f(x)$, інтегровної за Лебегом на множині

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,$$

де A_k- *вимірні множини, які попарно не перетинаються, виконується рівність*

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f(x)d\mu,$$

тобто *інтеграл Лебега є адитивною функцією множини.*

Аналогічна рівність залишиться справедливою і для зліченної кількості множин, які утворюють множину A.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри і*

$$A=\bigcup_{n}A_n,$$

де A_n- вимірні множини, які попарно не перетинаються, то $f(x)$ інтегровна за Лебегом на кожній з множин A_n і

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_{n}\int_{A_n} f(x)d\mu,$$

причому ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно.

Цю властивість називають $\sigma-$*адитивністю інтеграла Лебега.*

Зауважимо, що питання про $\sigma-$адитивність інтеграла Лебега можна поставити ще й так:

Нехай функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на кожній з вимірних множин A_n, які попарно не перетинаються, і

$$A=\bigcup_{n}A_n-$$

множина скінченної міри. Чи обов'язково при цьому функція $f(x)$ буде інтегровна за Лебегом на множині A?

Зрозуміло, що якщо функція $f(x)$ виявиться інтегровною за Лебегом на множині A, то такою ж буде і функція $|f(x)|$. При цьому за теоремою 1

$$\int\limits_A |f(x)|d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|d\mu.$$

Таким чином, збіжність ряду у правій частині останньої рівності є необхідною умовою інтегровності за Лебегом функції $f(x)$ на множині A. Можна довести, що ця умова є й достатньою. Очевидно, що в такому разі також

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)d\mu,$$

і ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно.

З $\sigma-$адитивності інтеграла Лебега випливає його наступна властивість – *абсолютна неперервність інтеграла Лебега*:

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що*

$$\left|\int\limits_{A_\delta} f(x)d\mu\right| < \varepsilon$$

для всякої вимірної множини $A_\delta \subset A$ такої, що $\mu(A_\delta) < \delta$.

23. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри

Вивчаючи властивості інтеграла Лебега, ми досі вважали, що мова йде про множини скінченної міри. Поширимо тепер поняття інтегровності за Лебегом і на множини нескінченної міри.

Оскільки міра Лебега є $\sigma-$скінченною, то кожна така множина може бути подана у вигляді

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ \mu(A_n) < \infty.$$

Якщо при цьому мають місце включення

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots,$$

то послідовність множин A_n називається *вичерпною послідовністю* для множини A.

Вимірна функція $f(x)$, визначена на множині A нескінченної міри, називається *інтегровною за Лебегом* на цій множині, якщо вона інтегровна за Лебегом на кожній вимірній скінченної міри підмножині множини A і для кожної вичерпної послідовності (A_n) границя

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)d\mu$$

є скінченною і не залежить від вибору цієї послідовності. Таку границю називають *інтегралом Лебега функції* $f(x)$ *по множині* A *нескінченної міри* і позначають

$$\int_A f(x)d\mu.$$

Розглянемо приклад обчислення такого інтеграла. Нехай

$$A=[1,+\infty),\ \ f(x)=\frac{1}{x^2},\ \ A_n=[a_n,b_n],\ a_n\to 1,\ b_n\to+\infty.$$

Оскільки функція $f(x)$ як неперервна є інтегровною за Лебегом на довільній вимірній підмножині скінченної міри, то отримуємо, що

$$\int_{[1,+\infty)}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{[a_n,b_n]}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=1.$$

Більшість властивостей інтеграла Лебега на множині скінченної міри, залишаються справедливими і для інтегралів Лебега по множинах нескінченної міри.

Але, наприклад, на множині нескінченної міри не будуть виконуватися перша, четверта та сьома з основних властивостей інтеграла Лебега, справедливі для множин скінченної міри.

24. Нерівність Чебишова та наслідок з неї

Серед властивостей інтеграла Лебега виділимо ще одну важливу у застосуваннях нерівність:

Нерівність Чебишова. *Якщо функція* $\varphi(x)\ge 0$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *і число* $c>0$, *то*

$$\mu\{x: x\in A, \varphi(x)\ge c\}\le\frac{1}{c}\int_A\varphi(x)d\mu.$$

Справді, якщо $A'=\{x: x\in A, \varphi(x)\ge c\}$, то

$$\int_A\varphi(x)d\mu=\int_{A'}\varphi(x)d\mu+\int_{A\setminus A'}\varphi(x)d\mu\ge\int_{A'}\varphi(x)d\mu\ge c\mu(A').$$

А отже,

$$\mu(A') \le \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu.$$

Наслідок. *Якщо*

$$\int_A |f(x)|d\mu = 0,$$

то $f(x)=0$ *майже скрізь на множині* A.

Справді, за нерівністю Чебишова

$$\mu\left\{x : x\in A, |f(x)| \ge \frac{1}{n}\right\} \le n\int_A |f(x)|d\mu = 0$$

при кожному $n\in N$. Тому з півадитивності міри Лебега отримуємо

$$\mu\{x : x\in A, f(x)\ne 0\} \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left\{x : x\in A, |f(x)| \ge \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Розділ II.
Метричні простори

1. Означення та основні приклади метричних просторів

Нехай X – множина елементів довільної природи. Якщо для будь-яких елементів x та y цієї множини визначена дійсна функція $\rho(x,y)$, яка задовольняє аксіоми:

1) $\rho(x,y)\ge 0$, причому $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) *аксіома симетрії* $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) *нерівність трикутника* $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$,

то пару (X,ρ) називають *метричним простором*, а функцію $\rho(x,y)$ – *метрикою* або *відстанню*.

Розглянемо основні приклади метричних просторів:

1. R^1. $X=R,\ \rho(x,y)=|x-y|$.

2. R^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$.

3. R_1^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$.

4. R_0^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$.

5. R_p^n. $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\ge 1$.

6. $C[a,b]$. X – множина неперервних на $[a,b]$ функцій,
$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

7. $C_2[a,b]$. X – множина неперервних на $[a,b]$ функцій,
$$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}.$$

8. $C_1[a,b]$. X – множина неперервних на $[a,b]$ функцій,
$$\rho(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

9. $C_p[a,b]$. $X-$ множина неперервних на $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

10. l_2. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\ 2}<\infty$,

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}.$$

11. l_1. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$,

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|.$$

12. l_p. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$,

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

13. *m*. $X=\{(x_1,x_2,...,x_k,...)\}$, $\sup\limits_{k\in N}|x_k|<\infty$,

$$\rho(x,y)=\sup_{k\in N}|x_k-y_k|.$$

2. Збіжність у метричних просторах

Важливою особливістю метричних просторів є можливість введення в них поняття границі. Для цього спочатку сформулюємо деякі допоміжні означення:

Замкненою кулею $K[x_0,r]$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)\le r$.

Відкритою кулею $K(x_0,r)$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)<r$. Відкрита куля радіуса ε з центром у точці x_0 називається $\varepsilon-$*околом* точки x_0 і позначається $O_\varepsilon(x_0)$.

Точка x_0 називається *границею послідовності* (x_n) точок метричного простору (X,ρ), якщо у кожному околі цієї точки містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера. З використанням математичної символіки це означення можна записати так:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon):\; \forall n > N \;\; \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Враховуючи відоме з математичного аналізу означення границі числової послідовності, можна також записати, що

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Зауважимо, що у просторі R^1 це означення співпадає з означенням границі числової послідовності, а у просторі $C[a,b]$ – з означенням рівномірної збіжності функціональної послідовності.

Теорема. *Якщо послідовність* (x_n) *точок метричного простору* (X,ρ) *має границю, то ця границя єдина.*

Доведення. Припустимо, що послідовність (x_n) має границі x_0 та x_0'. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon):\; \forall n > N \;\; \rho(x_n, x_0) < \varepsilon,\; \rho\left(x_n, x_0'\right) < \varepsilon.$$

Звідси за нерівністю трикутника отримуємо, що

$$\rho\left(x_0, x_0'\right) \le \rho(x_n, x_0) + \rho\left(x_n, x_0'\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

А оскільки число $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то $\rho\left(x_0, x_0'\right) = 0,$ тобто $x_0' = x_0.$

3. Класифікація точок множини у метричному просторі

Нехай M – довільна множина метричного простору (X,ρ). Проведемо *класифікацію точок* такої множини.

Точка x_0 називається *ізольованою точкою* множини M, якщо існує такий окіл цієї точки, в якому немає інших точок з множини M, крім точки x_0.

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини M, якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю входить у множину M.

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M, відмінний від x_0. Зрозуміло, що при цьому в кожному такому околі буде знаходитися безліч елементів з даної множини, хоч сама точка x_0 не обов'язково повинна належати до M.

Кожна внутрішня точка множини є граничною точкою цієї множини, але не кожна гранична точка є внутрішньою. Наприклад, всі точки канторової множини є граничними, але жодна з них не є внутрішньою.

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M. Всяка гранична точка множини є точкою дотику, але не всяка точка дотику є граничною.

Сукупність усіх точок дотику множини M називається *замиканням* цієї множини і позначається $[M]$. Наприклад, замиканням множини раціональних чисел у просторі R^1 є множина всіх дійсних чисел.

У загальному випадку замикання множини складається з об'єднання граничних та ізольованих точок цієї множини, причому множини таких точок між собою не перетинаються.

У термінах збіжних послідовностей точки дотику та граничні точки множини характеризуються таким чином:

Для того, щоб точка x_0 була точкою дотику множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність (x_n) точок множини M, яка збігається до x_0.

Для того, щоб точка x_0 була граничною точкою множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність (x_n) різних точок множини M, яка збігається до x_0.

4. Скрізь щільні множини. Сепарабельні простори

Множина A називається *щільною* у множині B, якщо $[A] \supset B$. Множина A називається *скрізь щільною* у метричному просторі (X, ρ), якщо $[A] = X$. Наприклад, за теоремою Дедекінда такою є множина раціональних чисел у просторі R^1.

Метричні простори, в яких існує злічення скрізь щільна множина, називаються *сепарабельними метричними просторами*. Зокрема, зі зліченності множини раціональних чисел випливає сепарабельність простору R^1.

У просторах R_p^n, $p \geq 1$, $p = 0$, зліченні скрізь щільні множини утворюють елементи $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ з раціональними координатами.

У просторах $C[a,b]$ та $C_p[a,b]$, $p \geq 1$, такі множини складаються з многочленів із раціональними коефіцієнтами.

У просторах l_p, $p \geq 1$, ними є сукупності послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, у кожній з яких всі елементи раціональні і лише скінченна кількість таких елементів відмінна від нуля, причому для різних послідовностей ця кількість може бути різною.

Тому кожен з цих просторів є сепарабельним. Але, наприклад, *простір m обмежених послідовностей несепарабельний*.

Справді, розглянемо у цьому просторі лише послідовності, що складаються з нулів та одиниць. Вони утворюють незліченну множину, рівну за потужністю множині дійсних чисел відрізка $[0;1]$, записаних у двійковій системі числення. Відстань між довільними двома такими послідовностями дорівнює 1. Оточимо кожну точку цієї множини замкненою кулею радіуса $r < 0,5$. Оскільки такі кулі не перетинаються, то в кожній з них має бути принаймні по одному елементу скрізь щільної в m множини. Отже, жодна скрізь щільна множина в цьому просторі не є зліченною.

5. Відкриті та замкнені множини і зв'язок між ними

Множина M, яка співпадає зі своїм замиканням, називається *замкненою*.

У довільному метричному просторі (X, ρ) множини $\varnothing$ та X замкнені. Замкненими у ньому будуть і всі множини зі скінченною кількістю елементів та замкнені кулі цього простору.

Теорема 1. *Перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.*

На підставі цієї теореми, зокрема, можна зробити висновок, що *канторова множина є замкненою множиною.*

Справді, кожна з множин K_n замкнена як об'єднання скінченної кількості відрізків, а сама множина K замкнена як перетин зліченної кількості замкнених множин.

Зауважимо, що *об'єднання нескінченної кількості замкнених множин не обов'язково замкнена множина.*

Наприклад, якщо

$$F_n = \left[\frac{1}{n}; 2\right],$$

то множина

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0; 2]$$

не є замкненою, бо не містить своєї точки дотику $x_0 = 0$.

Множина M, всі точки якої є внутрішніми, називається *відкритою*.

У довільному метричному просторі (X, ρ) множини $\varnothing$ та X відкриті. Крім них, інших множин, які би одночасно були і відкритими, і замкненими не існує. Відкритими множинами є і всі відкриті кулі довільного метричного простору. А *у просторі R^1 всяка не порожня відкрита множина є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.*

Звідси, зокрема, випливає, що *всяка не порожня відкрита множина на числовій прямій має потужність континууму.*

Теорема 2. *Для того, щоб множина M була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення $X \setminus M$ було замкненою множиною.*

Звідси отримуємо, що *всяка замкнена множина у просторі R^1 утворюється викиданням із числової прямої скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.*

Ще один важливий наслідок з теорем 1 та 2 випливає з принципу двоїстості:

Теорема 3. *Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина.*

Зауважимо, що *перетин нескінченної кількості відкритих множин не обов'язково буде відкритою множиною*.

6. Поняття про топологічні простори

Нехай X – множина елементів довільної природи. Виділимо систему τ її підмножин, які будемо називати *відкритими множинами*, так, щоб виконувалися умови:

1) $X \in \tau, \varnothing \in \tau$;

2) Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа множин із τ належать до τ.

Систему множин τ називають *топологією*, а пару $\left(X,\tau\right)$ – *топологічним простором.*

Доповнення до відкритих множин топологічного простору називають *замкненими множинами*. Зокрема, з принципу двоїстості випливатимуть такі властивості:

1) множини X та $\varnothing$ замкнені;
2) перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.

Кожен метричний простір є топологічним простором. Тому топологічні простори є природним узагальненням метричних просторів.

Але існують топологічні простори, які не є метричними. Наприклад, якщо $X=\{a,b\}$, а система τ складається з множин $X,\varnothing,\{a\}$. Такий топологічний простір часто називають *зв'язною двоточкою.*

Околом точки x_0 топологічного простору $\left(X,\tau\right)$ називають всяку відкриту множину, яка містить цю точку.

Якщо в кожному околі точки x_0 є принаймні одна точка множини M, відмінна від x_0, то x_0 називають *граничною точкою* цієї множини. На відміну від метричних просторів, тут уже не можна стверджувати, що в кожному околі граничної точки буде знаходитися безліч точок множини M.

Відповідно точка x_0 називається *точкою дотику* множини M, якщо кожен її окіл містить хоч одну точку з цієї множини. Сукупність усіх точок дотику множини M, так само як і в метричних просторах, називають *замиканням* множини M.

Множина M називається *скрізь щільною* у топологічному просторі (X,τ), якщо $[M]=X$. Так само, як і метричні простори, топологічні простори, які містять зліченну скрізь щільну множину, називаються *сепарабельними топологічними просторами*.

7. Компактність. Теорема Арцела

У математичному аналізі фундаментальну роль відіграє наступна ***лема Гейне-Бореля:*** *З будь-якого покриття відрізка $[a,b]$ числової прямої інтервалами можна вибрати скінченне підпокриття.*

Це твердження залишається справедливим, якщо інтервали замінити довільними відкритими множинами. У зв'язку з цим сформулюємо наступне означення:

Множина M метричного простору (X,ρ) називається *компактною*, якщо із всякого її покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття. Зокрема, якщо з кожного покриття множини X відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, то такий метричний простір називають *компактним*.

Таким чином, лема Гейне-Бореля стверджує, що у просторі R^1 відрізок – компактна множина. Зауважимо, що справедливим буде і більш загальне твердження: *у просторі R^n всяка замкнена обмежена множина є компактною.*

Відзначимо також, що *у компактному просторі всяка нескінченна множина має принаймні одну граничну точку.*

Множина M метричного простору (X,ρ) називається *передкомпактною* множиною, якщо її замикання є компактна множина.

У просторі R^n передкомпактність множини рівносильна її обмеженості. Але в ряді інших просторів умови передкомпактності дещо складніші. Зокрема, сформулюємо такі умови для метричного простору $C[a,b]$.

Сім'я Φ функцій φ, визначених на відрізку $[a,b]$, називається *рівномірно обмеженою*, якщо існує таке число K, що

$$\left|\varphi(x)\right| \le K$$

для всіх $x \in [a,b]$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

Сім'я $\Phi = \{\varphi\}$ називається *одностайно неперервною* на відрізку $[a,b]$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\left|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right| < \varepsilon$$

для всіх $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких що $\rho(x_1, x_2) < \delta$, і всіх $\varphi \in \Phi$.

Теорема Арцела. *Для того, щоб сім'я неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій була передкомпактною у просторі $C[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.*

8. Фундаментальні послідовності та їх зв'язок зі збіжними послідовностями

Послідовність (x_n) точок метричного простору (X,ρ) називається *фундаментальною*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всіх $n > N,\ m > N$.

Теорема 1. *Якщо послідовність (x_n) збіжна, то вона фундаментальна.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $n > N,\ m > N$. Звідси за нерівністю трикутника отримуємо

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $n > N,\ m > N$.

Зауважимо, що *обернене твердження до теореми 1 справедливе не у кожному метричному просторі.* Наприклад, на множині раціональних чисел $X = Q$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ послідовність десяткових наближень з недостачею числа $\sqrt{2}$ є фундаментальною, але не є збіжною, бо число $x_0 = \sqrt{2}$ ірраціональне.

Теорема 2. *Якщо послідовність (x_n) фундаментальна, а деяка її підпослідовність (x_{n_k}) збігається до x_0, то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Доведення. З умов теореми випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\rho(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $n_k > N,\ \ n > N,\ \ m > N$. Покладаючи $m = n_k$, за нерівністю трикутника отримаємо

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_{m=n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $n > N$.

9. Повні метричні простори

Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним метричним простором*.

З курсу математичного аналізу відомий *критерій Коші* збіжності числової послідовності: *для того, щоб послідовність (x_n) була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайшовся такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для всіх $n > N,\ m > N$.*

Оскільки у просторі R^1 метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, то з критерію Коші безпосередньо випливає повнота даного простору.

Аналогічно отримуємо повноту простору $C[a,b]$ з критерію Коші рівномірної збіжності для функціональних послідовностей, врахувавши, що границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій – неперервна функція.

Теорема. *Простір* R^n *повний.*

Доведення. Нехай $\left(x^p\right)$ – довільна фундаментальна послідовність точок простору R^n, де $x^p = \left(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p\right)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^p - y_k^q\right)^2} < \varepsilon$$

для всіх $p > N,\ q > N$. Звідси випливає, що при кожному фіксованому k для всіх $p > N,\ q > N$ виконується нерівність

$$\left|x_k^p - x_k^q\right| < \varepsilon.$$

Отже, кожна з числових послідовностей $\left(x_k^p\right)$ є фундаментальною, а значить, і збіжною. Нехай

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^p,\ k = 1, 2, \dots, n, \quad x = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right).$$

Тоді $\lim\limits_{p\to\infty} x^p = x \in R^n$. А отже, даний простір є повним.

Відзначимо, що аналогічно доводять повноту просторів $R_p^n,\ p = 0,\ p \ge 1$. Повними будуть і простори m та $l_p,\ p \ge 1$.

10. Неповні метричні простори. Доповнення простору

Як показує приклад простору раціональних чисел, не всі метричні простори є повними.

Доведемо, що і *простір* $C_1[-1;1]$ *неповний.* Для цього розглянемо послідовність неперервних на $[-1;1]$ функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} -1,\ t \in \left[-1; -\dfrac{1}{n}\right], \\ nt,\ t \in \left[-\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n}\right], \\ 1, \qquad t \in \left[\dfrac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$$

Вона фундаментальна, бо

$$\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x_m(t)| dt < \frac{1}{\min\{m,n\}}.$$

Припустимо, що границею цієї послідовності є неперервна на $[-1;1]$ функція $x_0(t)$, і розглянемо функцію

$$x(t) = \begin{cases} -1, \ t \in [-1;0), \\ 1, \quad t \in [0;1]. \end{cases}$$

Далі зауважимо, що в нерівності

$$\int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)| dt \le \int_{-1}^{1} |x(t) - x_n(t)| dt + \int_{-1}^{1} |x_n(t) - x_0(t)| dt$$

внаслідок неперервності функції $x_0(t)$ інтеграл у її лівій частині є додатним, а перший доданок у правій частині дорівнює $\frac{1}{n}$ і прямує до нуля при $n \to \infty$. Тому при $n \to \infty$ інтеграл $\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x_0(t)| dt$ прямувати до нуля не може.

Аналогічно доводиться неповнота довільного простору $C_1[a,b]$. Неповними є і всі простори $C_p[a,b]$, $p > 1$.

Відзначимо також, що *для кожного неповного метричного простору* (X,ρ) *існує єдиний з точністю до ізометрії повний метричний простір* (X',ρ'), *що* $X' = [X]$ *і* $\rho'(x,y) = \rho(x,y)$ *для всіх точок* $x,y \in X$. Такий простір називається *доповненням простору* (X,ρ). Зокрема, простір R^1 є доповненням простору раціональних чисел.

11. Теорема про вкладені кулі

У математичному аналізі широко використовують так звану лему про вкладені відрізки. У функціональному аналізі аналогічну роль відіграє *теорема про вкладені кулі.*

Теорема. *Для того, щоб метричний простір* (X,ρ) *був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому всяка послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність. Нехай простір (X,ρ) повний, а $K_1[x_1,r_1]\supset K_2[x_2,r_2]\supset\ldots\supset K_n[x_n,r_n]\supset\ldots$ – послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких r_n прямують до нуля. Послідовність (x_n) центрів цих куль фундаментальна, бо $\rho(x_m,x_n)<r_n$ при $m>n,$ а $r_n\to 0$ при $n\to\infty.$ Оскільки простір повний, то існує границя цієї послідовності $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$ Точка x є точкою дотику для всіх куль $K_n[x_n,r_n],$ бо кожна з цих куль містить всі точки послідовності $(x_n),$ починаючи з номера n відповідно. А оскільки такі кулі замкнені, то x належить всім цим кулям, а значить, і їхньому перетину.

Достатність. Нехай (x_n) – довільна фундаментальна послідовність точок простору $(X,\rho).$ Внаслідок її фундаментальності ми можемо вибрати з неї таку підпослідовність $\left(x_{n_k}\right),$ що при кожному $k\in N$ для всіх $n\ge n_k$ будуть виконуватися нерівності

$$\rho\left(x_n,x_{n_k}\right)<\frac{1}{2^k}.$$

Розглянемо тепер послідовність вкладених одна в одну замкнених куль з центрами у точках цієї підпослідовності і радіусами $r_{n_k}=\dfrac{1}{2^{k-1}}$ відповідно. За умовою теореми така послідовність куль має спільну точку, яку позначимо $x.$ Оскільки радіуси куль прямують до нуля, то x є границею підпослідовності $\left(x_{n_k}\right).$ Але послідовність (x_n) фундаментальна, то також $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x.$

12. Неперервні відображення метричних просторів

Нехай (X,ρ_X) та (Y,ρ_Y) – два метричні простори і f – відображення, яке кожному $x\in X$ ставить у відповідність деякий елемент $y=f(x)\in Y.$ Це відображення називається *неперервним в точці* $x_0\in X,$ якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$ таких, що $\rho_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Якщо відображення f неперервне у всіх точках множини X, то його називають *неперервним відображенням*.

У випадку, коли $(X, \rho_X) = (Y, \rho_Y) = R^1$ означення неперервного відображення зводиться до означення неперервної функції.

Неперервне відображення компактного простору теж є компактним простором. Відповідно, *неперервне відображення компактної множини є компактною множиною.*

Справедливе також таке ***узагальнення теореми Вейєрштраса:*** *Якщо $M \in X -$ компактна множина, а $(Y, \rho_Y) = R^1$, то неперервна функція, визначена на цій множині, є обмеженою і набуває на ній свого найбільшого та найменшого значень.*

Відображення f називається *рівномірно неперервним на* X, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x_1, x_2 \in X$ таких, що $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, виконується нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Справедливе наступне ***узагальнення теореми Кантора:*** *Якщо $M \in X -$ компактна множина, то неперервне відображення, визначене на цій множині, є рівномірно неперервним.*

Відзначимо також ще одне важливе узагальнення відомої теореми з математичного аналізу: *границя рівномірно збіжної послідовності неперервних відображень теж є неперервним відображенням.*

13. Принцип стискаючих відображень та його модифікації

Нехай $(X, \rho) -$ метричний простір. Відображення $A : X \to X$ цього простору самого в себе називається *стискаючим*, якщо існує таке число $\alpha < 1$, що для будь-яких точок $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x, y).$$

Усяке стискаюче відображення є неперервним. Це випливає з нерівності

$$\rho\left(Ax, Ax_0\right) \le \alpha\rho\left(x, x_0\right) \le \rho\left(x, x_0\right).$$

Точка x називається *нерухомою точкою* відображення A, якщо $Ax = x$.

Теорема Банаха (*принцип стискаючих відображень* ***).*** *У повному метричному просторі всяке стискаюче відображення має одну і тільки одну нерухому точку.*

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка повного метричного простору $\left(X, \rho\right)$, $A: X \to X$ – стискаюче відображення. Розглянемо послідовність точок цього простору

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ \ldots,\ x_n = Ax_{n-1},\ \ldots$$

Вона фундаментальна, бо, вважаючи $m > n$, отримуємо

$$\rho\left(x_n, x_m\right) = \rho\left(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}\right) \le \alpha\rho\left(x_{n-1}, x_{m-1}\right) \le \ldots \le \alpha^n \rho\left(x_0, x_{m-n}\right) \le$$

$$\le \alpha^n \left[\rho\left(x_0, x_1\right) + \rho\left(x_1, x_2\right) + \ldots + \rho\left(x_{m-n-1}, x_{m-n}\right)\right] \le$$

$$\le \alpha^n \left[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right] \rho\left(x_0, x_1\right) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho\left(x_0, x_1\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Оскільки простір повний, то така послідовність має деяку границю $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Внаслідок неперервності відображення A отримуємо

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, x – нерухома точка відображення A. Вона єдина, бо з рівностей $Ax = x$ та $Ay = y$ випливає, що

$$\rho\left(x, y\right) = \rho\left(Ax, Ay\right) \le \alpha\rho\left(x, y\right).$$

При $\alpha < 1$ це можливе лише у випадку $\rho\left(x, y\right) = 0$, тобто $y = x$.

Зауваження 1. Для компактного простору $\left(X, \rho\right)$ вимогу стискання можна дещо послабити, замінивши її для всіх $x \ne y$ нерівністю $\rho\left(Ax, Ay\right) < \rho\left(x, y\right)$.

Зауваження 2. Для неперервного відображення A достатньо лише вимагати, щоб деякий степінь цього відображення був стискаючим відображенням.

14. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування алгебраїчних рівнянь

Принцип стискаючих відображень не лише доводить існування та єдиність нерухомої точки, а й дає практичний спосіб її знаходження. Проілюструємо це на розв'язуванні алгебраїчного рівняння

$$F(x)=0.$$

Припустимо, що $F(a)<0,\ F(b)>0$ і для всіх $x\in[a,b]$ виконується нерівність $0<K_1\le F'(x)\le K_2$. Тоді при $\lambda>0$ запишемо дане рівняння у рівносильному до нього вигляді

$$x-\lambda F(x)=x.$$

Розглянемо функцію

$$f(x)=x-\lambda F(x).$$

Оскільки

$$f'(x)=1-\lambda F'(x),$$

то

$$1-\lambda K_2\le f'(x)\le 1-\lambda K_1.$$

Якщо вибрати $\lambda>0$ так, щоб виконувалася нерівність $1-\lambda K_2>-1$, то для всіх $x\in[a,b]$ отримаємо

$$|f'(x)|\le\alpha=\max\{|1-\lambda K_2|,|1-\lambda K_1|\}<1.$$

Оскільки за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|,\ \xi\in(x_1,x_2),$$

то при такому λ функція $f(x)$ буде стискаючим відображенням відрізка $[a,b]$ в себе.

За теоремою Банаха таке відображення матиме єдину нерухому точку x, яку можна знайти *методом послідовних наближень*:

1) вибираємо довільну точку $x_0\in(a,b)$;

2) послідовні наближення шукаємо за формулою

$$x_n=f(x_{n-1});$$

3) шукаємо $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Знайдена у такий спосіб нерухома точка відображення $f(x)$ буде єдиним розв'язком рівняння $F(x)=0$ на відрізку $[a,b]$.

15. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо відображення A метричного простору R^n в себе, яке задається системою лінійних рівностей

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки

$$\rho^2\left(y', y''\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x'_j - x''_j\right) \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2\left(x', x''\right),$$

то звідси отримуємо таку достатню умову стискання

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \le \alpha < 1.$$

При її виконанні існує єдина точка $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ така, що

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причому послідовні наближення до цього розв'язку мають вигляд

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_{i,} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а в ролі $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ можна вибрати довільну точку з простору R^n.

Зауважимо, що аналогічне відображення можна розглядати і у просторах R_0^n та R_1^n. При цьому достатні умови стискання матимуть вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \text{ у просторі } R_0^n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \text{ у просторі } R_1^n.$$

Самі ж послідовні наближення до розв'язку системи рівнянь

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

шукають так само, як і у просторі R^n.

16. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0,$$

де функція $f(x, y)$ неперервна, а отже і обмежена так, що

$$|f(x, y)| \le M,$$

у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0) і задовольняє у ньому умову Ліпшиця за змінною y:

$$\left| f\left(x, \overline{y}\right) - f\left(x, \overline{\overline{y}}\right) \right| \le L \left| \overline{y} - \overline{\overline{y}} \right|.$$

Така задача Коші рівносильна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt.$$

Виберемо $d > 0$ так, щоб виконувалася умова $Ld < 1$, і визначимо відображення

$$Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt$$

для неперервних на $[x_0 - d, x_0 + d]$ функцій, які задовольняють умову $|y(x) - y_0| \le Md$. Простір таких функцій є замкненим у просторі $C[x_0 - d, x_0 + d]$. Тому він теж повний.

Оскільки

$$|Ay(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt \right| \le Md,$$

то відображення A переводить цей простір в себе. Крім того, це відображення стискаюче, бо

$$\left| A\overline{y}(x) - A\overline{\overline{y}}(x) \right| \le \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, \overline{y}(t)\right) - f\left(t, \overline{\overline{y}}(t)\right) \right| dt \le Ld \left| \overline{y}(x) - \overline{\overline{y}}(x) \right|.$$

Отже, існує єдина нерухома точка такого відображення, а з нею і єдиний розв'язок задачі Коші в області

$$G = \left\{ (x, y) : |x - x_0| \le d, |y - y_0| \le Md \right\}.$$

Цей розв’язок можна знайти методом послідовних наближень:

1) вибираємо довільну неперервну функцію $y_0(x)$, наприклад, $y_0(x) \equiv y_0$;

2) шукаємо послідовні наближення за формулою

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt, \; n \in N;$$

3) знаходимо розв’язок $y(x) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n(x)$.

17. Застосування принципу стискаючих відображень до розв’язування інтегральних рівнянь

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt + f(x),$$

в якому ядро $K(x,t)$ неперервне у квадраті

$$Q = \left\{(x,t) : a \le x \le b, a \le t \le b\right\},$$

функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а λ – довільний параметр.

Відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt + f(x)$$

переводить простір $C[a,b]$ в себе.

Оскільки

$$\left|A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x)\right| \le |\lambda| \int_a^b \left|K(x,t)\right| \cdot \left|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)\right| dt \le$$

$$\le |\lambda| M (b-a) \max_{a \le t \le b} \left|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)\right|,$$

де

$$M = \max_{(x,t) \in Q} \left|K(x,t)\right|,$$

то достатньою умовою для його стискання є нерівність

$$|\lambda| M (b-a) < 1.$$

При її виконанні розв'язок такого інтегрального рівняння можна знайти методом послідовних наближень:

1) вибираємо довільну неперервну функцію $y_0(x)$, наприклад, $y_0(x) \equiv f(x)$;

2) шукаємо послідовні наближення за формулою

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t)\,dt + f(x),\ n \in N;$$

3) знаходимо розв'язок $y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$.

Зауважимо, що даний метод буде застосовний і при виконанні дещо слабшої вимоги

$$|\lambda| \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt < 1.$$

Аналогічно можна розв'язувати і лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) y(t)\,dt + f(x),\ a \le x \le b,$$

ядро якого неперервне при $a \le t \le x \le b$.

Це рівняння є частковим випадком рівняння Фредгольма, але характерне тим, що має у просторі $C[a,b]$ єдиний розв'язок при кожному $\lambda \in R$. При цьому послідовні наближення знаходять за формулою

$$y_n(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) y_{n-1}(t)\,dt + f(x),\ n \in N.$$

18. Приклади розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом послідовних наближень

1. Розв'язати методом послідовних наближень задачу Коші

$$\begin{cases} y' = 5 - y + 2x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана задача рівносильна рівнянню

$$y(x) = \int_0^x \big(5 - y(t) + 2t\big)\,dt.$$

Виберемо

$$y_0(x) \equiv 0$$

і будемо шукати послідовні наближення за формулою

$$y_n(x) = \int_0^x \left(5 - y_{n-1}(t) + 2t\right)dt, \ n \in N.$$

Тоді

$$y_1(x) = \int_0^x (5 + 2t)\,dt = 5x + x^2,$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(5 - \left(5t + t^2\right) + 2t\right)dt = 5x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(5 - \left(5t - \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) + 2t\right)dt = 5x - 3\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{2x^4}{4!}, \ldots$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$y_n(x) = 5x - 3\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}\right) - (-1)^n \cdot \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отже,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 5x - 3\left(e^{-x} - (1 - x)\right) - 0 = -3e^{-x} + 2x + 3.$$

Перевірка показує, що знайдена функція є розв’язком даної задачі Коші на всій числовій прямій.

2. Розв’язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння

$$y(x) = \int_0^1 xt^2 y(t)\,dt + x^2.$$

Розв’язання. Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, причому:

$$\lambda = 1, \ a = 0, \ b = 1, \ K(x,t) = xt^2, \ \ f(x) = x^2.$$

Оскільки

$$M = \max_{0\le x,t\le 1}\left|xt^2\right| = 1,$$

то умова $|\lambda| M (b - a) < 1$ не виконується. Але

$$|1| \cdot \max_{0\le x\le 1}\int_0^1 \left|xt^2\right| dt = \frac{1}{3} < 1,$$

то метод послідовних наближень можна застосовувати.

Виберемо

$$y_0\left(x\right)=x^2$$

і будемо шукати послідовні наближення за формулою

$$y_n\left(x\right)=\int_0^1 xt^2 y_{n-1}\left(t\right)dt+x^2,\ n\in N.$$

Тоді

$$y_1\left(x\right)=\int_0^1 xt^2\cdot t^2dt+x^2=\frac{1}{5}x+x^2,$$

$$y_2\left(x\right)=\int_0^1 xt^2\cdot\left(\frac{1}{5}t+t^2\right)dt+x^2=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}\right)x+x^2,$$

$$y_3\left(x\right)=\int_0^1 xt^2\cdot\left(\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}\right)t+t^2\right)dt+x^2=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)x+x^2,...$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$y_n\left(x\right)=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)x+x^2.$$

Отже,

$$y\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}y_n\left(x\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}x+x^2=\frac{4}{15}x+x^2.$$

Розділ III.
Лінійні, нормовані та евклідові простори

1. Означення та приклади лінійних просторів

Непорожня множина L називається *лінійним простором*, якщо у ній введені операції додавання та множення на число так, що виконуються умови:

1. $\forall x, y \in L \;\; x + y = y + x$ (*комутативність*);
2. $\forall x, y, z \in L \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$ (*асоціативність*);
3. $\exists 0 : \forall x \in L \;\; x + 0 = x$ (*існування нуля*);
4. $\forall x \in L \;\; \exists - x : x + (-x) = 0$ (*існування протилежного елемента*);
5. $\forall x \in L \;\; 1 \cdot x = x$;
6. $\forall x \in L \;\; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$;
7. $\forall x \in L \;\; (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;
8. $\forall x, y \in L \;\; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Якщо в L введена операція множення на комплексні числа, то такий простір називають *комплексним лінійним простором.*

Наведемо приклади основних лінійних просторів:

1. R^1. Множина дійсних чисел зі звичайними операціями додавання та множення чисел.
2. $C[a,b]$. Множина неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число.
3. R^n. Множина впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.
4. C^n. Множина впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ комплексних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.
5. l_2. Множина послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$, для яких

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

з покоординатними операціями додавання та множення на число.

6. c. Множина збіжних послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

7. c_0. Множина збіжних до нуля послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

8. m. Множина обмежених послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

9. R^∞. Множина довільних послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ дійсних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.

Лінійні простори L та L^* називаються *ізоморфними*, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, узгоджену з операціями, тобто

$$x \leftrightarrow x^*,\ y \leftrightarrow y^* \Rightarrow\ x + y \leftrightarrow x^* + y^*,\ \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*.$$

Ізоморфні простори можна розглядати як різні реалізації одного і того ж лінійного простору.

2. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами

Елементи $x, y, ..., w$ лінійного простору L називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність

$$\alpha x + \beta y + ... + \lambda w = 0$$

можлива лише умові, що всі коефіцієнти $\alpha, \beta, ..., \lambda$ є нулями. У протилежному випадку таку систему елементів називають *лінійно залежною*.

Нескінченну систему елементів лінійного простору L називають *лінійно незалежною*, якщо всяка її скінченна підсистема лінійно незалежна.

Якщо у просторі L існує лінійно незалежна система із n елементів, а всяка система із $n+1$ елементів лінійно залежна, то кажуть, що цей простір має *розмірність* n. Такими, зокрема, є простори R^n та C^n.

Довільна лінійно незалежна система із n елементів $n-$вимірного простору називається *базисом* цього простору.

Якщо у просторі L можна вказати лінійно незалежну систему із довільного скінченного числа елементів, то такий простір називають *нескінченно вимірним*. Такими є простори:

$$C[a,b],\ l_2,\ c,\ c_0,\ m,\ R^\infty.$$

Непорожня підмножина $L' \subset L$ називається *підпростором* простору $L,$ якщо вона сама утворює лінійний простір відносно тих же операцій, що й $L.$ Якщо $L' \subset L$ містить відмінні від нуля елементи і не співпадає з $L,$ то його називають *власним підпростором* простору $L.$ Наприклад, серед просторів $l_2,\ c_0,\ c,\ m,\ R^\infty$ кожен є власним підпростором наступного. *Перетин будь-якої множини підпросторів простору L теж підпростором цього простору*.

Якщо $\{x_\alpha\}-$ довільна множина елементів лінійного простору $L,$ то перетин усіх підпросторів цього простору, які містять $\{x_\alpha\},$ називають *лінійною оболонкою* множини $\{x_\alpha\}$ і позначають $L(\{x_\alpha\}).$ Лінійно незалежна система елементів лінійного простору L називається *базисом Гамеля*, якщо її лінійна оболонка співпадає з $L.$

Елементи $x, y \in L$ називаються *еквівалентними* відносно підпростору $L' \subset L,$ якщо $x - y \in L'.$ Сукупність класів еквівалентних між собою елементів називають *фактор-простором* простору L по підпростору L' і позначають $L/L'.$

Якщо $x^* \in L/L',\ y^* \in L/L'$ і $x \in x^*,\ y \in y^*,$ то під *сумою* $x^* + y^* \in L/L'$ розуміють такий клас, який містить елемент $x + y,$ а під *добутком* $\alpha x^* \in L/L' -$ клас, який містить елемент $\alpha x.$ Фактор-простір із введеними таким чином операціями стає лінійним простором. Його розмірність називають *корозмірністю* підпростору L' у просторі $L.$

Якщо L' має корозмірність $n,$ то існують такі елементи $x_1, x_2, ..., x_n \in L,$ що кожен елемент $x \in L$ єдиним чином представляється у вигляді

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + x',\ x' \in L'.$$

3. Топологічні лінійні простори

Множина L називається *топологічним лінійним простором*, якщо:

1. L − лінійний простір;
2. L − топологічний простір;
3. Операції додавання і множення на числа в L неперервні відносно заданої топології.

Остання умова означає таке:

1) якщо $z_0 = x_0 + y_0$, то для кожного околу $O(z_0)$ знайдуться такі околи $O(x_0)$ та $O(y_0)$, що $x + y \in O(z_0)$ при $x \in O(x_0)$, $y \in O(y_0)$;

2) якщо $y_0 = \alpha_0 y_0$, то для кожного околу $O(y_0)$ існує такий окіл $O(x_0)$ і таке число $\delta > 0$, що $\alpha x \in O(y_0)$ при $x \in O(x_0)$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

Оскільки у топологічному лінійному просторі *всякий окіл довільної точки* x *можна представити у вигляді*

$$O(x) = x + O(0),$$

то топологія такого простору цілком визначається заданням *системи околів нуля*. Наприклад, у топологічному лінійному просторі R^∞ кожен такий окіл нуля $U(k_1,...,k_m;\varepsilon)$ складається із тих елементів $x \in R^\infty$, які задовольняють умови:

$$\left|x_{k_i}\right| < \varepsilon, \ i = 1,...,m.$$

З неперервності операцій додавання та множення на числа в топологічному лінійному просторі L безпосередньо випливають такі твердження:

1. *Якщо множини* X *та* Y *відкриті, то і множина* $X + Y$, *тобто сукупність елементів вигляду* $x + y$, $x \in X$, $y \in Y$, *відкрита.*

2. *Якщо множина* X *відкрита, то і множина* αX, *тобто сукупність елементів вигляду* αx, $x \in X$, *відкрита при кожному* $\alpha \neq 0$.

3. *Якщо множина* X *замкнена, то і множина* αX, *замкнена при кожному* α.

4. Нормовані простори

Важливим прикладом топологічних лінійних просторів є нормовані простори.

Лінійний простір L називають *нормованим простором,* якщо кожному елементу $x \in L$ поставлено у відповідність таке дійсне число $\|x\|$, що виконуються умови:

1. $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Всякий нормований простір стає метричним простором, якщо покласти

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Очевидно, що при цьому $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Враховуючи ці співвідношення, нормовані простори позначають так само, як і відповідні їм метричні простори. Аналогічні вимоги ставляться і до їх елементів x. Наведемо приклади норм у деяких із цих просторів:

1. R^1. $\quad \|x\| = |x|$.
2. R^n. $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2}$.
3. R_1^n. $\quad \|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
4. R_0^n. $\quad \|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.
5. $C[a,b]$. $\quad \|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.
6. $C_2[a,b]$. $\quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b \left(x(t)\right)^2 dt}$.
7. $C_1[a,b]$. $\quad \|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$.
8. l_2. $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$.
9. m. $\quad \|x\| = \sup_{k \in N} |x_k|$.

Зауважимо, що з одного лінійного простору можна отримати різні нормовані простори, задавши у ньому по різному норми. У прикладах 2 – 4 ми отримали їх з лінійного простору R^n, а у прикладах 5 – 7 із лінійного простору $C[a,b]$.

Збіжність послідовності точок x_n нормованого простору до елемента x_0 цього простору визначають з умови

$$\|x_n - x_0\| \to 0.$$

Послідовність точок x_n називається *фундаментальною*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ для всіх $n > N,\ m > N$.

Нормовані простори, в яких кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називаються *банаховими просторами*.

Серед підпросторів нормованого простору розглядають лише його замкнені підпростори. Зокрема, найменший замкнений підпростір, який містить систему елементів $\{x_\alpha\}$, називається *лінійним замиканням* цієї системи. Якщо він співпадає з L, то таку систему елементів називають *повною*.

5. Банаховий простір L_1

З властивостей інтеграла Лебега випливає, що разом з функцією $f(x)$ інтегровним за Лебегом на множині A буде і добуток цієї функції на довільну сталу, а разом з двома такими функціями інтегровною за Лебегом на множині A буде і їхня сума. Ці властивості справедливі і для множин нескінченної міри.

Таким чином, *для довільної вимірної множини X сукупність усіх інтегровних за Лебегом на X функцій утворює лінійний простір*. Такий простір позначають $L_1(X)$.

Задамо норму у цьому просторі формулою

$$\|f\| = \int_X |f(x)| d\mu.$$

Виконання другої та третьої аксіом такої норми випливає з властивостей інтеграла Лебега. Справді,

$$\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f(x)| d\mu = |\alpha| \int_X |f(x)| d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|,$$

$$\|f+g\| = \int_X |f(x)+g(x)| d\mu \le \int_X |f(x)| d\mu + \int_X |g(x)| d\mu = \|f\| + \|g\|.$$

Але перша умова виконується лише частково. Зокрема, за наслідком з нерівності Чебишова з $\|f\| = 0$ отримуємо тільки, що $f(x) \sim 0$. У зв'язку з цим розглядають не самі функції, а класи еквівалентних між собою функцій. Зокрема, клас $f = 0$ буде складатися з функцій, які майже скрізь на X дорівнюють нулю.

Норму кожного такого класу f можна визначити за записаною вище формулою, вибираючи в ролі функції $f(x)$ довільного представника цього класу.

Такий нормований простір $L_1(X)$ є банаховим. У випадку $X = [a,b]$ він є доповненням неповного нормованого простору $C_1[a,b]$.

6. Збіжність в середньому та її зв'язок з іншими видами збіжності

Розглянемо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$. Кажуть, що така послідовність *збігається в середньому* до функції $f(x)$ на множині A, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0.$$

При цьому функція

$$f(x) = f_n(x) - (f_n(x) - f(x))$$

також буде інтегровною за Лебегом на множині A..

Встановимо зв'язок збіжності в середньому з іншими видами збіжності функціональних послідовностей.

Теорема 1. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається на A рівномірно до функції $f(x)$, то вона збігається на цій множині до функції $f(x)$ і в середньому.*

Доведення. З рівномірної збіжності випливає існування для кожного $\varepsilon > 0$ такого числа N, що

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

для всіх $n > N, \ x \in A$. Тоді

$$\int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu \le \varepsilon \mu(A),$$

звідки внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ та скінченності міри $\mu(A)$ і випливає збіжність в середньому. Теорема доведена.

Зауважимо, що *обернене твердження невірне*. Навіть більше, *із збіжності в середньому не випливає навіть збіжності хоч в одній точці множини* A.

Відзначимо також, що *умова рівномірної збіжності тут є суттєвою, але не є необхідною*.

Теорема 2. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині* A *скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на* A *до функції* $f(x)$ *в середньому, то вона збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *і за мірою.*

Доведення. З нерівності

$$\int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu < \varepsilon,$$

справедливої для всіх $n > N(\varepsilon)$, та нерівності Чебишова отримуємо для таких n при кожному $\sigma > 0$, що

$$\mu\left\{ x : x \in A, \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge \sigma \right\} \le \frac{1}{\sigma} \int_A \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu \le \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то звідси й випливає збіжність $f_n(x)$ до $f(x)$ за мірою. Теорема доведена.

Обернене твердження до даної теореми теж невірне.

З теореми 2 та теореми Ріса випливає:

Теорема 3. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині* A *скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на* A *до функції* $f(x)$ *в середньому, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *майже скрізь.*

7. Означення та приклади евклідових просторів

Одним із способів введення норми в лінійному просторі є її задавання з допомогою скалярного добутку.

Скалярним добутком у дійсному лінійному просторі L називається дійсна функція (x,y), яка визначена для кожної пари елементів $x,y \in L$ і задовольняє такі умови:

1. $(x,x) \ge 0$, причому $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. $(x,y)=(y,x)$;
3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;
4. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2 y)$.

Лінійний простір із заданим у ньому скалярним добутком називається *евклідовим простором*. Такий простір стає нормованим, якщо в ньому визначити норму

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Прикладами евклідових просторів є простори:

1. R^n. $\qquad (x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
2. l_2. $\qquad (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.
3. $C_2[a,b]$. $\qquad (x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt$.

У випадку комплексного лінійного простору L наведена вище система аксіом скалярного добутку є суперечливою. Справді, за нею для $x \ne 0$ отримуємо, що

$$(ix,ix)=i(x,ix)=i(ix,x)=i^2(x,x)=-(x,x)<0.$$

Щоб уникнути цього протиріччя, достатньо другу з аксіом скалярного добутку записати у вигляді:

$$(x,y)=\overline{(y,x)},$$

де число $\overline{(y,x)}$ є комплексно спряженим до (y,x).

Зрозуміло, що при цьому дійсний евклідовий простір виявиться частковим випадком комплексного евклідового простору.

Прикладами комплексних евклідових просторів є простори:

1. C^n. $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$

2. l_2. $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$

3. $C_2[a,b]$. $\quad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$

8. Характеристична властивість евклідових просторів

З курсу геометрії відомо, що *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.* Аналог цієї властивості для евклідових просторів має вигляд:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Справді, у кожному такому просторі

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)=$$

$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)+(x,x)-2(x,y)+(y,y)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Така рівність є не лише необхідною, а й достатньою умовою для того, щоб норму у лінійному просторі можна було задати з допомогою добутку. Тому її називають *характеристичною властивістю* евклідових просторів.

Розглянемо відповідні приклади нормованих просторів:

1. $R_p^n,\ p\ge 1.$ Його норма

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

може бути задана скалярним добутком лише при $p=2$.

Справді, взявши $x=(1,1,0,\dots,0),\ y=(1,-1,0,\dots,0)$, будемо мати

$$\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}},\ \ \|x+y\|=\|x-y\|=2.$$

Отже, з характеристичної властивості отримаємо рівняння

$$2^2+2^2=2\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}\right),$$

єдиним коренем якого є $p=2$.

Зауважимо, що ці ж елементи x та y не задовольняють характеристичну властивість і у просторі R_0^n. Тому його норму теж не можна задати скалярним добутком.

2. l_p, $p \geq 1$, $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. При $p \neq 2$ елементи $x = (1,1,0,...,0,...)$, $y = (1,-1,0,...,0,...)$, також не задовольняють характеристичну властивість евклідових просторів. Їх можна використати і для доведення неевклідовості простору m.

3. Доведемо, що і у просторі $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ норма не може бути задана скалярним добутком.

Справді, у цьому просторі для функцій $x(t) = \cos t$, $y = \sin t$ отримуємо:

$$\|x\| = \|y\| = 1, \ \|x+y\| = \sqrt{2}, \ \|x-y\| = 1.$$

Але

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \neq 2\left(1^2 + 1^2\right).$$

Аналогічно може бути доведена неевклідовість довільного простору $C[a,b]$.

9. Нерівність Коші-Буняковського. Ортогональність

Розглянемо при $x \neq 0$, $\lambda \in R$ невід’ємну квадратичну функцію

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2 (x,x) - 2\lambda (x,y) + (y,y) =$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 - 2(x,y)\lambda + \|y\|^2.$$

Її дискримінант

$$D = \left(2(x,y)\right)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

яку називають *нерівністю Коші-Буняковського*. Вона справедлива для всіх елементів x, y евклідового простору.

У конкретних евклідових просторах така нерівність набуває вигляду:

1. R^n. $$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k{}^2}.$$

2. l_2. $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k{}^2}.$$

3. $C_2[a,b]$. $$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}.$$

Останню нерівність називають *інтегральною нерівністю Коші-Буняковського*.

Нерівність Коші-Буняковського дає змогу ввести поняття *кута* між довільними ненульовими елементами x, y цього простору за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Зокрема, якщо $\cos\varphi = 0$, то такі елементи називаються *ортогональними*. Зрозуміло, що *умова ортогональності ненульових елементів x, y рівносильна рівності $(x,y) = 0$.*

Зауважимо, що у комплексному евклідовому просторі поняття кута між елементами, як правило, не вводять. Але умова ортогональності $(x,y) = 0$ зберігається.

10. Базис евклідового простору. Приклади базисів

Система $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів x_α евклідового простору E називається *ортогональною*, якщо

$$\forall \alpha \ne \beta \quad (x_\alpha, x_\beta) = 0.$$

Теорема. *Всяка ортогональна система ненульових елементів x_α евклідового простору E є лінійно незалежною.*

Доведення. Нехай

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Оскільки система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то

$$\left(\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}\right) = \lambda_k \left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Але $\left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) \ne 0$, то $\lambda_k = 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$. Тому ця система лінійно незалежна.

Якщо ортогональна система $\{x_\alpha\}$ повна, то вона називається *ортогональним базисом*. Якщо при цьому норма кожного елемента цієї системи дорівнює 1, то її називають *ортогональним нормованим базисом*. Якщо система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то $\left\{\dfrac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ – ортогональна нормована система.

У кожному сепарабельному евклідовому просторі існує ортогональний базис, який складається не більше як зі зліченного числа елементів.

Наведемо приклади таких ортогональних базисів:

1. У просторі R^n ортогональний нормований базис утворюють елементи

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),\; e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\; \ldots,\; e_n = (0,0,0,\ldots,1).$$

2. Ортогональний нормований базис простору l_2 складається з нескінченного числа елементів

$$e_1 = (1,0,0,0,\ldots),\; e_2 = (0,1,0,0,\ldots),\; e_3 = (0,0,1,0,\ldots),\ldots$$

3. У просторі $C_2[a,b]$ серед різних ортогональних базисів, які можна задати в ньому, найважливішою є тригонометрична система, що складається з функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \sin\frac{2\pi nt}{b-a} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Зокрема, ортогональний базис простору $C_2[-\pi,\pi]$ утворюють функції

$$\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

11. Евклідовий простір L_2

Будемо розглядати функції, *інтегровні з квадратом* на множині X, тобто такі, що

$$\int\limits_X f^2(x)\,d\mu < \infty.$$

Оскільки

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right],$$

то *добуток довільних двох інтегровних з квадратом функцій є інтегровною за Лебегом на множині X функцією*.

Зокрема, якщо $\mu(X) < \infty$, то, покладаючи $g(x) = 1$, отримаємо інтегровність за Лебегом інтегровної з квадратом функції $f(x)$. При цьому на основі інтегральної нерівності Коші-Буняковського

$$\left(\int_X f(x)d\mu\right)^2 \le \mu(X)\int_X f^2(x)d\mu.$$

З рівності

$$\int_X (\alpha f(x))^2 d\mu = \alpha^2 \int_X f^2(x)d\mu$$

та нерівності

$$(f(x)+g(x))^2 \le f^2(x) + 2|f(x)g(x)| + g^2(x)$$

випливає, що *сукупність усіх інтегровних з квадратом на вимірній множині X функцій утворює лінійний простір*. Цей простір позначають $L_2(X)$.

Розглядаючи тут, як і у випадку $L_1(X)$, класи еквівалентних між собою функцій, визначимо норму за формулою

$$\| f \| = \sqrt{\int_X f^2(x)d\mu}.$$

При цьому отримаємо банаховий простір $L_2(X)$. У випадку $X = [a,b]$ він є доповненням неповного нормованого простору $C_2[a,b]$.

Простір $L_2(X)$ стає евклідовим, якщо в ньому визначити скалярний добуток

$$(f,g) = \int_X f(x)g(x)d\mu.$$

Збіжність за нормою простору $L_2(X)$ називають *збіжністю у середньому квадратичному.*

У випадку $\mu(X) < \infty$ із нерівності

$$\sqrt{\int_X (f_n(x) - f(x))^2 d\mu} < \varepsilon$$

випливає, що

$$\int_X \left| f_n(x) - f(x) \right| d\mu \le \varepsilon\sqrt{\mu(X)}.$$

Тому *при* $\mu(X) < \infty$ *із збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *у середньому квадратичному випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому*.

Нескладно також довести, що *при* $\mu(X) < \infty$ *із рівномірної збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому квадратичному*.

12. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя

Вибираючи у $n-$вимірному просторі R^n ортогональний нормований базис $e_1, e_2, ..., e_n$, ми можемо довільний елемент цього простору записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

де $c_k = (x, e_k)$.

Нехай тепер $E-$ нескінченно вимірний евклідовий простір, і $\{\varphi_k\}$ – ортогональна нормована система елементів цього простору. Поставимо у відповідність довільному елементу $x \in E$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

де

$$c_k = (x, \varphi_k), \;\; k = 1, 2, ...$$

Такий ряд називається *рядом Фур'є* елемента x за системою $\{\varphi_k\}$, а числа c_k – *коефіцієнтами Фур'є* цього елемента.

Природно виникають питання про збіжність цього ряду, а у випадку збіжності – про співпадання його суми з елементом x.

Щоб відповісти на них, поставимо завдання при заданому $n \in N$ підібрати коефіцієнти α_k, $k = 1, 2, ..., n,$ так, щоб норма

$$\|x - S_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|$$

була найменшою.

Оскільки $\{\varphi_k\}$ − ортогональна нормована система, то

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 .$$

Мінімум такого виразу досягається при

$$\alpha_k = c_k,\ k = 1, 2, ..., n,$$

причому у такому разі

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 .$$

Таким чином, ми отримали, що *найкраще наближення елемента* x *дають часткові суми його ряду Фур'є*.

Оскільки завжди $\|x - S_n\|^2 \geq 0,$ то з останньої рівності випливає, що при кожному $n \in N$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|x\|^2 .$$

Перейшовши тут до границі, отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2 ,$$

яку називають *нерівністю Бесселя*.

Зауважимо, що у комплексних евклідових просторах нерівність Бесселя матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 .$$

13. Зв'язок між замкненими і повними ортогональними системами

Ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ називається *замкненою*, якщо для будь-якого $x \in E$ виконується рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2 .$$

Цю рівність називають *рівністю Парсеваля*. У комплексних евклідових просторах вона набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 .$$

З тотожності

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

випливає, що *замкненість системи* $\{\varphi_k\}$ *рівносильна тому, що при кожному* $x \in E$ *часткові суми ряду Фур'є збігаються до* x.

Теорема. *У сепарабельному евклідовому просторі* E *всяка повна ортогональна нормована система є замкненою і, навпаки, всяка замкнена ортогональна нормована система є повною.*

Доведення. Нехай ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ є замкненою. Тоді для кожного елемента $x \in E$ послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до x. Це означає, що лінійні комбінації елементів системи $\{\varphi_k\}$ скрізь щільні в E, тобто така система є повною.

Навпаки, якщо ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ є повною, то будь-який елемент $x \in E$ можна з довільною точністю апроксимувати лінійними комбінаціями елементів системи $\{\varphi_k\}$. Оскільки часкові суми його ряду Фур'є дають не менш точне наближення, то послідовність таких сум збігається до x, що рівносильне замкненості системи $\{\varphi_k\}$.

14. Зв'язок між тотальними і повними ортогональними системами

З нерівності Бесселя випливає, що для кожного $x \in E$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

є збіжним.

Нехай тепер $\{\varphi_k\}$ – довільна ортогональна нормована система в повному евклідовому просторі E, не обов'язково повна, і числа c_k такі, що ряд із їх квадратів збігається. Тоді за ***теоремою Ріса-Фішера*** *існує такий елемент* $x \in E$, *що*

$$c_k = (x, \varphi_k), \; k = 1, 2, \dots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (x, x) = \|x\|^2.$$

Система $\{\varphi_\alpha\}$ елементів евклідового простору називається *тотальною*, якщо не існує жодного ненульового елемента, ортогонального до всіх φ_α.

Теорема. *Для того, щоб ортогональна нормована система* $\{\varphi_k\}$ *в повному сепарабельному евклідовому просторі була повною, необхідно і достатньо, щоб вона була тотальною.*

Доведення. Нехай система $\{\varphi_k\}$ повна. Тоді вона замкнена. Якщо елемент x ортогональний до всіх елементів цієї системи, то всі його коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля випливає, що й

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

тобто $x = 0$.

Навпаки, якщо така система не повна, то вона не замкнена. Отже, знайдеться такий елемент x_0, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|x_0\|^2, \quad c_k = (x_0, \varphi_k), \; k = 1, 2, \dots$$

А оскільки простір E повний, то існуватиме також такий елемент $x \in E$, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2, \quad c_k = (x, \varphi_k), \; k = 1, 2, \dots$$

При цьому ненульовий елемент $x - x_0$ буде ортогональним до всіх елементів системи $\{\varphi_k\}$, бо

$$(x - x_0, \varphi_k) = (x, \varphi_k) - (x_0, \varphi_k) = c_k - c_k = 0, \; k = 1, 2, \dots$$

Отже, така система не може бути тотальною.

Зауважимо, що *у неповних евклідових просторах можуть бути тотальні, але не повні ортогональні системи.*

15. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм

Повні евклідові простори нескінченної розмірності називають *гільбертовими просторами*. Надалі ми будемо розглядати лише *сепарабельні* гільбертові простори, тобто такі, які містять зліченну скрізь щільну множину.

Два евклідові простори E та E^* називаються ізоморфними, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність так, що

$$x \leftrightarrow x^*,\ y \leftrightarrow y^* \Rightarrow\ x+y \leftrightarrow x^*+y^*,\ \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*,\ (x,y)=\left(x^*,y^*\right).$$

Будь-які два $n-$*вимірні евклідові простори ізоморфні між собою, і кожен з них ізоморфний простору* R^n. Але *евклідові простори нескінченної розмірності не обов'язково ізоморфні між собою.* Наприклад, простори l_2 та $C_2[a,b]$ не ізоморфні, бо один з них повний, а другий – ні.

Проте справедливе наступне твердження:

Теорема. *Будь-які два сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою.*

Доведення. Покажемо, що кожен гільбертовий простір H ізоморфний простору l_2. Виберемо в H довільну повну ортогональну нормовану систему $\{\varphi_k\}$ і поставимо відповідність кожному елементу $x \in H$ послідовність $(c_1,c_2,...,c_k,...)$ його коефіцієнтів Фур'є. З нерівності Бесселя випливає, що така послідовність є елементом простору l_2. Навпаки, кожній такій послідовності із l_2 відповідатиме деякий елемент $x \in H,$ причому ця відповідність буде взаємно однозначною. Якщо тепер

$$x \leftrightarrow (c_1,c_2,...,c_k,...),\ \ y \leftrightarrow (d_1,d_2,...,d_k,...),$$

то

$$\alpha x \leftrightarrow (\alpha c_1,\alpha c_2,...,\alpha c_k,...),$$
$$x+y \leftrightarrow (c_1+d_1,c_2+d_2,...,c_k+d_k,...).$$

Крім того,

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left[(x+y,x+y)-(x-y,x-y)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(c_k+d_k)^2-\sum_{k=1}^{\infty}(c_k-d_k)^2\right]=\sum_{k=1}^{\infty}c_k d_k.$$

Доведена теорема означає, що з точністю до ізоморфізму існує лише один сепарабельний гільбертовий простір, і простір l_2 можна розглядати як одну з його реалізацій.

Іншою важливою реалізацією гільбертового простору є евклідовий простір $L_2\left(X\right)$.

Зауважимо також, що аналогічне твердження справедливе і для комплексних гільбертових просторів: *будь-які два сепарабельні комплексні гільбертові простори ізоморфні між собою.* Зокрема, *всі вони ізоморфні комплексному простору* l_2.

Розділ IV
Лінійні функціонали та лінійні оператори

1. Лінійні функціонали. Неперервність

Числову функцію f, визначену на деякому лінійному просторі L, називають *функціоналом.*

Функціонал f називається адитивним, якщо

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

для всіх $x, y \in L$. Він називається *однорідним*, якщо

$$f(\alpha x)=\alpha f(x).$$

Адитивний однорідний функціонал називається *лінійним* функціоналом.

У комплексному лінійному просторі розглядають також *спряжено-однорідні* функціонали, для яких

$$f(\alpha x)=\overline{\alpha} f(x).$$

Адитивний спряжено-однорідний функціонал називають *спряжено-лінійним*.

З адитивності функціонала f випливає, що $f(0)=0.$ *Ядром* лінійного функціонала називають множину

$$Ker\ f=\{x: x\in L, f(x)=0\}.$$

Ця множина утворює лінійний підпростір простору L, бо для будь-яких $x, y \in Ker\ f$ виконується рівність

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=0.$$

Якщо $Ker\ f=L$, то такий функціонал називають *нульовим функціоналом*. Відзначимо, що *корозмірність ядра будь-якого ненульового лінійного функціонала дорівнює* 1.

Функціонал f, визначений у топологічному лінійному просторі L, називається *неперервним*, якщо для кожного $\varepsilon>0$ і кожного $x_0 \in L$ існує такий окіл $O(x_0)$, що

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

при $x\in O(x_0)$. Зокрема, у нормованому просторі такий окіл матиме вигляд $\{x: \|x-x_0\|<\delta\}$ при деякому $\delta=\delta(\varepsilon)>0.$

У $n-$вимірному просторі всякий лінійний функціонал є неперервним. У загальному випадку це не так.

Теорема. *Якщо лінійний функціонал* f *неперервний у деякій одній точці* $x_0 \in L$, *то він неперервний на всьому* L.

Доведення. Нехай y_0 – довільна точка цього простору. Розглянемо її окіл

$$O(y_0) = \{y : y = y_0 - x_0 + x\},\ x \in O(x_0).$$

З лінійності функціонала f та його неперервності в точці x_0 випливає, що

$$\left|f(y) - f(y_0)\right| = \left|\left(f(y_0) - f(x_0) + f(x)\right) - f(y_0)\right| = \\ = \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

для всіх $y \in O(y_0)$, тобто неперервність функціонала f у точці y_0.

2. Обмеженість та норма лінійного функціонала

Поняття неперервності лінійного функціонала тісно пов'язане з поняттям його обмеженості.

Теорема. *Для того, щоб лінійний функціонал* f *був неперервний на топологічному лінійному просторі* L, *необхідно і достатньо, щоб у* L *існував такий окіл нуля* $O(0)$, *на якому функціонал* f *обмежений.*

Доведення. Якщо функціонал f неперервний у точці $x_0 = 0$, то при кожному $\varepsilon > 0$ існує такий окіл нуля, на якому

$$\left|f(x)\right| = \left|f(x) - f(0)\right| < \varepsilon.$$

Навпаки, якщо $O(0)$ – такий окіл нуля, на якому $\left|f(x)\right| < C$, то при кожному $\varepsilon > 0$ окіл нуля $\dfrac{\varepsilon}{C} \cdot O(0)$ є тим околом, на якому $\left|f(x)\right| < \varepsilon$. Отже, f неперервний в точці $x_0 = 0$, а значить, і на всьому L.

У нормованому просторі лінійний функціонал f неперервний тоді і тільки тоді, коли його значення на одиничній кулі цього простору обмежені в сукупності однією і тією ж сталою. При цьому величину

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} \left|f(x)\right|$$

називають *нормою* функціонала f.

Нескладно переконатися, що $\|f\|$ задовольняє всі аксіоми норми.

Зауважимо також, що норму неперервного лінійного функціонала можна визначати і за формулою

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Звідси, зокрема, при кожному $x \in L$ отримаємо нерівність

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Таким чином, $\|f\|$ – це найменша зі сталих C, для яких нерівність

$$|f(x)| \leq C\|x\|$$

виконується при всіх $x \in L$.

Відзначимо, що часто замість перевірки лінійного функціонала на неперервність доцільніше перевірити його на *обмеженість*, тобто на існування хоч однієї такої сталої C.

3. Приклади лінійних неперервних функціоналів

1. Нехай $x_0(t)$ – довільна фіксована неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Визначимо у просторі $C[a,b]$ функціонал

$$f(x) = \int_a^b x(t)x_0(t)\,dt.$$

Його лінійність випливає з відомих властивостей інтеграла Рімана. Оскільки, крім того,

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)x_0(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |x_0(t)|\,dt \cdot \|x\|,$$

то цей функціонал обмежений, а значить, і неперервний. При цьому

$$\|f\| = \int_a^b |x_0(t)|\,dt.$$

2. Нехай t_0 – довільна точка відрізка $[a,b]$. Визначимо у просторі $C[a,b]$ лінійний функціонал

$$f(x) = x(t_0).$$

Оскільки $|f(x)| = |x(t_0)| \le \|x\|,$ то він обмежений і неперервний, причому $\|f\| = 1.$

3. У повному евклідовому просторі всякий лінійний неперервний функціонал має вигляд

$$f(x) = (x, x_0),$$

де x_0 – фіксований елемент цього простору. Лінійність такого функціонала випливає з аксіом скалярного добутку, а обмеженість

$$|f(x)| = |(x, x_0)| \le \|x_0\| \cdot \|x\|$$

отримуємо з нерівності Коші-Буняковського. При $x = x_0$ вона перетворюється в рівність. Тому $\|f\| = \|x_0\|.$

Зауважимо, що *така відповідність між множиною всіх лінійних неперервних функціоналів* f, *визначених у повному евклідовому просторі, і елементами* x_0 *цього простору є взаємно однозначною*.

4. Спряжені простори

Добуток лінійного неперервного функціонала на число та сума двох лінійних неперервних функціоналів також є лінійними неперервними функціоналами, визначеними у тому ж лінійному просторі L. Тому *сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів, визначених у* L, *утворює лінійний простір*. Його називають *спряженим* до простору L і позначають L^*. Якщо простір L нормований, то задавши в L^* норму $\|f\|$, отримаємо нормований простір L^*.

Наведемо деякі приклади спряжених просторів:

$$\left(R^n\right)^* = R^n; \quad \left(R_0^n\right)^* = R_1^n; \quad \left(R_1^n\right)^* = R_0^n; \quad \left(R_p^n\right)^* = R_q^n, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$c_0^{\ *} = l_1; \quad l_1^{\ *} = m; \quad l_2^{\ *} = l_2; \quad l_p^{\ *} = l_q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Із загального вигляду лінійних неперервних функціоналів, визначених у повному евклідовому просторі $E,$ випливає, що з точністю до ізометрії $E^* = E.$ Зокрема, для гільбертових просторів $H^* = H.$

Теорема. *Простір* L^*, *спряжений до нормованого простору* L, *повний.*

Доведення. Нехай $(f_n)-$ довільна фундаментальна послідовність у просторі L^*. Це означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ для всіх $n > N,\ m > N$. Звідси для кожного $x \in L$ отримаємо

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| \le \| f_n - f_m \| \cdot \| x \| \le \varepsilon \| x \|.$$

Отже, при кожному фіксованому $x \in L$ числова послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна, а значить, і збіжна. Її границю позначимо $f(x)$. Цим буде визначено деякий функціонал на всьому просторі L. Оскільки

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

то цей функціонал є лінійним. Крім того, перейшовши до границі при $m \to \infty$ у записаній вище нерівності, отримаємо

$$\| f_n - f \| \le \varepsilon.$$

Отже, лінійний функціонал $f_n - f$ неперервний. Разом з ним неперервним буде і функціонал $f = f_n - (f_n - f)$. При цьому з останньої нерівності випливає, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$.

5. Слабка збіжність

Послідовність (x_n) елементів топологічного лінійного простору L називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in L$, якщо для довільного $f \in L^*$ відповідна числова послідовність $(f(x_n))$ збігається до $f(x_0)$.

Якщо простір L нормований, і $x_n \to x_0$ за нормою цього простору, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\| x_n - x_0 \| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, то

$$\left| f(x_n) - f(x_0) \right| \le \| f \| \cdot \| x_n - x_0 \| \le \varepsilon \| f \|.$$

Звідси отримуємо, що *із збіжності послідовності за нормою, яку ще називають сильною збіжністю, випливає слабка збіжність цієї послідовності то того ж елемента* x_0.

У просторі R^n слабка збіжність є покоординатною і співпадає у ньому із сильною збіжністю.

Але, наприклад, у просторі l_2 послідовність (e_n) не є сильно збіжною, бо вона не фундаментальна. Проте слабко така послідовність збігається до нуля. Справді, для кожного $f \in l_2^*$ отримуємо

$$f(e_n) = (e_n, a) = a_n \to 0 = (0, a) = f(0),$$

де $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – деякий елемент простору l_2.

Відзначимо, що *у нормованому просторі L всяка слабко збіжна послідовність є обмеженою і для її перевірки на слабку збіжність достатньо переконатися, що $f(x_n) \to f(x_0)$ лише для елементів f, які утворюють базис простору L^*.*

Враховуючи цей факт, можна довести, що у просторі l_2 слабка збіжність є покоординатною збіжністю обмежених послідовностей. Як показує наведений вище приклад, із сильною збіжністю вона не співпадає.

У просторі $C[a,b]$ послідовність $x_n(t)$ слабко збігається до функції $x_0(t)$ тоді і тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена і $x_n(t) \to x_0(t)$ для кожного фіксованого $t \in [a,b]$. Тобто така збіжність є поточковою при умові рівномірної обмеженості. Вона не співпадає із рівномірною збіжністю, якою є сильна збіжність цього простору.

У *спряженому просторі* L^* послідовність (f_n) називають *слабко збіжною* до функціонала $f \in L^*$, якщо $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in L$.

Якщо простір L нормований, то всяка слабко збіжна послідовність у L^* є обмеженою і для її перевірки на слабку збіжність достатньо переконатися, що $f_n(x) \to f(x)$ лише для елементів x, які утворюють базис простору L. Також із збіжності послідовності (f_n) за нормою простору L^* випливає слабка збіжність цієї послідовності то того ж елемента f.

6. Простори основних та узагальнених функцій

Функцію $\varphi(x)$, визначену на числовій прямій, називають *фінітною*, якщо вона перетворюється в нуль поза деяким скінченим інтервалом. Розглянемо множину D всіх фінітних нескінченно диференційовних функцій.

Така множина утворює лінійний простір зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число. Але у ньому не можна ввести норму, яка відповідала б усім аксіомам норми. Проте у цьому просторі вдається визначити поняття збіжності.

Послідовність (φ_n) елементів із D називають *збіжною до функції* $\varphi \in D$, якщо:

1) існує спільний для всіх функцій послідовності (φ_n) інтервал, поза яким кожна з них перетворюється в нуль;

2) для кожного фіксованого $k = 0,1,2,...$ послідовність похідних $\left(\varphi_n^{(k)}(x)\right)$ рівномірно збігається до $\varphi^{(k)}(x)$.

Лінійний простір D із введеною таким чином збіжністю називають *простором основних функцій*, а його елементи – *основними функціями*.

Узагальненою функцією називається всякий лінійний неперервний функціонал, визначений в D. Якщо такий функціонал можна представити у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

то його називають *регулярною узагальненою функцією*. Такі функціонали f ототожнюють з породжуючими їх звичайними функціями $f(x)$. Подібно до скалярного добутку, домовимося записувати значення функціонала f на елементі φ у вигляді

$$\langle f, \varphi \rangle.$$

Узагальнені функції, які не є регулярними, називають *сингулярними узагальненими функціями*. Наприклад, такою є узагальнена функція, визначена рівністю

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Її називають δ *– функцією*. Записують δ або $\delta(x)$.

Якщо ж $\langle f,\varphi\rangle=\varphi(a)$, то така узагальнена функція називається *зміщеною* $\delta-$*функцією* і позначається δ_a. Використовують також запис $\delta(x-a)$.

Сукупність всіх узагальнених функцій утворює лінійний простір D^*, спряжений до простору D. *Збіжність* у ньому послідовності (f_n) до елемента $f\in D^*$ визначають умовою:

$$\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle \text{ для всіх } \varphi\in D.$$

У цьому просторі вводять також поняття *добутку* узагальненої функції f на довільні нескінченно диференційовні функції α, визначаючи його рівністю

$$\langle\alpha f,\varphi\rangle=\langle f,\alpha\varphi\rangle,\ \varphi\in D.$$

Добуток двох довільних узагальнених функцій не вводять, бо це не можна зробити так, щоб операція множення була неперервною.

7. Диференціювання узагальнених функцій

Розглянемо довільну неперервно диференційовну на всій числовій прямій функцію $f(x)$. Інтегруванням частинами для неї отримуємо рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx,\quad \varphi(x)\in D.$$

Тому природно похідну узагальненої функції f, породженої такою функцією $f(x)$, визначити умовою

$$\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle,\ \varphi\in D.$$

Більше того, останню рівність покладають в основу означення *похідної* будь-якої узагальненої функції f. Отриманий при цьому функціонал f' теж буде лінійним неперервним функціоналом, визначеним на D. Зокрема, для похідної $\delta-$функції будемо мати

$$\langle\delta',\varphi\rangle=-\varphi'(0),\ \varphi\in D.$$

Аналогічно можуть бути визначені і похідні вищих порядків. Наприклад,

$$\langle f'',\varphi\rangle=-\langle f',\varphi'\rangle=-\left(-\langle f,\varphi''\rangle\right)=\langle f,\varphi''\rangle,\ \varphi\in D.$$

У загальному випадку

$$\langle f^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)}\rangle,\ \varphi \in D.$$

Таким чином, *всяка узагальнена функція є нескінченно диференційовною*.

Крім того, *із збіжності послідовності* (f_n) *узагальнених функцій до функції* f *випливатиме, що* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *при кожному* $k \in N$. Це рівносильне тому, що *всякий збіжний ряд, складений з узагальнених функцій, можна почленно диференціювати скільки завгодно разів.*

Як приклад, обчислимо похідну регулярної узагальненої функції f, породженої функцією

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1, \\ x^2-3x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Оскільки внаслідок інтегрування частинами

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{1} (2x+1)\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} (x^2-3x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -3\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx - 2\varphi(1) + \int_{1}^{\infty} (2x-3)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -5\varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\,dx, \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & x<1, \\ 2x-3, & x \ge 1, \end{cases}$$

то

$$f' = -5\delta_1 + g,$$

де регулярна узагальнена функція g породжена функцією $g(x)$. Використовується також запис

$$f'(x) = -5\delta(x-1) + g(x).$$

8. Лінійні оператори та їх основні властивості

Нехай маємо два топологічні лінійні простори L та L'. Відображення $A: L \to L'$, яке задовольняє умову

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

називається *лінійним оператором*.

Зауважимо, що при цьому A не обов'язково вважають визначеним на всьому просторі L. Важливо тільки, щоб його область визначення $D(A)$ була лінійним підпростором в L.

Оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in L$, якщо для кожного околу $O(Ax_0) \subset L'$ існує такий окіл $O(x_0) \subset L$, що $Ax \in O(Ax_0)$ для всіх $x \in O(x_0) \bigcap D(A)$.

Для нормованих просторів L та L' це означення можна сформулювати так: оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in L$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D(A)$ таких, що $\|x - x_0\| < \delta$.

Якщо оператор неперервний у кожній точці $x \in D(A)$, то його називають *неперервним оператором*. Як і для лінійних функціоналів, *для неперервності лінійного оператора достатньо, щоб він був неперервним принаймні в одній точці* $x_0 \in D(A)$.

Лінійний оператор $A : L \to L'$, який визначений на всьому просторі L, називається *обмеженим*, якщо він кожну обмежену множину переводить в обмежену.

Всякий неперервний лінійний оператор є обмеженим. Для нормованих просторів справедливе також обернене твердження. Зокрема, для таких просторів обмеженість лінійного оператора A рівносильна існуванню сталої C, що

$$\|Ax\| \le C\|x\|$$

для всіх $x \in L$. Найменшу з таких сталих C називають нормою оператора A і позначають $\|A\|$. Звідси також отримуємо для всіх $x \in L$ нерівність

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Норму лінійного обмеженого оператора можна визначити ще й так:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Для лінійних операторів природним чином вводяться операції додавання та множення на число:

$$(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax, \ (A + B)x = Ax + Bx, \ \ x \in L.$$

При цьому сума та добуток на число лінійних неперервних операторів теж є лінійними неперервними операторами. Отже, сукупність таких операторів утворює лінійний простір.

У випадку нормованих просторів L та L' це випливає з рівності

$$\|(\alpha A)x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\|$$

та нерівності

$$\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\|.$$

У такому лінійному просторі може бути введена норма за записаними вище формулами. В результаті отримаємо *нормований простір лінійних обмежених операторів*.

У разі повноти простору L' простір лінійних обмежених операторів теж є банаховим.

Доводиться дане твердження аналогічно, як і повнота простору, спряженого до нормованого.

9. Приклади лінійних операторів

1. Найпростішими прикладами лінійних операторів є *одиничний оператор* $I: L \to L$ такий, що $Ax = x$ для всіх $x \in L$, та *нульовий оператор* $0: L \to L'$ такий, що $0x = 0$ для всіх $x \in L$.

2. Кожен лінійний функціонал є частковим випадком лінійного оператора.

3. Лінійний оператор $A: R^n \to R^n$, як це відомо з курсу алгебри, визначається матрицею коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що

$$Ax(t) = x_0(t)x(t),$$

де $x_0(t) -$ фіксована неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, називається *оператором множення*.

5. Розглянемо також $A: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

де $K(t,s) -$ неперервна у квадраті $Q = [a,b;a,b]$ функція.

Його називають *інтегральним оператором Фредгольма.*

Лінійність такого оператора випливає з властивостей інтеграла Рімана. Крім того,

$$\left|Ax(t)\right| = \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| \le \int_a^b \left|K(t,s)\right|ds \cdot \|x\|.$$

Тому

$$\|Ax\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b \left|K(t,s)\right|ds \cdot \|x\|.$$

Отже, цей оператор є обмеженим. Його норма

$$\|A\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b \left|K(t,s)\right|ds.$$

Зокрема, якщо $\left|K(t,s)\right| \le M$ у квадраті $Q,$ то $\|A\| \le M(b-a).$

Зауважимо, що інтегральний оператор Фредгольма можна розглядати і як оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ при умові, що

$$B^2 = \iint_Q K^2(t,s)\,dt\,ds < \infty.$$

Він також буде обмеженим оператором з нормою $\|A\| \le B.$

6. Серед необмежених лінійних операторів виділимо найважливіший з них *оператор диференціювання* $D: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що

$$Dx(t) = x'(t).$$

Він визначений не на всьому просторі $C[a,b],$ а лише на його підпросторі неперервно диференційованих функцій. Але і на цьому підпросторі *оператор D не є неперервним,* бо

$$x_n(t) = \frac{\sin nt}{n} \to 0,$$

а послідовність $Dx_n(t) = \cos nt$ не є збіжною.

10. Добуток та степінь лінійних операторів

Під *добутком двох операторів* A та $B,$ які визначені та набувають значень у лінійному просторі $L,$ розуміють оператор $AB: L \to L$ такий, що $(AB)x = A(Bx).$

Область визначення оператора AB складається із тих $x \in D(B)$, для яких $Bx \in D(A)$.

Якщо A та B – лінійні неперервні оператори, то AB теж буде лінійним неперервним оператором.

У нормованому просторі L для обмежених лінійних операторів A та B виконується нерівність

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Тому добуток таких операторів також є обмеженим оператором, причому

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Добуток трьох і більше операторів визначають послідовно. Зокрема, під *степенем оператора* $A : L \to L$ розуміють оператор $A^n : L \to L$ такий, що

$$A^n x = A\left(A^{n-1}x\right).$$

Степінь лінійного неперервного оператора теж є лінійним неперервним оператором, причому у нормованому просторі L для нього справедлива нерівність

$$\left\|A^n\right\| \le \|A\|^n.$$

Знайдемо степені інтегрального оператора Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$$

у просторі $C[a,b]$. Оскільки

$$A^2 x(t) = A\left(Ax(t)\right) = \int_a^b K(t,s)\int_a^b K(s,\tau)x(\tau)\,d\tau\, ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)K(s,\tau)\,ds\right) x(\tau)\,d\tau = \int_a^b K_2(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

то квадрат такого оператора теж є інтегральним оператором Фредгольма.

У загальному випадку отримаємо

$$A^n x(t) = \int_a^b K_n(t,s)x(s)\,ds,$$

$$K_1(t,s) = K(t,s),\ K_n(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,...$$

Такі ядра називають *ітерованими ядрами*.

Зауважимо, що аналогічні формули для *інтегрального оператора Вольтерра*

$$Ax(t)=\int_a^t K(t,s)x(s)ds,\ t\in[a,b],$$

мають вигляд

$$A^n x(t)=\int_a^t K_n(t,s)x(s)ds,$$

$$K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,...$$

11. Оборотний та обернений оператори

Оператор $A:L\to L'$ називається *оборотним*, якщо для кожного y з множини $E(A)$ значень цього оператора рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок $x\in D(A)$. При цьому відображення $A^{-1}:E(A)\to D(A)$, яке кожному $y\in E(A)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок $x\in D(A)$, називається оператором, *оберненим до оператора* A.

Таким чином, справедливі рівності:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I.$$

Наприклад, для оператора

$$A:l_2\to l_2,\ Ax=(x_1+x_2,x_1-x_2,x_3,...,x_n,...)$$

з рівняння $Ax=y$ отримуємо систему рівнянь

$$x_1+x_2=y_1\ ,\ x_1-x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ ...\ ,\ x_n=y_n,\ ...$$

З неї знаходимо розв'язок

$$x=A^{-1}y=\left(\frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{y_1-y_2}{2},\ y_3,\ ...\ ,\ y_n,\ ...\right).$$

Теорема. *Оператор* A^{-1}, *обернений до лінійного оператора* A, *лінійний.*

Доведення. Насамперед відзначимо, що множина значень $E(A)$ є підпростором лінійного простору L'. Нехай $y_1=Ax_1,\ y_2=Ax_2$. Тоді

$$x_1=A^{-1}y_1,\ x_2=A^{-1}y_2.$$

Внаслідок лінійності оператора A маємо

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Застосувавши до обох частин цієї рівності оператор A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

тобто лінійність оператора A^{-1}.

Зауважимо, що *оператор, обернений до обмеженого оператора, не завжди є обмеженим оператором*. Але справедлива наступна ***теорема Банаха:***

Якщо лінійний обмежений оператор A взаємно однозначно відображає банаховий простір L на банаховий простір L', то обернений до нього оператор A^{-1} обмежений.

Відзначимо, що *у банаховому просторі всіх лінійних обмежених операторів $A: L \to L'$ множина лінійних операторів, які мають обмежений обернений, є відкритою*.

А саме, справедлива наступна ***теорема:***

Якщо оператор $A_0 : L \to L'$ – лінійний оператор, який має обмежений обернений, і $\vartriangle A: L \to L'$ – такий лінійний оператор, що $\|A_0^{-1}\| \cdot \|\vartriangle A\| < 1$, то оператор $A = A_0 + \vartriangle A$ теж має обмежений обернений.

12. Оператор, обернений до $I - A$.

Наступна теорема не лише встановлює існування оберненого оператора, а й вказує спосіб його практичного знаходження:

Теорема. *Якщо A – лінійний обмежений оператор, який відображає банаховий простір L в себе, причому $\|A\| < 1$, то оператор $(I - A)^{-1}$ існує, є обмеженим і представляється у вигляді*

$$(I - A)^{-1} = I + A + \ldots + A^n + \ldots$$

Доведення. Оскільки $\|A\| < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

З цієї нерівності та повноти простору L випливає, що сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є лінійним обмеженим оператором. Крім того, для кожного $n \in N$ маємо

$$\left(I-A\right)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k \left(I-A\right) = I - A^{n+1}.$$

Перейшовши тут до границі при $n \to \infty$, з врахуванням $\left\|A^{n+1}\right\| \le \left\|A\right\|^{n+1} \to 0$ отримаємо, що

$$\left(I-A\right)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(I-A\right) = I,$$

звідки й випливає рівність

$$\left(I-A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Як приклад практичного застосування цієї теореми розглянемо розв'язування лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y\left(x\right) = \lambda \int_a^b K\left(x,t\right) y\left(t\right) dt + f\left(x\right)$$

у просторі $C\left[a,b\right]$.

Нехай $Ay\left(x\right) = \int_a^b K\left(x,t\right) y\left(t\right) dt -$ інтегральний оператор Фредгольма і $\left|K\left(x,t\right)\right| \le M$. Тоді в операторному вигляді отримуємо рівняння

$$y = \lambda A y + f,$$

єдиним розв'язком якого є

$$y = \left(I - \lambda A\right)^{-1} f$$

при умові, що

$$\left\|\lambda A\right\| = \left|\lambda\right| \cdot \left\|A\right\| < 1.$$

Оскільки $\left\|A\right\| \le M\left(b-a\right)$, то для виконання цієї умови достатньо вимагати, щоб виконувалась нерівність

$$\left|\lambda\right| M\left(b-a\right) < 1.$$

13. Розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер

Розв'язок $y=(I-\lambda A)^{-1}f$ операторного рівняння $y=\lambda Ay+f$ для інтегрального оператора Фредгольма у просторі $C[a,b]$ при виконанні умови $|\lambda|M(b-a)<1$ може бути представлений у вигляді

$$y(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t)\right]f(t)dt=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt.$$

Функцію $R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t)$ називають *резольвентою Фредгольма*. Оскільки

$$\left|\lambda^{n-1}K_n(x,t)\right|\le|\lambda|^{n-1}M^n(b-a)^n$$

і за ознакою Даламбера при $|\lambda|M(b-a)<1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^{n-1}M^n(b-a)^n$$

збіжний, то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти збігатиметься рівномірно. Отже, почленне інтегрування у записаній вище рівності було правомірним.

Такий метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду називається *методом ітерованих ядер*. У просторі $L_2[a,b]$ він застосовний при виконанні умови $|\lambda|B<1$.

Зауважимо, що для інтегрального оператора Вольтерра ряд для його резольвенти збігається рівномірно при кожному λ. Тому *для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду метод ітерованих ядер застосовний для всіх* λ.

Розв'яжемо цим методом рівняння

$$y(x)=\int_0^1 xt^2y(t)dt+x^2.$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, причому

$$\lambda = 1,\ a = 0,\ b = 1,\ K(x,t) = xt^2,\ \ f(x) = x^2.$$

Оскільки $M = \max\limits_{0 \le x,t \le 1} \left| xt^2 \right| = 1,$ то умова $|\lambda| M(b-a) < 1$ не виконується. Але виконується умова $|\lambda| B < 1,$ бо

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(xt^2 \right)^2 dxdt = \frac{1}{15}.$$

Тому метод ітерованих ядер застосовний у просторі $L_2[0;1].$

Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = xt^2,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s) K_1(s,t)\, ds = \int_0^1 xs^2 \cdot st^2 ds = \frac{1}{4} xt^2,$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 K(x,s) K_2(s,t)\, ds = \int_0^1 xs^2 \cdot \frac{1}{4} st^2 ds = \frac{1}{4^2} xt^2, \ldots$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$K_n(x,t) = \frac{1}{4^{n-1}} xt^2.$$

Отже,

$$R(x,t;\lambda) = R(x,t;1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} xt^2 = \frac{4}{3} xt^2,$$

$$y(x) = x^2 + \int_0^1 \frac{4}{3} xt^2 \cdot t^2 dt = x^2 + \frac{4}{15} x.$$

14. Спектр та резольвента оператора

Розглянемо лінійний оператор $A : L \to L,$ визначений у нормованому просторі $L.$ Число λ називається *власним значенням* цього оператора, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок. Такий розв'язок називають *власною функцією* оператора $A,$ яка відповідає власному значенню $\lambda.$

Сукупність всіх власних значень оператора A називають *точковим спектром* цього оператора і позначають $\sigma_p(A).$ Якщо $\lambda \in \sigma_p(A),$ то оператор

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

який називають *резольвентою оператора* $A,$ не існує.

Якщо оператор $R_\lambda(A)$ визначений на всьому просторі L і є обмеженим, то значення λ називають *регулярним*. Зокрема, у просторі L скінченної розмірності регулярними є всі $\lambda \notin \sigma_p(A)$.

Якщо ж простір L нескінченно вимірний, то можлива ситуація, коли $R_\lambda(A)$ існує, але визначений не на всьому просторі L, або не є обмеженим.

Такі λ відносять до *неперервного спектру* $\sigma_c(A)$ оператора A, якщо

$$\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] = L,$$

чи до *залишкового спектру* $\sigma_r(A)$, якщо

$$\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] \neq L.$$

Множина $\sigma(A) = \sigma_p(A) + \sigma_c(A) + \sigma_r(A)$ називається *спектром оператора* A, а її доповнення складається з регулярних точок цього оператора. За властивістю операторів, які мають обмежений обернений, *множина регулярних точок є відкритою*. Відповідно, *спектр оператора, як доповнення цієї множини, завжди замкнений*.

Теорема. *Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L і $|\lambda| > \|A\|$, то точка λ регулярна.*

Доведення. Справді,

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k.$$

При $\|A\| < |\lambda|$ такий ряд збігається і задає обмежений на всьому просторі L оператор.

15. Спряжені оператори.

Розглянемо лінійний неперервний оператор $A: L \to L'$. Для довільного функціонала $g \in (L')^*$ функціонал f такий, що $f(x) = g(Ax)$, буде лінійним і неперервним на всьому просторі L, тобто $f \in L^*$. Відображення $A^*: (L')^* \to L^*$, яке визначається рівністю $A^* g = f$, називається оператором, *спряженим* до оператора A. Такий оператор теж є лінійним та неперервним, а у випадку, коли простори L та L' нормовані, $\|A^*\| = \|A\|$.

Оператор, спряжений до оператора $A: R^n \to R^n$ задається матрицею, транспонованою до матриці A. Оператор, спряжений до інтегрального оператора Фредгольма, визначається ядром $K^*(x,t) = K(t,x)$.

У випадку оператора A, визначеного *в евклідовому просторі* E, *спряжений до* A *оператор* A^* визначають як такий, що при всіх $x, y \in E$ виконується рівність

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Якщо ж при всіх $x, y \in E$ має місце рівність

$$(Ax, y) = (x, Ay),$$

то оператор A називають *самоспряженим*.

Знайдемо, наприклад, спряжений оператор до оператора

$$A: l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, ..., x_n, ...).$$

Нехай $A^* y = (z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...)$. Тоді з $(Ax, y) = (x, A^* y)$ отримуємо рівність

$$(x_1 + x_2) y_1 + (x_1 - x_2) y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n + ... =$$
$$= x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + ... + x_n z_n + ...$$

Щоб вона виконувалася для всіх $x, y \in l_2$, необхідно, щоб коефіцієнти при всіх відповідних x_k співпадали. Звідси знаходимо

$$A^* y = (y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_3, ..., y_n, ...).$$

Зауважимо, що $A^* x = Ax$. Отже, оператор A самоспряжений.

Теорема. *Власні значення самоспряженого оператора* A, *визначеного у гільбертовому просторі* H, *дійсні, а його власні функції, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.*

Доведення. Будемо розглядати в загальному випадку H як комплексний гільбертовий простір.

Якщо $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$, то, враховуючи аксіоми скалярного добутку, отримаємо

$$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Ax,x)=(x,Ax)=$$
$$=(x,\lambda x)=\overline{(\lambda x,x)}=\overline{\lambda}\cdot\overline{(x,x)}=\overline{\lambda}(x,x).$$

Оскільки $(x,x)\neq 0,$ то власне значення $\lambda=\overline{\lambda}$ дійсне.

Якщо тепер $\mu\neq\lambda$ і $Ax=\lambda x,\ x\neq 0,\ \ Ay=\mu y,\ y\neq 0,$ то, враховуючи, що $\overline{\mu}=\mu,$ з рівності

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Ax,y)=(x,Ay)=$$
$$=(x,\mu y)=\overline{(\mu y,x)}=\overline{\mu}\cdot\overline{(y,x)}=\mu(x,y)$$

отримаємо $(x,y)=0,$ тобто ортогональність власних функцій x та $y.$

16. Означення та приклади компактних операторів

Оператор $A,$ який відображає банаховий простір L у банаховий простір $L',$ називається *компактним* (*цілком неперервним*), якщо він всяку обмежену множину переводить у передкомпактну.

Оскільки кожна передкомпактна множина є обмеженою, *то всякий компактний оператор є обмеженим*.

Якщо простір L' має скінченну розмірність, то і, навпаки, всякий обмежений оператор буде компактним. Зокрема, компактним буде і всякий лінійний обмежений оператор, визначений у просторі L скінченної розмірності.

Але, наприклад, обмежений одиничний оператор $I:l_2\to l_2$ не є компактним. Обмежену послідовність (e_n) він переводить саму в себе, а така послідовність не є передкомпактною в $l_2,$ бо з неї не можна виділити жодної збіжної підпослідовності.

Теорема. *Інтегральний оператор Фредгольма*

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

ядро якого $K(t,s)$ *неперервне у квадраті* $Q=[a,b;a,b],$ *є компактним оператором у просторі* $C[a,b].$

Доведення. Насамперед зауважимо, що з неперервності функції $K(t,s)$ випливає її обмеженість $|K(t,s)|\leq M$ та рівномірна неперервність у квадраті Q. Отже, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для кожного $s \in [a,b]$ при $|t' - t''| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|K(t',s) - K(t'',s)| < \varepsilon.$$

При цьому будемо мати

$$|Ax(t') - Ax(t'')| \le \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| \cdot |x(s)| ds \le \varepsilon(b-a)\|x\|.$$

Звідси випливає як неперервність функцій $Ax(t)$, так і одностайна неперервність сім'ї таких функцій при умові, що множина функцій $x(t)$ обмежена: $\|x\| \le C$. При цій же умові з нерівності

$$|Ax(t)| \le \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)| ds \le M(b-a)\|x\| \le M(b-a)C$$

отримуємо і рівномірну обмеженість такої сім'ї функцій. За теоремою Арцела така сім'я функцій $Ax(t)$ буде передкомпактною у просторі $C[a,b]$. А отже, інтегральний оператор Фредгольма є компактним у цьому просторі.

Зауважимо, що умови даної теореми можна дещо послабити, вимагаючи обмеженість ядра $K(t,s)$ і допускаючи його розриви вздовж скінченного числа неперервних ліній $s = \varphi_k(t)$, $k = 1,2,...,n$. З врахуванням цього зауваження отримаємо також компактність у просторі $C[a,b]$ інтегрального оператора Вольтерра з довільним неперервним ядром у трикутнику $a \le s \le t \le b$.

17. Властивості компактних операторів

Компактні оператори утворюють замкнений підпростір у просторі обмежених операторів $A: L \to L'$. Це означає, що *лінійна комбінація та границя збіжної за нормою послідовності компактних операторів є компактним оператором.*

Покажемо, що і *добуток компактних операторів є компактним оператором.* Доведемо навіть сильніше твердження:

Теорема. *Якщо оператор A компактний, а оператор B обмежений, то оператори AB та BA компактні.*

Доведення. Якщо множина M обмежена, то оператор B переводить її в обмежену множину, яку в свою чергу оператор A переведе у передкомпактну. Отже, оператор AB компактний. Аналогічно, обмежену множину M оператор A переводить у передкомпактну множину, яку оператор B знову переведе у передкомпактну. Тому й оператор BA компактний.

Наслідок. *Компактний оператор, визначений у нескінченно вимірному просторі, не може мати обмеженого оберненого.*

Доведення. Якщо би обернений до компактного оператора A оператор A^{-1} був обмеженим, то на підставі доведеної тут теореми добуток $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ був би компактним оператором. Але у нескінченно вимірному просторі це не так.

Звідси, зокрема, випливає, що у просторі $C[a,b]$ лінійні інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра першого роду

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \text{ та } \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$$

відповідно можуть мати розв'язки не для всіх неперервних функцій $f(x)$.

Спряжений оператор A^* до компактного оператора A теж є компактним оператором.

Власні значення та власні функції компактного оператора характеризує наступна властивість:

Всякий компактний оператор A у банаховому просторі L при кожному $\delta > 0$ може мати лише скінченне число власних функцій, що відповідають власним значенням, які за модулем перевищують δ.

Звідси випливає, що:

1) *кожному власному значенню $\lambda \neq 0$ компактного оператора A відповідає лише скінченне число лінійно незалежних власних функцій*;

2) *множина власних значень такого оператора не більш як зліченна і може мати точкою скупчення лише точку* 0.

18. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування

Розглянемо тепер властивості самоспряжених компактних операторів у гільбертовому просторі H. Для них справедлива така ***теорема Гільберта-Шмідта:***

Для будь-якого самоспряженого компактного оператора у гільбертовому просторі H існує ортогональна нормована система $\{\varphi_n\}$ власних функцій, які відповідають власним значенням $\lambda_n \neq 0$, що кожен елемент $x \in H$ єдиним способом записується у вигляді

$$x = \sum_n c_n \varphi_n + x_0,$$

де $c_n = (x, \varphi_n)$, $Ax_0 = 0$. *При цьому*

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n,$$

і якщо система $\{\varphi_n\}$ *нескінченна, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$

Зауважимо, що якщо одному і тому ж власному значенню $\lambda \neq 0$ відповідає кілька різних власних функцій системи $\{\varphi_n\}$, то у теоремі Гільберта-Шмідта таке власне значення повторюється з різними індексами стільки разів, якою є його кратність.

Застосуємо дану теорему до розв'язування операторного рівняння другого роду

$$x = \lambda Ax + f$$

з компактним самоспряженим оператором A у гільбертовому просторі H. За теоремою Гільберта-Шмідта це рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_n c_n \varphi_n + x_0 = \lambda \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n + \sum_n f_n \varphi_n + f_0,$$

причому $f_n = (f, \varphi_n)$, $Af_0 = 0$. Помножимо скалярно обидві частини отриманої рівності на функцію φ_k. Оскільки

$$(x_0, \varphi_k) = (f_0, \varphi_k) = 0,$$

бо x_0, f_0, якщо вони не є нулями, можна розглядати як власні функції оператора A, які відповідають власному значенню нуль, та

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

то при кожному k отримаємо рівність

$$c_k = \lambda\lambda_k c_k + f_k,$$

з якої при $\lambda\lambda_k \neq 1$ однозначно знаходимо всі коефіцієнти

$$c_k = \frac{f_k}{1-\lambda\lambda_k}.$$

Підставляючи їх у записане вище рівняння, знайдемо також $x_0 = f_0$. Таким чином, при $\lambda\lambda_k \neq 1$ єдиний розв'язок заданого операторного рівняння матиме вигляд

$$x = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k} + f_0 = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k} + \left(f - \sum_k f_k\varphi_k \right) = f + \lambda\sum_k \frac{\lambda_k f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k}.$$

Якщо ж $\lambda\lambda_k = 1$ при деяких k, то для існування розв'язку цього операторного рівняння необхідно, щоб $f_k = 0$ при всіх таких k, тобто, щоб елемент f був ортогональним до всіх власних функцій оператора A, які відповідають таким власним значенням. При виконанні цієї вимоги розв'язок заданого операторного рівняння існує, але він не єдиний.

На практиці отриманий тут результат може бути застосований до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)dt + f(x)$$

із симетричним ядром $K(x,t) = K(t,x)$ у просторі $L_2[a,b]$.

Практичні заняття з функціонального аналізу

1.Множини та їх властивості (Розділ I, пп. 1-5)

1. Доведіть рівності множин:
   а) $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$;
   б) $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$;
   в) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$;
   г) $(A\bigcap B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$;
   д) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$;
   е) $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;
   є) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$.
2. Обґрунтуйте, що: а) $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}=\bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$; б) $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha}=\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$.
3. Доведіть наступні твердження:
   а) Множина всіх інтервалів на числовій прямій з раціональними кінцями є зліченною.
   б) Множина всіх многочленів із раціональними коефіцієнтами є зліченною.
4. Доведіть що: а) $[a,b]\sim[c,d]$; б) $[a,b]\sim(a,b)$.
5. Встановіть бієкцію між множинами:
   а) $A=[0,\pi)$, $B=[0,+\infty)$;
   б) $A=(-\infty,+\infty)$, $B=[0;1]$;
   в) $A=[0,+\infty)$, $B=(-\infty,+\infty)$;
   г) $A=[1,3]$, $B=[2,4]\bigcup[5,6]$.
6. Обґрунтуйте, що число $x=\dfrac{1}{4}$ належить множині K.
7. Доведіть, що якщо $p(A)=n$, то потужність множини всіх підмножин множини A дорівнює 2^n.

2.Міра множини (Розділ I, пп. 6-10)

1. Доведіть рівності:
   а) $m'(A\setminus B)=m'(A)-m'(A\bigcap B)$;
   б) $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)-m'(A\bigcap B)$;
   в) $m'(A\triangle B)=m'(A)+m'(B)-2m'(A\bigcap B)$.

2. Доведіть, що $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right| \le \mu^*(A \triangle B)$.

3. Обґрунтуйте твердження: якщо множина $A \subset E$ вимірна за Лебегом, то $\mu^*(A)+\mu^*(E \setminus A)=m'(E)$.

4. Доведіть, що об'єднання $A_1 \bigcup A_2$ вимірних за Лебегом множин є вимірною за Лебегом множиною.

5. Над кожним інтервалом, який викидався при побудові канторової множини, побудували півкруги, діаметри яких дорівнюють довжинам відповідних інтервалів. Обчисліть плоску міру Лебега отриманої при цьому множини.

6. На відрізку $[0;1]$ побудуйте множину A, що є об'єднанням зліченної кількості відрізків $[a_n, b_n]$, які попарно не перетинаються, і має лінійну міру Лебега $\mu(A)=\dfrac{2}{3}$.

7. Нехай $X=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ – довільна злічення множина, і числа $p_n>0$ такі, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n=1$. Для будь-якої підмножини A множини X визначимо $m(A)=\sum\limits_{x_n \in A} p_n$. Доведіть, що m є $\sigma-$адитивною мірою. Її називають *ймовірностною мірою*.

3.Вимірні функції (Розділ I, пп. 11-16)

1. Обґрунтуйте твердження: якщо множина A вимірна, і хоч одна з множин
$$M[f \ge c],\ M[f \le c],\ M[f > c]$$
при кожному значенні c буде вимірною, то функція $f(x)$ вимірна на множині A.

2. Намалюйте графік функції $f(x)$ і доведіть за означенням вимірність $f(x)$ на її області визначення, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x \in [-2;0), \\ 2, & x=0, \\ x^2, & x \in (0;2]. \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \in [-1;1), \\ 0, & x=1, \\ 3-x, & x \in (1;2]. \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} -3, & x=-3, \\ 1+x, & x\in(-3;-1), \\ x^2-1, & x\in[-1;1]. \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\in(-2;0), \\ 5, & x=0, \\ x+2, & x\in(0;2). \end{cases}$

3. Обґрунтуйте наступні твердження про вимірні функції:
   а) Якщо функція $f(x)$ вимірна, то функція $f^n(x)$, $n\in N$, теж вимірна.
   б) Якщо $f(x)-$ невід'ємна вимірна функція, то функція $\sqrt[n]{f(x)}$, $n\in N$, теж вимірна.
   в) Функція $f(x)$ може бути і не вимірною, якщо функція $f^2(x)$ вимірна.
4. Дослідіть послідовність функцій $f_n(x)=x^n$, визначених на відрізку $[0;1]$, на збіжність до функції $f(x)=0$: а) за мірою; б) майже скрізь. До якої функції збігається дана послідовність скрізь на цьому відрізку, і чи є така збіжність рівномірною?
5. Доведіть, що послідовність функцій $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, визначених на відрізку $[0;1]$, збігається на цьому відрізку рівномірно до функції $f(x)=0$.

4.Інтеграл Лебега (Розділ І, пп. 17-24)

1. $f(x)=1$ у точках канторової множини, а у точках інтервалів, які викидалися при побудові цієї множини, дорівнює довжині відповідного інтервалу. Доведіть, ця функція є простою і обчисліть її інтеграл Лебега на відрізку $[0;1]$.
2. Обчисліть за означенням інтеграла Лебега $\int\limits_{[0;1]}|3x-2|\,d\mu$.
3. Обґрунтуйте, що з нерівності $|f(x)|\le\varphi(x)$ та інтегровності функції $\varphi(x)$ за Лебегом на множині A випливає інтегровність за Лебегом на цій множині функції $f(x)$.

4. Доведіть або спростуйте наступні твердження:

а) Якщо $\int\limits_E f(x)d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на E.

б) Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu = 0$ для кожної множини $A \subset E$, то $f(x) = 0$ скрізь на E.

5. Доведіть, що функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[0;1]$, і обчисліть $\int\limits_{[0;1]} f(x)d\mu$, якщо:

а) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}, x \in [0;1] \cap Q, \\ \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [0;1] \setminus Q. \end{cases}$$

б) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}, x \in (0;1), \\ \cos 2x \cdot \cos^2 x, x \in \{0;1\}. \end{cases}$$

в) $$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3-2x^2}, x \in [0;1] \setminus \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \\ \sqrt{3+2x^2}, x \in [0;1] \cap \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \end{cases} n \in N.$$

г) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^4+1}, x \in \left[0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \dfrac{x^3}{x^4+1}, x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]. \end{cases}$$

5. Модуль №1. Вимірні множини та вимірні функції

1. Теоретико-практичне завдання з розділу І.
2. Намалювати графік і довести вимірність функції за означенням вимірної функції.
3. Обґрунтувати інтегровність функції та обчислити її інтеграл Лебега по заданій множині скінченної міри.

6. Множини у метричних просторах (Розділ II, пп. 1-7)

1. Обґрунтуйте виконання аксіом відстані у метричних просторах: а) R^1; б) $C[a,b]$; в) R^n.
2. Дослідіть послідовність $x_n(t)=t^n$ на збіжність у метричних просторах $C[0;1]$, $C_1[0;1]$ та $C_2[0;1]$.
3. Доведіть, що кожна точка інтервалу (a,b) числової прямої є внутрішньою.
4. Нехай $A=(-1;2)$, $B=\left\{\dfrac{2n(-1)^n}{n+4}, n\in N\right\}$, $C=[1;3]$. Знайдіть внутрішні, ізольовані, граничні та точки дотику множини:

   а) $M=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$; б) $M=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

   в) $M=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$; г) $M=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.
5. Функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій. Доведіть, що: а) множина $\{x: f(x)<5\}$ відкрита; б) множина $\{x: f(x)\le 3\}$ замкнена.
6. Наведіть приклад нескінченної кількості відкритих множин, перетин яких не є відкритою множиною.
7. Опишіть всі можливі топології, які можна задати на множині $X=\{a,b,c\}$.

7.Повні метричні простори (Розділ II, пп. 8-12)

1. Доведіть, що послідовність функцій $x_n(t)=t^n$ не є фундаментальною у метричному просторі $C[0;1]$.
2. Дослідіть, чи є фундаментальною у просторі l_2 послідовність (e_n) елементів:

   $e_1=(1,0,0,0,\ldots)$, $e_2=(0,1,0,0,\ldots)$, $e_3=(0,0,1,0,\ldots)$, ...
3. Обґрунтуйте повноту просторів: а) R_0^n; б) R_1^n; в) l_2.
4. Доведіть, що метричний простір $C_2[0;1]$ не повний.
5. Наведіть приклад повного метричного простору і послідовності вкладених одна в одну замкнених куль, перетин яких є порожнім.

6. Доведіть, що в теоремі про вкладені кулі перетин таких куль складається з однієї точки.
7. Доведіть, що у кожному метричному просторі (X,ρ) функція $\rho(x,y)$, якщо її розглядати як функцію двох змінних $x,y\in X$, є неперервною функцією цих змінних.

8.Принцип стискаючих відображень та його застосування (Розділ II, пп. 13-18)

1. Доведіть, що відображення $Ax = x+\dfrac{1}{x}$ у повному метричному просторі $(X,\rho)=\left([1;+\infty),|x-y|\right)$ для всіх $x\neq y$ задовольняє нерівність $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$, але не має жодної нерухомої точки.
2. Доведіть, що рівняння $x^3+x-1=0$ має єдиний корінь на інтервалі $(0;1)$ і знайдіть цей корінь методом послідовних наближень з точністю до 0,01.
3. Методом послідовних наближень розв'яжіть задачі Коші:

   а) $\begin{cases} y' = 2x+y-1, \\ y(0)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = 3x-y+2, \\ y(0)=0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} y' = x+y+4, \\ y(0)=0. \end{cases}$

   г) $\begin{cases} y' = x-y-3, \\ y(0)=0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} y' = x+2y-1, \\ y(0)=0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} y' = x-2y+2, \\ y(0)=0. \end{cases}$
4. Методом послідовних наближень розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

   а) $y(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^2ty(t)\,dt - x;$ б) $y(x)=\displaystyle\int_0^1 x^2ty(t)\,dt+4x;$

   в) $y(x)=2\displaystyle\int_0^1 xt^3y(t)\,dt-1;$ г) $y(x)=\lambda\displaystyle\int_0^1 x^2ty(t)\,dt+x.$
5. Методом послідовних наближень розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду:

   а) $y(x)=x-\displaystyle\int_0^x (x-t)y(t)\,dt;$ б) $y(x)=1+\displaystyle\int_0^x (x-t)y(t)\,dt.$

9.Модуль №2. Метричні простори

1. Теоретичне питання з розділу II.
2. Розв’язати методом послідовних наближень задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами.
3. Розв’язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду.

10. Лінійні та нормовані простори (Розділ III, пп. 1-6)

1. Доведіть, що множина $C'[a,b]$ неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання і множення на число утворює лінійний підпростір у просторі $C[a,b]$.
2. Перевірте, чи може бути норма у просторі $C'[a,b]$ задана формулою $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$. Вкажіть хоч один підпростір цього простору, у якому така формула визначає норму.
3. Доведіть, що у $C'[a,b]$ норма може бути задана формулою
$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|.$$
4. З’ясуйте, чи збігаються у просторах $C[0;1]$ та $L_1[0;1]$ послідовності функцій:

   а) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$; б) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$; в) $x_n(t) = ne^{-nt}$;

   г) $x_n(t) = \sin t - \sin\frac{t}{n}$; д) $x_n(t) = \begin{cases} 1-nt,\ t\in\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ 0, \quad t\notin\left[0,\frac{1}{n}\right]. \end{cases}$

5. Дослідіть на збіжність у просторах l_1 та l_2 послідовності:

   а) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n},0,\ldots,0}_{n},1,0,\ldots\right)$; б) $x_n = \left(\underbrace{1,0,\ldots,0,\frac{1}{n}}_{n},0,\ldots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, ... \right)$; г) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ... \right)$.

6. Проаналізуйте суттєвість та необхідність рівномірної збіжності для збіжності в середньому на прикладах:

а) $f_n(x) = \begin{cases} n, \ x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \ x \in \left(\frac{1}{n}; 1\right). \end{cases}$ б) $f_n(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \ x \in \left(\frac{1}{n}; 1\right). \end{cases}$

11.Евклідові простори (Розділ III, пп. 7-11)

1. Знайдіть всі значення коефіцієнтів α та β, при яких функція $\varphi(x, y) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2$ визначає скалярний добуток у просторі R^2.
2. Доведіть, що норму простору m не можна задати з допомогою скалярного добутку.
3. Доведіть, що в дійсному евклідовому просторі елементи x та y ортогональні тоді і тільки тоді, коли
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
Чи вірне це твердження для комплексних просторів?
4. Доведіть, що у просторі l_2 послідовність (e_n) елементів:
$e_1 = (1, 0, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$, ...
утворює базис.
5. Дослідіть, чи збігаються у просторі $L_2[0;1]$ послідовності:

а) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$; б) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$; в) $x_n(t) = ne^{-nt}$;

г) $x_n(t) = \begin{cases} t, \ t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \\ 0, \ t \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$ д) $x_n(t) = \begin{cases} n^2 t, \ t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ \frac{nt}{n^2+1}, \ t \notin \left[0, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$

6. Доведіть, що при $\mu(X) < \infty$ із рівномірної збіжності послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ випливає її збіжність до $f(x)$ і в середньому квадратичному.

12.Ортогональні системи (Розділ III, пп. 12-15)

1. Доведіть, що система функцій $\{\sin nt\}$, $n \in N$, ортогональна у просторі $L_2[0;\pi]$. Запишіть для неї відповідну ортогональну нормовану систему і перевірте виконання рівності Парсеваля для функції $x(t)=1$.
2. Розгляньте попереднє завдання у просторі $L_2[-\pi;\pi]$.
3. Перевірте ортогональність у просторі l_2 системи елементів
$$x_n = \left(\underbrace{1,\ldots,1}_{2^{n-1}}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{2^{n-1}}, 0, 0, \ldots \right),\ n \in N.$$
4. Доведіть ортогональність у просторі $L_2[-1;1]$ системи функцій
$$x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n,\ n \in N.$$
5. Нехай H_0 – підпростір гільбертового простору H. Розглянемо його *ортогональне доповнення*
$$H_0^{\perp} = \{x : x \in H, x \perp y\ \forall y \in H_0\}.$$
Доведіть, що $H_0^{\perp}$ теж є замкненим підпростором простору H.
6. Знайдіть ортогональне доповнення до підпростору $H_0 \subset l_2$, який складається з елементів вигляду $y = (y_1, y_2, 0, 0, \ldots)$, де y_1, y_2 пробігають множину всіх дійсних чисел.

13.Модуль №3. Лінійні, нормовані та евклідові простори

1. Теоретичне питання з розділу III.
2. Дослідити задану послідовність на збіжність у просторах $C[a,b]$, $L_1[a,b]$ чи $L_2[a,b]$.
3. Записати ряд Фур’є для функції $x(t) \in L_2[a,b]$ відносно заданої повної ортогональної нормованої системи функцій цього простору.

14.Лінійні функціонали (Розділ IV, пп. 1-4)

1. Доведіть за означенням неперервності неперервність функціонала $f(x)=\int\limits_0^1 tx(t)dt$ у просторі $C[0;1]$.
2. Доведіть, що функціонал $f: C[0;1]\to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

   а) $f(x)=\int\limits_0^1 tx(t)dt$; б) $f(x)=\int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt$;

   в) $f(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$; г) $f(x)=\int\limits_0^1 t^2x(t)dt-x(0)$.
3. Доведіть, що функціонал $f: L_2[0;1]\to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

   а) $f(x)=\int\limits_0^1 \sin tx(t)dt$; б) $f(x)=\int\limits_0^{0,5} x(t)dt-\int\limits_{0,5}^{1} tx(t)dt$.
4. Доведіть, що функціонал $f: l_2\to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

   а) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$; б) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k-x_{k+1}}{2^k}$.
5. Дослідіть при яких α функціонал $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k^{\alpha}}$ належить до простору l_2^*.

15.Слабка збіжність та узагальнені функції (Розділ IV, пп. 5-7)

1. Дослідіть послідовності на сильну та слабку збіжність у просторі l_2:

   а) $x_n=\left(\underbrace{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n}}_{n},0,\dots\right)$; б) $x_n=\left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$.
2. Дослідіть послідовності на сильну та слабку збіжність у просторі $L_2[0;1]$:

а) $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n},\ t\in\left[0;\dfrac{1}{n}\right),\\ 0,\quad t\in\left[\dfrac{1}{n};1\right].\end{cases}$ б) $x_n(t)=\begin{cases}2n(1-nt),\ t\in\left[0;\dfrac{1}{n}\right),\\ 0,\qquad t\in\left[\dfrac{1}{n};1\right].\end{cases}$

3. Нехай $\varphi(x)-$ фінітна нескінченно диференційовна функція. Дослідіть на збіжність у просторі основних функцій послідовності:

а) $\varphi_n(x)=\dfrac{\varphi(x)}{n}$; б) $\varphi_n(x)=\dfrac{\varphi(nx)}{n}$; в) $\varphi_n(x)=\dfrac{\varphi(x+n)}{n}$.

4. Знайдіть похідні перших трьох порядків від функцій:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,\ x\le 1,\\ \sin\pi x,\quad x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}|x+2|,\quad x\le 1,\\ x^3+x,\quad x>1.\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x,\ |x|\le\pi,\\ \cos x,\quad |x|>\pi.\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}|x+1|,\quad |x|\le 2,\\ x^2-1,\quad |x|>2.\end{cases}$

16.Лінійні оператори та дії над ними (Розділ IV, пп. 8-13)

1. Перевірити, чи є лінійним і неперервним оператор $A:X\to X$, якщо:

а) $X=C[0;1]$, $\quad Ax(t)=tx(t)$;

б) $X=C[0;1]$, $\quad Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;

в) $X=C[0;1]$, $\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$;

г) $X=L_2[0;1]$, $\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 t^2\tau x(\tau)d\tau$;

д) $X=L_2[0;2\pi]$, $\quad Ax(t)=\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\tau)x(\tau)d\tau$.

2. Доведіть, що оператор $A:l_2\to l_2$ є лінійним обмеженим оператором і знайдіть обернений до нього оператор, якщо:

а) $Ax=(x_1-2x_2,2x_1+3x_2,x_3,x_4,...)$;

б) $Ax=(x_1+2x_2,x_1-x_2,x_3,x_4,...)$.

3. Нехай X_0 – підпростір простору $X = C[0;1]$, який складається з неперервно диференційованих на відрізку $[0;1]$ функцій $x(t)$ таких, що $x(0)=0$. Знайдіть обернений оператор до оператора $A: X_0 \to C[0;1]$, якщо:

$$Ax(t) = (t^2+1)x'(t) - 2tx(t).$$

4. Методом ітерованих ядер розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

а) $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt - x;$ б) $y(x) = \int_0^1 x^2 t^2 y(t)\,dt + 4x;$

в) $y(x) = 2\int_0^1 x t^3 y(t)\,dt - 1;$ г) $y(x) = \lambda\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt + x.$

5. Методом ітерованих ядер розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду:

а) $y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt;$ б) $y(x) = 1 + \int_0^x (x-t) y(t)\,dt.$

17.Модуль №4. Лінійні функціонали та лінійні оператори

1. Обґрунтувати лінійність та неперервність заданого фунціонала $f : C[a,b] \to R^1$ і знайти його норму.
2. Знайти похідну заданої регулярної узагальненої функції.
3. Довести, що заданий оператор $A: l_2 \to l_2$ є лінійним обмеженим оператором і знайти обернений до нього оператор.

18. Спектральні властивості лінійних операторів (Розділ IV, пп.. 14-18)

1. Обґрунтуйте, що оператор $Ax(t) = tx(t)$, визначений у просторі $C[a,b]$, не має власних значень. Знайдіть неперервний спектр цього оператора.
2. Знайдіть спектр оператора $A: l_2 \to l_2$, якщо

$$Ax = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

3. Знайдіть власні значення та нормовані власні функції операторів $A: l_2 \to l_2$, якщо:

   а) $Ax = \left(x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$;

   б) $Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$.

4. Знайдіть спряжені оператори до операторів, заданих у попередньому завданні.

5. Оператор $A: L_2\left[0;1\right] \to L_2\left[0;1\right]$, причому

$$Ax\left(t\right) = \int_0^t x\left(\tau\right) d\tau, \quad t \in \left[0;1\right].$$

   Знайдіть спряжений до нього оператор.

6. Оператор $A: L_2\left[0;1\right] \to L_2\left[0;1\right]$ визначається формулою

$$Ax\left(t\right) = \int_0^1 \min\left\{t, s\right\} x\left(s\right) ds, \ t \in \left[0;1\right].$$

   Доведіть, що він є самоспряженим, і знайдіть власні значення та відповідні їм нормовані власні функції цього оператора.

Контрольні питання до заліку з функціонального аналізу

1. Об’єднання, перетин, різниця та симетрична різниця множин. Обґрунтувати дистрибутивність операцій об’єднання та перетину множин одна відносно одної.
2. Поняття зліченної та незліченної множини. Обґрунтувати зліченність множини раціональних та незліченність множини ірраціональних чисел.
3. Поняття міри прямокутника та елементарної множини. Обґрунтувати $\sigma-$адитивність міри елементарних множин.
4. Поняття про міру Лебега та її основні властивості. Обґрунтувати неперервність міри Лебега.
5. Поняття про вимірні функції. Довести за означенням вимірність заданої функції.
6. Інтеграл Лебега для простих функцій та його властивості. Навести приклади обчислення інтегралів Лебега від простих функцій, які набувають скінченну та зліченну множини значень.
7. Сформулювати загальне означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри та довести його коректність.
8. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. Обчислити заданий інтеграл Лебега, звівши його до обчислення інтеграла Рімана.
9. Поняття метрики та метричного простору. Навести п’ять прикладів метричних просторів і обґрунтувати виконання аксіом метрики в одному з них.
10. Поняття збіжної та фундаментальної послідовності. Обґрунтувати зв’язок між такими послідовностями.
11. Поняття повного метричного простору. Обґрунтувати повноту простору R^n.
12. Теорема про вкладені кулі. Доведення теореми.
13. Поняття про неперервні та стискаючі відображення метричних просторів. Довести теорему Банаха про принцип стискаючих відображень.
14. Поняття про застосування принципу стискаючих відображень до розв’язування задачі Коші. Розв’язати задану задачу Коші методом послідовних наближень.

15. Поняття про застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розв'язати задане інтегральне рівняння методом послідовних наближень.
16. Поняття лінійного простору та його розмірності. Навести приклади лінійних просторів та їх власних підпросторів.
17. Поняття норми та нормованого простору. Їх зв'язок з метричними просторами. Навести приклади п'яти нормованих просторів та їх норм.
18. Дослідити задану послідовність на збіжність у просторі $C[a,b]$, $L_1[a,b]$ чи $L_2[a,b]$.
19. Поняття про збіжність у середньому. Обґрунтувати її зв'язок з рівномірною збіжністю та збіжністю за мірою.
20. Поняття скалярного добутку та евклідового простору. Обґрунтувати необхідність умови характеристичної властивості евклідового простору.
21. Довести нерівність Коші-Буняковського та записати, як вона виглядає у конкретних евклідових просторах.
22. Обґрунтувати лінійну незалежність ортогональної системи. Навести приклади ортогональних базисів у конкретних евклідових просторах.
23. Поняття про ряди Фур'є. Довести нерівність Бесселя.
24. Розкласти задану функцію у ряд Фур'є відносно повної ортогональної нормованої системи у просторі $L_2[a,b]$.
25. Поняття про гільбертові простори. Довести теорему про ізоморфізм дійсних гільбертових просторів.
26. Поняття лінійного функціонала, його неперервності, обмеженості та норми. Довести, що заданий функціонал $f: C[a,b] \to R^1$ є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму.
27. Поняття спряженого простору. Довести повноту простору, спряженого до нормованого.
28. Поняття узагальненої функції та її похідної. Обчислити похідну заданої регулярної узагальненої функції.
29. Поняття лінійного оператора, його обмеженості та норми. Проаналізувати властивості інтегрального оператора Фредгольма у просторі $C[a,b]$.

30. Поняття про оборотні та обернені оператори. Довести лінійність оператора, оберненого до лінійного.
31. Довести лінійність та обмеженість заданого оператора $A: l_2 \to l_2$ і знайти обернений до нього оператор.
32. Обґрунтувати існування оператора, оберненого до $I - A$, та розкрити суть застосувань цієї теореми.
33. Поняття про розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер. Розв'язати задане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду методом ітерованих ядер.
34. Поняття про спектр та резольвенту оператора. Довести теорему про регулярні точки лінійного обмеженого оператора.
35. Поняття спряженого та самоспряженого операторів. Обґрунтувати властивості власних значень та власних функцій самоспряженого оператора у гільбертовому просторі.
36. Поняття про компактні оператори. Обґрунтувати компактність у просторі $C[a,b]$ інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.

Список основної літератури

1. *Дороговцев А.Я., Івасишен С.Д., Кондратьєв Ю.Г., Константинов О.Ю.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Функціональний аналіз та інтегральні рівняння» для студентів спеціальності «математика». – Чернівці: ЧДУ, 1992. – 109с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
4. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.
5. *Федак І.В.* Елементи теорії міри та інтеграла Лебега. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.

Навчальне видання

Федак Іван Васильович

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей «Інформатика»
та «Прикладна математика»

Підписано до друку 15 січня 2011р.
Формат 61x84, 1/16, папір офсетний, друк цифровий
Ум. обсяг 7,5 друк. арк. Наклад 300 пр.
Замовлення № 15 від 15.01.2011

Видавництво «Сімик»
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. Незалежності, 46/111,
тел.: (03422) 3-25-91, e-mail: symyk@com.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єкта
видавничої справи серія ІФ №11 від 27.03.2001 року.

Видрукувано: приватний підприємець Голіней О.М.,
76008, м. Івано-Франківськ,
вул. Галицька, 128,
тел. (0342) 58-04-32