І.В. Федак

Елементи теорії міри та інтеграла Лебега

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки "математика" вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
«Сімик»
2011

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф72

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “математика” вищих навчальних закладів (лист № 1/11 – 1631 від 11.03.10)

Рецензенти:

Лопушанський О.В., зав. відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор

Маслюченко В.К., зав. кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича, доктор фізико-математичних наук, професор

Філевич П.В., зав. кафедри інформаційних систем менеджменту Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С.Гжицького, доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Теорія міри та інтеграла» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Містить основні поняття та теореми з теорії міри та інтеграла Лебега, задачі для самостійного розв’язування.

ISBN 978-966-8067-75-4

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73

Зміст

Передмова

Пропонований вашій увазі посібник написаний на основі курсу лекцій з дисципліни «Теорія міри та інтеграла», які на протязі багатьох років читались його автором для студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Поняття міри – одне з найважливіших понять як у математиці, так і у філософії. Ще у Стародавній Греції вважали, що все має міру: довжину, площу, ціну тощо.

Саме від площі ми і будемо відштовхуватися при введенні даного поняття. Основні властивості площі, такі як невід'ємність та адитивність, природним чином покладаються в основу загального означення міри, визначеної на довільному півкільці множин.

З метою досягнення більшою наочності ми спочатку визначимо міру m на півкільці прямокутників на площині, сторони яких паралельні до координатних осей. Далі поширимо цю міру на елементарні множини, які утворюють мінімальне кільце множин, породжене цим півкільцем. І, нарешті, розглянемо лебегове продовження такої міри на $\sigma-$алгебри множин. Зробимо також порівняння міри Лебега з мірою Жордана, з якою студенти вже частково знайомі з курсу математичного аналізу. Також вкажемо на інший підхід до означення вимірності за Лебегом, який реалізований, наприклад, у підручнику $[2]$.

Отримані при цьому властивості мір цілком аналогічно можуть бути доведені для мір, визначених на довільних півкільцях множин, та їх продовжень. Тому на доведенні цих властивостей для довільних мір ми зупинятися не будемо, а лише вкажемо на спосіб їх отримання та рекомендуємо літературу, в якій з такими доведеннями можна ознайомитися.

Для теорії інтегрування важливу роль відіграє й поняття вимірної функції. Тому в посібнику вивчаються основні властивості таких функцій, які тісно пов'язані з властивостями вимірних множин. Аналізуються також властивості послідовностей таких функцій. Вказано і на більш загальний підхід до поняття вимірності функції.

З курсу математичного аналізу студенти вже знайомі з означенням та властивостями інтеграла Рімана. Надалі при викладі матеріалу ми будемо вважати наявними знання читачами цих властивостей, наприклад, в об'ємі підручників [17], [18].

Існують різні методичні підходи для введення інтеграла Лебега (див., наприклад, [2],[7],[8],[12],[14],[21]). За аналогією з [7] ми спочатку введемо поняття такого інтеграла для простих функцій, тобто вимірних функцій, які набувають не більше, як зліченну кількість різних значень, а вже потім поширимо його на довільні вимірні за Лебегом функції. Водночас вкажемо і на можливість означення інтеграла Лебега як границі інтегральних сум та його порівняння з інтегралом Рімана.

У посібнику мова бути йти в основному про інтегрування відносно міри Лебега. Але зрозуміло, що отримані при цьому властивості інтеграла збережуться і при інтегруванні відносно інших повних $\sigma-$адитивних мір.

Для вивчення властивостей невизначеного інтеграла Лебега детально зупинимося на аналізі основних властивостей монотонних функцій, функцій з обмеженою зміною та абсолютно неперервних функцій. А також проведемо деяку аналогію між властивостями невизначених інтегралів Лебега та Рімана.

Як узагальнення будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини та введемо поняття знакозмінних мір. Вкажемо також на інші принципово відмінні підходи до введення самого поняття інтеграла, в тому числі і без використання поняття міри. Зокрема, розглянемо найпростіші узагальнення мір та інтегралів Лебега, якими є міри та інтеграли Лебега-Стільтьєса.

Для цілісності викладу матеріалу в перших шести параграфах посібника розглядаються також деякі загальні властивості множин, які будуть надалі суттєво використовуватися при розгляді питань, пов'язаних з мірою та інтегралом Лебега.

Теоретичний матеріал, на скільки це було можливо в рамках порівняно невеликого за об'ємом лекційного курсу, ілюструється прикладами розв'язування конкретних задач та аналізом необхідності чи суттєвості умов ряду доведених теорем.

Крім того, для закріплення прочитаного матеріалу запропоновано 25 практичних завдань, кожне з яких складається з десяти однотипних прикладів. Їх можна використати, наприклад, для домашньої контрольної роботи. Для проведення практичних занять рекомендуємо також посібники: [3],[5],[6],[11],[13],[16].

Розділ I

ВИМІРНІ МНОЖИНИ ТА ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ

§ 1. Множини та операції над ними

Поняття множини є одним з основних понять у математиці. Воно настільки загальне, що не можна дати йому означення, яке не зводилось би до заміни слова «множина» його синонімом.

Як правило, множини позначають великими, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту.

Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Якщо ж елемент a не належить множині A, то записують: $a \notin A$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Якщо всі елементи множини A є також елементами множини B, то множина A називається *підмножиною* множини B, і записується $A \subset B$, або ж $B \supset A$. Зрозуміло, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а всяка множина A є підмножиною самої себе. Якщо ж, крім $A \subset B$, має місце включення $B \subset A$, то множини A та B *рівні*: $A = B$.

Якщо всі елементи множини можна перерахувати, то їх записують підряд у фігурних дужках. Наприклад, $A = \{a, b, c\}$. Відповідно, запис $A = \{x\}$ означатиме множину елементів, загальним іменем яких є "x". При цьому у фігурних дужках після x через двокрапку чи вертикальну риску може бути записана властивість, яку повинні задовольняти елементи x, щоб належати даній множині. Наприклад, запис $\{x : |x| \le 2\}$ визначає множину тих x, які задовольняють нерівність $|x| \le 2$.

Для окремих множин існують загально прийняті у математиці позначення:

N – множина натуральних чисел,

Z – множина цілих чисел,

Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел,

Q – множина раціональних чисел,

R – множина дійсних чисел,

C – множина комплексних чисел.

Якщо A та $B-$ дві довільні множини, то їх *об'єднанням* називається множина $A\bigcup B$, яка складається з усіх елементів, які належать хоч одній з множин A та B:

$$A\bigcup B=\{x: x\in A\vee x\in B\}.$$

Подібно визначається об'єднання довільної кількості множин як сукупність елементів, які належать хоч одній з цих множин. Запис

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

означає об'єднання множин $A_1, A_2, ..., A_n$.

Перетином множин A та B називається множина $A\bigcap B$, яка складається з усіх елементів, які входять у кожну з множин A та B:

$$A\bigcap B=\{x: x\in A\wedge x\in B\}.$$

Для позначення перетину множин $A_1, A_2, ..., A_n$, тобто сукупності елементів, які входять у кожну з цих множин, використовують запис:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Аналогічно визначаються також операції об'єднання та перетину нескінченної кількості множин.

Безпосередньо з означення випливає, що *операції об'єднання та перетину множин комутативні та асоціативні*:

$$A\bigcup B=B\bigcup A,\ (A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),$$

$$A\bigcap B=B\bigcap A,\ (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C).$$

Крім того, *вони дистрибутивні одна відносно одної*:

$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C),$$

$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C).$$

Справді:

$$x\in(A\bigcup B)\bigcap C\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge x\in C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C),$$

$$x\in(A\bigcap B)\bigcup C\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C).$$

Різницею множин A та B називається множина $A \setminus B,$ яка складається з усіх елементів множини $A,$ які не належать множині B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Зокрема, якщо $A \subset B,$ то $A \setminus B = \varnothing.$

У багатьох задачах математики доводиться розглядати підмножини однієї і тієї ж множини S. Різницю $S \setminus A$ називають *доповненням* множини A і позначають $CA,$ або $\overline{A}.$

Для об'єднань та перетинів довільної кількості множин A_α *справедливі наступні рівності*:

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha} \quad \text{та} \quad \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Доведемо, наприклад, першу з них:

$$x \in \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow \forall_\alpha \ x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \forall_\alpha \ x \in \overline{A_\alpha} \Leftrightarrow x \in \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Друга рівність доводиться аналогічно. Пропонуємо читачам обґрунтувати її самостійно.

Ці рівності лежать в основі так званого ***принципу двоїстості:*** *з будь якої теореми, яка стосується підмножин деякої фіксованої множини, можна отримати двоїсту теорему, замінивши всі множини їх доповненнями, об'єднання множин – перетинами, а перетини – об'єднаннями.*

У теорії міри важливу роль відіграє й *симетрична різниця* множин:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A),$$

яку ще можна записати у вигляді:

$$A \triangle B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Таким чином, симетрична різниця двох множин складається із всіх елементів їх об'єднання, які не належать перетину цих множин.

У теорії інтегрування велике значення має ще одна операція – *прямий добуток* множин:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Прямий добуток множин $A_1, A_2, ..., A_n$ визначають як

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

У випадку, коли $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A,$ прямий добуток таких множин позначають A^n.

Зауважимо, що *операція прямого добутку дистрибутивна відносно операцій об'єднання та перетину*:

$$(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C),$$

$$(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C).$$

§ 2. Зліченні та незліченні множини

За кількістю елементів множини поділяються на *скінченні* та *нескінченні* множини. Вилучаючи по одному елементи скінченної множини, ми на деякому кроці отримаємо порожню множину. А для нескінченної множини, скільки б елементів по одному з неї не вилучали, ми на жодному кроці не зможемо отримати порожньої множини.

Серед нескінченних множин важливу роль відіграють *зліченні* множини, тобто множини, між елементами яких і елементами множини натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність - бієкцію. Іншими словами, множина називається *зліченною*, якщо її елементи можна виписати у вигляді нескінченної послідовності: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Зрозуміло, що *всяка підмножина зліченної множини є скінченною або зліченною.*

Найпростішим прикладом зліченної множини є множина натуральних чисел. Зліченними є також множини парних та непарних натуральних чисел, множина цілих чисел.

Покажемо, що і *множина раціональних чисел є зліченною.* Зауваживши, що кожне раціональне число записується у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N,$ назвемо *висотою* такого дробу суму $|p| + q.$ Оскільки дробів із кожною конкретною висотою є скінченна кількість, то всі такі дроби можна виписати у нескінченну послідовність за зростанням їхньої висоти, а отже, і встановити цим бієкцію між елементами множин Q та N.

Доведемо наступну важливу властивість зліченних множин***:***

Теорема. *Об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що таке об'єднання є нескінченною множиною, і випишемо елементи цього об'єднання у вигляді нескінченної таблиці:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Тут у першому рядку записані всі елементи першої множини, у другому – другої і так далі. Далі елементи цієї таблиці виписуємо за зростанням суми їх індексів у наступному порядку: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \ldots$, причому елементи, які повторюються, повторно записувати не будемо. Тобто послідовно виписуємо їх по діагоналях таблиці, перпендикулярних до головної діагоналі. Оскільки на кожній такій діагоналі знаходиться скінченна кількість елементів, то при цьому кожен елемент об'єднання множин отримає свій номер. А це й означає зліченність об'єднання заданих множин.

Використовуючи цю властивість, можна запропонувати ще й таке доведення зліченності множини Q:

Оскільки

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

де

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z \right\},$$

і кожна з множин A_n злічена, то і множина Q є зліченною.

Зауважимо, що міркуючи аналогічно, легко довести й наступні властивості скінченних та зліченних множин:

1. *Об'єднання скінченної кількості скінченних множин є скінченна множина.*

2. *Об'єднання скінченної та зліченної множини є злічена множина.*

3. *Об'єднання зліченної кількості скінченних множин, які попарно не перетинаються, є злічена множина.*

Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

Нехай тепер A – довільна нескінченна множина. Вибираючи з неї послідовно один за одним елементи і позначаючи їх

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ відповідно, ми завжди можемо виділити з неї зліченну підмножину. То ж виникає питання: *чи всяка нескінченна множина сама буде зліченною?*

Покажемо, що це не так. А саме доведемо, що *множина всіх дійсних чисел відрізка* $[0,1]$ *є незліченною.*

Доведення. Припустимо, що множина дійсних чисел такого відрізка зліченна, і випишемо всі ці числа у вигляді послідовності нескінченних десяткових дробів:

$$\alpha_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} ... a_{1n} ...,$$
$$\alpha_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} ... a_{2n} ...,$$
$$\alpha_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} ... a_{3n} ...,$$
$$.................................,$$
$$\alpha_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} ... a_{nn} ...,$$
$$.................................,$$

де через a_{kn} позначені відповідні десяткові цифри чисел α_k. Розглянемо тепер число $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 ... b_n ...,$ в якому жодна з цифр b_n не є ні нулем, ні дев'яткою, і, крім того, $b_n \neq a_{nn}$ для всіх $n \in N$. Зрозуміло, що $\beta -$ дійсне число з відрізка $[0,1]$, яке не співпадає з жодним із чисел α_n. А це суперечить тому, що всі дійсні числа цього відрізка були виписані. Отримане протиріччя доводить незліченність множини таких чисел.

Зрозуміло, що незліченною буде і множина всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$.

Доведемо, що і *множина всіх ірраціональних чисел відрізка* $[0,1]$ *також незліченна.* Справді, припустивши протилежне, ми отримали би, що її об'єднання зі зліченною множиною раціональних чисел цього відрізка мало би бути зліченною множиною. А це суперечить тільки що доведеному твердженню.

§ 3. Потужність множини

Дві множини A та B, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються *еквівалентними*: $A \sim B$. Про такі множини кажуть, що вони мають *однакову потужність* і записують $p(A) = p(B)$.

Якщо ж множина A містить підмножину $A_1 \sim B,$ а множина B не містить підмножини $B_1 \sim A,$ то вважають, що *потужність множини A більша за потужність множини B,* і записують $p(A) > p(B),$ або ж $p(B) < p(A).$

Зауважимо, що якщо при цьому і у множині B знайшлася б підмножина $B_1 \sim A,$ то за *теоремою Кантора-Бернштейна* (див. $[7]$, ст. 23) множини A та B були би еквівалентними.

Відзначимо також, що звідси, зокрема, випливає такий важливий ***наслідок*:**

Якщо $A \subset B \subset C$ *і* $p(A) = p(C) = p,$ *то і* $p(B) = p.$

Зрозуміло, що *дві скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів*. Таким чином, під потужністю скінченної множини можна розуміти кількість елементів цієї множини.

Будь-які дві зліченні множини еквівалентні між собою, оскільки кожна з них еквівалентна множині натуральних чисел. А отже, *всі зліченні множини мають однакову потужність*.

Очевидно також, що *потужність нескінченної множини більша за потужність скінченної множини, а потужність незліченної множини більша за потужність зліченної множини*.

Розглянемо приклади еквівалентних між собою незліченних множин:

1. $[a,b] \sim [c,d].$

Справді, бієкцію між такими відрізками можна встановити, наприклад, з допомогою лінійної функції вигляду

$$y = kx + l,$$

визначеної на відрізку $[a,b]$. Вибираючи коефіцієнти k,l так, щоб виконувалися рівності

$$y(a) = c,\ y(b) = d,$$

отримаємо

$$y = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c,$$

Зауважимо, що ця ж функція, визначена на (a,b), задає взаємно однозначну відповідність і між інтервалами (a,b) та (c,d), які, таким чином, теж є еквівалентними.

2. $(-\infty,+\infty)\sim(0,1)$.

Бієкцію тут задає функція

$$y=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2},$$

визначена на всій числовій прямій.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що також $(0,+\infty)\sim(0,1)$, і знайти функцію, яка встановлює бієкцію між цими інтервалами.

3. $[a,b]\sim(a,b)$.

Еквівалентність цих множин легко довести, розглянувши відрізок $[c,d]\subset(a,b)$, який згідно прикладу 1 еквівалентний до відрізка $[a,b]\supset(a,b)$, і скориставшись наслідком з теореми Кантора-Бернштейна.

Але ми проведемо безпосереднє доведення їх еквівалентності, встановивши бієкцію між елементами цих множин. Для цього на інтервалі (a,b) виберемо довільну зліченну множину A. Такою, наприклад, може бути множина раціональних чисел з цього інтервалу. Випишемо елементи цієї множини у вигляді послідовності: $a_1,a_2,...,a_n,...,$ і задамо бієкцію за наступним принципом:

$$a\leftrightarrow a_1, b\leftrightarrow a_2, a_1\leftrightarrow a_3,...,a_n\leftrightarrow a_{n+2},...$$

Якщо, крім того, кожній іншій точці інтервалу (a,b) поставити у відповідність саму себе, то взаємно однозначна відповідність між $[a,b]$ та (a,b) буде встановлена.

Аналогічно доводиться еквівалентність відрізка чи інтервалу до проміжку з лише одним включеним кінцем.

Аналізуючи ці приклади, приходимо до висновку, що *множини точок будь-яких проміжків числової прямої, обмежених чи необмежених, еквівалентні між собою, а отже, мають однакову потужність.* Таку потужність, яка дорівнює потужності множини точок відрізка $[0,1]$, називають *потужністю континууму* і позначають буквою c.

Відзначимо, що *об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості множин потужності континууму також має потужність континууму* (див. [12], ст. 22).

Проте *існують множини, які мають ще більшу потужність.* Більше того, якось *максимальної потужності не існує взагалі.*

Теорема. *Потужність множини M всіх підмножин множини M більша, ніж потужність множини M.*

Доведення. Нехай $M = \{a, b, c, ...\}$, $M = \{A, B, C, ...\}$, і встановлена бієкція:

$$a \leftrightarrow A, b \leftrightarrow B, c \leftrightarrow C, ...$$

Розглянемо множину $X \in M$, яка складається з тих елементів множини M, які не входять у відповідні їм при такій бієкції множини із M. Якщо елемент $x \in M$ такий, що $x \leftrightarrow X$, то при $x \in X$ за побудовою множини X він не повинен бути включений до неї, а при $x \notin X$ – його до X ми зобов'язані були включити. Зрозуміло, що елемента $x \in M$ з такими властивостями не існує. А отже, множини M та M не є еквівалентними. Оскільки ж у множині M підмножина її одноелементних множин еквівалентна множині M, то $p\left(M\right) > p(M)$.

За аналогією зі скінченними множинами символічно записують:

$$p\left(M\right) = 2^{p(M)}.$$

Для зліченних множин M отримуємо $p\left(M\right) = c$ (див. [12], ст. 29), а для множини всіх підмножин відрізка $[0,1]$ будемо мати потужність $f = 2^c$, яку називають *потужністю гіперконтинууму.* Таку ж потужність має і множина всіх функцій, визначених на цьому відрізку (див. [13], ст. 15, задача 97). Зауважимо, що потужність множини неперервних функцій, визначених на відрізку $[a,b]$, має потужність c (див. [13], ст. 15, задача 98).

§ 4. Системи множин

Множини, елементи яких є також множинами, називаються *системами множин*. Прикладом системи множин є, зокрема, множина всіх підмножин заданої множини.

Для позначення систем множин часто використовують великі букви готичного алфавіту. Але для простоти читання ми надалі такі системи множин будемо позначати великими латинськими буквами з хвилькою над ними.

У теорії міри надзвичайно важливу роль відіграють кільця, півкільця та алгебри множин.

Непорожня система множин K називається *кільцем множин*, якщо разом з множинами A та B вона містить їх перетин $A \bigcap B$ та симетричну різницю $A \vartriangle B$.

Безпосередньо з означення випливає, що кільце множин містить також об'єднання та різницю таких множин, бо

$$A \bigcup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \bigcap B), \qquad A \setminus B = A \vartriangle (A \bigcap B).$$

Зрозуміло також, що разом з множинами $A_1, A_2, ..., A_n$ до кільця множин будуть належати і множини

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{та} \quad D = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Таким чином, кільце множин є замкнутим відносно операцій скінченого числа об'єднань та перетинів, різниці та симетричної різниці множин. Крім того, кожне кільце множин містить порожню множину, як різницю $A \setminus A$.

Якщо ж разом з послідовністю множин $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ до кільця належать також множини

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{чи} \quad D = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

то таке кільце називається $\sigma -$*кільцем* чи $\delta -$*кільцем* відповідно.

Множина E називається *одиницею системи множин*, якщо для будь-якої множини A цієї системи виконується рівність $A \bigcap E = A$. Це означає, що одиниця системи множин містить як підмножини всі множини цієї системи.

Кільце множин з одиницею називається *алгеброю множин*. А $\sigma -$кільця та $\delta -$кільця з одиницею називаються відповідно $\sigma -$*алгебрами* та $\delta -$*алгебрами множин.*

Зауважимо, що на основі рівностей

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_\alpha} \quad \text{та} \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha} \overline{A_\alpha}$$

кожна $\sigma -$*алгебра* є $\delta -$*алгеброю, а кожна* $\delta -$*алгебра* є $\sigma -$*алгеброю.*

Що ж стосується кілець, то *кожне* $\sigma -$*кільце* є $\delta -$*кільцем, але не кожне* $\delta -$*кільце* є $\sigma -$*кільцем.*

Найпростішим прикладом алгебри множин є система $A=\{\varnothing, A\}$ з одиницею $E=A$.

Алгебру множин утворює і множина всіх підмножин заданої множини M. Її одиницею є сама множина M.

А ось система всіх обмежених підмножин числової прямої утворює кільце множин без одиниці.

Безпосередньо з означення кільця множин випливає, що *перетин будь-якої кількості кілець множин є кільцем множин.*

Розглядаючи перетин всіх кілець множин, які містять деяку задану систему множин G, отримаємо кільце $K(G)$, яке називають *мінімальним кільцем, породженим системою* G.

Аналогічно отримуємо і *мінімальну алгебру* $A(G)$, *породжену системою* G.

Зауважимо, що в аналізі важливу роль відіграють так звані *борелівські множини*, які належать мінімальній $\sigma-$*алгебрі* над сукупністю всіх проміжків числової прямої.

Система множин G називається *півкільцем множин*, якщо вона містить порожню множину, замкнута відносно утворення перетинів і з належності множин A та A_1 до G та включення $A_1 \subset A$ випливає можливість представлення множини A у вигляді

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

де A_i- попарно неперетинні множини із G, перша з яких співпадає з A_1.

Зрозуміло, що *всяке кільце множин є півкільцем*, бо із включення $A_1 \subset A$ випливає представлення $A=A_1 \bigcup A_2$, де $A_2=A \setminus A_1$.

Прикладом півкільця множин, яке не є кільцем, є сукупність всіх інтервалів (a,b), відрізків $[a,b]$, півсегментів $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, включаючи також порожні інтервали (a,a) та одноточкові множини $[a,a]$.

Справедливе (див. $[7]$, ст. 38) наступне важливе в теорії міри твердження:

Теорема. *Мінімальне кільце* $K(G)$, *породжене півкільцем* G, *складається із тих множин* A, *які допускають скінченні розклади* $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, де $A_i \in G$.

Прямим добутком систем множин $G_1, G_2, \ldots, G_n$ називають систему множин

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \left\{ A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n : A_1 \in G_1, A_2 \in G_2, \ldots, A_n \in G_n \right\}.$$

Зауважимо, що (див. $[7]$, ст. 267) *прямий добуток півкілець множин теж є півкільцем множин*. Але *прямий добуток кілець чи алгебр множин не завжди є кільцем чи алгеброю відповідно*.

§ 5. Множини і метричні простори

Нехай X – множина елементів довільної природи. Якщо для будь-яких елементів x та y цієї множини визначена дійсна функція $\rho(x,y)$, яка задовольняє аксіоми:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причому $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) *аксіома симетрії* $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) *нерівність трикутника* $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$,

то пару (X,ρ) називають *метричним простором*, а функцію $\rho(x,y)$ – *метрикою* або *відстанню*.

Розглянемо приклади деяких важливих для теорії міри та інтеграла метричних просторів:

1. *Простір* R^1. Тут $X=R$, $\rho(x,y)=|x-y|$.

При цьому виконання перших двох аксіом відстані очевидне, а нерівність трикутника отримуємо з нерівності:

$$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z|.$$

2. *Простір* R^n. Множина X складається із впорядкованих груп n дійсних чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а відстань задається формулою

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

Виконання перших двох аксіом відстані тут також очевидне, а для доведення нерівності трикутника введемо позначення: $x_k - y_k = a_k$, $y_k - z_k = b_k$. Тоді $x_k - z_k = a_k + b_k$, і нерівність трикутника набуває вигляду:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Після піднесення до квадрату вона зводиться до відомої *нерівності Коші-Буняковського:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Зауважимо, що справедливість останньої нерівності легко випливає з недодатності дискримінанта квадратичної функції

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\lambda + b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \lambda^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

яка при всіх $\lambda \in R$ набуває лише невід'ємних значень. А якщо всі $a_k = 0,$ то така нерівність перетворюється в очевидну рівність.

3. *Простір* $C[a,b]$. Множина X складається з неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, а відстань

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]}\left|x(t) - y(t)\right|.$$

Існування такого максимуму та виконання перших двох аксіом відстані випливають з властивостей неперервних функцій. А оскільки при кожному $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\left|x(t) - z(t)\right| \le \left|x(t) - y(t)\right| + \left|y(t) - z(t)\right| \le \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

то, перейшовши в цій нерівності до максимуму, отримуємо також виконання третьої аксіоми.

Замкненою кулею $K[x_0,r]$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x \in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0) \le r$.

Відкритою кулею $K(x_0,r)$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x \in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0) < r$. Відкрита куля радіуса ε з центром у точці x_0 називається $\varepsilon-$*околом* точки x_0 і позначається $O_\varepsilon(x_0)$.

Точка x_0 називається *границею послідовності* (x_n) точок метричного простору (X,ρ), якщо у кожному околі цієї точки містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера. З використанням математичної символіки це означення можна записати так:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n > N \ \ \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Нехай тепер M – довільна множина метричного простору (X,ρ). Проведемо *класифікацію точок такої множини*.

Точка x_0 називається *ізольованою точкою* множини M, якщо існує такий окіл цієї точки, в якому немає інших точок з множини M, крім точки x_0.

Точка x_0 називається *внутрішньою точкою* множини M, якщо існує такий окіл цієї точки, який повністю входить у множину M.

Цілком зрозуміло, що як ізольована, так і внутрішня точка множини належать цій множині.

Точка x_0 називається *граничною точкою* множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M, відмінний від x_0. Зрозуміло, що при цьому в кожному такому околі буде знаходитися безліч елементів з даної множини, хоч сама точка x_0 не обов'язково повинна належати до M.

Точка x_0 називається *точкою дотику* множини M, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини M. Очевидно, що всяка гранична точка множини є точкою дотику, але не всяка точка дотику є граничною. Зрозуміло також, що всі точки множини M є її точками дотику.

У термінах збіжних послідовностей точки дотику та граничні точки множини характеризуються таким чином (див. [7], ст. 50):

Для того, щоб точка x_0 була точкою дотику множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність (x_n) точок множини M, яка збігається до x_0.

Для того, щоб точка x_0 була граничною точкою множини M, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність (x_n) різних точок множини M, яка збігається до x_0.

Як приклад, розглянемо класифікацію точок множини

$$M=[-2,0)\cup\left\{\frac{(-1)^n n+2}{2n-1}\right\},\ n\in N,$$

у просторі R^1:

Ізольованими точками цієї множини є точки послідовності

$$x_n=\frac{(-1)^n n+2}{2n-1},\ n=1,\ n=2k,\ k\in N,$$

які не належать відрізку $[-2,0]$. Внутрішні точки утворюють інтервал $(-2,0)$. Точками дотику є всі точки даної множини, а також точки $x=0$, як крайня точка проміжку $[-2,0)\subset M$, та $x=\frac{1}{2}$, як границя підпослідовності $(x_{2k}),\ k\in N$. Ще одна така границя підпослідовності $(x_{2k-1}),\ k\in N$, належить до множини M. Відповідно, множина граничних точок має вигляд $[-2,0]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Сукупність усіх точок дотику множини M називається *замиканням* цієї множини і позначається $[M]$. Наприклад, замиканням множини раціональних чисел у просторі R^1 є множина всіх дійсних чисел.

Справедливі (див. $[7]$, ст. 49) такі *властивості замикання*:

1) $M\subset[M]$;
2) $[[M]]=[M]$;
3) $M_1\subset M_2\Rightarrow[M_1]\subset[M_2]$;
4) $[M_1\cup M_2]=[M_1]\cup[M_2]$.

§ 6. Відкриті та замкнені множини

Множина M, яка співпадає зі своїм замиканням, називається *замкненою*. Безпосередньо з властивостей замикання випливає, що *замикання будь-якої множини є замкнена множина*.

У довільному метричному просторі (X,ρ) множини $\varnothing$ та X замкнені. Замкненими у ньому будуть і всі множини зі скінченною кількістю елементів та замкнені кулі цього простору.

У просторі R^1 замкненими множинами є, зокрема, будь-які відрізки та об'єднання скінченної кількості відрізків.

Доведемо більш загальні властивості замкнених множин.

Теорема 1. *Перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.*

Доведення. Нехай $F = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$ – перетин замкнених множин F_α. Якщо x_0 – точка дотику множини F, то у будь-якому околі цієї точки є хоч одна точка з множини F, яка за означенням перетину належатиме тоді кожній з множин F_α. Отже, точка x_0 – є точкою дотику для всіх множин F_α. А оскільки вони замкнені, то x_0 належатиме кожній з цих множин, а значить $x_0 \in F$. Звідси випливає, що F містить всі свої точки дотику і є замкненою.

Нехай тепер $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ – об'єднання скінченної кількості замкнених множин. Якщо точка $x_0 \notin F$, то вона не належить жодній з множин F_k, $k = \overline{1,n}$. А оскільки ці множини замкнені, то вона не є точкою дотику для жодної з них. Тому для кожного k існує такий окіл $O_{\varepsilon_k}(x_0)$, в якому немає інших точок з множини F_k. Зі скінченної кількості таких околів виберемо найменший, в якому не виявиться жодної точки з множини F. Тому x_0 не є точкою дотику для F. Отже, F містить всі свої точки дотику і є замкненою. Теорема доведена.

Зауважимо, що *об'єднання нескінченної кількості замкнених множин не обов'язково замкнена множина*.

Наприклад, якщо

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 2\right],$$

то множина

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 2]$$

не є замкненою, бо не містить своєї точки дотику $x_0 = 0$.

Множина M, всі точки якої є внутрішніми, називається *відкритою*.

У довільному метричному просторі (X,ρ) множини $\varnothing$ та X відкриті. Крім них, інших множин, які би одночасно були і відкритими, і замкненими не існує.

Відкритими множинами є і всі відкриті кулі довільного метричного простору. А *у просторі* R^1 (див. $[7]$, ст. 53) *всяка не порожня відкрита множина є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.*

Звідси, зокрема, випливає, що *всяка не порожня відкрита множина на числовій прямій має потужність континууму.*

Розглянемо ще один важливий клас відкритих множин: *Нехай* $f(x)-$ *неперервна функція, яка набуває дійсних значень. Тоді при кожному* $c\in R$ *множина* $M=\{x: f(x)<c\}$ *відкрита.*

Справді, якщо $x_0\in M$, то $f(x_0)<c.$ Тоді з неперервності функції $f(x)$ випливає існування такого околу $O_\varepsilon(x_0)$, що для всіх $x\in O_\varepsilon(x_0)$ виконується нерівність $f(x)<c.$ А отже, $O_\varepsilon(x_0)\subset M$. Тому ця множина відкрита.

Теорема 2. *Для того, щоб множина* M *була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення* $X\setminus M$ *було замкненою множиною.*

Доведення. Якщо $M-$ відкрита множина, то кожна її точка x має окіл, який повністю належить до M, а отже, не містить точок із $X\setminus M$. Тому кожна з таких точок x не є точкою дотику для $X\setminus M$. Отже, $X\setminus M$ містить всі свої точки дотику і є замкненою. Навпаки, якщо $X\setminus M$ замкнена, то жодна точка із M не є її точкою дотику, а отже, має окіл, який повністю належить до M. Тому всі точки множини M внутрішні, і ця множина є відкритою. Теорема доведена.

Звідси, зокрема, випливає, що *всяка замкнена множина у просторі* R^1 *утворюється викиданням із числової прямої скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються.*

Пропонуємо також читачам самостійно довести, що для *неперервної функції* $f(x)$, *яка набуває дійсних значень, при кожному* $c\in R$ *множина* $M=\{x: f(x)\ge c\}$ *замкнена.*

Ще один важливий наслідок з теорем 1 та 2 отримуємо на основі принципу двоїстості:

Теорема 3. *Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина.*

Зауважимо, що *перетин нескінченної кількості відкритих множин не обов'язково буде відкритою множиною*. Відповідний приклад пропонуємо читачам навести самостійно.

З відкритими множинами пов'язане ще й таке важливе математичне поняття як компактність. Зокрема, у математичному аналізі фундаментальну роль відіграє наступна лема (див. $[7]$, ст. 84):

Лема Гейне-Бореля. *З будь-якого покриття відрізка* $[a,b]$ *числової прямої інтервалами можна вибрати скінченне підпокриття.*

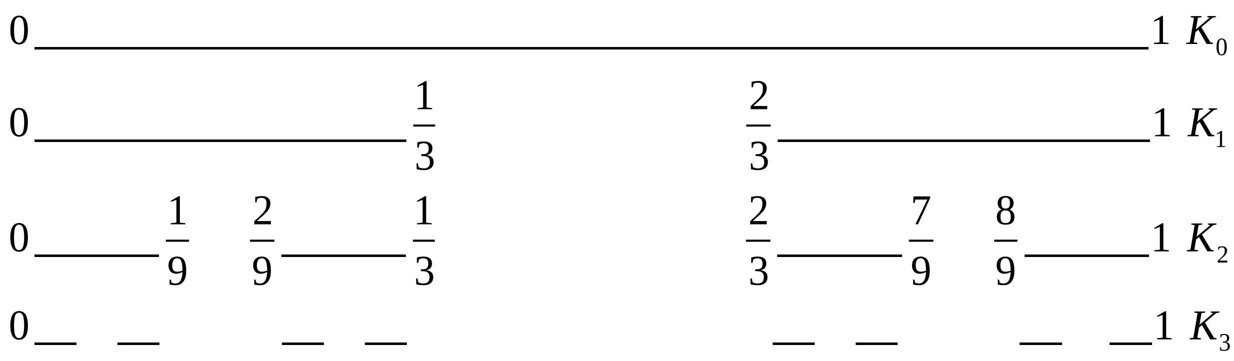
Це твердження залишається справедливим, якщо в ньому інтервали замінити довільними відкритими множинами. У зв'язку з цим сформулюємо наступне означення:

Множина M метричного простору (X,ρ) називається *компактною*, якщо із всякого її покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття. Зокрема, якщо з кожного покриття множини X відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, то такий метричний простір називають *компактним*.

Таким чином, лема Гейне-Бореля стверджує, що у просторі R^1 відрізок – компактна множина. Зауважимо, що справедливим буде і більш загальне твердження: *у просторі* R^n *всяка замкнена обмежена множина є компактною*.

§ 7. Канторова множина

Розглянемо на числовій прямій множину $K_0 = [0,1]$. Поділимо цей відрізок на три рівні частини і вилучимо з нього середній інтервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. В результаті отримаємо множину K_1, яка складається з двох відрізків. Кожен з них знову ділимо на три рівні частини і вилучаємо середні інтервали, отримуючи таким чином множину K_2, яка складається вже з чотирьох відрізків. За аналогічним принципом дістаємо з множини K_2 множину K_3 (див. малюнок).



Продовжуючи цей процес до нескінченності, будемо мати послідовність вкладених одна в одну множин $K_n,\, n \in Z_+$. Множина

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

називається *канторовою множиною*. Встановимо *основні властивості цієї множини.*

Насамперед зауважимо, що кожна з множин K_n є замкненою як об'єднання скінченної кількості відрізків, а саме 2^n. Тому, як перетин замкнених множин, *канторова множина замкнена*.

Може здатися, що K складається лише з кінців відрізків, які утворювали множини K_n. Але насправді це не так. Наприклад, точка $x = \frac{1}{4}$ у кожній з множин K_n ділитиме один з її відрізків у відношенні $1:3$, а отже, жодного разу не буде вилучена і належатиме множині K, хоч і не є кінцем жодного відрізка.

Для встановлення структури канторової множини запишемо всі числа відрізка $[0,1]$ у трійковій системі числення. Тоді стає зрозумілим, що до K належать ті і тільки ті числа, які можна хоч одним способом записати у цій системі, не використовуючи цифру 1. Таким чином, кожному елементу $x \in K$ взаємно однозначно відповідає число $\alpha = 0,a_1a_2...a_n...$ у трійковій системі числення, в якому a_n набувають лише значень 0 або 2. Замінивши у ньому всі двійки одиницями, отримаємо двійковий запис деякого числа $\beta = 0,b_1b_2...b_n...$ з відрізка $[0,1]$. Отже, між точками множини K і всіма точками відрізка $[0,1]$ може бути встановлена взаємно однозначна відповідність. Це означає, що *канторова множина має потужність континууму.*

На фоні отриманого результату цікаво буде зауважити, що *сума довжин інтервалів, які викидалися при побудові канторової множини, дорівнює довжині всього відрізка* $[0,1]$. Справді, така сума дорівнює

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots=1.$$

Відзначимо також, що *всі точки канторової множини є граничними.* Справді, оскільки довжини відрізків, з яких складаються множини K_n, прямують до нуля при $n\to\infty$, то для кожної точки $x\in K$ існує послідовність кінців відрізків множин K_n, яка збігається до x, причому всі елементи цієї послідовності можна вибрати різними.

Водночас, *жодна точка канторової множини не є внутрішньою*. Справді, в довільному околі точки $x\in K$ будуть точки принаймні одного з вилучених інтервалів.

§ 8. Поняття міри. Міра елементарних множин

Поняття міри множини є природним узагальненням понять довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла тощо. Тому вивчення питання про вимірність довільних множин розпочнемо із визначення міри плоских множин, відштовхуючись при цьому від поняття площі прямокутника.

В теорії міри під прямокутником P на площині будемо розуміти множину точок (x,y) цієї площини, координата x яких задовольняє одну з нерівностей першого, а координата y – одну з нерівностей другого стовпчика:

$$\begin{array}{ll} a\le x\le b, & c\le y\le d, \\ a< x\le b, & c< y\le d, \\ a\le x< b, & c\le y< d, \\ a< x< b, & c< y< d, \end{array}$$

де $a\le b,\ c\le d$ – довільні дійсні числа.

Якщо $a<b,\ c<d,$ то в результаті ми отримаємо звичайний прямокутник, сторони якого паралельні до координатних осей. При цьому, в залежності від вибору нерівностей, одна, дві, три, або і всі чотири його сторони даному прямокутнику можуть не належати.

Якщо $a=b$ чи $c=d,$ то матимемо прямокутники, вироджені у відрізки, інтервали, або півсегменти, паралельні до однієї з осей координат, чи в точку $(a,c),$ або, навіть, у порожню множину.

За аналогією з площею, *міру* $m(P)$ такого прямокутника визначимо формулою

$$m(P)=(b-a)(d-c).$$

Зрозуміло, що при цьому *кожен прямокутник* P *матиме міру, і ця міра буде невід'ємною* ($m(P)=0$ тільки для вироджених прямокутників). Крім того, якщо

$$P=\bigcup_{i=1}^{n} P_i,$$

де прямокутники P_i попарно не перетинаються між собою, то

$$m(P)=\sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Така властивість називається *адитивністю міри*.

Неважко переконатися, що *сукупність всіх таких прямокутників утворює півкільце множин*. Позначимо його G.

Таким чином на півкільці G нами визначена невід'ємна адитивна функція $m(P),$ яку ми назвали мірою. Наше завдання – поширити поняття міри, зберігаючи властивості невід'ємності та адитивності, на ширший клас множин.

Назвемо плоску множину A *елементарною*, якщо її можна хоч одним способом подати у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, які попарно не перетинаються.

Безпосередньо з означення випливає, що *сукупність елементарних множин утворює мінімальне кільце* $K(G),$ *породжене півкільцем прямокутників.*

Нехай задана елементарна множина

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} P_i,$$

де прямокутники P_i попарно не перетинаються між собою. Визначимо *міру* $m'(A)$ цієї множини формулою

$$m'(A)=\sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Таке означення коректне, бо для довільного іншого представлення

$$A=\bigcup_{j=1}^{k} Q_j,$$

де прямокутники Q_j попарно не перетинаються, внаслідок адитивності міри m отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k} m\left(Q_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m\left(P_i\cap Q_j\right)=\sum_{i=1}^{n} m\left(P_i\right).$$

Зрозуміло, що визначена таким чином *міра* $m'(A)$ *невід'ємна і адитивна*. Отже, якщо елементарна множина

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

де A_i – елементарні множини, які попарно не перетинаються між собою, то

$$m'(A)=\sum_{i=1}^{n} m'(A_i).$$

Крім того, якщо $A=P,$ то $m'(P)=m(P).$ Тому міру m' називають *продовженням міри* m *з півкільця прямокутників* G *на породжене ним мінімальне кільце елементарних множин* $K(G).$

§ 9. Півадитивність та σ –адитивність міри елементарних множин

Нехай тепер елементарна множина A є об'єднанням нескінченної кількості елементарних множин, які попарно не перетинаються.

Виникає питання: чи буде міра множини A дорівнювати сумі мір цих множин?

Елементарний приклад показує, що це не так. Справді, всякий не вироджений прямокутник є об'єднанням нескінченної кількості одноточкових множин, кожна з яких має міру нуль. Але міра їх об'єднання не дорівнює нулю.

Тому надалі будемо розглядати не більш як зліченні об'єднання елементарних множин.

Теорема. *Нехай* $A-$ *елементарна множина, а* $\{A_n\}-$ *така скінченна або зліченна система елементарних множин, що*

$$A\subset\bigcup_n A_n.$$

Тоді

$$m'(A)\le\sum_n m'(A_n).$$

Доведення. Якщо

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}P_i,$$

де прямокутники P_i попарно не перетинаються між собою, то кожен з прямокутників P_i замінимо замкненим прямокутником, який міститься всередині нього, так, щоб його площа була більша за

$$m(P_i)-\frac{\varepsilon}{2k},$$

де $\varepsilon-$ довільне наперед задане додатне число. Об’єднання таких прямокутників дасть нам замкнену елементарну множину $B\subset A$, міра якої

$$m'(B)>m'(A)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, кожну елементарну множину A_n замінимо відкритою елементарною множиною $C_n\supset A_n$ так, щоб

$$m'(C_n)<m'(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Зрозуміло, що при цьому

$$B\subset\bigcup_n C_n.$$

Оскільки множина B компактна, то з її покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що його утворюють перші s множин C_n, бо в іншому разі ми би їх просто занумерували у потрібному нам порядку. Оскільки об’єднання таких s множин складається зі скінченного числа прямокутників і покриває елементарну множину B, то

$$m'(B)\le\sum_{n=1}^{s}m'(C_n).$$

З врахуванням попередніх нерівностей і невід'ємності міри m' звідси отримуємо, що

$$m'(A) < m'(B) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{n=1}^{s} m'(C_n) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{n} m'(C_n) + \frac{\varepsilon}{2} \le$$

$$\le \sum_{n} \left(m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n} m'(A_n) + \sum_{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{n} m'(A_n) + \varepsilon.$$

А отже, внаслідок довільності вибору $\varepsilon > 0$, твердження теореми доведене.

Така властивість міри елементарних множин називається *півадитивністю міри* m'. Зауважимо, що при цьому множини A_n могли і попарно перетинатися між собою.

Нехай тепер $A-$ така елементарна множина, що

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

де $A_n -$ елементарні множини, які попарно не перетинаються. Тоді внаслідок адитивності міри m' при кожному фіксованому N маємо нерівність:

$$m'(A) \ge m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

Перейшовши в ній до границі при $N \to \infty$, отримаємо, що

$$m'(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

А оскільки з півадитивності міри m' випливає і виконання протилежної нерівності

$$m'(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n),$$

то

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Доведена тут властивість міри зліченного об'єднання елементарних множин, які попарно не перетинаються, називається *зліченною адитивністю, або* $\sigma-$*адитивністю міри елементарних множин.*

Звідси, зокрема, випливає, що і вихідна *міра* m *теж є* $\sigma-$*адитивною мірою*.

§ 10. Лебегове продовження міри

Оскільки елементарні множини не вичерпують всіх множин на площині, то природно розширити поняття міри на ширший клас, ніж $K(G)$. Щоб при цьому зразу не мати справи з множинами нескінченної міри, обмежимось спочатку лише підмножинами A одиничного квадрата

$$E = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Зовнішньою мірою множини A називається число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k),$$

де $\{P_k\}$ – довільні скінченні чи зліченні системи прямокутників, об’єднання яких покривають множину A.

Якщо $A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ – елементарна множина, то з даного означення отримуємо, що

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A).$$

Отже, *зовнішня міра* μ^* *є продовженням міри* m'.

Як і міра m', *зовнішня міра* μ^* *володіє властивістю півадитивності міри*. Справді, якщо $A \subset \bigcup_n A_n$, то за означенням зовнішньої міри при всіх $\varepsilon > 0$ кожну з множин A_n можна покрити скінченною або зліченною системою прямокутників $\{P_{nk}\}$ так, що

$$\sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Оскільки при цьому

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk},$$

то

$$\mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

звідки з врахуванням довільності $\varepsilon > 0$ і випливає нерівність

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n).$$

З доведеної нерівності отримуємо такий ***наслідок***: *якщо* $A \subset B$, *то* $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Доведемо також наступне важливе в теорії міри твердження:

Лема. *Для довільних множин* A *та* B

$$\left|\mu^*(A) - \mu^*(B)\right| \le \mu^*(A \triangle B).$$

Доведення. Справді, із включень

$$A \subset B \bigcup (A \triangle B) \quad \text{та} \quad B \subset A \bigcup (A \triangle B)$$

отримуємо нерівності

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B) \quad \text{та} \quad \mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B),$$

з яких і випливає твердження леми.

Але, хоч зовнішню міру має будь-яка підмножина квадрата E, ця міра на сукупності всіх таких підмножин не є адитивною. У зв'язку з цим розглядають дещо вужчий клас підмножин E.

Множина A називається *вимірною за Лебегом*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така елементарна множина B, що

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Функція $\mu^*(A)$, визначена на сукупності вимірних за Лебегом множин, називається *мірою Лебега* і позначається $\mu(A)$.

З цього означення безпосередньо отримуємо, що *всяка множина*, *зовнішня міра якої дорівнює нулю, вимірна за Лебегом.* Для доведення досить покласти $B = \varnothing$. Така властивість називається *повнотою міри Лебега*.

Крім того, *вимірною за Лебегом буде і всяка елементарна множина* A (досить взяти $B = A$), *і її міра Лебега* $\mu(A) = m'(A)$. Отже, *міра Лебега* μ *є продовженням міри* m'.

Зауважимо, що до поняття вимірності за Лебегом можна підійти і по-іншому.

Теорема. *Якщо множина* $A \subset E$ *вимірна за Лебегом, то*

$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m'(E).$$

Доведення. З вимірності множини A та доведеної вище леми випливає існування при кожному $\varepsilon > 0$ такої елементарної множини B, що

$$\mu^*(B) - \varepsilon < \mu^*(A) < \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Тоді також

$$\mu^*(E \setminus B) - \varepsilon < \mu^*(E \setminus A) < \mu^*(E \setminus B) + \varepsilon.$$

А оскільки для елементарних множин міра $\mu^* = m'$ адитивна, то, додавши ці нерівності, отримаємо
$$m'(E) - 2\varepsilon < \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) < m'(E) + 2\varepsilon,$$
звідки внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ випливає твердження теореми.

Справедливе (див. $[2]$, ст. 33) також обернене твердження. У зв'язку з цим *означення вимірної за Лебегом множини* можна сформулювати ще й так: множина $A \subset E$ називається *вимірною за Лебегом*, якщо
$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m'(E).$$

Величину
$$\mu_*(A) = m'(E) - \mu^*(E \setminus A)$$
називають *внутрішньою мірою множини* $A \subset E$. Таким чином, *для вимірності за Лебегом множини* $A \subset E$ *необхідно і достатньо, щоб її зовнішня та внутрішня міри співпадали:*
$$\mu^*(A) = \mu_*(A).$$

Зауважимо, що у загальному випадку *для довільної множини* $A \subset E$ *виконується нерівність*
$$\mu_*(A) \le \mu^*(A).$$

Це випливає із включення
$$E \subset A \bigcup (E \setminus A)$$
та півадитивності міри μ^*.

§ 11. Адитивність міри Лебега

Доведемо, що *міра Лебега є адитивною мірою*. Для цього спочатку покажемо, що *разом з двома вимірними за Лебегом множинами* A_1 *та* A_2 *вимірною за Лебегом є і множина* $A = A_1 \cup A_2$. Справді, тоді при кожному $\varepsilon > 0$ знайдуться такі елементарні множини B_1 та B_2, що
$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Оскільки
$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \bigcup (A_2 \vartriangle B_2),$$
то
$$\mu^*\left((A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2)\right) \le \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon.$$

Але множина $B_1 \bigcup B_2$ елементарна, то $A = A_1 \bigcup A_2 -$ вимірна.

За індукцією доводиться також, що і *об'єднання довільної скінченної кількості вимірних за Лебегом множин є вимірною за Лебегом множиною.*

Теорема (адитивність міри Лебега). *Якщо* $A_1, A_2, ..., A_n -$ *вимірні за Лебегом множини, які попарно не перетинаються, то*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Доведення. Зрозуміло, що доведення теореми достатньо провести для двох множин A_1 та A_2. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдуться такі елементарні множини B_1 та B_2, що

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

Оскільки множини A_1 та A_2 не перетинаються, то

$$B_1 \bigcap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2).$$

Звідси отримуємо, що

$$\mu^*(B_1 \bigcap B_2) < 2\varepsilon.$$

Позначимо

$$A = A_1 \bigcup A_2, \ B = B_1 \bigcup B_2.$$

Тоді із включення

$$(A_1 \bigcup A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2)$$

отримаємо, що також

$$\mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon.$$

Врахувавши ці нерівності, доведену вище лему та адитивність міри $\mu^* = m'$ у класі елементарних множин, будемо мати:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B) - \mu^*(A \triangle B) > \mu^*(B) - 2\varepsilon =$$
$$= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) - \mu^*(B_1 \bigcap B_2) - 2\varepsilon >$$
$$> \left(\mu^*(A_1) - \mu^*(A_1 \triangle B_1)\right) + \left(\mu^*(A_2) - \mu^*(A_2 \triangle B_2)\right) - 4\varepsilon >$$
$$> \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати як завгодно малим, то

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Крім того, з півадитивності міри μ^* випливає і виконання протилежної нерівності

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Таким чином, остаточно отримуємо

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Зрозуміло, що в останній рівності μ^* можна замінити на μ, оскільки множини A, A_1, A_2 вимірні за Лебегом. Теорема доведена.

Зауважимо, що у загальному випадку має місце рівність

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2),$$

яку пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

Оскільки з рівності

$$(E \setminus A) \vartriangle (E \setminus B) = A \vartriangle B$$

випливає, що *разом з* $A \subset E$ *вимірною за Лебегом буде і множина* $E \setminus A,$ то з адитивності міри Лебега отримуємо:

$$\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A).$$

§ 12. $\sigma-$алгебра вимірних за Лебегом множин

Як ми вже встановили, об'єднання та доповнення вимірних за Лебегом множин є вимірними за Лебегом множинами. Звідси послідовно отримаємо, що і множини

$$A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}, \quad A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap \overline{A_2}, \quad A_1 \vartriangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

будуть вимірними за Лебегом разом із множинами A_1 та A_2.

Таким чином, *сукупність всіх вимірних за Лебегом підмножин одиничного квадрата* E *є алгеброю множин з одиницею* E.

Теорема. *Алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини* E *є* $\sigma-$*алгеброю.*

Доведення. Нехай

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – зліченна система вимірних за Лебегом підмножин множини E. Розглянемо множини

$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Вони вимірні за Лебегом, між собою попарно не перетинаються і в об'єднанні також утворюють множину A. Отже, внаслідок адитивності міри Лебега та означення зовнішньої міри, при кожному скінченному N

$$\sum_{n=1}^{N}\mu\left(A_n'\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n'\right)\le\mu^*(A).$$

Звідси випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n'\right)$$

збіжний. Тому при кожному $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N,$ що

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\mu\left(A_n'\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауваживши, що множина

$$C=\bigcup_{n=1}^{N}A_n'$$

вимірна за Лебегом, знайдемо таку елементарну множину $B,$ що

$$\mu^*(C\vartriangle B)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи тепер дві останні нерівності, включення

$$A\vartriangle B\subset(C\vartriangle B)\cup\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}A_n'\right),$$

та півадитивність зовнішньої міри, отримаємо, що

$$\mu^*(A\vartriangle B)<\varepsilon,$$

тобто вимірність за Лебегом множини A. Тому сукупність всіх вимірних за Лебегом підмножин множини E є $\sigma-$алгеброю. Теорема доведена.

Оскільки ж доповнення до вимірних за Лебегом множин також є вимірними за Лебегом множинами, то на основі принципу двоїстості отримуємо, що *разом зі зліченною системою множин* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *вимірними за Лебегом будуть не лише нескінченні об'єднання, а й нескінченні перетини таких множин.*

Наслідок 1. *Всяка відкрита підмножина одиничного квадрата E вимірна за Лебегом.*

Справді, кожну таку підмножину можна подати як об'єднання скінченної або зліченної кількості відкритих прямокутників, які є вимірними за Лебегом множинами.

Наслідок 2. *Всяка замкнена підмножина одиничного квадрата E вимірна за Лебегом.*

Справді, її доповнення є відкритою множиною, яка за наслідком 1 вимірна за Лебегом. А тому й сама множина теж вимірна за Лебегом.

Наслідок 3. *Всі множини, які можна отримати із відкритих та замкнених підмножин одиничного квадрата E з допомогою скінченного або зліченного числа операцій об'єднання та перетину, є вимірними за Лебегом.*

Доведення даного твердження безпосередньо випливає з попередніх теорем та наслідків 1, 2.

Зауважимо тільки, що лише такими множинами вимірні підмножини одиничного квадрата E не вичерпуються.

§ 13. $\sigma-$адитивність та неперервність міри Лебега

Нехай тепер

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

де $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – зліченна система вимірних за Лебегом підмножин множини E, які попарно не перетинаються. Тоді при кожному скінченному N

$$\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)\le\mu(A).$$

А отже, також і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\le\mu(A).$$

А оскільки із півадитивності випливає протилежна нерівність

$$\mu(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

то остаточно отримуємо

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Таким чином, *міра Лебега на $\sigma-$алгебрі вимірних підмножин одиничного квадрата E є $\sigma-$адитивною мірою.*

Наприклад, якщо міри таких множин A_n дорівнюють

$$\mu(A_n)=\frac{n-1}{n!},\ n\in N,$$

то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n!}\right)=1.$$

Із $\sigma-$адитивності міри випливає наступна її властивість, яку називають *неперервністю міри Лебега*.

Теорема. *Якщо* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots -$ *послідовність вкладених одна в одну вимірних за Лебегом множин і*

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Доведення. Нехай $A=\varnothing$. Оскільки

$$A_1=(A_1 \setminus A_2)\bigcup(A_2 \setminus A_3)\bigcup\ldots,$$

$$A_n=(A_n \setminus A_{n+1})\bigcup(A_{n+1} \setminus A_{n+2})\bigcup\ldots,$$

і множини, які входять у записані об'єднання, попарно не перетинаються, то на підставі $\sigma-$адитивності міри Лебега

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

причому ряд у правій частині першої з цих рівностей збіжний. А отже, його залишок $\mu(A_n)\to 0=\mu(\varnothing)$ при $n\to\infty$. Загальний випадок зводиться до доведеного заміною множин A_n множинами $A_n \setminus A$. Теорема доведена.

Наслідок. *Якщо* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots -$ *зростаюча послідовність вимірних за Лебегом підмножин одиничного квадрата* E *і*

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Доведення. Розглянемо множини $\overline{A_n}=E \setminus A_n$. Вони утворюють послідовність вкладених одна в одну підмножин одиничного квадрата E, причому

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A_n}\right)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\overline{A}.$$

Оскільки, згідно доведеної теореми,

$$\mu\left(\overline{A}\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\overline{A_n}\right),$$

тобто

$$\mu\left(E\setminus A\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(E\setminus A_n\right),$$

то

$$\mu\left(A\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right).$$

§ 14. Загальне означення міри. Приклади мір

При побудові плоскої міри ми суттєво використовували лише такі властивості площі, як *невід'ємність* та *адитивність*. То ж покладемо саме ці дві властивості в основу *загального означення міри.*

Функція множини $m(A)$ називається *мірою*, якщо вона:

1) визначена на півкільці множин G_m;

2) набуває дійсних невід'ємних значень;

3) є адитивною функцією множини.

Остання вимога, зокрема, означає, що якщо

$$A\in G_m,\ \ A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

де множини $A_i\in G_m,\ i=\overline{1,n},$ попарно не перетинаються, то

$$m(A)=\sum_{i=1}^{n}m(A_i).$$

Звідси випливає, що $m(\varnothing)=0,$ оскільки $\varnothing=\varnothing\bigcup\varnothing.$

Прикладом такої міри є побудована нами вище плоска міра $m,$ визначена на півкільці прямокутників.

Аналогічно у довільному просторі R^n можна побудувати $n-$вимірну міру, яка буде аналогом об'єму $n-$вимірного паралелепіпеда.

Якщо ж розглядати півкільце всіх відрізків $[a,b],$ інтервалів $(a,b),$ півсегментів $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, де $a\le b,$ то отримаємо лінійну міру

$$m(A)=b-a,$$

яка є аналогом довжини відрізка.

Зауважимо, що на даному півкільці множин міру можна було би визначити і, наприклад, з допомогою функції $F(x)=x^2$, покладаючи для кожного такого проміжку

$$m_F(A)=b^2-a^2.$$

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що така функція $m_F(A)$ справді є мірою. Детальніше про такі міри мова піде у параграфі 23 наступного розділу.

Прикладом міри дещо іншої природи є так звана *ймовірностна міра.* Нехай $X=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}-$ довільна зліченна множина, і числа $p_n>0$ такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1.$$

Для будь-якої підмножини A множини X визначимо

$$m(A)=\sum_{x_n\in A}p_n.$$

Неважко переконатися, що при цьому всі аксіоми міри будуть виконані.

Відзначимо, що всі міри, наведені у даних прикладах, є не лише адитивними, а й $\sigma-$*адитивними*, тобто, якщо

$$A\in G_m,\ A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

де множини $A_i\in G_m,\ i\in N,$ попарно не перетинаються, то

$$m(A)=\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i).$$

Зокрема, $\sigma-$адитивність плоскої міри $m(A)$ випливає із $\sigma-$адитивності плоскої міри Лебега, яка є її продовженням. А $\sigma-$адитивність ймовірностної міри випливає з того, що доданки абсолютно збіжного ряду можна довільним чином переставляти та групувати.

Розглянемо також приклад адитивної міри, яка не є $\sigma-$адитивною. Нехай $X-$ множина раціональних чисел відрізка $[0,1]$, а G_m складається з перетинів множини X з довільними відрізками $[a,b]$, інтервалами (a,b), півсегментами $[a,b)$ та $(a,b]$, де $a \le b,$ з відрізка $[0,1]$. Для кожної множини $A \in G_m$ визначимо $m(A) = b - a.$ Така міра не є $\sigma-$адитивною, бо $m(X) = 1.$ Але, якщо б міра m була $\sigma-$адитивною, то $m(X)$ як міра об'єднання зліченного числа одноточкових множин міри нуль мала би дорівнювати нулю.

Міра $m,$ визначена на півкільці $G_m,$ природним чином *поширюється до міри* $m',$ *визначеної на мінімальному кільці* $K(G_m)$: якщо

$$A \in K(G_m),\ A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

де множини $A_i \in G_m,\ i = \overline{1,n},$ попарно не перетинаються, то

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Коректність такого означення доводиться так само, як і коректність означення міри елементарних множин. При цьому лише слід замінити прямокутники P_i та Q_j множинами $A_i \in G_m$ та $B_j \in G_m.$

Якщо міра m була $\sigma-$адитивною, то (див., наприклад, $[7]$, ст. 231, 232) так само, як і для міри елементарних множин, доводять *півадитивність,* тобто виконання нерівності

$$m'(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} m'(A_i)$$

при

$$A \in K(G_m),\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K(G_m),\ i \in N,$$

та $\sigma-$*адитивність міри* $m',$ визначеної на мінімальному кільці $K(G_m),$ тобто справедливість рівності

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m'(A_i)$$

при

$$A \in K(G_m),\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де множини $A_i \in K(G_m), i \in N,$ попарно не перетинаються. Крім того, якщо

$$A \in K(G_m),\ A \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де множини $A_i \in K(G_m), i \in N,$ попарно не перетинаються, то

$$m'(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m'(A_i).$$

Якщо ж міра m лише адитивна, то і міра m' буде тільки адитивною, і записані тут нерівності будуть стосуватися лише об'єднань скінченної кількості множин $A_i \in K(G_m)$.

Тому надалі будемо вважати, що міра $m,$ визначена на півкільці G_m, є $\sigma-$адитивною.

§ 15. Лебегове продовження міри, визначеної на півкільці множин

Припустимо, що $\sigma-$адитивна міра m визначена на півкільці G_m з одиницею $E,$ а міра $m'-$ її продовження на мінімальне кільце $K(G_m)$. Покажемо, як можна продовжити міру m' до $\sigma-$адитивної міри $\mu,$ визначеної на кільці, ширшому, ніж $K(G_m)$.

За аналогією з плоскими множинами, назвемо *зовнішньою мірою множини* $A \subset E$ число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n B_n} \sum_n m(B_n),\ B_n \in G_m.$$

Зауважимо, що можна було б також покласти

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n B_n} \sum_n m'(B_n),\ B_n \in K(G_m).$$

Як і зовнішня міра плоских множин, міра $\mu^*(A)$ буде півадитивною, але не буде адитивною на сукупності всіх підмножин одиниці $E.$

У зв'язку з цим назвемо множину $A \subset E$ *вимірною за Лебегом*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $B \in K(G_m)$, що

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Функція μ^*, яку розглядають лише на вимірних за Лебегом множинах, називається *мірою Лебега* і позначається буквою μ.

Безпосередньо з означення випливає, що кожна множина $A \in K(G_m)$ вимірна за Лебегом, причому $\mu(A) = m'(A)$. Тому *міра μ є продовженням міри m'*. Зрозуміло також, що якщо $A \in G_m$, то $\mu(A) = m(A)$.

Крім того, вимірною за Лебегом буде і кожна множина, зовнішня міра якої дорівнює нулю. Отже, *міра Лебега є повною мірою*.

Міркуючи аналогічно, як при доведенні властивостей плоскої міри Лебега, і замінюючи при цьому елементарні множини множинами $B \in K(G_m)$, встановимо також, що:

1. *Множина $A \subset E$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли*
$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m'(E).$$
2. *Сукупність вимірних за Лебегом підмножин множини E є $\sigma-$алгеброю множин з одиницею E.*
3. *Міра Лебега є $\sigma-$адитивною та неперервною.*

Використовуючи, наприклад, неперервність лінійної міри Лебега, і враховуючи, що множини K_n, $n \in Z_+$, складаються із 2^n відрізків, кожен з яких має міру $\frac{1}{3^n}$, отримаємо, що лінійна міра Лебега канторової множини

$$\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2^n \cdot \frac{1}{3^n}\right) = 0.$$

Розв'яжемо також наступну цікаву задачу на побудову множини з наперед заданою мірою:

Задача. *Побудуйте на відрізку $[0,1]$ множину A з лінійною мірою Лебега $\mu(A) = \frac{2}{3}$, яка дорівнює об'єднанню зліченного числа відрізків $[a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, які попарно не перетинаються.*

Розв'язання. Будемо будувати таку множину з відрізків, довжини яких $m_n = b_n - a_n$ утворюють спадну геометричну прогресію зі знаменником $q=0,5.$ Оскільки при цьому за умовою задачі

$$\frac{m_1}{1-q}=\frac{2}{3},$$

то отримуємо

$$m_1=\frac{1}{3},\quad m_n=\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Покладаючи

$$[a_1,b_1]=\left[0,\frac{1}{3}\right],$$

інтервали $(b_n,a_{n+1}),\ n\in N,$ між сусідніми відрізками визначимо так, щоб їх довжини

$$l_n=a_{n+1}-b_n$$

також утворювали спадну геометричну прогресію зі знаменником $q=0,5.$ Якщо сума такої прогресії дорівнює $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$ то

$$l_n=\frac{m_n}{2}=\frac{1}{3\cdot 2^n}.$$

Таким чином, при кожному $n\geq 2$ будемо мати

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(m_k+l_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3\cdot 2^{k-1}}+\frac{1}{3\cdot 2^k}\right)=1-\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$b_n=a_n+m_n=1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}=1-\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

А отже, ми отримали всі шукані відрізки. Задача розв'язана.

Розглянемо тепер випадок, коли міра m була визначена на півкільці G_m без одиниці. Тоді зовнішню міру будемо визначати лише для тих множин, для яких існують скінченні або зліченні покриття множинами $B_n\in G_m$ із скінченними сумами

$$\sum_n m(B_n).$$

Залишаючи при цьому означення міри Лебега без змін, отримаємо, що вона також буде *повною,* $\sigma-$*адитивною та неперервною*.

Але (див. $[7]$, ст. 235) *сукупність вимірних за Лебегом множин буде утворювати лише* $\delta-$*кільце.* Нескінченні об'єднання вимірних за Лебегом множин належатимуть до цього кільця тоді і тільки тоді, коли міри Лебега будь-яких скінченних об'єднань цих множин обмежені зверху однією і тією ж сталою.

Зауважимо, що при цьому (див. $[7]$, ст. 236) *для довільної фіксованої вимірної за Лебегом множини сукупність вимірних за Лебегом її підмножин є $\sigma-$алгеброю.*

§ 16. σ −скінченні міри

Розглядаючи поняття міри, ми ввели його тільки для множин зі скінченною мірою. А на площині і взагалі – тільки для підмножин одиничного квадрата. Зрозуміло, що ними не вичерпуються навіть обмежені множини такої площини.

Для поширення плоскої міри Лебега на інші множини простору R^2 представимо площину у вигляді об'єднання

$$X = \bigcup_{n,k=-\infty}^{\infty} E_{nk},\ E_{nk} = \{(x,y) : n \le x < n+1, k \le y < k+1\}.$$

Кожна з множин цього об'єднання є напіввідкритим квадратом зі стороною 1. Тому міри їх підмножин можна визначити аналогічно до того, як ми визначали міри підмножин одиничного квадрата E.

Нехай тепер $A \subset X$ – довільна множина такої площини. Позначимо

$$A_{nk} = A \bigcap E_{nk} \subset E_{nk}.$$

Множину $A \subset X$ називають *вимірною*, якщо вимірними за Лебегом є всі без винятку множини A_{nk}. При цьому *мірою* μ *множини* A називають суму

$$\mu(A) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} \mu(A_{nk}).$$

Зрозуміло, що такі суми можуть бути як скінченними, так і нескінченними. Разом з ними множини матимуть скінченні або нескінченні міри відповідно. Зокрема, нескінченною буде міра всієї площини X.

Таким чином, допускаючи до розгляду і плоскі множини нескінченної міри, ми отримаємо, що *сукупність усіх вимірних множин на площині утворюватиме $\sigma-$алгебру множин з одиницею X.*

Зрозуміло, що міра μ є продовженням міри μ.

Нехай тепер m – деяка $\sigma-$адитивна міра, визначена на півкільці G_m підмножин довільного простору X. Така міра називається *$\sigma-$скінченною*, якщо весь простір X можна подати у вигляді об'єднання

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

зліченного числа множин $X_n \in G_m$, але не можна подати як об'єднання скінченного числа множин із G_m.

Перейшовши до кільця $K\left(G_m\right)$, можна вважати, що множини X_n попарно не перетинаються, бо інакше ми замінили би їх множинами

$$X' = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k,$$

об'єднанням яких також є X.

Застосувавши тепер процес лебегового продовження міри, розглянемо систему A множин A, для яких вимірними за Лебегом є всі множини

$$A_n = A \bigcap X_n,\ n \in N.$$

Зрозуміло, що при цьому множини A_n попарно не перетинаються, причому

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Система A таких множин A є $\sigma-$алгеброю множин, яку називають *прямою сумою* $\sigma-$алгебр вимірних за Лебегом підмножин кожної з множин X_n.

Міру μ на такій $\sigma-$алгебрі A визначають рівністю

$$\mu\left(A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Зрозуміло, що міра μ є продовженням міри μ.

При цьому (див. $\left[7\right]$, ст. 238):

1) $\sigma-$алгебра A та міра μ не залежать від представлення

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

як об’єднання вимірних множин X_n, які попарно не перетинаються;

2) міра μ є $\sigma-$адитивною на A;

3) сукупність $\mu-$вимірних множин A, для яких $\mu(A)<\infty$, співпадає з тим $\delta-$кільцем, на якому $\mu(A)=\mu(A)$.

§ 17. Міра Жордана та її зв'язок з мірою Лебега

Нехай $m-$адитивна міра, визначена на півкільці G_m, а $m'-$ її розширення на мінімальне кільце $K(G_m)$. Цю міру можна продовжити на дещо ширше кільце, ніж $K(G_m)$, і в спосіб, відмінний від лебегового продовження міри. Цей спосіб належить французькому математику Жордану і називається *продовженням міри за Жорданом.* Його суть полягає в тому, щоб для кожного $\varepsilon>0$ знайти такі дві множини B' та B'', належні до $K(G_m)$, які задовольняють умови

$$B'\subset A\subset B'',\ \ m'(B''\setminus B')<\varepsilon.$$

Якщо це можливо, то множину A називають *вимірною за Жорданом.*

Зокрема, для плоских множин їх вимірність за Жорданом рівносильна квадрованості даної множини.

Оскільки

$$A\triangle B''\subset B''\setminus B',$$

то *всяка вимірна за Жорданом множина буде вимірною і за Лебегом.* Прикладом вимірної за Лебегом, але не вимірної за Жорданом плоскої множини є множина

$$A=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le f(x)\},\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q,\\ 1, & x\notin Q.\end{cases}$$

До означення вимірності за Жорданом можна підійти й по-іншому. Визначимо числа

$$\overline{\mu}(A)=\inf_{A\subset B} m'(B),\ B\in K(G_m),$$

та

$$\underline{\mu}(A)=\sup_{B\subset A} m'(B),\ B\in K(G_m),$$

які називають відповідно *зовнішньою та внутрішньою мірами Жордана множини A.* Зрозуміло, що для них завжди виконується нерівність

$$\underline{\mu}(A) \le \overline{\mu}(A).$$

Ті множини A, для яких тут набувається рівність, називаються *вимірними за Жорданом*, а спільне значення таких мір називають *мірою Жордана* $m^*(A)$ *множини A.* Зрозуміло, що *міра* m^* *є продовженням міри* m'.

Як відзначено в $[7]$, ст. 239, *сукупність* K^* *вимірних за Жорданом множин є кільцем множин.* Зрозуміло, що таке кільце вужче, ніж сукупність множин, вимірних за Лебегом. При цьому *на кільці* K^* *міри Жордана та Лебега співпадають*.

Таким чином, міру Лебега можна також розглядати як продовження міри Жордана. Звідси випливає, що *жорданове продовження* $\sigma-$*адитивної міри є* $\sigma-$*адитивною мірою*.

§ 18. Загальні зауваження про проблему міри

З означення міри Лебега виникає припущення, що повинні існувати множини, не вимірні за Лебегом. Приклад такої множини легко побудувати на колі.

Нехай X – коло, довжина якого дорівнює 1. Визначимо міру Лебега μ на цьому колі, відштовхуючись від лінійної міри m довжини дуги. При цьому міра μ буде $\sigma-$адитивною і $\mu(X)=1$. Виберемо довільне ірраціональне число α і віднесемо до одного класу ті точки, які переходять одна в одну при повороті на кут $n\pi\alpha,\ n\in Z$. Кожен такий клас буде зліченною множиною. Утворимо множину A_0, вибравши довільно по одному представнику з кожного класу. Доведемо, що множина A_0 не вимірна за Лебегом. Нехай множини $A_n,\ n\in Z,$ утворені з A_0 поворотом на кути $n\pi\alpha$ відповідно. Ці множини попарно не перетинаються, а їх об'єднанням є множина X. Якщо б множина A_0 була вимірною за Лебегом і мала міру $\mu(A_0)$, то і всі множини $A_n,\ n\in Z,$ були би вимірними за Лебегом, причому

$$\mu(A_n)=\mu(A_0)$$

при кожному $n \in Z$. Але тоді, на основі $\sigma-$адитивності міри Лебега,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n) = 1,$$

що не можливо ні при $\mu(A_0) = 0$, ні при $\mu(A_0) > 0$.

Розгортаючи коло у проміжок $[0,1)$ числової прямої, можна вважати, що $A_0 \in [0,1)$ і є прикладом не вимірної за Лебегом множини у просторі R^1.

З цього прикладу також легко отримати не вимірну за Лебегом плоску множину. Такою, зокрема, є множина

$$A = \{(x, y) : x \in A_0, 0 \le y \le 1\}.$$

У зв'язку з наведеними прикладами виникає питання: *чи існує така універсальна міра, за якою будуть вимірними всі без винятку множини заданого простору* X? Зрозуміло, що введена нами вище зовнішня міра множини на цю роль претендувати не може, бо вона в загальному випадку не є адитивною.

Розрізняють так звані *важку* та *легку задачі теорії вимірювань* (див. $[12]$, ст. 80, 81). Їх суть полягає в тому, щоб кожній обмеженій множині A поставити у відповідність невід'ємне число $\mu(A)$ так, що $\mu(E) = 1$ і міри конгруентних множин були рівними. Крім того, у важкій задачі теорії вимірювань вимагають, щоб функція μ була $\sigma-$адитивною, а в легкій задачі – лише адитивною.

З наведеного вище прикладу випливає, що, якою б не була $\sigma-$адитивна лінійна міра μ, множина A_0 буде не вимірна за цією мірою. Тому *важка задача теорії вимірювань не має розв'язків навіть у просторі* R^1.

Що ж стосується легкої задачі теорії вимірювань, то справедливі (див. $[12]$, ст. 81) наступні теореми:

Теорема Банаха. *Легка задача теорії вимірювань має розв'язки у просторах* R^1 *та* R^2, *але ці розв'язки не є єдиними.*

Теорема Хаусдорфа. *У просторах* R^n, $n \ge 3$, *легка задача теорії вимірювань розв'язків не має.*

Зауважимо, що найбільш природними способами розв'язування простої задачі теорії вимірювань є способи, в яких міра відкритої обмеженої множини дорівнює сумі мір інтервалів (у просторі R^1) чи сумі мір відкритих прямокутників (у просторі R^2), які попарно не перетинаються і об'єднання яких утворюють дану множину. Як доведено в $[12]$, ст. 82, при цьому всяка вимірна множина матиме міру, яка дорівнює мірі Лебега цієї множини.

§ 19. Означення та приклади вимірних функцій

Функцію $f(x)$ будемо вважати визначеною на множині $A \subset X$, якщо кожному $x \in A$ поставлено у відповідність число $f(x)$. При цьому не будемо також виключати і можливість набувати функцією $f(x)$ нескінченних значень $+\infty$ та $-\infty$.

Функція $f(x)$, визначена на множині $A \subset X$, називається *вимірною* на цій множині, якщо сама множина A вимірна, і при кожному скінченному значенні c вимірними є множини

$$M[f < c] = \{x : x \in A, f(x) < c\}.$$

Про вимірність функцій можна говорити стосовно різних мір. Вживаючи тут цей термін, будемо надалі вважати, що мова йде про міру Лебега та *вимірність функцій за Лебегом*.

Безпосередньо з означення випливає, що *функція, визначена на невимірній множині, є невимірною*.

Крім того, з повноти міри Лебега отримуємо *вимірність всякої функції, визначеної на множині міри* 0.

Назвемо функції $f(x)$ та $g(x)$ *еквівалентними*: $f(x) \sim g(x)$, якщо

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

З попередньої властивості отримуємо, що на множині A_0 нульової міри, де ці функції відрізняються своїми значеннями, обидві вони вимірні. А на множині $A \setminus A_0$, де вони співпадають, або обидві будуть вимірними, або обидві – невимірними. Таким чином, *з вимірності функції* $f(x)$ *випливає вимірність еквівалентної до неї функції* $g(x)$.

Розглянемо конкретні приклади вимірних функцій, визначених на вимірних множинах A:

1. $f(x)=const$. Множина

$$M[f<c]=\begin{cases}\varnothing, & c\le const,\\ A, & c>const,\end{cases}$$

вимірна при кожному c. Тому й функція $f(x)=const$ вимірна.

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\in B\subset A,\\ 1, & x\in A\setminus B.\end{cases}$

Тут маємо

$$M[f<c]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ B, & 0<c\le 1,\\ A, & c>1.\end{cases}$$

Отже, дана функція вимірна тоді і тільки тоді, коли вимірною є множина B.

3. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$

Дана функція визначена на вимірній відносно лінійної міри Лебега множині $A=[-2,2]$. Послідовно знаходимо:

$$M[f<c]=\varnothing,\ c\le -2;$$
$$M[f<c]=\left[-2,-\sqrt{2-c}\right),\ -2<c\le -1;$$
$$M[f<c]=\left[-2,-\sqrt{2-c}\right)\cup(1,c+2),\ -1<c\le 0;$$
$$M[f<c]=\left[-2,-\sqrt{2-c}\right)\cup[1,2],\ 0<c\le 1;$$
$$M[f<c]=\left[-2,-\sqrt{2-c}\right)\cup\left(\sqrt{2-c},2\right],\ 1<c\le 2;$$
$$M[f<c]=[-2,2],\ c>2.$$

Оскільки в усіх з можливих випадків для чисел c ми отримали вимірні множини, то функція $f(x)$ вимірна. Пропонуємо читачам самостійно намалювати графік такої функції і геометрично інтерпретувати отримані тут результати.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ вимірна, то при кожному значенні c множини*

$$M[f\ge c],\ M[f\le c],\ M[f>c],\ M[f=c]$$

вимірні.

Доведення. Твердження теореми послідовно отримуємо із рівностей

$$M[f \ge c] = A \setminus M[f < c],$$

$$M[f \le c] = \bigcap_{n=1}^{\infty} M\left[f < c + \frac{1}{n}\right],$$

$$M[f > c] = A \setminus M[f \le c],$$

$$M[f = c] = M[f \le c] \setminus M[f < c]$$

та властивостей міри Лебега про вимірність різниць та перетинів вимірних за Лебегом множин.

Зауваження 1. *Якщо множина А вимірна, і хоч одна з множин*

$$M[f \ge c],\ M[f \le c],\ M[f > c]$$

при кожному значенні с буде вимірною, то функція $f(x)$ *вимірна.*

Це справді так, оскільки мають місце рівності:

$$M[f < c] = A \setminus M[f \ge c]$$

та

$$M[f < c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M\left[f \le c - \frac{1}{n}\right]$$

і, крім того, з вимірності множин $M[f > c]$ випливає вимірність множин

$$M[f \le c] = A \setminus M[f > c].$$

Таким чином, *в основу означення вимірної функції можна було покласти вимірність будь-якої з чотирьох множин*

$$M[f < c],\ M[f \ge c],\ M[f \le c],\ M[f > c]$$

при кожному значенні c.

Зауваження 2. *З вимірності при кожному значенні с множини* $M[f = c]$ *вимірність функції* $f(x)$ *не випливає.*

Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A_0, \\ -x, & x \notin A_0, \end{cases}$$

де A_0 – невимірна підмножина відрізка $[0,1]$, є невимірною на цьому відрізку, хоч $\mu(M[f = c]) = 0$ при кожному c.

Зауваження 3. *Якщо функція* $f\left(x\right)$ *набуває не більш як зліченну кількість значень* y_n, *і при кожному* n *множини* $M\left[\, f = y_n \right]$ *вимірні, то функція* $f\left(x\right)$ *вимірна.*

Справді, тоді множини

$$M\left[\, f < c\right] = \bigcup_{y_n < c} M\left[\, f = y_n\right]$$

будуть вимірними при кожному c на підставі $\sigma-$адитивності міри Лебега.

§ 20. Дії над вимірними функціями

Розглянемо основні властивості вимірних функцій, пов'язані з діями над такими функціями:

1. *Якщо* $f\left(x\right)-$ *вимірна функція, то при кожному* $a \in R$ *функція* $f\left(x\right)+a$ *теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[\, f + a < c\right] = M\left[\, f < c - a\right]$$

вимірні при кожному дійсному c та a.

2. *Якщо* $f\left(x\right)-$ *вимірна функція, то при кожному* $k \in R$ *функція* $kf\left(x\right)$ *теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[kf < c\right] = \begin{cases} M\left[\, f < \dfrac{c}{k}\right], & k > 0, \\ M\left[0 \cdot f < c\right], & k = 0, \\ M\left[\, f > \dfrac{c}{k}\right], & k < 0, \end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c та k.

3. *Якщо* $f\left(x\right)-$ *вимірна функція, то функція* $\left|f\left(x\right)\right|$ *теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[\left|f\right| < c\right] = \begin{cases} \varnothing, & c \le 0, \\ M\left[\, f < c\right] \cap M\left[\, f > -c\right], & c > 0, \end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

4. *Якщо* $f(x)-$ *вимірна функція, то функція* $f^2(x)$ *теж вимірна.*

Справді, множини

$$M\left[f^2<c\right]=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ M\left[f<\sqrt{c}\right]\cap M\left[f>-\sqrt{c}\right], & c>0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

5. *Якщо* $f(x)-$ *вимірна функція і* $f(x)\neq 0,$ *то функція* $\dfrac{1}{f(x)}$ *теж вимірна.*

Справді, при $f(x)\neq 0$ множини

$$M\left[\frac{1}{f}<c\right]=\begin{cases}M[f<0]\cap M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c<0,\\ M[f<0], & c=0,\\ M[f<0]\cup M\left[f>\dfrac{1}{c}\right], & c>0,\end{cases}$$

вимірні при кожному дійсному c.

6. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *вимірні, то множина* $M[f<\varphi]$ *вимірна.*

Для доведення випишемо всі раціональні числа у вигляді послідовності (r_n). Тоді множина

$$M[f<\varphi]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(M[f<r_n]\cap M[\varphi>r_n]\right)$$

вимірна як об'єднання перетинів вимірних множин.

7. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *вимірні, то функція* $f(x)-g(x)$ *вимірна.*

Справді, за властивістю 6 множина

$$M[f-g<c]=M[f<g+c]$$

вимірна при кожному c, бо на основі властивості 1 функція $\varphi(x)=g(x)+c$ вимірна.

8. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *вимірні, то функція* $f(x)+g(x)$ *вимірна.*

Справді, на основі властивостей 2 та 7 функція

$$f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x))$$

є вимірною.

9. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *вимірні, то функція* $f(x)\cdot g(x)$ *вимірна.*

Справді, її вимірність випливає з рівності

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left[\left(f(x)+g(x)\right)^2-\left(f(x)-g(x)\right)^2\right]$$

та властивостей 2, 4, 7, 8.

10. *Якщо* $f(x)$ *та* $g(x)-$ *вимірні функції і* $g(x)\neq 0,$ *то функція* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *теж вимірна.*

Справді, її вимірність отримуємо з рівності

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)},$$

врахувавши властивості 5 та 9.

§ 21. Границі послідовностей вимірних функцій

Розглянемо ще одну важливу властивість вимірних функцій, пов'язану з граничним переходом.

Теорема. *Якщо послідовність вимірних на множині* A *функцій* $f_n(x)$ *при кожному* $x\in A$ *збігається до функції* $f(x),$ *то функція* $f(x)$ *вимірна.*

Доведення. Оскільки $f_n(x)\to f(x),$ то має місце рівність

$$M[f<c]=\{x: f(x)<c\}=\bigcup_k\bigcup_n\bigcap_{m>n}\left\{x: f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}.$$

Справді, якщо $f(x)<c,$ то для такого x знайдеться число $k\in N,$ що

$$f(x)<c-\frac{2}{k}.$$

Тоді із збіжності $f_n(x)\to f(x)$ випливатиме існування такого $n\in N,$ що для всіх $m>n$ буде виконуватися нерівність

$$|f_m(x)-f(x)|<\frac{1}{k},$$

з якої з врахуванням попередньої нерівності отримаємо, що

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

для всіх $m > n$, тобто x належить правій частині записаної вище рівності.

Навпаки, якщо x належить правій частині цієї рівності і $f_n(x) \to f(x)$, то знайдуться такі $k \in N$ та $n \in N$, що при всіх $m > n$ будуть одночасно виконуватися нерівності

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

та

$$\left| f_m(x) - f(x) \right| < \frac{1}{k}.$$

Але тоді також матиме місце й нерівність $f(x) < c$, тобто x належатиме і лівій частині записаної рівності. З доведеного випливає, що $M[f < c]$ як об'єднання перетинів вимірних множин буде вимірною множиною при кожному c. Тому функція $f(x)$ теж є вимірною. Теорема доведена.

Зауваження 1. Умови даної теореми можуть бути дещо послаблені. Назвемо послідовність функцій $f_n(x)$ *збіжною майже скрізь на множині А до функції* $f(x)$, якщо міра множини тих $x \in A$, для яких $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, дорівнює нулю.

Отже, *нехай послідовність вимірних на множині А функцій* $f_n(x)$ *майже скрізь на А збігається до функції* $f(x)$. *Тоді функція* $f(x)$ *є вимірною.*

Справді, на множині $A_0 \subset A$, на якій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$, функція $f(x)$ вимірна, як і всяка функція на множині міри нуль. А на $A \setminus A_0$ вимірність $f(x)$ випливає з доведеної теореми. Тому $f(x)$ вимірна на всій множині A.

Зауваження 2. Якщо $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, то за теоремою Кантора вона буде також рівномірно неперервною на цьому відрізку. Тому при кожному $n \in N$ відрізок $[a,b]$ можна розбити на менші відрізки $[x_k, x_{k+1}]$ так, щоб коливання функції на кожній з частинок було меншим за $\frac{1}{n}$. Визначимо функції $f_n(x)$, покладаючи їх на $[x_k, x_{k+1})$ рівними найменшим значенням функції $f(x)$ на кожному з таких відрізків відповідно та $f_n(b) = f(b)$. Очевидно, що функції $f_n(x)$ є вимірними, бо всі вони набувають скінченну кількість значень, кожне на вимірній множині. Крім того, послідовність таких функцій збігається до функції $f(x)$, причому навіть рівномірно.

Тому на основі доведеної теореми приходимо до ***висновку:*** *всяка неперервна на відрізку функція є вимірною*.

Зауваження 3. Неперервні та вимірні на відрізку $[a,b]$ функції тісно пов'язані між собою. Зокрема, справедлива (див. $[7]$, ст. 249, $[12]$, ст. 102) наступна теорема:

Теорема Лузіна: *для того, щоб функція $f(x)$ була вимірною на відрізку $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувала така неперервна на $[a,b]$ функція $g(x)$, що*

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Зауваження 4. Розглянемо ще й іншу необхідну та достатню умову вимірності функції, яка буде потрібна нам при вивченні інтеграла Лебега.

Нехай $f(x)-$ довільна вимірна на множині A функція. Тоді при всіх $m \in Z,\ n \in N$ будуть вимірними множини

$$A_{nm} = \left\{x : \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}\right\},$$

причому

$$A = \bigcup_m A_{nm}$$

при кожному фіксованому $n \in N$. Покладаючи

$$f_n(x) = \frac{m}{n},\ x \in A_{nm},$$

отримаємо послідовність, яка рівномірно збігається до функції $f(x)$ на множині A.

Назвемо функцію $\varphi(x)$ *простою*, якщо вона вимірна і набуває не більше, як зліченну кількість різних значень.

Зрозуміло, що всі функції отриманої нами послідовності є простими. Отже, справедливе наступне твердження:

Теорема. *Для того, щоб функція* $f(x)$ *була вимірною, необхідно і достатньо, щоб її можна було подати як границю рівномірно збіжної послідовності простих функцій.*

§ 22. Теорема Єгорова та наслідок з неї

Очевидно, що із рівномірної збіжності випливає як збіжність у кожній точці множини, так і, тим більше, збіжність майже скрізь. Але із збіжності майже скрізь і, навіть, із збіжності в кожній точці не випливатиме рівномірної збіжності. То ж наступна теорема дає змогу встановити більш тісний взаємозв'язок між збіжністю майже скрізь та рівномірною збіжністю.

Теорема Єгорова. *Нехай послідовність вимірних на множині* A *скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *майже скрізь на* A *збігається до функції* $f(x)$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує така вимірна множина* $A_\varepsilon \subset A$, *на якій ця послідовність збігається до* $f(x)$ *рівномірно і*

$$\mu(A_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon.$$

Доведення. Розглянемо множини

$$A_n^m = \bigcap_{k \geq n} \left\{ x : \left| f_k(x) - f(x) \right| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Оскільки $f(x)$ як границя послідовності вимірних функцій є вимірною, то всі ці множини будуть вимірними. Позначимо

$$A^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^m.$$

Оскільки при кожному фіксованому $m \in N$ справедливі включення

$$A_1^m \subset A_2^m \subset \ldots \subset A_n^m \subset \ldots,$$

то на підставі неперервності міри Лебега

$$\mu(A^m) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n^m).$$

Тому для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n_0(m)$, що

$$\mu\left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Покажемо, що множина

$$A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} A^m_{n_0(m)}$$

задовольняє умови теореми. Справді, якщо $x \in A_\varepsilon$, то для всіх $m \in N$ при $k \ge n_0(m)$ виконується нерівність

$$\left| f_k(x) - f(x) \right| < \frac{1}{m}.$$

А оскільки $\frac{1}{m}$ не залежить від $x \in A_\varepsilon$ і $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$, то послідовність функцій $f_n(x)$ рівномірно збігається до $f(x)$ на множині A_ε.

Далі зауважимо, що якщо $x_0 \in A \setminus A^m$, то $x_0 \notin A^m_n$ при всіх $n \in N$. А отже, $f_n(x_0)$ не збігається до $f(x_0)$. Але за умовою теореми $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ майже скрізь. Тому

$$\mu\left(A \setminus A^m\right) = 0$$

при кожному $m \in N$. Звідси випливає, що

$$\mu\left(A \setminus A^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Тоді

$$\mu\left(A \setminus A_\varepsilon\right) = \mu\left(A \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} A^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(A \setminus A^m_{n_0(m)}\right)\right) \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(A \setminus A^m_{n_0(m)}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

Теорема доведена.

Як наслідок з цієї теореми отримуємо теорему Лебега, яка встановлює зв'язок між збіжністю майже скрізь та за мірою.

Кажуть, що послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ *збігається за мірою* до функції $f(x)$, якщо при кожному $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{x : \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge \sigma\right\} = 0.$$

Теорема Лебега. *Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається майже скрізь на множині A скінченної міри до функції $f(x)$, то вона збігається до цієї функції і за мірою.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що функція $f(x)$ є вимірною як границя збіжної майже скрізь послідовності вимірних функцій. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. За теоремою Єгорова існує така вимірна множина $A_\varepsilon \subset A$, на якій послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ рівномірно і $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тоді для кожного $\sigma > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \sigma$$

для всіх $n > N$ та для всіх $x \in A_\varepsilon$. Звідси випливає, що

$$M = \left\{ x : \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \sigma \right\} \subset A \setminus A_\varepsilon.$$

Тому $\mu(M) < \varepsilon$. А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то це означає збіжність послідовності функцій $f_n(x)$ до функції $f(x)$ за мірою. Теорема доведена.

§ 23. Теорема Ріса про підпослідовності збіжних за мірою послідовностей

Розглянемо при кожному натуральному k функції

$$\varphi_{k1}(x), \varphi_{k2}(x), \ldots, \varphi_{kk}(x),$$

визначені на множині $A = (0,1]$ так, що:

$$\varphi_{ki}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k} \right], \\ 0, \ \ x \notin \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k} \right]. \end{cases}$$

Пронумерувавши ці функції підряд за зростанням k, а при однакових k – за зростанням i, отримаємо деяку послідовність функцій $f_n(x)$. Зауваживши, що

$$\mu\left\{ x : \varphi_{ki}(x) \neq 0 \right\} = \frac{1}{k} \to 0, \ k \to \infty,$$

отримаємо, що $f_n(x)$ збігається за мірою до функції $f(x) \equiv 0$.

Але, яке б $x_0 \in (0,1]$ ми не взяли, при кожному $k \in N$ знайдеться таке i, що

$$x_0 \in \left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right],$$

тобто $\varphi_{ki}(x_0) = 1$. Тому послідовність функцій $f_n(x)$ не збігається до $f(x)$ у жодній точці проміжку $(0,1]$.

Наведений приклад свідчить, що із збіжності за мірою може не випливати навіть збіжності принаймні в одній точці множини A. Проте справедлива наступна теорема:

Теорема Ріса. *Якщо послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ на множині A скінченної міри збігається за мірою до функції $f(x)$, то з неї можна вибрати підпослідовність функцій $f_{n_k}(x)$, яка збігається на цій множині до функції $f(x)$ майже скрізь.*

Доведення. Побудуємо послідовності індексів

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

та множин

$$A_k = \left\{ x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

так, щоб при кожному $k \in N$ виконувалася нерівність

$$\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Це зробити вдасться, оскільки послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до функції $f(x)$ за мірою. Позначимо

$$R_m = \bigcup_{k>m} A_k, \quad Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m.$$

Оскільки $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_m \supset \ldots,$ то внаслідок неперервності міри Лебега отримаємо, що

$$\mu(Q) = \lim_{m \to \infty} \mu(R_m).$$

Але

$$\mu(R_m) = \mu\left(\bigcup_{k>m} A_k \right) \leq \sum_{k>m} \mu(A_k) < \sum_{k>m} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} \to 0$$

при $m \to \infty$. Тому $\mu(Q) = 0$.

Нехай тепер $x_0 \in A \setminus Q$. Це означає, що існує таке m, що $x_0 \notin R_m$, а отже, $x_0 \notin A_k$ для всіх $k > m$. Тому для всіх таких k виконується нерівність

$$\left| f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \right| < \frac{1}{k},$$

а отже, $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$. З довільності вибору $x_0 \in A \setminus Q$ випливає, що підпослідовність функцій $f_{n_k}(x)$ майже скрізь на A збігається до функції $f(x)$. Теорема доведена.

З теореми Ріса та встановлених вище властивостей вимірних функцій безпосередньо отримуємо такі два наслідки:

Наслідок 1. *Границя збіжної за мірою послідовності вимірних функцій є вимірною функцією.*

Наслідок 2. *Послідовність функцій $f_n(x)$ збігається за мірою до двох різних функцій $f(x)$ та $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли ці функції еквівалентні між собою.*

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, зауважимо, що, обмежуючись у ньому лише функціями

$$\varphi_{11}(x), \varphi_{21}(x), ..., \varphi_{k1}(x), ...,$$

ми виділимо підпослідовність заданої послідовності, яка збігається до $f(x) \equiv 0$ у кожній точці множини $A = (0,1]$.

Справді, для кожного $x_0 \in (0,1]$ знайдеться таке число k_0, що

$$\frac{1}{k_0} < x_0.$$

Тоді для всіх $k \geq k_0$ отримаємо $\varphi_{k1}(x_0) = 0$. А отже, також

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_{k1}(x_0) = 0.$$

§ 24. Загальний підхід до поняття вимірності функцій

Нехай X та Y – довільні множини, в яких виділені системи підмножин G_X та G_Y відповідно. Функція $y = f(x)$ з областю визначення X, яка набуває значень на Y, називається (G_X, G_Y)–*вимірною*, якщо з $A \in G_Y$ випливає, що прообраз цієї множини $f^{-1}(A) \in G_X$.

Якщо у ролі G_X та G_Y вибрати системи всіх відкритих (або всіх замкнених) множин на X та Y відповідно, то поняття вимірності зведеться до поняття неперервності.

Якщо X та Y – числові прямі, а G_X та G_Y – системи борелівських множин, то отримаємо означення *вимірних за Борелем* функцій. Такі функції називаються *борелівськими*.

Теорема. *Нехай X,Y,Z – довільні множини з виділеними на них системами підмножини G_X,G_Y,G_Z відповідно. Якщо функція $y=f(x)$, визначена на X, є $(G_X,G_Y)-$вимірною, а функція $z=g(y)$, визначена на Y, є $(G_Y,G_Z)-$вимірною, то функція $z=\varphi(x)=g(f(x))$, визначена на X, $(G_X,G_Z)-$вимірна.*

Доведення. Якщо $A\in G_Z$, то $B=g^{-1}(A)\in G_Y$ внаслідок $(G_Y,G_Z)-$вимірності функції $z=g(y)$. У свою чергу з $(G_X,G_Y)-$вимірності функції $y=f(x)$ отримуємо, що $f^{-1}(B)\in G_X$, тобто $\varphi^{-1}(A)\in G_X$. Теорема доведена.

З точки зору інтегрування в ролі G_X доцільно вибирати $\sigma-$алгебру G_μ вимірних за $\sigma-$адитивною мірою μ множин. При цьому функцію $f(x)$ називають *$\mu-$вимірною*, якщо $f^{-1}(A)\in G_\mu$ для кожної борелівської множини $A\subset Y$. З доведеної теореми випливає наступне твердження:

Наслідок. *Борелівська функція від $\mu-$вимірної функції $\mu-$вимірна. Зокрема, всяка неперервна функція від $\mu-$вимірної функції $\mu-$вимірна.*

І на завершення розділу повернемося до означення вимірності функції, сформульованого нами у параграфі 19.

Необхідність вимірності множин

$$M[f<c]=\{x:x\in A, f(x)<c\}$$

випливає з того, що півпряма $(-\infty,c)$ є борелівською множиною.

Навпаки, $\sigma-$алгебра, породжена системою таких півпрямих, співпадає з $\sigma-$алгеброю всіх борелівських множин на прямій. А отже, прообраз кожної борелівської множини належатиме $\sigma-$алгебрі, породженій прообразами цих півпрямих, тобто буде вимірним.

Тому сформульоване тут означення і означення параграфа 19 визначають один і той же клас $\mu-$вимірних функцій.

Розділ II

ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Означення інтеграла Лебега

Інтеграл Рімана, який вивчався у курсі математичного аналізу, спочатку вводився для функцій однієї змінної, а вже потім з відповідними змінами давалось означення такого інтеграла для функцій кількох змінних. При цьому кожен раз поняття інтеграла доводилось вводити окремо.

У цьому параграфі ми розглянемо інший підхід до інтегрування функцій, визначених на довільних просторах з $\sigma-$адитивною мірою, який був запропонований Лебегом. Для зручності спочатку введемо поняття такого інтеграла для *простої функції*, тобто вимірної функції, яка набуває не більше, як зліченну кількість різних значень.

Нехай $f(x)-$ проста функція, визначена на вимірній множині A, яка набуває різні значення $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ на множинах $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ відповідно. Зрозуміло, що при цьому множини $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ вимірні, попарно не перетинаються і їх об'єднанням є множина A. Таку функцію називають *інтегровною (сумовною) за Лебегом на множині* A, якщо ряд

$$\sum_n y_n \mu(A_n)$$

збігається абсолютно. При цьому суму такого ряду називають *інтегралом Лебега простої функції* $f(x)$ *по множині* A і позначають

$$\int_A f(x) d\mu.$$

Зауважимо, що з врахуванням властивостей абсолютно збіжних рядів від вимоги набувати функцією $f(x)$ на множинах $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ різних значень можна відмовитися. Важливо тільки, щоб ці множини були вимірними, попарно не перетиналися і давали в об'єднанні множину A.

Відзначимо також, що коли проста функція набуває скінченну кількість різних значень, то замість ряду матимемо скінченну кількість доданків.

Наприклад, для функції Діріхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q,\end{cases}$$

отримуємо

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = 1\cdot\mu\big([a,b]\cap Q\big)+0\cdot\mu\big([a,b]\setminus Q\big)=1\cdot 0+0\cdot(b-a)=0.$$

Розглянемо дещо складніший приклад. Нехай функція $f(x)$ у точках канторової множини K дорівнює нулю, а у точках інтервалів, які викидалися при побудові цієї множини, дорівнює довжині відповідного інтервалу. Тоді

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu = 0\cdot\mu(K)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)=\frac{1}{7}.$$

Безпосередньо з означення інтеграла Лебега випливає, що *разом з простою функцією* $f(x)$ *інтегровною за Лебегом буде і функція* $|f(x)|$.

Встановимо також інші властивості інтеграла Лебега від простих функцій:

1. *Якщо проста функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині A, то при кожному* k *функція* $kf(x)$ *також інтегровна за Лебегом на цій множині і*

$$\int\limits_A kf(x)d\mu = k\int\limits_A f(x)d\mu.$$

Справді, нехай $f(x)=f_i,\ x\in F_i$. Тоді

$$\int\limits_A kf(x)d\mu=\sum_i kf_i\mu(F_i)=k\sum_i f_i\mu(F_i)=k\int\limits_A f(x)d\mu,$$

причому абсолютна збіжність ряду для $kf(x)$ випливає з абсолютної збіжності ряду для $f(x)$.

2. *Якщо прості функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *інтегровні за Лебегом на множині A, то і функція* $f(x)+g(x)$ *також інтегровна за Лебегом на цій множині і*

$$\int\limits_A \big(f(x)+g(x)\big)d\mu=\int\limits_A f(x)d\mu+\int\limits_A g(x)d\mu.$$

Справді, якщо

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \qquad \int_A g(x)d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j),$$

то

$$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\mu(F_i \cap G_j) = \sum_i f_i \mu(F_i) + \sum_j g_j \mu(G_j),$$

причому абсолютна збіжність ряду для $f(x)+g(x)$ та остання записана рівність випливають з абсолютної збіжності рядів для функцій $f(x)$ та $g(x)$ і рівностей

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j), \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j).$$

3. *Якщо $f(x)$ – проста обмежена функція на множині A скінченної міри така, що $|f(x)| \le M$ для всіх $x \in A$, то вона інтегровна за Лебегом на цій множині і*

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| \le M\mu(A).$$

Справді,

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| \le \left| \sum_i f_i \mu(F_i) \right| \le \sum_i |f_i| \mu(F_i) \le M \sum_i \mu(F_i) \le M\mu(A).$$

З врахуванням цих властивостей дамо тепер *загальне означення інтеграла Лебега на множині скінченної міри:*

Функція $f(x)$ називається *інтегровною за Лебегом* на множині A скінченної міри, якщо існує послідовність $(f_n(x))$ простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій, яка рівномірно збігається до $f(x)$. При цьому покладають, що

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Наприклад, для функції $f(x) = x$ розглянемо функції

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \; x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \; k = 0,1,\dots,n-1, \; f_n(1) = 1.$$

Оскільки при кожному $n \in N$ для всіх $x \in [0,1]$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

то ця послідовність простих функцій $f_n(x)$збігається до функції $f(x)=x$ на відрізку $[0,1]$ рівномірно. Крім того,

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)+1\cdot 0=\frac{n-1}{2n}.$$

Тому

$$\int\limits_{[0,1]} x\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Обґрунтуємо *коректність означення інтеграла Лебега:*

1. *Така границя існує.*

Справді, з рівномірної збіжності послідовності $(f_n(x))$ випливає, що при кожному $\varepsilon>0$ знайдеться таке $N=N(\varepsilon)$, що

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon$$

при всіх $n>N,\ \ m>N,\ \ x\in A.$ Тоді на підставі властивостей інтеграла Лебега для простих функцій отримуємо:

$$\left|\int\limits_A f_n(x)\,d\mu-\int\limits_A f_m(x)\,d\mu\right|\le\varepsilon\mu(A).$$

А отже, послідовність

$$\left(\int\limits_A f_n(x)\,d\mu\right)$$

задовольняє критерій Коші збіжності числових послідовностей.

2. *Ця границя не залежить від вибору послідовності* $(f_n(x))$.

Справді, вибравши ще одну послідовність простих функцій, для якої послідовність інтегралів збігається до іншої границі, ми могли б, чергуючи елементи таких послідовностей, отримати третю послідовність, для якої послідовність вказаних інтегралів не мала би границі. А це суперечить доведеному вище.

3. *Якщо* $f(x)-$ *проста функція, то дане означення співпадає з означенням інтеграла Лебега для простих функцій.*

Справді, досить покласти $f_n(x)=f(x)$ при кожному $n\in N.$

Зауважимо також, що згідно даного означення *всяка інтегровна за Лебегом на множині скінченної міри функція є вимірною за Лебегом* як границя послідовності вимірних функцій.

§ 2. Основні властивості інтеграла Лебега

Встановимо основні властивості інтеграла Лебега на множині скінченної міри:

1. *Для кожної вимірної множини* A *скінченної міри*

$$\int_A 1\cdot d\mu = \mu(A).$$

Справедливість такої рівності випливає безпосередньо з означення інтеграла Лебега для простої функції $f(x)=1.$

2. *Для кожної сталої* k *та інтегровної за Лебегом на* A *функції* $f(x)$

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu.$$

Справді, з врахуванням властивості 1 інтеграла Лебега для простих функцій будемо мати

$$\int_A kf(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A kf_n(x)d\mu = k\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu.$$

При $k=0$ як *наслідок* звідси, зокрема, отримуємо, що

$$\int_A 0\cdot d\mu = 0.$$

3. *Для будь-яких інтегровних за Лебегом на множині* A *функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$

$$\int_A (f(x)+g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$$

Справедливість рівності отримуємо на підставі властивості 2 інтеграла Лебега для простих функцій з допомогою граничного переходу.

4. *Якщо* $f(x)-$ *така обмежена функція на множині* A *скінченної міри, що* $|f(x)|\le M$ *для всіх* $x\in A$, *то вона інтегровна за Лебегом на цій множині.*

Для доведення достатньо розглянути рівномірно збіжну до $f(x)$ послідовність простих інтегровних за Лебегом функцій $f_n(x)$ таких, що $|f_n(x)|\le M$. Тоді за властивістю 3 інтеграла Лебега для простих функцій отримуємо не лише інтегровність функції $f(x)$, а й нерівність

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu\right| \le M\mu(A).$$

5. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $f(x)\ge 0$ *і функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на* A, *то має місце нерівність*

$$\int_A f(x)d\mu \ge 0.$$

Для доведення достатньо розглянути рівномірно збіжну до $f(x)$ послідовність простих інтегровних за Лебегом функцій $f_n(x)\ge 0$, для яких така нерівність випливає безпосередньо з означення інтеграла Лебега. Тоді для функції $f(x)$ потрібну нерівність отримуємо з допомогою граничного переходу.

6. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $f(x)\ge g(x)$ *і функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *інтегровні за Лебегом на* A, *то має місце нерівність*

$$\int_A f(x)d\mu \ge \int_A g(x)d\mu.$$

На підставі властивостей 2 та 3 функція

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \ge 0$$

буде інтегрованою за Лебегом на множині A, причому за властивістю 5

$$\int_A (f(x) - g(x))d\mu \ge 0,$$

звідки й випливає потрібна нерівність.

7. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $m \le f(x) \le M$, *то функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на* A *і справедлива нерівність*

$$m\mu(A) \le \int_A f(x)d\mu \le M\mu(A).$$

Дана властивість по суті є прямим наслідком властивості 6 і доводиться з врахуванням властивостей 1 та 2.

8. *Якщо* $\mu(A)=0$, *то* $\int_A f(x)d\mu = 0.$

Для кожної простої функції це твердження випливає безпосередньо з означення інтеграла Лебега для простих функцій. А тому з допомогою граничного переходу отримуємо, що

$$\int_A f(x)\,d\mu = 0$$

і для довільної функції $f(x)$.

9. *Якщо на множині* A *скінченної міри* $f(x) \sim g(x)$ *і одна з цих функцій інтегровна на* A *за Лебегом, то й друга функція буде інтегровною за Лебегом, причому*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu.$$

Для простих функцій дане твердження очевидне, а для довільних функцій справедливість цієї властивості безпосередньо випливає з означення інтеграла Лебега.

10. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри і* $|f(x)| \le \varphi(x)$ *майже скрізь на* A, *то* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A.

Справді, якщо нерівність $|f(x)| \le \varphi(x)$ виконується на множині $A' \subset A$ для простих функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$, які відповідно набувають значень a_n та b_n на підмножинах A_n множини A', то з інтегровності функції $\varphi(x)$ випливає, що

$$\sum_n |a_n| \mu(A_n) \le \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu = \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Тому проста функція $f(x)$ теж буде інтегровною за Лебегом на множині A, причому

$$\left| \int_A f(x)\,d\mu \right| = \left| \int_{A'} f(x)\,d\mu \right| = \left| \sum_n a_n \mu(A_n) \right| \le$$
$$\le \sum_n |a_n| \mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)|\,d\mu \le \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

У загальному випадку справедливість даної властивості отримуємо з допомогою граничного переходу.

11. *Функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри тоді і тільки тоді, коли інтегровною за Лебегом на цій множині є функція* $|f(x)|$.

Справді, якщо функція $|f(x)|$ інтегровна за Лебегом на множині A, то на підставі властивості 10 функція $f(x)$ теж буде інтегровна за Лебегом на цій множині. Навпаки, для простої інтегровної за Лебегом на множині A функції $f(x)$ інтегровність функції $|f(x)|$ ми вже встановили вище. Загальний результат отримуємо граничним переходом з врахуванням нерівності

$$\left|\,|f_n(x)| - |f_m(x)|\,\right| \le |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Тоді, якщо послідовність $(f_n(x))$ простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій рівномірно збігається до $f(x)$, то

$$\int_A |f(x)|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A |f_n(x)|\,d\mu.$$

§ 3. $\sigma-$адитивність і абсолютна неперервність інтеграла Лебега

У попередньому параграфі ми розглянули властивості інтеграла Лебега на фіксованій множині A скінченної міри. Вивчимо тепер властивості такого інтеграла як функції множини, визначеної на деякій $\sigma-$алгебрі вимірних множин скінченної міри.

Теорема 1. ($\sigma-$адитивність інтеграла Лебега)*. Якщо функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом на множині A скінченної міри і*

$$A = \bigcup_n A_n,$$

де A_n- вимірні множини, які попарно не перетинаються, то $f(x)$ інтегровна за Лебегом на кожній з множин A_n і

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$

причому ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно.

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми для простої функції $f(x)$, яка набуває значень $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ на множинах $B_1, B_2, ..., B_k, ...$ відповідно. Якщо $C_{nk} = A_n \cap B_k$, то

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(C_{nk}) =$$

$$= \sum_n \sum_k y_k \mu(C_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

При цьому з інтегровності функції $f(x)$ випливає абсолютна збіжність ряду

$$\sum_k y_k \mu(B_k),$$

а разом з ним – і абсолютна збіжність всіх інших рядів записаної тут рівності.

Якщо ж $f(x)$ – довільна інтегровна за Лебегом на множині A функція, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться така проста інтегровна за Лебегом на множині A функція $g(x)$, що

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

причому

$$\int_A g(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x) d\mu$$

і ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно. Звідси на підставі властивостей інтеграла Лебега випливає, що функція $f(x) - g(x)$, а з нею і функція $f(x) = (f(x) - g(x)) + g(x)$ інтегровні на кожній з множин A_n. Крім того, отримуємо:

$$\left| \int_A f(x) d\mu - \int_A g(x) d\mu \right| \le \varepsilon \mu(A),$$

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_{A_n} g(x) d\mu \right| \le \sum_n \varepsilon \mu(A_n) = \varepsilon \mu(A).$$

Тому ряд

$$\sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$$

теж збігається абсолютно і

$$\left| \int_A f(x) d\mu - \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu \right| \le \left| \int_A f(x) d\mu - \int_A g(x) d\mu \right| +$$

$$+ \left| \int_A g(x) d\mu - \sum_n \int_{A_n} g(x) d\mu \right| + \left| \sum_n \int_{A_n} g(x) d\mu - \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu \right| \le$$

$$\le \varepsilon \mu(A) + 0 + \varepsilon \mu(A) = 2\varepsilon \mu(A).$$

А оскільки число $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно і $\mu(A) < \infty$, то з отриманої нерівності випливає твердження теореми. Теорема доведена.

Встановлена тут властивість називається $\sigma-$*адитивністю інтеграла Лебега.*

Зауважимо, що питання про $\sigma-$адитивність інтеграла Лебега можна поставити ще й так:

Нехай функція $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на кожній з вимірних множин* A_n, *які попарно не перетинаються, і*

$$A=\bigcup_n A_n -$$

множина скінченної міри. Чи обов'язково при цьому функція $f(x)$ *буде інтегровна за Лебегом на множині* A?

Зрозуміло, що якщо функція $f(x)$ виявиться інтегровною за Лебегом на множині A, то такою ж буде і функція $|f(x)|$. При цьому на підставі доведеної теореми

$$\int_A |f(x)|d\mu=\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu.$$

Таким чином, збіжність ряду у правій частині останньої рівності є необхідною умовою інтегровності за Лебегом функції $f(x)$ на множині A. Як доведено в $[7]$, ст. 257, ця умова є також достатньою. Очевидно, що в такому разі також

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$

причому ряд у правій частині такої рівності збігається абсолютно.

Теорема 2. (Абсолютна неперервність інтеграла Лебега). *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри, то для кожного* $\varepsilon>0$ *існує таке* $\delta>0$, *що*

$$\left|\int_{A_\delta} f(x)d\mu\right|<\varepsilon$$

для всякої вимірної множини $A_\delta\subset A$ *такої, що* $\mu(A_\delta)<\delta$.

Доведення. Якщо функція $f(x)$ обмежена і $|f(x)|\le M$, то

$$\left|\int_{A_\delta} f(x)d\mu\right|\le M\mu(A_\delta)<M\delta.$$

Тому досить вибрати δ так, щоб виконувалась нерівність $M\delta<\varepsilon$. Для довільної інтегровної на множині A функції розглянемо множини

$$A_n=\{x : x\in A, n-1\le |f(x)|<n\},\ n\in N.$$

Такі множини є вимірними, попарно не перетинаються і в об'єднанні дають множину $A.$ Покладемо

$$B_N=\bigcup_{n=1}^{N}A_n,\ C_N=A\setminus B_N.$$

На підставі $\sigma-$адитивності інтеграла Лебега

$$\int_A |f(x)|d\mu=\sum_n\int_{A_n}|f(x)|d\mu.$$

Тому для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $N,$ що

$$\int_{C_N}|f(x)|d\mu=\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Виберемо тепер $\delta<\dfrac{\varepsilon}{2N}.$ Тоді, якщо $\mu(A_\delta)<\delta,$ то

$$\left|\int_{A_\delta}f(x)d\mu\right|\le\int_{A_\delta}|f(x)|d\mu=\int_{A_\delta\cap B_N}|f(x)|d\mu+\int_{A_\delta\cap C_N}|f(x)|d\mu\le$$

$$\le\int_{A_\delta\cap B_N}|f(x)|d\mu+\int_{C_N}|f(x)|d\mu<N\cdot\mu(A_\delta\cap B_N)+\frac{\varepsilon}{2}<N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теорема доведена.

Зауваження. Встановлені нами властивості інтеграла Лебега справедливі і для функцій інтегровних на множині A скінченної міри не лише за мірою Лебега, а й відносно довільної повної $\sigma-$адитивної міри $\mu.$ Підсумовуючи сказане, приходимо до такого ***висновку:***

Якщо $f(x)-$ *довільна невід'ємна інтегровна на просторі* X *за* $\sigma-$*адитивною мірою* μ *функція, то функція*

$$\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu,$$

визначена для всіх вимірних множин $A\subset X,$ *теж є невід'ємною та* $\sigma-$*адитивною.*

Іншими словами, *функція* $\Phi(A)$ *є* $\sigma-$*адитивною мірою, визначеною на тій же* $\sigma-$*алгебрі, що й міра* $\mu.$ При цьому з умови $\mu(A)=0$ випливає, що й $\Phi(A)=0,$ тобто *міра* $\Phi(A)$ *також буде повною*. Зрозуміло, що саму міру $\mu(A)$ отримуємо, покладаючи тут $f(x)\equiv 1.$

§ 4. Збіжність в середньому та її зв'язок з іншими видами збіжності

Розглянемо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$. Кажуть, що така послідовність *збігається в середньому* до функції $f(x)$ на множині A, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \left| f_n(x) - f(x)\right| d\mu = 0.$$

Зрозуміло, що при цьому функція

$$f(x) = f_n(x) - \left(f_n(x) - f(x)\right)$$

також буде інтегровною за Лебегом на множині A..

Наприклад, послідовність функцій $f_n(x)$, утворена нами у §5 попереднього розділу із функцій

$$\varphi_{ki}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right], \\ 0, \ x \notin \left(\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]. \end{cases} \quad 1 \le i \le k,$$

збігається в середньому до функції $f(x) = 0$ на множині $A = (0,1]$.

Встановимо зв'язок збіжності в середньому з іншими видами збіжності функціональних послідовностей.

Теорема 1. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається рівномірно на множині A до функції $f(x)$, то вона збігається на цій множині до функції $f(x)$ і в середньому.*

Доведення. З рівномірної збіжності випливає існування для кожного $\varepsilon > 0$ такого числа N, що

$$\left| f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

для всіх $n > N$, $x \in A$. Тоді

$$\int_A \left| f_n(x) - f(x)\right| d\mu \le \varepsilon\mu(A),$$

звідки внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ та скінченності міри $\mu(A)$ і випливає збіжність в середньому. Теорема доведена.

Зауважимо, що *обернене твердження не вірне*. Навіть більше (див. наведений вище приклад), *із збіжності в середньому не випливає навіть збіжності хоч в одній точці множини* A.

Відзначимо також, що *умова рівномірної збіжності тут є суттєвою.* Наприклад, послідовність функцій

$$f_n(x)=\begin{cases} n,\ x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \\ 0,\ x\notin\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

збігається до функції $f(x)=0$ у кожній точці множини $A=(0,1]$. Але при кожному $n\in N$

$$\int_A |f_n(x)-f(x)|d\mu=1.$$

З іншого боку, *ця умова не є необхідною*. Справді, покладаючи у попередньому прикладі

$$f_n(x)=1,\ x\in\left(0,\frac{1}{n}\right),$$

отримаємо послідовність, яка збігається на множині $A=(0,1]$ до функції $f(x)=0$ в середньому, але не збігається рівномірно.

Для встановлення зв'язку між збіжністю в середньому та збіжністю за мірою нам буде необхідне наступне твердження:

Нерівність Чебишова. *Якщо функція* $\varphi(x)\geq 0$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри і число* $c>0$, *то*

$$\mu\{x:x\in A,\varphi(x)\geq c\}\leq\frac{1}{c}\int_A\varphi(x)d\mu.$$

Справді, якщо $A'=\{x:x\in A,\varphi(x)\geq c\}$, то

$$\int_A\varphi(x)d\mu=\int_{A'}\varphi(x)d\mu+\int_{A\backslash A'}\varphi(x)d\mu\geq\int_{A'}\varphi(x)d\mu\geq c\mu(A').$$

А отже,

$$\mu(A')\leq\frac{1}{c}\int_A\varphi(x)d\mu.$$

Наслідок. *Якщо*

$$\int_A|f(x)|d\mu=0,$$

то $f(x)=0$ *майже скрізь на множині* A.

Справді, на підставі нерівності Чебишова

$$\mu\left\{x : x \in A, \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{n}\right\} \leq n\int_A \left|f(x)\right| d\mu = 0$$

при кожному $n \in N$. Тому з півадитивності міри Лебега отримуємо

$$\mu\left\{x : x \in A, f(x) \neq 0\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x : x \in A, \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Теорема 2. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на множині* A *до функції* $f(x)$ *в середньому, то вона збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *і за мірою.*

Доведення. З нерівності

$$\int_A \left|f_n(x) - f(x)\right| d\mu < \varepsilon,$$

справедливої для всіх $n > N(\varepsilon)$, та нерівності Чебишова отримуємо для таких n при кожному $\sigma > 0$, що

$$\mu\left\{x : x \in A, \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \sigma\right\} \leq \frac{1}{\sigma}\int_A \left|f_n(x) - f(x)\right| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то звідси й випливає збіжність $f_n(x)$ до $f(x)$ за мірою. Теорема доведена.

Зауважимо, що *обернене твердження до даної теореми також не вірне.*

Справді, припустивши протилежне, ми отримали би, що, оскільки всяка збіжна майже скрізь послідовність збігається за мірою, то вона мала би збігатися і в середньому. Але, як випливає із сказаного вище, це не так.

Теорема 3. *Якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині A скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на множині* A *до функції* $f(x)$ *в середньому, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *майже скрізь.*

Доведення. На підставі теореми 2 така послідовність буде збігатися на множині A до функції $f(x)$ за мірою. А отже, за теоремою Ріса з неї можна вибрати збіжну до $f(x)$ майже скрізь на множині A підпослідовність. Теорема доведена.

§ 5. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега

З питанням про різні види збіжності функціональних послідовностей тісно пов'язані також питання про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега та про почленне інтегрування функціональних рядів.

Теорема Лебега. *Якщо послідовність функцій* $f_n(x)$ *збігається на множині* A *скінченної міри до функції* $f(x)$ *і*

$$\left|f_n(x)\right| \le \varphi(x)$$

при кожному $n \in N$, *де* $\varphi(x) -$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *функція, то функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *і*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu.$$

Доведення. З нерівності $\left|f_n(x)\right| \le \varphi(x)$ випливає, що також $\left|f(x)\right| \le \varphi(x)$. А отже, на підставі властивості 10 інтеграла Лебега функція $f(x)$ та всі функції $f_n(x)$ інтегровні за Лебегом на множині A. Нехай

$$A_k = \{x : k-1 \le \varphi(x) < k\},\ B_N = \bigcup_{k>N} A_k.$$

Внаслідок $\sigma-$адитивності інтеграла Лебега

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \sum_k \int_{A_k} \varphi(x)d\mu.$$

Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що

$$\int_{B_n} \varphi(x)d\mu = \sum_{k>N}\int_{A_k}\varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Крім того, на множині $A \setminus B_N$ виконується нерівність $\varphi(x) < N$. Цю множину за теоремою Єгорова можна подати у вигляді $C \bigcup D$, де $\mu(D) < \dfrac{\varepsilon}{5N}$, а на множині C послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ рівномірно. Вибравши N так, щоб при $n > N$ виконувалася нерівність

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{5\mu(C)},$$

отримаємо, що

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu\right| \le \left|\int_{B_N} f_n(x)d\mu - \int_{B_N} f(x)d\mu\right| +$$

$$+\left|\int_C f_n(x)d\mu - \int_C f(x)d\mu\right| + \left|\int_D f_n(x)d\mu - \int_D f(x)d\mu\right| \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5\mu(C)} \cdot \mu(C) + \frac{2\varepsilon}{5N} \cdot N = \varepsilon.$$

А оскільки число $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то теорема доведена.

Зауважимо, що *умови теореми Лебега можна дещо послабити, вимагаючи збіжності послідовності функцій* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *та виконання нерівностей* $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ *лише майже скрізь.*

Наслідок. *Якщо послідовність функцій* $f_n(x)$ *збігається майже скрізь на множині* A *скінченної міри до функції* $f(x)$ *і майже скрізь на* A *при кожному* $n \in N$ *виконується нерівність*

$$|f_n(x)| \le M,$$

то функція $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *і*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Справді, функція $\varphi(x) = M$ є інтегровною за Лебегом на довільній множині A скінченної міри.

Теорема Леві. *Нехай на множині* A *скінченної міри*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots,$$

причому функції $f_n(x)$ *інтегровні за Лебегом на множині* A*, а їх інтеграли обмежені в сукупності:*

$$\int_A f_n(x)d\mu \le K.$$

Тоді майже скрізь на множині A *існує скінченна границя*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому функція $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *і*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $f_1(x) \geq 0,$ оскільки загальний випадок зводиться до розгляду функцій $\overline{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$. Розглянемо множини

$$A_n^m = \{x : x \in A, f_n(x) \geq m\}.$$

При кожному фіксованому m справедливі включення

$$A_1^m \subset A_2^m \subset \ldots \subset A_n^m \subset \ldots$$

Нехай

$$A^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^m,\ A' = \bigcap_{m=1}^{\infty} A^m.$$

Тоді з нерівності Чебишова при кожному m отримуємо

$$\mu\left(A_n^m\right) \leq \frac{K}{m}.$$

А отже, з врахуванням неперервності міри Лебега, будемо мати

$$\mu(A') = \mu\{x : x \in A, f_n(x) \to \infty\} = \lim_{m\to\infty} \mu\left(A^m\right) = 0.$$

Це означає, що послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до скінченної границі – функції $f(x)$ майже скрізь на множині A. Розглянемо тепер функцію

$$\varphi(x) = m,\ x \in B_m = \{x : x \in A, m-1 \leq f(x) < m\},\ m \in N.$$

Оскільки на множині

$$C_N = \bigcup_{m=1}^{N} B_m$$

функції $f_n(x)$ та $f(x)$ обмежені і, крім того, $\varphi(x) \leq f(x) + 1$, то

$$\int_{C_N} \varphi(x) d\mu \leq \int_{C_N} f(x) d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_{C_N} f_n(x) d\mu + \mu(A) \leq K + \mu(A).$$

Але тоді при кожному N

$$\int_{C_N} \varphi(x) d\mu = \sum_{m=1}^{N} m\mu(B_m) \leq K + \mu(A).$$

Тому ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\mu(B_m) = \int_A \varphi(x) d\mu$$

буде збіжним. Отже, послідовність функцій $f_n(x)$ майже скрізь на множині A задовольняє умови теореми Лебега, з якої випливає, що

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu.$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що *твердження теореми Леві залишиться справедливим, якщо послідовність функцій* $f_n(x)$ *буде монотонно спадною, а сукупність інтегралів від таких функцій – обмеженою знизу.*

Наслідок. *Якщо* $\varphi_n(x) \ge 0$ *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_A \varphi_n(x)d\mu < \infty,$$

то майже скрізь на множині A *скінченної міри ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ *збіжний і*

$$\int_A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\right)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A \varphi_n(x)d\mu.$$

Для доведення наслідку достатньо розглянути функції

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$$

і скористатися теоремою Леві.

Теорема Фату. *Якщо послідовність невід'ємних інтегровних за Лебегом на множині* A *функцій* $f_n(x)$ *майже скрізь на множині* A *збігається до функції* $f(x)$, *а їх інтеграли обмежені в сукупності:*

$$\int_A f_n(x)d\mu \le K,$$

то функція $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *і*

$$\int_A f(x)d\mu \le K.$$

Доведення. Розглянемо функції $\varphi_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$. Оскільки

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k\ge n}\{x : f_k(x) < c\},$$

то функції $\varphi_n(x)$ вимірні. А із нерівностей $0 \le \varphi_n(x) \le f_n(x)$ випливає їх інтегровність за Лебегом. Крім того,

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots \le \varphi_n(x) \le \ldots,$$

$$\int_A \varphi_n(x)\,d\mu \le \int_A f_n(x)\,d\mu \le K,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Тому, застосовуючи теорему Леві до послідовності функцій $\varphi_n(x)$, отримуємо потрібний результат. Теорема доведена.

Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати, що умови теорем Лебега, Леві та Фату є суттєвими, але не є необхідними.

§ 6. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега

У першому параграфі цього розділу ми розглядали приклад функції Діріхле, яка, як відомо з математичного аналізу, не є інтегровною за Ріманом. Цей приклад показує, що існують навіть обмежені не інтегровні за Ріманом функції, які інтегровні за Лебегом. Покажемо, що навпаки бути не може.

Теорема. *Якщо існує інтеграл*

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

то функція $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a,b]$ *за Лебегом і*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ на 2^n частин точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \quad k = 0,1,\ldots,2^n.$$

і запишемо суми Дарбу

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk} \cdot \frac{b-a}{2^n}$$

та

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk} \cdot \frac{b-a}{2^n},$$

які відповідають такому розбиттю. Тут M_{nk} та m_{nk} – відповідно точні верхня та нижня грані функції $f(x)$ на відрізках $[x_{k-1}, x_k]$. За означенням інтеграла Рімана

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Покладемо

$$\overline{f}_n(x)=M_{nk},\ x\in[x_{k-1},x_k),$$
$$\underline{f}_n(x)=m_{nk},\ x\in[x_{k-1},x_k),$$
$$\overline{f}_n(b)=\underline{f}_n(b)=f(b).$$

Оскільки послідовність функцій $\underline{f}_n(x)$ не спадає, а послідовність функцій $\overline{f}_n(x)$ не зростає і, крім того,

$$\int\limits_{[a,b]}\underline{f}_n(x)d\mu=s_n\le I,\qquad \int\limits_{[a,b]}\overline{f}_n(x)d\mu=S_n\ge I,$$

то на підставі теореми Леві майже скрізь на відрізку $[a,b]$ існують скінченні границі

$$\overline{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\overline{f}_n(x)\ge f(x)$$

та

$$\underline{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\underline{f}_n(x)\le f(x).$$

При цьому

$$\int\limits_{[a,b]}\underline{f}(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]}\underline{f}_n(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}s_n=I,$$
$$\int\limits_{[a,b]}\overline{f}(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]}\overline{f}_n(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}S_n=I.$$

Тому майже скрізь на відрізку $[a,b]$

$$\int\limits_{[a,b]}\left|\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\right|d\mu=\int\limits_{[a,b]}\left(\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\right)d\mu=0.$$

Отже, за наслідком з нерівності Чебишова майже скрізь на цьому відрізку

$$\overline{f}(x)=\underline{f}(x)=f(x).$$

Тому також

$$\int\limits_{[a,b]}f(x)d\mu=I.$$

Теорема доведена.

Наслідок. *Для того, щоб обмежена на відрізку $[a,b]$ функція була інтегровна за Ріманом на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб міра множини точок розриву такої функції на відрізку $[a,b]$ дорівнювала нулю.*

Доведення. Якщо обмежена функція $f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$, то з доведення теореми випливає, що майже скрізь на цьому відрізку $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$. Нехай ця рівність справедлива для $x=x$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$\left|\overline{f}_n(x)-\underline{f}_n(x)\right|<\varepsilon.$$

А отже, на тому проміжку $[x_{k-1},x_k)$, якому належить x, також

$$\sup f(x)-\inf f(x)<\varepsilon.$$

Тому для всіх x з цього проміжку

$$\left|f(x)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Значить, розриви функції $f(x)$ можливі лише в тих точках x, де $\overline{f}(x)\neq\underline{f}(x)$, або ж у точках поділу x_k. Тому множина її точок розриву має міру нуль.

Навпаки, якщо функція на відрізку $[a,b]$ неперервна майже скрізь, то майже скрізь на цьому відрізку $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$. Тому

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\int_{[a,b]}\underline{f}(x)d\mu=\int_{[a,b]}\overline{f}(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

А отже, функція $f(x)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Наслідок доведено.

Дану теорему та наслідок з неї можна використати для практичного обчислення інтегралів Лебега. Розглянемо відповідні приклади:

1. Доведіть, що функція

$$f(x)=\begin{cases}4x, & x\le 1,\\ 3x^2, & x>1,\end{cases}$$

інтегровна за Лебегом на відрізку $[0,2]$ і обчисліть її інтеграл Лебега на цьому відрізку.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0,2]$ і має на цьому відрізку лише одну точку розриву $x=1$, то вона інтегровна на $[0,2]$ за Ріманом, а значить, і за Лебегом. При цьому отримуємо

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu = \int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 4xdx + \int\limits_1^2 3x^2dx = 2x^2\Big|_0^1 + x^3\Big|_1^2 = 9.$$

2. Доведіть, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in Q, \\ 3x^2, & x \notin Q, \end{cases}$$

інтегровна за Лебегом на відрізку $[0,2]$ і обчисліть її інтеграл Лебега на цьому відрізку.

Розв'язання. Функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[0,2]$, але має на цьому відрізку розриви у кожній його точці, крім точок $x=0$ та $x=\frac{4}{3}$. Тому $f(x)$ не інтегровна за Ріманом на відрізку $[0,2]$. Проте еквівалентна до неї неперервна функція $g(x)=3x^2$ є інтегровною на відрізку $[0,2]$ за Ріманом, а значить, і за Лебегом. Тому функція $f(x)$ також інтегровна за Лебегом. При цьому

$$\int\limits_{[0,2]} f(x)d\mu = \int\limits_{[0,2]} g(x)d\mu = \int\limits_0^2 g(x)dx = \int\limits_0^2 3x^2dx = x^3\Big|_0^2 = 8.$$

Зауважимо, що аналогічно може бути обчислений також інтеграл Лебега від функції Діріхле.

§ 7. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми

Встановлений зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега наштовхує на думку, що й інтеграл Лебега можна подати у вигляді границі інтегральної суми.

Розглянемо спочатку таку обмежену вимірну функцію $f(x)$, визначену на множині A скінченної міри, що $c < f(x) < d$. Розіб'ємо відрізок $[c,d]$ на частини точками

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d.$$

Позначимо

$$A_k = \{x : x \in A, \ y_k \le f(x) < y_{k+1}\}, \ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Такі множини вимірні, попарно не перетинаються і, крім того,

$$A = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k, \quad \mu(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_k).$$

Назвемо числа

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu\left(A_k\right)$$

та

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu\left(A_k\right)$$

нижньою та верхньою сумами Лебега, які відповідають даному розбиттю відрізка $[c,d]$ на частини. Покладаючи $\lambda=\max\left(y_{k+1}-y_k\right)$, будемо мати

$$0\leq S-s\leq \lambda\mu(A).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що *при додаванні нових точок поділу нижня сума Лебега не зменшується, а верхня – не збільшується.* Звідси як наслідок легко отримати, що *будь-яка з верхніх сум Лебега не менша будь-якої нижньої суми*, зокрема, і такої, що відповідає іншому розбиттю. Отже, існують точні грані таких сум по всіх можливих розбиттях відрізка $[c,d]$ на частини: $\overline{s}=\sup\{s\}$ та $\underline{S}=\inf\{S\}$, причому $s\leq\overline{s}\leq\underline{S}\leq S.$ Тому також $0\leq\underline{S}-\overline{s}\leq\lambda\mu(A).$ А оскільки $\lambda>0$ можна вибрати довільно, то $\underline{S}=\overline{s}.$ Спільне значення цих точних граней називають *інтегралом Лебега функції* $f(x)$ на множині A і позначають

$$\int_A f(x)d\mu.$$

Безпосередньо з означення випливає, що *всяка обмежена вимірна на множині скінченної міри функція є на цій множині інтегровною за Лебегом.*

Очевидно також, що

$$\int_A f(x)d\mu=\lim_{\lambda\to 0}s=\lim_{\lambda\to 0}S.$$

Іншими словами, інтеграл Лебега є границею інтегральних сум Лебега.

Зауважимо, що *значення такого інтеграла не залежить від вибору чисел* c *та* d. Справді, нехай $c<f(x)<d^*<d.$ Тоді, включаючи точку $d^*=x_m$ до точок поділу відрізка $[c,d]$, отримаємо, що $\mu\left(A_k\right)=0$ для всіх $k\geq m.$ А отже, відповідні їм

доданки, які входитимуть у суми Лебега, теж будуть нулями. Таким чином, ці суми, а з ними й інтеграли, будуть однаковими для відрізків $\left[c,d\right]$ та $\left[c,d^*\right]$. Аналогічно встановимо їх незалежність від c.

Відзначимо також, що і *за новим означенням ми прийдемо до того ж значення інтеграла Лебега, яке ми мали за означенням, сформульованим у першому параграфі цього розділу*. Справді, розглядаючи при кожному $n \in N$ функцію $f_n\left(x\right)$, яка набуває значень y_k на множинах A_k відповідно, ми отримаємо послідовність простих інтегровних за Лебегом на множині A функцій, яка рівномірно збігається до функції $f\left(x\right)$ при $\lambda \to 0$. При цьому послідовність інтегралів

$$\int_A f_n\left(x\right) d\mu = s$$

збігається до інтеграла

$$\int_A f\left(x\right) d\mu.$$

Узагальнимо тепер введене тут поняття інтеграла на випадок необмежених функцій.

Нехай вимірна функція $f\left(x\right) \geq 0$ не обмежена зверху. Розглянемо послідовність функцій

$$f_n\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right), & f\left(x\right) \leq n, \\ n, & f\left(x\right) > n. \end{cases}$$

Кожна з цих функцій вимірна і обмежена, а отже, інтегровна за Лебегом. Крім того,

$$f_1\left(x\right) \leq f_2\left(x\right) \leq \ldots \leq f_n\left(x\right) \leq \ldots$$

Тому також

$$\int_A f_1\left(x\right) d\mu \leq \int_A f_2\left(x\right) d\mu \leq \ldots \leq \int_A f_n\left(x\right) d\mu \leq \ldots,$$

звідки випливає існування границі

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n\left(x\right) d\mu.$$

Якщо така границя є скінченною, то *не обмежену зверху функцію* $f\left(x\right) \geq 0$ називають *інтегровною за Лебегом на множині* A і покладають

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu.$$

Якщо ж $f(x)-$ довільна вимірна необмежена функція, то представимо її у вигляді

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

де

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

При цьому *функцію* $f(x)$ вважають *інтегровною за Лебегом на множині* A, якщо інтегровними за Лебегом на цій множині є кожна з функцій $f_+(x) \ge 0$ та $f_-(x) \ge 0$, і покладають

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A f_+(x)d\mu - \int_A f_-(x)d\mu.$$

Зауважимо, що на підставі рівності

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

функція $f(x)$ *буде інтегровною за Лебегом на множині* A *тоді і тільки тоді, коли інтегровною за Лебегом на цій множині є функція* $|f(x)|$. Зрозуміло, що при цьому

$$\int_A |f(x)|d\mu = \int_A f_+(x)d\mu + \int_A f_-(x)d\mu.$$

Детальніше про такий підхід до побудови інтеграла Лебега та вивчення його властивостей дивись, наприклад, в $[12]$.

§ 8. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри

Вивчаючи властивості інтеграла Лебега, ми досі вважали, що мова йде про множини скінченної міри. Поширимо тепер поняття інтегровності за Лебегом і на множини нескінченної міри.

Оскільки міра Лебега є $\sigma-$скінченною, то кожна така множина може бути подана у вигляді

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ \mu(A_n) < \infty.$$

Якщо при цьому мають місце включення

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots,$$

то послідовність множин A_n називається *вичерпною послідовністю* для множини A.

Вимірна функція $f(x)$, визначена на множині A нескінченної міри, називається *інтегровною за Лебегом* на цій множині, якщо вона інтегровна за Лебегом на кожній вимірній скінченної міри підмножині множини A і для кожної вичерпної послідовності (A_n) границя

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)d\mu$$

є скінченною і не залежить від вибору цієї послідовності. Таку границю називають *інтегралом Лебега функції* $f(x)$ *по множині* A *нескінченної міри* і позначають

$$\int_A f(x)d\mu.$$

Розглянемо приклад обчислення такого інтеграла. Нехай

$$A=[1,+\infty),\ f(x)=\frac{1}{x^2},\quad A_n=[a_n,b_n],\, a_n\to 1,\ b_n\to+\infty.$$

Оскільки функція $f(x)$ як неперервна є інтегровною за Лебегом на довільній вимірній підмножині скінченної міри, то отримуємо, що

$$\int_{[1,+\infty)}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{[a_n,b_n]}\frac{1}{x^2}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=1.$$

Більшість властивостей, отриманих нами для інтеграла Лебега на множині скінченної міри, залишаються справедливими і для інтегралів Лебега по множинах нескінченної міри. Зокрема, справедливими залишаться теореми Лебега, Леві та Фату про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Але, наприклад, наслідок з теореми Лебега уже буде невірним. Це пов’язано з тим, що на множині нескінченної міри жодна функція, яка дорівнює відмінній від нуля константі, не є інтегровною за Лебегом.

З цієї ж причини на множині нескінченної міри не будуть виконуватися перша, четверта та сьома з основних властивостей інтеграла Лебега, встановлені нами у параграфі 2 для множин скінченної міри.

На множині нескінченної міри з рівномірної збіжності не випливає збіжності в середньому. Наприклад, послідовність функцій

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n,\end{cases}$$

збігається рівномірно до функції $f(x)=0$ на всій числовій прямій, але не збігається в середньому.

Проте із збіжності послідовності в середньому випливатиме її збіжність до тієї ж границі за мірою. Це випливає з нерівності Чебишова, яка справедлива і для функцій, інтегровних за Лебегом на множинах нескінченної міри.

Що ж стосується порівняння інтегралів Рімана та Лебега по нескінченному проміжку, то інтеграл Рімана в такому разі слід розуміти лише в невласному сенсі. Якщо такий інтеграл збігається абсолютно, то інтеграл Лебега теж існуватиме і дорівнюватиме відповідному невласному інтегралу Рімана.

Якщо ж невласний інтеграл Рімана не є абсолютно збіжним, то інтеграл Лебега по такій множині нескінченної міри не існує. Це пов'язано з тим, що разом з функцією $f(x)$ інтегровною за Лебегом має бути і функція $|f(x)|$.

§ 9. Простори сумовних функцій

Вивчаючи властивості інтеграла Лебега, ми встановили, що разом з функцією $f(x)$ інтегровним за Лебегом на множині A буде і добуток цієї функції на довільну сталу. Крім того, разом з двома такими функціями інтегровною за Лебегом на множині A буде і їхня сума. Зрозуміло, що ці властивості залишаються справедливими і для множин нескінченної міри.

Таким чином, *для довільної вимірної множини X сукупність усіх інтегровних за Лебегом на X функцій утворює лінійний простір*. Такий простір позначають $L_1(X)$.

Лінійний простір L називають *нормованим простором*, якщо кожному елементу $f\in L$ поставлено у відповідність таке дійсне число $\|f\|$, що виконуються умови:

1. $\|f\| \geq 0$, причому $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

При цьому число $\|f\|$ називають *нормою елемента* f.

Задамо таку норму у лінійному просторі $L_1(X)$ формулою

$$\|f\| = \int_X |f(x)| d\mu.$$

З властивостей інтеграла Лебега нескладно переконатися, що при цьому друга та третя умови норми виконані, але перша умова виконується лише частково. Зокрема, за наслідком з нерівності Чебишова з $\|f\| = 0$ отримуємо тільки, що $f(x) \sim 0$.

У зв'язку з цим надалі будемо розглядати не самі функції, а класи еквівалентних між собою функцій. Зокрема, клас $f = 0$ буде складатися з функцій, які майже скрізь на X дорівнюють нулю. При цьому будемо враховувати, що для кожної інтегровної за Лебегом функції еквівалентна до неї функція теж інтегровна за Лебегом, причому їх інтеграли Лебега співпадають.

Таким чином, норму кожного такого класу f можна визначити за записаною вище формулою, вибираючи в ролі функції $f(x)$ довільного представника цього класу. Отриманий при цьому нормований простір також позначають $L_1(X)$.

Зауважимо, що аналогічно можна отримати простір $L_1(X, \mu)$ класів еквівалентних між собою функцій, інтегровних на X за довільною повною $\sigma-$адитивною мірою μ.

Інший важливий нормований простір отримаємо, розглядаючи функції, *інтегровні з квадратом*, тобто такі, що

$$\int_X f^2(x) d\mu < \infty.$$

Оскільки

$$|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right],$$

то *добуток довільних інтегровних з квадратом функцій є інтегровною за Лебегом на множині X функцією*.

Зокрема, якщо $\mu(X) < \infty$, то, покладаючи $g(x) = 1$, звідси отримаємо інтегровність за Лебегом інтегровної з квадратом функції $f(x)$. Проте у випадку $\mu(X)=\infty$ такий висновок буде невірним. Наприклад, функція

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

не є інтегровною за Лебегом на R, хоч вона інтегровна на R з квадратом. Зауважимо також, що, навпаки, з інтегровності функції $f(x)$ її інтегровність з квадратом не випливає. Читач легко переконається в цьому на прикладі функції

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in(0,1).$$

З рівності

$$\int_X(\alpha f(x))^2\,d\mu=\alpha^2\int_X f^2(x)\,d\mu$$

та нерівності

$$(f(x)+g(x))^2\le f^2(x)+2|f(x)g(x)|+g^2(x)$$

отримуємо, що *сукупність усіх інтегровних з квадратом на вимірній множині* X *функцій утворює лінійний простір*. Цей простір позначають $L_2(X)$.

Розглядаючи тут, як і у випадку $L_1(X)$, класи еквівалентних між собою функцій, визначимо норму за формулою

$$\|f\|=\sqrt{\int_X f^2(x)\,d\mu}.$$

Виконання першої та другої умов для норми є очевидними. А для обґрунтування третьої умови доведемо спочатку *інтегральну нерівність Коші-Буняковського:*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,d\mu\right)^2\le\int_X f^2(x)\,d\mu\cdot\int_X g^2(x)\,d\mu.$$

Справедливість такої нерівності безпосередньо випливає з того, що дискримінант функції

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2\int_X f^2(x)d\mu+2\lambda\int_X f(x)g(x)d\mu+\int_X g^2(x)d\mu=$$

$$=\int_X(\lambda f(x)+g(x))^2\,d\mu\ge 0$$

не може бути додатним, а при $f(x)\sim 0$ вона очевидна.

З врахуванням доведеної нерівності отримуємо, що також

$$\sqrt{\int_X \left(f(x) + g(x) \right)^2 d\mu} \le \sqrt{\int_X f^2(x) d\mu} + \sqrt{\int_X g^2(x) d\mu},$$

тобто й третя умова норми виконується.

Таким чином, ми отримали нормований простір, який позначають $L_2(X)$. Відзначимо, що аналогічно можна було б дістати і простір $L_2(X,\mu)$ класів еквівалентних між собою функцій, інтегровних з квадратом на X за довільною повною $\sigma-$адитивною мірою μ.

Збіжність за нормою такого простору називають *збіжністю у середньому квадратичному.*

Вкажемо також на те, що у випадку $\mu(X) < \infty$ з інтегральної нерівності Коші-Буняковського випливає нерівність

$$\left(\int_X f(x) d\mu \right)^2 \le \mu(X) \int_X f^2(x) d\mu.$$

З останньої нерівності, зокрема отримуємо, що *при* $\mu(X) < \infty$ *із збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *у середньому квадратичному випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому.*

Справді, у такому разі із нерівності

$$\sqrt{\int_X \left(f_n(x) - f(x) \right)^2 d\mu} < \varepsilon$$

випливатиме, що

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon \sqrt{\mu(X)}.$$

Пропонуємо читачам самостійно довести, що *при* $\mu(X) < \infty$ *із рівномірної збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому квадратичному.*

Зауважимо також, що у загальному випадку можна розглядати функції, інтегровні зі степенем p, і простори $L_p(X)$ та $L_p(X,\mu)$ при довільному дійсному $p \ge 1$ з нормою

$$\| f \| = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

§ 10. Поняття про добутки мір та їх подання через інтеграли мір перерізів

Розглянемо тепер питання, пов'язані зі зведенням інтеграла Лебега до повторних інтегралів. Для цього нам буде потрібне поняття добутку мір.

Почнемо з простого прикладу: площа, а значить, і міра прямокутника дорівнює добутку його лінійних вимірів. А оскільки півкільце прямокутників на площині є прямим добутком півкілець відрізків на прямих, то плоску міру m, визначену на цьому півкільці, можна трактувати як добуток лінійних мір m_x та m_y, визначених на півкільцях відрізків на осях OX та OY відповідно. Подібну ситуацію маємо і при обчисленні об'єму прямокутного паралелепіпеда.

У загальному випадку поняття *добутку мір* вводиться так:

Нехай на півкільцях $G_1, G_2, ..., G_n$ задано міри $m_1, m_2, ..., m_n$ відповідно. Тоді на півкільці

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$$

добуток цих мір – міру

$$m = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$$

визначають за формулою

$$m(A) = m_1(A_1) \times m_2(A_2) \times ... \times m_n(A_n),$$

де

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n,\ A_k \in G_k,\ k = 1, 2, ..., n.$$

Зрозуміло, що $m(A) \geq 0$. Доведемо також адитивність функції $m(A)$. Це достатньо зробити для $n = 2$. Отже, нехай

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^k = \bigcup_k \left(B_1^k \times B_2^k\right),$$

де множини B^k попарно не перетинаються. Розглянемо скінченні розклади

$$B_1^k = \bigcup_i C_1^{ik}, \quad B_2^k = \bigcup_j C_2^{jk}$$

і позначимо

$$C_1^i = \bigcup_k C_1^{ik}, \quad C_2^j = \bigcup_k C_2^{jk}.$$

Тоді

$$A_1 = \bigcup_i C_1^i, \quad A_2 = \bigcup_j C_2^j,$$

$$m(A) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \sum_i \sum_j m_1\left(C_1^i\right)m_2\left(C_2^j\right) =$$

$$= \sum_k \sum_i \sum_j m_1\left(C_1^{ik}\right)m_2\left(C_2^{jk}\right) = \sum_k m_1\left(B_1^k\right)m_2\left(B_2^k\right) = \sum_k m\left(B^k\right).$$

Таким чином, функція $m(A)$ справді є мірою.

Як доведено в $[7]$, ст. 209, *у випадку* $\sigma-$*адитивності мір* $m_k(A_k)$, $k = 1,2,...,n$, *міра* $m(A)$ *також буде* $\sigma-$*адитивною.*

Що ж стосується добутку $\sigma-$адитивних мір $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, визначених на $\sigma-$алгебрах множин, то під їх добутком μ розуміють лебегове продовження добутку $\mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_n$ і записують

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n.$$

Зокрема, для міри Лебега на площині отримаємо $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$.

Якщо ж $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = \mu$, то прямий добуток таких мір називають $n-$*ним степенем міри* μ і позначають μ^n.

З курсу математичного аналізу відомо, що площа $S(A)$ квадрованої фігури A, обмеженої лініями

$$x = a,\ x = b,\ y = \varphi(x),\ y = \psi(x),\ a \le x \le b,$$

визначається за формулою

$$S(A) = \int_a^b \left|\varphi(x) - \psi(x)\right| dx.$$

Введемо позначення

$$A_x = \{y : (x,y) \in A\}, \quad x - \text{фіксоване},$$

$$A_y = \{x : (x,y) \in A\}, \quad y - \text{фіксоване}.$$

Оскільки

$$\mu_y(A_x) = \left|\varphi(x) - \psi(x)\right|,\ x \in [a,b],$$

$$\mu_y(A_x) = \mu_y(\varnothing) = 0,\ x \notin [a,b],$$

то, враховуючи зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега, отримаємо

$$\mu(A) = \int_a^b \left|\varphi(x) - \psi(x)\right| dx = \int_{[a,b]} \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x,$$

де X – вся числова пряма OX.

Міркуючи аналогічно, приходимо також до рівності

$$\mu(A)=\int_Y \mu_x\left(A_y\right)d\mu_y,$$

де Y – вся числова пряма OY.

У загальному випадку справедливе (див. $[7]$, ст. 270) наступне твердження:

Теорема. *Якщо $\sigma-$адитивні міри μ_x та μ_y, визначені на $\sigma-$алгебрах підмножин X та Y відповідно, є повними, а міра $\mu=\mu_x\otimes\mu_y$, то для довільної $\mu-$вимірної множини $A\in X\times Y$ виконується рівність*

$$\mu(A)=\int_X \mu_y\left(A_x\right)d\mu_x=\int_Y \mu_x\left(A_y\right)d\mu_y.$$

Звертаємо увагу читачів на те, що у цій рівності X та Y не обов’язково мають бути числовими прямими OX та OY.

З даної теореми отримуємо такий важливий ***наслідок:*** *якщо $f(x)-$ невід’ємна інтегровна за Лебегом на μ_x-вимірній множині M функція, і множина*

$$A=\{(x,y):x\in M,0\le y\le f(x)\},$$

то

$$\mu(A)=\int_M f(x)d\mu_x.$$

Справді, достатньо лише врахувати рівність

$$\mu_y\left(A_x\right)=\begin{cases} f(x), & x\in M,\\ 0, & x\notin M,\end{cases}$$

де μ_y- лінійна міра на числовій прямій OY, і скористатися твердженням теореми.

§ 11. Теорема Фубіні

Розглянемо прямий добуток $U=X\times Y\times Z$, в якому множина Z є числовою прямою. Припустимо, що на множинах X,Y,Z визначені повні $\sigma-$адитивні міри μ_x,μ_y,μ_z відповідно, і визначимо на U міру

$$\mu_u=\mu_x\otimes\mu_y\otimes\mu_z.$$

Якщо $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$, $\lambda = \mu_y \otimes \mu_z$, то також будемо мати

$$\mu_u = \mu \otimes \mu_z = \mu_x \otimes \lambda.$$

Теорема Фубіні. *Якщо повні міри μ_x та μ_y визначені на $\sigma-$алгебрах є $\sigma-$адитивними, міра $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$, а функція $f(x,y)$ інтегровна за мірою μ на множині $A \subset X \times Y$, то*

$$\int_A f(x,y)d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Доведення. Нехай $U = X \times Y \times Z$, де $Z-$ числова пряма. Якщо $f(x,y) \ge 0$, то розглянемо таку множину $W \subset U$, що

$$W = \{(x,y,z) : (x,y) \in A, 0 \le z \le f(x,y)\}.$$

За наслідком з попереднього параграфа отримуємо

$$\mu_u(W) = \int_A f(x,y)d\mu.$$

Позначимо $\lambda = \mu_y \otimes \mu_z$, де μ_z – лінійна міра Лебега на Z, та

$$W_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in W\},$$

де x фіксоване. Тоді за теоремою з попереднього параграфа будемо мати

$$\mu_u(W) = \int_X \lambda(W_x)d\mu_x,$$

причому за наслідком з цієї теореми

$$\lambda(W_x) = \int_{A_x} f(x,y)d\mu_y.$$

З трьох останніх рівностей для мір $\mu_u(W)$ та $\lambda(W_x)$ випливає, що

$$\int_A f(x,y)d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y \right) d\mu_x.$$

Аналогічно доводимо, що також

$$\int_A f(x,y)d\mu = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Загальний випадок зводиться до доведеного з врахуванням властивостей інтеграла Лебега та рівностей

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y),$$

$$f_+(x,y)=\frac{1}{2}\left(\left|f(x,y)\right|+f(x,y)\right),$$

$$f_-(x,y)=\frac{1}{2}\left(\left|f(x,y)\right|-f(x,y)\right).$$

Теорема доведена.

Вона дає змогу зводити кратні інтеграли Лебега до повторних. При цьому самі простори X та Y не обов'язково мають бути одновимірними, а міри μ_x, μ_y – лінійними.

Зауваження 1. *Твердження теореми Фубіні автоматично включає в себе існування обох внутрішніх інтегралів*

$$\int_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y \;\; \text{та} \;\; \int_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x$$

при майже всіх x та y відповідно.

Для порівняння відзначимо, що для інтеграла Рімана (див. [18], ст. 252) існування аналогічних внутрішніх інтегралів необхідно було вимагати додатково.

Зауваження 2. *З існування повторних інтегралів*

$$\int_X\left(\int_{A_x} f(x,y)\,d\mu_y\right)d\mu_x \;\; \text{та} \;\; \int_Y\left(\int_{A_y} f(x,y)\,d\mu_x\right)d\mu_y$$

не випливає рівності таких інтегралів.

Справді, якщо

$$X=Y=[0,1],$$

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\;\; f(0,0)=0,$$

то

$$\int_{[0,1]} f(x,y)d\mu_y=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)d\mu_y\right)d\mu_x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

А оскільки $f(x,y)=-f(y,x)$, то

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)d\mu_x\right)d\mu_y=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

Зауваження 3. *З існування та рівності повторних інтегралів не випливає інтегровності функції* $f(x,y)$ *на множині* A *за мірою* μ.

Справді, якщо

$$X = Y = [-1,1],$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \; f(0,0) = 0,$$

то при $y \neq 0$ та $x \neq 0$ відповідно

$$\int_{[-1,1]} f(x,y) d\mu_x = \int_{[-1,1]} f(x,y) d\mu_y = 0.$$

Тому

$$\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y) d\mu_x \right) d\mu_y = 0.$$

Але інтеграл Лебега такої функції $f(x,y)$ на множині $A = X \times Y$ не існує, бо, припустивши протилежне, ми отримали би, що

$$\int_A |f(x,y)| d\mu \geq \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{|\cos\varphi \sin\varphi|}{\rho} d\varphi = 2\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} = +\infty.$$

Зауваження 4. *Якщо існує хоч один з повторних інтегралів*

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x,y)| d\mu_y \right) d\mu_x \quad \text{чи} \quad \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x,y)| d\mu_x \right) d\mu_y,$$

то функція $f(x,y)$ *інтегровна на множині* A *за мірою* μ.

Нехай, наприклад,

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x,y)| d\mu_y \right) d\mu_x = M.$$

Розглянемо функції $f_n(x,y) = \min\{|f(x,y)|, n\}$. Вони вимірні, обмежені, а отже, інтегровні на множині A за мірою μ. За теоремою Фубіні

$$\int_A f_n(x,y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f_n(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x \leq M.$$

Оскільки такі функції утворюють монотонно зростаючу послідовність, яка майже скрізь на A збігається до $|f(x,y)|$, то за теоремою Леві функція $\left|f(x,y)\right|$ інтегровна на A за мірою μ. А отже, такою буде і функція $f(x,y)$. Зрозуміло, що для неї виконуватиметься твердження теореми Фубіні.

§ 12. Поняття невизначеного інтеграла Лебега

У параграфі 3 цього розділу ми вже розглядали функцію множини вигляду

$$\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu.$$

Якщо $f(x)-$ довільна інтегровна на просторі X за $\sigma-$адитивною мірою μ функція, то функція $\Phi(A)$ визначена для всіх вимірних множин $A\subset X$. Її називають *невизначеним інтегралом Лебега функції* $f(x)$.

Нехай тепер $X-$ відрізок числової прямої, $A=[a,x]\subset X$, $\mu-$ лінійна міра Лебега. Якщо $f(x)-$ довільна інтегровна за Лебегом на множині X функція, то функція $\Phi(A)$ набуває вигляду

$$\Phi(A)=\int_{[a,x]} f(t)d\mu=F(x)$$

і є функцією однієї незалежної змінної x. Зокрема, якщо $f(x)$ на відрізку X інтегровна за Ріманом, то також

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Враховуючи відомі властивості інтеграла Рімана як функції верхньої межі, поставимо питання про виконання для інтегровних за Лебегом на множині X функцій $f(x)$ наступних рівностей:

1. $$\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f(t)d\mu=f(x),$$
2. $$\int_{[a,b]} f'(t)d\mu=f(b)-f(a).$$

Зрозуміло, що перша з цих рівностей справедлива для кожної неперервної, а друга – для кожної неперервно диференційовної функції $f(x)$, оскільки при виконанні таких умов вони були справедливими для відповідних інтегралів Рімана.

З іншого боку, ми не можемо очікувати виконання цих рівностей для довільних інтегровних за Лебегом функцій. Зокрема, якщо функція $f(x)$ не є неперервною, то рівність вигляду 1 у загальному випадку не виконується навіть для інтеграла Рімана.

А, наприклад, функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2],\end{cases}$$

майже скрізь (крім точки $x=1$) на відрізку $[0,2]$ має інтегровну за Лебегом похідну $f'(x)=0$, але не задовольняє рівність 2.

Розглянемо дещо складніший приклад:

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2},\ x\neq 0,\ \ f(0)=0.$$

На відрізку $[0,1]$ ця функція неперервна, а отже, інтегровна за Лебегом. Крім того, скрізь на цьому відрізку вона має скінченну похідну

$$f'(x)=2x\left(\cos\frac{\pi}{x^2}+\frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x^2}\right),\ x\neq 0,\ \ f'(0)=0.$$

Припустивши для $f(x)$ виконання рівності 2, ми отримали би

$$\int\limits_{[\alpha_n,\beta_n]} f'(t)d\mu=\beta_n^2\cos\frac{\pi}{\beta_n^2}-\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{\alpha_n^2}$$

для кожного відрізка $[\alpha_n,\beta_n]\subset[0,1]$. Покладаючи тут

$$\alpha_n=\sqrt{\frac{2}{4n+1}},\ \beta_n=\sqrt{\frac{1}{2n}},$$

будемо мати

$$\int\limits_{[\alpha_n,\beta_n]} f'(t)d\mu=\frac{1}{2n}.$$

Позначимо

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]\subset[0,1].$$

Оскільки такі відрізки не перетинаються, то

$$\int_A |f'(t)|d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$$

А отже, функція $f'(x)$ не може бути інтегровною за Лебегом на відрізку $[0,1]$.

Як показують наведені тут приклади, рівності 1 та 2 виконуються не для всіх інтегровних за Лебегом функцій. Тому поставимо завдання – визначити класи таких функцій, для яких ці рівності будуть справедливими.

Зауваживши, що у випадку $f(x) \geq 0$ функція $F(x)$ є монотонно неспадною, представимо цю функцію у загальному випадку у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій

$$F(x) = \int_{[a,x]} f_+(t)d\mu - \int_{[a,x]} f_-(t)d\mu,$$

де

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| + f(x)\right), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right).$$

Таким чином, для вивчення властивостей невизначеного інтеграла Лебега на числовій прямій є необхідність детальніше зупинитися на аналізі властивостей монотонних функцій.

§ 13. Монотонні функції та їх властивості

Функція $f(x)$, визначена на деякому відрізку числової прямої, називається *монотонно неспадною*, якщо для будь-яких $x_1 < x_2$ з цього відрізка виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$. Аналогічно визначають *монотонно незростаючу* функцію, вимагаючи виконання протилежної нерівності $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Нагадаємо ще й наступні поняття з математичного аналізу, якими ми будемо оперувати надалі. Позначимо

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна зліва* в точці x_0. А якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то $f(x)$ в даній точці буде *неперервною справа*. Якщо ж обидві ці рівності виконані одночасно, то функцію $f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0. Зрозуміло, що на кінцях відрізка мова може йти лише про односторонню неперервність.

Якщо границі $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$ скінченні і рівні між собою, але не дорівнюють $f(x_0)$, то кажуть, що у точці x_0 функція $f(x)$ має *усувний розрив*. Якщо ж такі границі скінченні, але не рівні між собою, то вважають, що у точці x_0 функція $f(x)$ має *неусувний розрив першого роду.*

Різницю $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ називають *стрибком* функції $f(x)$ в точці x_0. Можуть розглядатися також стрибки функції $f(x)$ в точці x_0 лише зліва чи лише справа, які відповідно дорівнюють $f(x_0)-f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)-f(x_0)$. Зокрема, це буде доцільним у випадку, коли x_0 є кінцем відрізка.

І, нарешті, якщо хоч одна з таких границь не існує або є нескінченною, то говорять, що у точці x_0 функція $f(x)$ має *розрив другого роду.*

Встановимо деякі властивості монотонних функцій:

1. *Всяка монотонно неспадна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ є обмеженою і вимірною, а отже, інтегровною за Лебегом на цьому відрізку.*

Справді, з монотонності функції $f(x)$ випливає, що

$$f(a)\le f(x)\le f(b)$$

для всіх $x\in[a,b]$.

Розглянемо тепер множину

$$M[f<c]=\{x: f(x)<c\}.$$

Якщо вона не порожня, то позначимо

$$d=\sup_{x\in M[f<c]}\{x\}.$$

З монотонності функції $f(x)$ отримуємо, що при цьому $M[f<c]$ буде або відрізком $[a,d]$, або проміжком $[a,d)$. Тому функція $f(x)$ вимірна.

І, нарешті, вона інтегровна на $[a,b]$ за Лебегом як і кожна вимірна обмежена на такому відрізку функція.

2. *Монотонно неспадна на відрізку* $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *може мати на цьому відрізку лише розриви першого роду.*

Справді, якщо $x_0 \neq a,$ то на відрізку $[a,x_0]$ монотонно неспадна і обмежена зверху числом $f(x_0)$. А отже, за відомою теоремою з математичного аналізу існує скінченна границя $f(x_0-0)$. Аналогічно встановлюємо існування скінченної границі $f(x_0+0)$, якщо $x_0 \neq b.$ В такому разі враховуємо, що на відрізку $[x_0,b]$ функція $f(x)$ монотонно неспадна і обмежена числом $f(x_0)$ знизу.

Зауважимо, що *у кожній внутрішній точці* x_0 *цього відрізка такий розрив буде неусувним*, бо інакше це суперечило б монотонності функції $f(x)$ на одному з відрізків $[a,x_0]$ чи $[x_0,b]$.

3. *Множина точок розриву монотонно неспадної на відрізку* $[a,b]$ *функції* $f(x)$ *не більш як зліченна.*

Нехай $A-$ множина точок розриву монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$,

$$A_n = \left\{ x_0 : x_0 \in (a,b), f(x_0+0) - f(x_0-0) > \frac{1}{n} \right\},\ n \in N.$$

Оскільки сума стрибків монотонно неспадної функції не перевищує $f(b)-f(a)$, то кожна з множин A_n є скінченною. Тому множина

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{a,b\}$$

не більш як зліченна.

Зауважимо, що *доведені тут властивості справедливі і для монотонно незростаючих функцій*.

Окремо виділимо один *важливий клас монотонно неспадних функцій – функції стрибків.*

Нехай на відрізку $[a,b]$ задана скінченна або зліченна множина точок $\{x_n\}$ і кожній точці x_n цієї множини поставлене у відповідність додатне число h_n, причому $\sum_n h_n < \infty$. Функцію

$$h(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

називають *функцією стрибків*.

Зрозуміло, що така функція є монотонно неспадною на відрізку $[a,b]$, причому $h(a)=0$. Крім того, для кожної точки $x \in (a,b]$

$$h(x-0)=\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n = \sum_{x_n < x} h_n = h(x),$$

бо кожне $x_n < x$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$ задовольняє також нерівність $x_n < x-\varepsilon$. Тому $h(x)$ у кожній такій точці є неперервною зліва. Аналогічно доводимо неперервність справа для всіх точок $x \neq x_n$. Якщо ж $x = x_k \neq b$ при деякому k, то отримуємо

$$h(x_k+0)-h(x_k)=\sum_{x_n \le x_k} h_n - \sum_{x_n < x_k} h_n = h_k.$$

У загальному випадку функції стрибків можуть мати доволі складну структуру. Зокрема, якщо $\{x_n\}$ – множина раціональних чисел відрізка $[a,b]$, а $h_n = \dfrac{1}{2^n}$, то отримуємо приклад функції, неперервної у всіх ірраціональних та розривної справа у всіх раціональних точках цього відрізка. Якщо ж елементи множини $\{x_n\}$ утворюють монотонно зростаючу послідовність, то такі функції стрибків називають *східчастими функціями*.

Теорема. *Всяку монотонно неспадну неперервну зліва на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$ можна подати як суму неперервної монотонно неспадної функції та функції стрибків.*

Доведення. За властивістю 3 множина точок розриву функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ не більш як зліченна. Позначимо її $\{x_n\}$. Нехай h_n – стрибки функції $f(x)$ у точках x_n відповідно. Зрозуміло, що

$$\sum_n h_n \le f(b)-f(a) < \infty.$$

Визначимо функції

$$h(x)=\sum_{x_n < x} h_n, \quad \varphi(x)=f(x)-h(x).$$

Перша з них є вже знайомою нам функцією стрибків. Що ж стосується функції $\varphi(x)$, то при $a \le x' < x'' \le b$ отримуємо

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=\left(f(x'')-f(x')\right)-\sum_{x'\le x_n<x''}h_n\ge 0.$$

Отже, така функція є монотонно неспадною. Крім того, вона неперервна у всіх точках $x\ne x_n$ як різниця двох неперервних функцій, а у точках $x=x_n$ з аналогічної причини є неперервною зліва. Оскільки ж

$$\varphi(x_n+0)-\varphi(x_n)=\left(f(x_n+0)-f(x_n)\right)-\left(h(x_n+0)-h(x_n)\right)=h_n-h_n=0,$$

то в цих точках $\varphi(x)$ буде неперервною і справа. Отже, остаточно маємо потрібне представлення

$$f(x)=\varphi(x)+h(x).$$

Наприклад, для функції

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-1,0],\\ x+2, & x\in(0,1],\end{cases}$$

отримаємо

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in[-1,0],\\ x, & x\in(0,1],\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 2, & x\in(0,1].\end{cases}$$

§ 14. Теорема Лебега про похідну монотонної функції

Як відомо з курсу математичного аналізу, *похідною функції* $f(x)$ *в точці* x_0 називають границю відношення

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

при $x\to x_0$ і позначають $f'(x_0)$. Якщо така границя є скінченною, то функцію $f(x)$ називають *диференційовною в точці* x_0.

Зрозуміло, що для диференційовності функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб були скінченними і рівними між собою границі такого відношення при $x\to x_0-0$ та $x\to x_0+0$, які відповідно називають *лівосторонньою та правосторонньою похідними*.

У загальному випадку розглядають так звані *похідні числа*, які є точними верхніми (Λ_- та Λ_+) і точними нижніми (λ_- та λ_+)

границями такого відношення при $x \to x_0 - 0$ та $x \to x_0 + 0$ відповідно. Зрозуміло, що завжди $\lambda_- \le \Lambda_-$ та $\lambda_+ \le \Lambda_+$. Якщо ж всі ці похідні числа скінченні і рівні між собою, то функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0.

Нехай

$$h(x) = \sum_{x_n < x} h_n -$$

функція стрибків, а точка $x_0 \ne x_n$. Тоді для кожного фіксованого n як зліва, так і справа від x_0 можна вибрати x достатньо близько до x_0, щоб нерівності $x_n < x$ та $x_n < x_0$ виконувалися чи відповідно не виконувалися одночасно. Звідси випливає, що $h'(x_0) = 0$.

Таким чином, *функція стрибків майже скрізь на відрізку* $[a,b]$ *має похідну* $h'(x) = 0$, крім, очевидно, точок розриву $x = x_n$, де похідна не існує.

Доведемо, що і *всяка неперервна монотонно неспадна на відрізку* $[a,b]$ *функція також є майже скрізь диференційовною на цьому відрізку.*

Для доведення нам буде потрібна така лема:

Лема Ріса. *Нехай* $g(x)$ *– неперервна на відрізку* $[a,b]$ *функція,* E *– множина тих точок* $x \in (a,b)$, *для яких на відрізку* $[a,b]$ *існує така точка* $\xi > x$, *що* $g(\xi) > g(x)$. *Тоді множина* E *відкрита і (якщо* $E \ne \varnothing$*) для кожного з інтервалів* (a_k, b_k), *які попарно не перетинаються і утворюють цю множину, виконується нерівність* $g(b_k) \ge g(a_k)$.

Доведення. Якщо $x_0 \in E$, тобто $g(\xi) > g(x_0)$ при деякому $\xi > x_0$, то внаслідок неперервності функції $g(x)$ нерівність $g(\xi) > g(x)$ буде справедливою для всіх x з деякого околу точки x_0. Отже, множина E відкрита. Якщо $E \ne \varnothing$, то

$$E = \bigcup_k (a_k, b_k),$$

де інтервали $(a_k, b_k) \subset (a,b)$ попарно не перетинаються. Нехай (a_k, b_k) – довільний з таких інтервалів, $x \in (a_k, b_k)$. Тоді на проміжку $(x,b_k]$ розглянемо множину M таких точок t, що $g(x)\le g(t)$. Нехай t_0- крайня права точка цієї множини. Така точка існує, бо функція $g(x)$ неперервна. Якщо $t_0=b_k$, то $f(x)\le f(b_k)$. Якщо ж $t_0<b_k$, то для t_0 знайдеться точка $\xi_0>t_0$, що $g(t_0)<g(\xi_0)$. Але тоді також $g(x)<g(\xi_0)$. Тому з припущення, що t_0 була крайньою правою точкою множини M випливає, що $\xi_0>b_k$. Оскільки $b_k\notin E$, то $g(b_k)\ge g(\xi_0)>g(x)$. Звідси випливає, що $f(x)\le f(b_k)$ для всіх $x\in(a_k,b_k)$. Тоді з неперервності функції $g(x)$ отримуємо, що також $g(b_k)\ge g(a_k)$. Лема доведена.

Зауважимо, що в $[7]$, ст. 281, наведена цікава геометрична інтерпретація точок множини E як абсцис тих точок площини, які на графіку функції $g(x)$ невидимі справа.

Нехай тепер $f(x)-$ довільна неперервна монотонно неспадна на відрізку $[a,b]$ функція. З монотонності такої функції та властивостей границь випливає, що всі її похідні числа будуть невід'ємними. Доведемо, що при цьому:

1). $\Lambda_+<\infty$ *майже скрізь на відрізку* $[a,b]$.

Справді, якщо $\Lambda_+=\infty$ у деякій точці x_0 інтервалу (a,b), то для кожного числа $C>0$ справа від x_0 знайдеться така точка ξ, що

$$\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}>C.$$

А отже,

$$f(\xi)-C\xi>f(x_0)-Cx_0.$$

Функція $g(x)=f(x)-Cx$ є неперервною. Тому за лемою Ріса отримуємо, що множина E всіх таких точок x_0 або порожня, або складається з інтервалів (a_k,b_k), які попарно не перетинаються і для яких виконується нерівність $g(b_k)\ge g(a_k)$. В останньому випадку отримуємо, що також

$$f(b_k)-f(a_k)\ge C(b_k-a_k).$$

Отже,

$$\sum_k (b_k - a_k) \le \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \le \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

А оскільки число C можна вибрати як завгодно великим, то $\mu(E) = 0.$

2). $\lambda_- \ge \Lambda_+$ *майже скрізь на відрізку* $[a,b].$

Для доведення розглянемо довільний інтервал $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ та довільну пару додатних раціональних чисел $c < C$. Нехай E_c – множина тих $x \in (\alpha,\beta),$ для яких $\lambda_- < c.$ Розглядаючи функцію $g(x) = f(-x) + cx$ і міркуючи аналогічно як при доведенні 1), отримаємо, що або $E_c = \varnothing,$ або E_c складається з інтервалів вигляду $(a_k, b_k),$ причому

$$\mu(E_c) = \sum_k (b_k - a_k) \ge \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{c}.$$

Виділимо на цій множині підмножину E_{cC} тих $x,$ для яких $\Lambda_+ > C.$ Якщо $E_{cC} \ne \varnothing,$ то E_{cC} складається з інтервалів вигляду $(a_{ki}, b_{ki}),$ причому

$$\mu(E_{cC}) = \sum_k \sum_i (b_{ki} - a_{ki}) \le \sum_k \sum_i \frac{f(b_{ki}) - f(a_{ki})}{C}.$$

Оскільки

$$\sum_k \sum_i \left(f(b_{ki}) - f(a_{ki}) \right) \le \sum_k \left(f(b_k) - f(a_k) \right),$$

то

$$\mu(E_{cC}) \le \frac{c}{C} \mu(E_c) \le \frac{c}{C} (\beta - \alpha).$$

Нехай A_{cC} – множина всіх тих $x \in (a,b),$ для яких одночасно $\lambda_- < c$ та $\Lambda_+ > C.$ Оскільки $A_{cC} \cap (\alpha,\beta) = E_{cC},$ то згідно доведеного для довільного інтервалу (α,β) отримаємо

$$\mu\left(A_{cC} \cap (\alpha,\beta)\right) \le \frac{c}{C} (\beta - \alpha).$$

Припустимо, що $\mu(A_{cC}) = \mu_0.$ Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо таку відкриту множину $G,$ що

$$A_{cC} \subset G \subset [a,b], \ G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k), \ \mu(G) < \mu_0 + \varepsilon.$$

Нехай $\mu_k = \mu\left(A_{cC} \cap (\alpha_k, \beta_k)\right)$. За доведеним

$$\mu_k \le \frac{c}{C}(\beta_k - \alpha_k).$$

Отже,

$$\mu_0 = \sum_k \mu_k \le \sum_k \frac{c}{C}(\beta_k - \alpha_k) < \frac{c}{C}(\mu_0 + \varepsilon).$$

А оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то

$$\mu_0 \le \frac{c}{C}\mu_0,$$

що при $0 < c < C$ можливо тільки для $\mu_0 = 0$.

Тому, враховуючи, що множина всіх тих $x \in (a,b)$, для яких $\lambda_- < \Lambda_+$, дорівнює зліченному об'єднанню множин A_{cC}, отримаємо, що справді $\lambda_- \ge \Lambda_+$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$.

3). $\Lambda_- = \lambda_- = \lambda_+ = \Lambda_+$ *майже скрізь на відрізку* $[a,b]$.

Враховуючи нерівності $\lambda_- \ge \Lambda_+$, $\lambda_- \le \Lambda_-$ та $\lambda_+ \le \Lambda_+$, кожна з яких виконується принаймні майже скрізь на відрізку $[a,b]$, досить довести, що майже скрізь на цьому відрізку $\lambda_+ \ge \Lambda_-$. Адже у такому разі будемо мати

$$\lambda_- \ge \Lambda_+ \ge \lambda_+ \ge \Lambda_- \ge \lambda_-$$

майже скрізь на $[a,b]$, звідки і випливатиме потрібна рівність. Для доведення розглянемо монотонно неспадну функцію $f^*(x) = -f(-x)$, визначену на $[-b,-a]$. Оскільки похідні числа таких функцій $f(x)$ та $f^*(x)$ у відповідних точках x та $-x$ пов'язані співвідношеннями $\Lambda_+^* = \Lambda_-$ та $\lambda_-^* = \lambda_+$, то з нерівності $\lambda_-^* \ge \Lambda_+^*$, справедливої внаслідок властивості 2) для функції $f^*(x)$, отримуємо потрібну нерівність $\lambda_+ \ge \Lambda_-$.

Таким чином, приходимо до висновку про диференційовність майже скрізь на відрізку $[a,b]$ неперервної монотонно неспадної на цьому відрізку функції.

Зауважимо, що умова монотонності тут є суттєвою, бо (див. $[14]$, ст. 14) існують такі неперервні функції, які не є диференційовними в усіх точках відрізка $[a,b]$.

Підсумуємо отримані нами результати. З врахуванням теореми попереднього параграфа отримуємо, що *всяка монотонно неспадна неперервна зліва на* $[a,b]$ *функція майже скрізь на цьому відрізку є диференційовною.*

Зауважимо, що згадку про неперервність зліва в цьому формулюванні можна відкинути, врахувавши, що множина точок розриву монотонної функції не більше, як зліченна, а отже, має міру нуль. Зрозуміло, що дане твердження залишиться справедливим і для монотонно незростаючих функцій.

Таким чином, нами доведена наступна теорема:

Теорема Лебега. *Всяка монотонна на відрізку* $[a,b]$ *функція майже скрізь на цьому відрізку має скінченну похідну.*

Далі ми обґрунтуємо, що твердження цієї теореми буде справедливим і для ширшого класу функцій, ніж монотонні.

§ 15. Диференціювання ряду з монотонних функцій

Доведемо ще одну важливу теорему, яка пов'язана з диференціюванням функціональних рядів.

Теорема Фубіні. *Скрізь збіжний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x),$$

де $f_n(x)-$ *монотонно неспадні функції на відрізку* $[a,b]$, *майже скрізь на цьому відрізку допускає почленне диференціювання:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що функції $f_n(x)$ є невід'ємними і $f_n(a)=0$. Загальний випадок зводиться до нього заміною $f_n(x)$ на $f_n(x)-f_n(a)$.

Функція $f(x)$ як сума ряду монотонно неспадних функцій теж є монотонно неспадною. Внаслідок теореми Лебега майже скрізь на $[a,b]$ існують скінченні похідні функцій $f_n(x)$ та $f(x)$. Нехай $E\subset[a,b]$, $\mu(E)=b-a,$ $-$ та множина, на якій всі ці похідні існують одночасно. Для кожного $x\in E$ та $\xi\in[a,b]$ виконується рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\xi)-f_n(x)}{\xi-x}=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}.$$

Оскільки внаслідок монотонності функцій $f_n(x)$ доданки у лівій частині цієї рівності невід'ємні, то при кожному фіксованому N

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n(\xi)-f_n(x)}{\xi-x}\le\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $\xi\to x,$ отримаємо при кожному натуральному N

$$\sum_{n=1}^{N}f_n'(x)\le f'(x).$$

А оскільки похідні $f_n'(x)$ монотонно неспадних функцій невід'ємні, то також

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\le f'(x).$$

Таким чином, ряд із похідних майже скрізь на $[a,b]$ є збіжним.

Виберемо таку підпослідовність $S_{n_k}(x)$ частинних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),$$

щоб при кожному натуральному k виконувалася нерівність

$$0\le f(b)-S_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}.$$

Оскільки функція

$$f(x)-S_{n_k}(x)=\sum_{i>n_k}f_i(x)$$

монотонно неспадна, то

$$0\le f(x)-S_{n_k}(x)<\frac{1}{2^k}$$

для всіх $x\in[a,b]$. Тому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(x)-S_{n_k}(x)\right)$$

на відрізку $[a,b]$ є збіжним. А отже, за доведеним вище, майже скрізь на $[a,b]$ збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(x)-S_{n_k}(x)\right)'.$$

Тому загальний член цього ряду прямує до нуля при $k\to\infty,$ тобто

$$S_{n_k}'(x)\to f'(x)$$

на $[a,b]$. А оскільки послідовність частинних сум

$$S_n'(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$

не спадає при зростанні $n,$ то також $S_n'(x)\to f'(x)$ майже скрізь на цьому відрізку, що й доводить твердження теореми.

Для порівняння наводимо відому (див. $[18]$, ст. 84) теорему з математичного аналізу: *Якщо функції* $u_n(x),\ n=1,2,3,...,$ *визначені на відрізку* $[a,b]$ *і мають на ньому неперервні похідні* $u_n'(x),$ *причому на цьому відрізку збігається не тільки ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u(x),$$

а й рівномірно збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x),$ *то функція* $u(x)$ *має на відрізку* $[a,b]$ *похідну*

$$u'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

§ 16. Функції з обмеженою зміною

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається *функцією з обмеженою зміною*, якщо існує така стала $C,$ що для будь-якого розбиття цього відрізка точками

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le C.$$

Точна верхня грань таких сум по всіх скінченних розбиттях відрізка $[a,b]$ називається *повною зміною* (*повною варіацією*) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $V_a^b[f]$.

Зауважимо, що для функцій, визначених на всій числовій прямій, повну зміну можна визначити як границю

$$V_{-\infty}^{+\infty}[f] = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} V_a^b[f],$$

а для функції, визначеної на інтервалі (a,b), –

$$V_{a+0}^{b-0}[f] = \lim_{\varepsilon\to+0} V_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}[f].$$

Якщо такі границі є скінченними, то $f(x)$ є функцією з обмеженою зміною на відповідних проміжках $(-\infty,+\infty)$ та (a,b).

Аналогічно можна визначити повні зміни

$$V_{a+0}^{b}[f] = \lim_{\varepsilon\to+0} V_{a+\varepsilon}^{b}[f] \quad \text{та} \quad V_{a}^{b-0}[f] = \lim_{\varepsilon\to+0} V_{a}^{b-\varepsilon}[f]$$

функції $f(x)$ на проміжках $(a,b]$ та $[a,b)$ відповідно.

Зрозуміло, що *кожна функція з обмеженою зміною є обмеженою.* Але, як показує наступний приклад, *не всяка обмежена на відрізку $[a,b]$ функція має на цьому відрізку обмежену зміну.*

Справді, функція

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0,\ f(0) = 0,$$

обмежена і навіть неперервна на відрізку $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин точками

$$0 < \frac{2}{(2n-1)\pi} < \frac{2}{(2n-3)\pi} < \ldots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{\pi}.$$

Сума $\sum\limits_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$, яка відповідає цьому розбиттю, дорівнює

$$\left(\frac{2}{(2n-1)\pi} - 0\right) + \left(\frac{2}{(2n-3)\pi} + \frac{2}{(2n-1)\pi}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi}\right)$$

і прямує до нескінченності при $n \to \infty$, що випливає з розбіжності відповідного числового ряду. А отже, повна зміна цієї функції на такому відрізку нескінченна.

Розглянемо два важливі приклади функцій з обмеженою зміною:

1. *Якщо* $f(x)-$ *монотонно неспадна на відрізку* $[a,b]$ *функція, то її повна зміна на цьому відрізку*

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = \sup \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) =$$
$$= \sup \left(f(x_n) - f(x_0) \right) = f(b) - f(a).$$

Аналогічно *для монотонно незростаючої на відрізку* $[a,b]$ *функції отримуємо*

$$V_a^b[f] = f(a) - f(b).$$

2. *Нехай* $f(x)$ *має на інтервалі* (a,b) *обмежену похідну*: $|f'(x)| \le M$. Тоді за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = \sup \sum_{k=1}^{n} \left| f'(\xi_k) \right| (x_k - x_{k-1}) \le$$
$$\le M \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = M(b-a), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Встановимо деякі властивості функцій з обмеженою зміною:

1. Безпосередньо з означення випливає, що $V_a^b[f] \ge 0$ *для довільної функції* $f(x)$, *причому* $V_a^b[f] = 0$ *тільки для функцій* $f(x) = const.$

2. *Якщо* $f(x)-$ *функція з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$, *то при кожному* $\alpha \in R$ *функція* $\alpha f(x)$ *також має обмежену зміну на цьому відрізку, причому*

$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| \cdot V_a^b[f].$$

Справді,

$$V_a^b[\alpha f] = \sup \sum_{k=1}^{n} \left| \alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1}) \right| =$$
$$= |\alpha| \cdot \sup \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = |\alpha| \cdot V_a^b[f].$$

3. *Якщо* $f(x)$ *та* $g(x)-$ *функції з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$, *то функція* $f(x)+g(x)$ *також має обмежену зміну на цьому відрізку, причому*

$$V_a^b[f+g]\le V_a^b[f]+V_a^b[g].$$

Справді, для кожного розбиття виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)+g(x_k)-f(x_{k-1})-g(x_{k-1})\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right|\le V_a^b[f]+V_a^b[g].$$

Перейшовши у ній до супремуму, отримуємо справедливість даної властивості.

Зауважимо, що із властивостей 2 та 3 випливає, що *сукупність всіх функцій з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$ *утворює лінійний простір.*

Відзначимо, що *лінійний простір утворюють і функції з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$, *для яких* $f(a)=0$. *Цей простір стає нормованим, якщо покласти*

$$\|f\|=V_a^b[f].$$

4. *Якщо* $f(x)-$ *функція з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$ *і* $a<c<b$, *то*

$$V_a^b[f]=V_a^c[f]+V_c^b[f].$$

Для доведення зауважимо, що для довільного розбиття відрізка $[a,b]$ сума

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$$

може лише збільшитися при додаванні нової точки поділу $c=x_m$. Справді, якщо $x_{k-1}<c<x_k$, то

$$\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le\left|f(x_k)-f(c)\right|+\left|f(c)-f(x_{k-1})\right|,$$

а всі інші доданки не змінюються. А якщо $c=x_m$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sum_{k=1}^{m}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le V_a^c[f]+V_c^b[f].$$

Звідси випливає, що

$$V_a^b[f] \le V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

З іншого боку, вибираючи весь час $c = x_m$, ми для кожного $\varepsilon > 0$ можемо побудувати такі розбиття відрізків $[a,c]$ та $[c,b]$, що

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ge V_a^c[f] - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ge V_c^b[f] - \frac{\varepsilon}{2},$$

а отже, також

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ge V_a^c[f] + V_c^b[f] - \varepsilon.$$

Звідси на підставі довільності вибору $\varepsilon > 0$, приходимо до нерівності

$$V_a^b[f] \ge V_a^c[f] + V_c^b[f],$$

з якої з врахуванням доведеної вище протилежної нерівності випливає потрібна рівність.

Зауважимо, що властивість 4 може бути використана для практичного обчислення повної зміни функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Для цього достатньо розбити даний відрізок на проміжки монотонності цієї функції і додати повні зміни функції $f(x)$ на таких проміжках.

Наприклад, знайдемо на відрізку $[-2,2]$ повну зміну функції

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & -2 \le x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x - 2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

На відрізку $[-2,0]$ вона зростає, а на відрізку $[0,1]-$ спадає. Дещо складніша ситуація з відрізком $[1,2]$. У точці $x = 1$ функція $f(x)$ має розрив справа першого роду зі стрибком $f(1+0) - f(1) = -1$, а далі на проміжку $(1,2]$ вона зростає. З врахуванням проведеного аналізу отримуємо

$$V_{-2}^2[f] = V_{-2}^0[f] + V_0^1[f] + V_1^{1+0}[f] + V_{1+0}^2[f] =$$

$$=\left(f(0)-f(-2)\right)+\left(f(0)-f(1)\right)+\left(f(1)-f(1+0)\right)+$$
$$+\left(f(2)-f(1+0)\right)=\left(2-(-2)\right)+(2-0)+\left(0-(-1)\right)+\left(0-(-1)\right)=8.$$

З метою симетричності записів тут через $V_1^{1+0}[f]$ умовно позначена повна зміна, тобто стрибок, функції $f(x)$ на виродженому проміжку $[1,1+0)$. Для наочності рекомендуємо читачам намалювати графік даної функції.

Відзначимо ще одну особливість повної зміни функції. Нехай $f(x)-$ довільна неперервна зліва функція з обмеженою зміною на всій числовій прямій. Домовимося вважати, що повна зміна такої функції на порожній множині дорівнює нулю, і визначимо функцію $m_f(A)$ на півкільці G всіх проміжків числової прямої як повну зміну функції $f(x)$ на відповідному проміжку. З властивостей 1 та 4 випливає, що *функція* $m_f(A)$ *є мірою.* Можна довести, що *така міра* $\sigma-$*адитивна*.

§ 17. Варіаційна функція та її властивості

Нехай $f(x)-$ функція з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$. Тоді при кожному $x\in[a,b]$ визначена функція
$$v(x)=V_a^x[f],$$
яку надалі будемо називати *варіаційною функцією*.

Розглянемо приклад знаходження варіаційної функції для
$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-2, & 1<x\le 2.\end{cases}$$
Оскільки на відрізку $[-2,0]$ функція $f(x)$ зростає, то на цьому відрізку
$$v(x)=V_{-2}^x[f]=f(x)-f(-2)=2-x^2-(-2)=4-x^2.$$
Далі зауважимо, що на інтервалі $(0,1)$ функція $f(x)$ задається тим самим аналітичним виразом і спадає. Відповідно знаходимо
$$v(x)=V_{-2}^x[f]=V_{-2}^0[f]+V_0^x[f]=v(0)+\left(f(0)-f(x)\right)=$$
$$=4+\left(2-\left(2-x^2\right)\right)=4+x^2.$$

Окремо виділимо точку $x=1,$ у якій функція $f(x)$ має розрив зліва. Оскільки $f(x)$ спадає на всьому відрізку $[0,1],$ то

$$v(1)=V_{-2}^{1}[f]=V_{-2}^{0}[f]+V_{0}^{1}[f]=v(0)+\big(f(0)-f(1)\big)=4+(2-0)=6.$$

І, нарешті, на проміжку $(1,2]$ отримуємо

$$v(x)=V_{-2}^{x}[f]=V_{-2}^{1}[f]+V_{1}^{1+0}[f]+V_{1+0}^{x}[f]=v(1)+\big(f(1)-f(1+0)\big)+$$
$$+\big(f(x)-f(1+0)\big)=6+\big(0-(-1)\big)+\big(x-2-(-1)\big)=x+6.$$

Встановимо основні властивості функції $v(x)$:

1. *Функція $v(x)$ невід'ємна.*

Справедливість цього твердження випливає з властивості 1 повної зміни функції.

Відзначимо також, що завжди $v(a)=0.$

2. *Функція $v(x)$ монотонно неспадна.*

Справді, якщо $a\le x'<x''\le b,$ то $v(x'')-v(x')=V_{x'}^{x''}[f]\ge 0.$

3. *Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x^* зліва, то і $v(x)$ неперервна у цій точці зліва.*

Справді, нехай маємо довільне $\varepsilon>0.$ Виберемо $\delta>0$ так, щоб при $x^*-\delta<x\le x^*$ виконувалася нерівність

$$\left|f(x^*)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

і розглянемо таке розбиття

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=x^*,$$

що

$$V_a^{x^*}[f]-\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При цьому можна вважати, що $x^*-\delta<x_{n-1}<x^*,$ бо інакше ми додали би ще одну точку поділу, від чого така різниця лиш би зменшилася. Таким чином отримуємо, що також

$$\left|f(x^*)-f(x_{n-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$V_a^{x^*}[f]-\sum_{k=1}^{n-1}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|<\varepsilon,$$

а отже, і

$$V_a^{x^*}[f]-V_a^{x_{n-1}}[f]<\varepsilon,$$

тобто $v(x^*)-v(x_{n-1})<\varepsilon$. Далі, з монотонності функції $v(x)$ отримуємо, що $v(x^*)-v(x)<\varepsilon$ для всіх $x\in[x_{n-1},x^*]$. А це й означає неперервність функції $v(x)$ у точці x^* зліва.

Зауважимо, що аналогічно можна довести неперервність функції $v(x)$ у точці x^* справа, якщо у цій точці такою є функція $f(x)$.

А отже, *якщо функція* $f(x)$ *неперервна, то і* $v(x)$ *неперервна.*

4. *Функція* $\varphi(x)=v(x)-f(x)$ *монотонно неспадна.*

Справді, якщо $a\le x'<x''\le b$, то

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=(v(x'')-v(x'))-(f(x'')-f(x'))=$$
$$=V_{x'}^{x''}[f]-(f(x'')-f(x'))\ge 0.$$

З доведених властивостей випливає такий важливий ***висновок:*** *всяку функцію з обмеженою зміною можна подати як різницю двох монотонно неспадних функцій:*

$$f(x)=v(x)-\varphi(x).$$

Зауважимо, що і навпаки, на підставі властивостей функцій з обмеженою зміною *всяка функція, яку можна подати як різницю двох монотонно неспадних на відрізку* $[a,b]$ *функцій, має на цьому відрізку обмежену зміну*.

З отриманого представлення функції $f(x)$ та теореми Лебега про диференціювання монотонних функцій випливає такий ***наслідок:*** *всяка функція з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$ *майже скрізь на цьому відрізку має скінченну похідну.*

Як доведено в [14], ст. 26, майже скрізь на відрізку $[a,b]$

$$|f'(x)|=v'(x).$$

§ 18. Похідна невизначеного інтеграла Лебега

Повернемося тепер до невизначеного інтеграла Лебега – функції

$$F(x)=\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu,\ \ x\in[a,b].$$

Із можливості представлення такого інтеграла у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій випливає, що функція $F(x)$ має на відрізку $[a,b]$ обмежену зміну. А отже, майже скрізь на цьому відрізку існує скінченна похідна $F'(x)$.

Теорема. *Для кожної інтегровної на відрізку* $[a,b]$ *функції* $f(x)$ *майже скрізь на цьому відрізку*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu=f(x).$$

Доведення. Нехай $F(x)-$ невизначений інтеграл Лебега функції $f(x)$. З абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що функція $F(x)$ є неперервною. Крім того, як ми вже відзначили вище, вона майже скрізь на відрізку $[a,b]$ має скінченну похідну. Припустимо, що $f(x)<F'(x)$. Тоді існують такі раціональні числа α та β, що $f(x)<\alpha<\beta<F'(x)$. Позначимо через $E_{\alpha\beta}$ множину тих $x\in(a,b)$, в яких виконується ця нерівність. Якщо $x\in E_{\alpha\beta}$, то з нерівності $F'(x)>\beta$ отримуємо

$$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}>\beta$$

для всіх $\xi>x$, достатньо близьких до x. А отже,

$$F(\xi)-\beta\xi>F(x)-\beta x.$$

Тому, якщо $E_{\alpha\beta}\neq\varnothing$, то за лемою Ріса для функції $g(x)=F(x)-\beta x$ отримаємо

$$E_{\alpha\beta}=\bigcup_k(a_k,b_k),$$

причому такі інтервали попарно не перетинаються і

$$F(b_k)-\beta b_k\geq F(a_k)-\beta a_k.$$

А отже,

$$\int\limits_{[a_k,b_k]} f(t)d\mu=F(b_k)-F(a_k)\geq\beta(b_k-a_k).$$

Зрозуміло, що при цьому множина $E_{\alpha\beta}$ буде вимірною. Тому, просумувавши ці нерівності по всіх k, будемо мати

$$\int\limits_{E_{\alpha\beta}} f(t)\,d\mu \ge \beta\mu\left(E_{\alpha\beta}\right).$$

З іншого боку

$$\int\limits_{E_{\alpha\beta}} f(t)\,d\mu \le \alpha\mu\left(E_{\alpha\beta}\right).$$

Таким чином,

$$\alpha\mu\left(E_{\alpha\beta}\right) \ge \beta\mu\left(E_{\alpha\beta}\right),$$

що при $\alpha < \beta$ можливо тільки у випадку $\mu\left(E_{\alpha\beta}\right) = 0.$ А оскільки множин $E_{\alpha\beta}$ з раціональними α, β є зліченна кількість, то і

$$\mu\left\{x : x \in [a,b],\ f(x) < F'(x)\right\} = 0.$$

Отже, $f(x) \ge F'(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$. Замінивши $f(x)$ на $-f(x)$, аналогічно доведемо, що також $-f(x) \ge -F'(x)$, тобто $f(x) \le F'(x)$ майже скрізь на цьому відрізку. А значить, майже скрізь на $[a,b]$ виконується рівність $f(x) = F'(x)$. Теорема доведена.

Отже, нами отримана повна відповідь на перше з питань, поставлених у параграфі 12 цього розділу. Перейдемо далі до розгляду другого питання.

§ 19. Інтегровність похідної монотонної функції

Приклад функції

$$f(x) = x^2 \cos\frac{\pi}{x^2},\ x \ne 0,\ \ f(0) = 0,$$

яку ми розглядали у параграфі 12, показує, що не для кожної інтегровної за Лебегом функції її похідна теж є інтегровною за Лебегом.

Нехай тепер $f(x)-$ довільна монотонно неспадна функція.

Теорема. *Похідна $f'(x)$ монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому відрізку і*

$$\int\limits_{[a,b]} f'(t)\,d\mu \le f(b) - f(a).$$

Доведення. Розглянемо функції

$$\varphi_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}},\ n\in N.$$

Щоб вони були визначені на всьому відрізку $[a,b]$, домовимося вважати, що $f(x)=f(b)$ при $x>b$. Із монотонності, а отже, і інтегровності функції $f(x)$, випливає інтегровність за Лебегом кожної з функцій $\varphi_n(x)$ на відрізку $[a,b]$. При цьому отримуємо

$$\int\limits_{[a,b]}\varphi_n(t)d\mu=n\int\limits_{[a,b]}f\left(t+\frac{1}{n}\right)d\mu-n\int\limits_{[a,b]}f(t)d\mu=$$

$$=n\int\limits_{\left[b,b+\frac{1}{n}\right]}f(t)d\mu-n\int\limits_{\left[a,a+\frac{1}{n}\right]}f(t)d\mu\le$$

$$\le f(b)-f(a+0)\le f(b)-f(a).$$

Оскільки $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$, то за теоремою Фату отримуємо як інтегровність функції $f'(x)$ на цьому відрізку, так і нерівність

$$\int\limits_{[a,b]}f'(t)d\mu\le f(b)-f(a).$$

Теорема доведена.

Наслідок. *Похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$ інтегровна за Лебегом на цьому відрізку.*

Справедливість такого твердження випливає із доведеної теореми і представлення кожної функції з обмеженою зміною у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій.

Приклад функції

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2],\end{cases}$$

наведеної нами у параграфі 12, показує, що для монотонно неспадних функцій можлива і строга нерівність

$$\int\limits_{[a,b]}f'(t)d\mu<f(b)-f(a).$$

Наведемо також приклад неперервної монотонно неспадної функції, для якої також має місце строга нерівність. Для цього визначимо функцію $f(x)$ на відрізку $[0,1]$ таким чином:

Покладаємо $f(0)=0,\quad f(1)=1.$ Далі, як і при побудові канторової множини, розбиваємо відрізок $[0,1]$ на три рівні частини і задаємо $f(x)=\frac{1}{2}$ для $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$ Інтервали, які залишилися, знову ділимо на три рівні за довжиною частини, з яких середня є відрізком, а дві крайні – інтервалами. На кожному із середніх відрізків задаємо значення функції $f(x)$ як середнє арифметичне значень цієї функції у найближчих зліва та справа до кінців цього відрізка точках, в яких $f(x)$ уже визначена. Наприклад,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ x\in\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right],$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4},\ x\in\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right].$$

Продовжимо такий процес до нескінченності. Крім того, у точках x канторової множини, які не є кінцями жодного з середніх відрізків, визначимо $f(x)$ як границі $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n),$ де $(x_n)-$ послідовності точок поділу, які збігаються до x. В результаті отримаємо неперервну монотонно неспадну функцію, похідна якої $f'(x)$ майже скрізь на відрізку $[0,1]$ дорівнює нулю. А отже,

$$\int\limits_{[0,1]} f'(t)\,d\mu=0<1=f(1)-f(0).$$

Таку функцію $f(x),$ а точніше, її графік часто називають *канторовими сходами*. Зауважимо, що сама ця функція є інтегровною як за Лебегом, так і за Ріманом на відрізку $[0,1],$ причому із симетрії графіка $y=f(x)$ відносно центра одиничного квадрата випливає, що такі інтеграли дорівнюють $\frac{1}{2},$ тобто половині площі цього квадрата.

§ 20. Абсолютно неперервні функції та їх властивості

Щоб описати клас функцій, для яких виконується рівність

$$\int_{[a,b]} f'(t)\,d\mu = f(b) - f(a),$$

введемо поняття абсолютно неперервної функції.

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається *абсолютно неперервною* на цьому відрізку, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченної системи інтервалів (a_k, b_k), $k = 1,\dots,n$, з цього відрізка, які попарно не перетинаються і мають суму довжин, меншу за δ, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що кількість таких інтервалів може бути і зліченною. Адже, перейшовши в цій нерівності, справедливій при кожному $n \in N$, до границі при $n \to \infty$, ми отримали би

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| \le \varepsilon.$$

Безпосередньо з означення випливає, що *всяка абсолютно неперервна функція на відрізку* $[a,b]$ *є рівномірно неперервною на цьому відрізку*. Покажемо, що *обернене твердження невірне*.

Справді, функція канторові сходи, будучи неперервною на відрізку $[0,1]$, за теоремою Кантора є рівномірно неперервною на цьому відрізку. Оскільки при кожному $\delta > 0$ канторову множину можна покрити інтервалами (a_k, b_k), $k = 1,\dots,n$, сума довжин яких менша за δ, і для кожного такого покриття виконується рівність

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| = 1,$$

то така функція не є абсолютно неперервною на $[0,1]$.

Важливим прикладом абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ *функцій є функції, які мають на інтервалі* (a,b) *обмежену похідну:* $\left| f'(x) \right| \le M$.

Справді, на підставі теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f'(\xi_k)\right|(b_k-a_k)\le M\delta,\ \ \xi_k\in(a_k,b_k).$$

Тому достатньо вибрати таке $\delta>0$, що $M\delta<\varepsilon$.

Встановимо деякі властивості абсолютно неперервних функцій:

1. *Якщо* $f(x)-$ *абсолютно неперервна на відрізку* $[a,b]$ *функція, то при кожному* c *функція* $cf(x)$ *теж абсолютно неперервна на цьому відрізку.*

Справді, для кожного $\varepsilon'>0$ візьмемо таке $\varepsilon>0$, що $|c|\varepsilon<\varepsilon'$, і виберемо $\delta>0$ так, щоб

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$$

при умові

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left|cf(b_k)-cf(a_k)\right|=|c|\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|\le|c|\varepsilon<\varepsilon',$$

що й доводить абсолютну неперервність функції $cf(x)$.

2. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *абсолютно неперервні на відрізку* $[a,b]$, *то функція* $f(x)+g(x)$ *теж абсолютно неперервна на цьому відрізку.*

Справді, нехай $\delta>0$ таке, що при умові

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

виконуються нерівності

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

та

$$\sum_{k=1}^{n}\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)+g(b_k)-f(a_k)-g(a_k)\right|\le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| g(b_k) - g(a_k) \right| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що з властивостей 1 та 2 випливає, що *сукупність всіх абсолютно неперервних на відрізку* $[a,b]$ *функцій утворює лінійний простір.*

3. *Якщо* $f(x)-$ *абсолютно неперервна на відрізку* $[a,b]$ *функція, то вона має на цьому відрізку обмежену зміну.*

Справді, безпосередньо з означень абсолютно неперервної функції та функції з обмеженою зміною випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ можна вибрати $\delta > 0$ так, що повна зміна функції $f(x)$ на відрізку з довжиною, меншою за $\delta,$ не перевищуватиме $\varepsilon.$ Оскільки відрізок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків з довжинами, меншими за $\delta,$ то і повна зміна функції $f(x)$ на всьому відрізку $[a,b]$ теж буде скінченною.

З даної властивості та попереднього зауваження випливає, що *лінійний простір абсолютно неперервних на відрізку* $[a,b]$ *функцій є підпростором простору функцій з обмеженою зміною на цьому відрізку.*

4. *Кожну абсолютно неперервну на відрізку* $[a,b]$ *функцію* $f(x)$ *можна подати як різницю двох абсолютно неперервних монотонно неспадних функцій.*

Справді, як і кожну функцію з обмеженою зміною, абсолютно неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді різниці монотонно неспадних функцій:

$$f(x) = v(x) - \varphi(x),$$

де

$$v(x) = V_a^x[f], \quad \varphi(x) = v(x) - f(x).$$

Доведемо, що функція $v(x)$ абсолютно неперервна. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалася нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$$

при

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-a_k\right)<\delta.$$

Розглянемо суму

$$\sum_{k=1}^{n}\left|v\left(b_k\right)-v\left(a_k\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}\left[f\right],$$

яка є точною верхньою гранню чисел

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_k}\left|f\left(x_{k,i}\right)-f\left(x_{k,i-1}\right)\right|$$

по всіх скінченних розбиттях

$$a_k=x_{k,0}<x_{k,1}<\ldots<x_{k,m_k}=b_k$$

відрізків $\left[a_k,b_k\right]$, $k=1,\ldots,n,$ відповідно. А оскільки сума довжин всіх таких інтервалів $\left(x_{k,i-1},x_{k,i}\right)$ менша за δ, то кожне з цих чисел не перевищує ε. Тому і

$$\sum_{k=1}^{n}\left|v\left(b_k\right)-v\left(a_k\right)\right|\le\varepsilon,$$

що й означає абсолютну неперервність функції $v\left(x\right)$. Тоді за властивостями 1, 2 функція $\varphi\left(x\right)=v\left(x\right)-f\left(x\right)$ теж буде абсолютно неперервною. А отже, властивість 4 доведена.

Зрозуміло, що, як і всяка функція з обмеженою зміною, *абсолютно неперервна на відрізку* $\left[a,b\right]$ *функція майже скрізь на цьому відрізку має скінченну похідну*.

§ 21. Зв'язок між абсолютною неперервністю і невизначеним інтегралом Лебега

Розглянемо функцію

$$F\left(x\right)=\int\limits_{\left[a,x\right]}f\left(t\right)d\mu,\ x\in\left[a,b\right].$$

Нехай $\left(\left(a_k,b_k\right)\right)$ – довільна система інтервалів цього відрізка, які попарно не перетинаються. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left|F\left(b_k\right)-F\left(a_k\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{\left(a_k,b_k\right)}f\left(t\right)d\mu\right|\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(a_k,b_k)} |f(t)|\,d\mu = \int\limits_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f(t)|\,d\mu.$$

Внаслідок абсолютної неперервності інтеграла Лебега останній інтеграл прямує до нуля, якщо сума довжин інтервалів (a_k, b_k) прямує до нуля.

Тому приходимо до наступного ***висновку:*** *невизначений інтеграл Лебега є абсолютно неперервною функцією для будь-якої інтегровної за Лебегом на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$.*

Для доведення наступної теореми спочатку обґрунтуємо таке важливе твердження.

Лема. *Якщо похідна абсолютно неперервної монотонно неспадної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ майже скрізь на цьому відрізку дорівнює нулю, то ця функція стала.*

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ монотонно неспадна і неперервна на відрізку $[a,b]$, то множиною її значень є відрізок $[f(a), f(b)]$. Нехай

$$A = \{x : x \in [a,b], f'(x) = 0\},\ B = [a,b] \setminus A.$$

З умови леми випливає, що $\mu(B) = 0$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і покриємо множину B скінченною або зліченною системою інтервалів (a_k, b_k), які попарно не перетинаються і мають суму довжин, меншу за δ, так, щоб виконувалася нерівність

$$\sum_{k} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Це можна зробити на підставі абсолютної неперервності функції $f(x)$. Тоді з монотонності цієї функції отримаємо, що також

$$\mu(f(B)) \le \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

при кожному $\varepsilon > 0$, тобто $\mu(f(B)) = 0$.

Нехай тепер $x_0 \in A$. Оскільки $f(x_0) = 0$, то для достатньо близьких до x_0 точок ξ буде виконуватися нерівність

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < \varepsilon.$$

Вибираючи тут $\xi > x_0$, отримаємо

$$f(\xi) - f(x_0) < \varepsilon(\xi - x_0).$$

Звідси випливає, що

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon\xi - f(\xi).$$

Застосувавши лему Ріса для функції $g(x) = \varepsilon x - f(x)$, будемо мати, що

$$A = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k),$$

причому

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geq \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k),$$

тобто

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq \varepsilon(\beta_k - \alpha_k).$$

Звідси випливає, що

$$\mu\big(f(A)\big) \leq \sum_k \big(f(\beta_k) - f(\alpha_k)\big) \leq \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \varepsilon(b - a).$$

Внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ маємо $\mu\big(f(A)\big) = 0$.

Враховуючи рівність

$$\big[f(a), f(b)\big] = f(A) \cup f(B),$$

остаточно отримуємо, що $f(x) = const$. Лема доведена.

Теорема Лебега. *Похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ інтегровна за Лебегом на цьому відрізку і для кожного $x \in [a,b]$ виконується рівність*

$$\int\limits_{[a,x]} f'(t)\,d\mu = f(x) - f(a).$$

Доведення. Враховуючи властивість 4 абсолютно неперервних функцій, для доведення теореми досить обмежитися випадком, коли $f(x)$ є монотонно неспадною. Похідна $f'(x)$ такої функції буде інтегровною за Лебегом на відрізку $[a,b]$. Розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - \int\limits_{[a,x]} f'(t)\,d\mu.$$

Вона абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ як різниця двох абсолютно неперервних функцій. Крім того, при $x'' > x'$ за властивістю інтеграла Лебега від похідної монотонно неспадної функції

$$g(x'')-g(x')=f(x'')-f(x')-\int\limits_{[x',x'']} f'(t)d\mu \geq 0.$$

Отже, функція $g(x)$ монотонно неспадна на $[a,b]$. Оскільки також майже скрізь на цьому відрізку $g'(x)=0$, то за доведеною вище лемою $g(x)=const$. Але $g(a)=f(a)$, то для всіх $x\in[a,b]$

$$g(x)=f(x)-\int\limits_{[a,x]} f'(t)d\mu=f(a),$$

звідки і випливає твердження теореми.

Зрозуміло, що при цьому також

$$\int\limits_{[a,b]} f'(t)d\mu=f(b)-f(a).$$

Таким чином, ми отримали відповідь і на друге поставлене у параграфі 12 питання.

Наслідок. *Абсолютно неперервні функції, і тільки вони, відновлюються за своєю похідною операцією інтегрування з точністю до сталого доданка.*

Остання отримана нами рівність є *аналогом формули Ньютона-Лейбніца*. Наведемо без доведення (див. $[14]$, 65 – 66) ще й наступні дві теореми, які є аналогами класичних теорем про *інтегрування частинами* та *заміною змінних*:

Теорема 1. *Нехай* $f(x)$ *та* $g(x)-$*інтегровні за Лебегом функції на відрізку* $[a,b]$, *а* $F(x)$ *та* $G(x)-$ *їх невизначені інтеграли. Тоді функції* $F(x)g(x)$ *та* $G(x)f(x)$ *також інтегровні за Лебегом на цьому відрізку і*

$$\int\limits_{[a,b]} F(x)g(x)d\mu+\int\limits_{[a,b]} G(x)f(x)d\mu=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

Теорема 2. *Якщо* $\varphi(t)-$ *монотонно неспадна абсолютно неперервна на відрізку* $[\alpha,\beta]$ *функція, а функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на відрізку* $[a,b]=[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$, *то функція* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *інтегровна за Лебегом на* $[\alpha,\beta]$ *і*

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu=\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))\varphi'(t)d\mu.$$

§ 22. Поняття про знакозмінні міри та теорему Радона-Нікодима

Повернемося ще раз до функції

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu,$$

яку ми вже розглядали у параграфі 3. Вона визначена на всіх вимірних підмножинах простору X із заданою на ньому мірою μ. При цьому вимагалося, щоб функція $f(x)$ була невід'ємною. Якщо таку додаткову умову не накладати, то отримаємо $\sigma-$адитивну функцію множини $\Phi(A)$, яка може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Всяку $\sigma-$адитивну функцію множини, визначену на деякій $\sigma-$алгебрі підмножин простору X, називають *знакозмінною мірою*, або ж *зарядом*. Таким чином, поняття заряду є природним узагальненням поняття $\sigma-$адитивної міри.

Прикладом такого заряду є, зокрема, функція $\Phi(A)$, де $f(x)-$ довільна інтегровна на просторі X за мірою μ функція.

Якщо на одній і тій же $\sigma-$алгебрі підмножин простору X визначені дві $\sigma-$адитивні міри μ_1 та μ_2, то функція

$$\varphi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$$

є зарядом, визначеним на цій же $\sigma-$алгебрі підмножин.

Зауважимо, що і, навпаки, *всякий заряд може бути поданий у вигляді різниці двох $\sigma-$адитивних мір* (див. $[7]$, ст. 303).

Зокрема, для записаного вище заряду $\Phi(A)$ таке представлення можна записати у вигляді

$$\Phi(A) = \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu = \Phi_+(A) - \Phi_-(A).$$

Розглянемо тепер довільні заряди Φ. Кажуть, що *заряд* Φ *зосереджений на вимірній множині* A_0, якщо $\Phi(A) = 0$ для кожної вимірної множини $A \subset X \setminus A_0$. При цьому множина A_0 називається *носієм заряду* Φ.

Заряд Φ називається *дискретним*, якщо він зосереджений на скінченній або зліченній множині $\{a_n\}$. При цьому для кожної множини $A \subset X$ отримуємо

$$\Phi(A)=\sum_{a_n\in A}\Phi(a_n).$$

Заряд Ф називається *сингулярним*, якщо він зосереджений на множині міри нуль. Заряд Ф називається *неперервним*, якщо $\Phi(A)=0$ для кожної одноточкової множини $A.$ І, нарешті, заряд Ф називається *абсолютно неперервним відносно міри* $\mu,$ якщо $\Phi(A)=0$ для кожної множини $A,$ міра якої $\mu(A)=0.$

Зрозуміло, що *заряд, який є одночасно дискретним і неперервним,* або *сингулярним і абсолютно неперервним, може бути лише нульовим.*

Прикладом абсолютно неперервного заряду є

$$\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu,$$

що випливає з абсолютної неперервності інтеграла Лебега.

Як доведено, наприклад, у $[7]$, ст. 304 – 306, цим і вичерпуються всі абсолютно неперервні заряди. Інакше, справедлива наступна теорема:

Теорема Радона-Нікодима. *Нехай* $\mu-$ *деяка скінченна* $\sigma-$*адитивна міра, визначена на* $\sigma-$*алгебрі підмножин простору* X, *а* Ф$-$ *заряд, визначений на тій же* $\sigma-$*алгебрі і абсолютно неперервний відносно міри* $\mu.$ *Тоді існує така інтегровна за мірою* μ *на просторі* X *функція* $f(x)$, *що*

$$\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu$$

для кожної вимірної множини $A\subset X$, *і ця функція визначається з точністю до* $\mu-$*еквівалентності.*

При цьому функцію $f(x)$ називають *похідною заряду* Ф.

Отже, з цієї точки зору абсолютно неперервні заряди можна трактувати як узагальнення поняття невизначеного інтеграла Лебега.

Наведемо також приклад заряду, який не є абсолютно неперервним. Для цього будемо розглядати лінійну міру Лебега μ на відрізку $[0,1]$ і визначимо функцію

$$\varphi(A)=\begin{cases}1, & 0\in A,\\ 0, & 0\notin A.\end{cases}$$

Така функція є $\sigma-$адитивною мірою, а отже, зарядом. При цьому для множини $A=\{0\}$ маємо $\mu(A)=0,$ але $\varphi(A)=1.$ Тому такий заряд не є абсолютно неперервним. Більше того, він навіть не є неперервним.

§ 23. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса

Розглянемо ще один підхід до узагальнення лінійної міри Лебега. Нехай $F(x)-$ довільна монотонно неспадна неперервна зліва на відрізку $[a,b]$ функція. Визначимо міру m_F на проміжках цього відрізка рівностями:

$$m_F(\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha+0),$$
$$m_F[\alpha,\beta]=F(\beta+0)-F(\alpha),$$
$$m_F(\alpha,\beta]=F(\beta+0)-F(\alpha+0),$$
$$m_F[\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Застосувавши до m_F лебегове продовження міри, отримаємо міру μ_F, яку називають *мірою Лебега-Стільтьєса*.

Зауважимо, що *у випадку* $F(x)=x$ *міра Лебега-Стільтьєса співпадає з лінійною мірою Лебега*.

Відзначимо також, що *міра Лебега-Стільтьєса не обов'язково буде неперервною.* Наприклад, якщо x_0- точка розриву функції $F(x)$ зі стрибком $h_0,$ то $\mu_F(x_0)=h_0>0.$

Якщо $F(x)=h(x)-$ функція стрибків з точками розриву $x_1,x_2,...$ та відповідними стрибками у цих точках $h_1,h_2,...,$ то кожна підмножина A відрізка $[a,b]$ вимірна за мірою μ_F, причому

$$\mu_F(A)=\sum_{x_n\in A}h_n.$$

Зрозуміло, що така міра є дискретною мірою.

Якщо $F(x)-$ абсолютно неперервна функція, то для кожного інтервалу (α,β) на підставі теореми Лебега

$$\mu_F(\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_{(\alpha,\beta)}F'(x)d\mu.$$

А оскільки лебегове продовження $\sigma-$адитивної міри однозначно визначається своїми значеннями на півкільці всіх проміжків відрізка $[a,b]$, то

$$\mu_F(A)=\int\limits_A F'(x)d\mu$$

для кожної вимірної за Лебегом множини A. Очевидно, що така міра є абсолютно неперервною.

Зауважимо, що існують також неперервні функції $F(x)$, які не є абсолютно неперервними. Наприклад, канторові сходи. Якщо похідна такої неперервної функції майже скрізь на відрізку $[a,b]$ дорівнює нулю, то цю функцію називають *сингулярною*. Відповідно міра μ_F, породжена такою функцією, називається *сингулярною мірою*. Зрозуміло, що така міра зосереджена на тій множині, де $F'(x)$ не існує, або відмінна від нуля.

Відзначимо також, що *кожну монотонно неспадну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $F(x)$ можна подати як суму абсолютно неперервної і сингулярної функцій, монотонно неспадних на цьому відрізку*.

Справді, розглянемо функцію

$$\chi(x)=F(x)-\int\limits_{[a,x]}F'(t)d\mu.$$

Вона неперервна і монотонно неспадна, а її похідна $\chi'(x)$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$ дорівнює нулю, що випливає з теорем попередніх параграфів. Крім того, функція

$$\psi(x)=\int\limits_{[a,x]}F'(t)d\mu$$

монотонно неспадна і абсолютно неперервна на $[a,b]$. Отже, отримуємо шукане представлення

$$F(x)=\psi(x)+\chi(x).$$

Таким чином, *кожну монотонно неспадну неперервну зліва на відрізку $[a,b]$ функцію можна подати як суму монотонно неспадних функцій стрибків та абсолютно неперервної і сингулярної функцій:*

$$F(x)=h(x)+\psi(x)+\chi(x).$$

Враховуючи сказане, приходимо до ***висновку:*** *кожну міру Лебега-Стільтьєса можна подати як суму дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної міри:*

$$\mu_F = \mu_h + \mu_\psi + \mu_\chi .$$

Маючи міру μ_F, так само, як вводилось поняття інтегровності за Лебегом, вводять поняття інтегровності за мірою μ_F. Такий інтеграл називають *інтегралом Лебега-Стільтьєса* і позначають

$$\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu_F .$$

Якщо $F(x) = h(x) -$ функція стрибків з точками розриву $x_1, x_2, \ldots$ та відповідними стрибками у цих точках $h_1, h_2, \ldots,$ то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu_F = \sum_{x_n \in [a,b]} f(x_n) h_n .$$

Якщо $F(x) -$ абсолютно неперервна функція, то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu_F = \int\limits_{[a,b]} f(x) F'(x) d\mu .$$

Якщо ж $F(x)$ містить і сингулярну частину, то подібне зведення до сум чи звичайних інтегралів Лебега не можливе.

Розглянемо приклад обчислення інтеграла Лебега-Стільтьєса. Нехай

$$f(x) = 2x + 3, \qquad F(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1, 0], \\ x + 2, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Оскільки $F(x) = \varphi(x) + h(x),$ де функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1], \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ 2, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

монотонно неспадні на відрізку $[-1, 1],$ причому функція $\varphi(x)$ абсолютно неперервна, а $h(x) -$ функція стрибків з єдиним розривом у точці $x_1 = 0$ та стрибком $h_1 = 2,$ то

$$\int\limits_{[-1,1]} f(x) d\mu_F = \int\limits_{[-1,1]} f(x) \varphi'(x) d\mu + f(x_1) h_1 =$$

$$= \int_{-1}^{0} (2x + 3)(-2x) dx + \int_{0}^{1} (2x + 3) dx + 3 \cdot 2 = 11\frac{2}{3}.$$

Очевидно, що функції $\varphi(x)$ та $h(x)$ тут можна було явно і не знаходити, а обчислити шуканий інтеграл безпосередньо за формулою

$$\int\limits_{[-1,1]} f(x)d\mu_F = \int\limits_{[-1,1]} f(x)F'(x)d\mu + f(x_1)h_1,$$

покладаючи $h_1 = F(x_1+0) - F(x_1)$.

Зауважимо, що поняття інтеграла Лебега-Стільтьєса можна узагальнити, перейшовши від монотонно неспадних функцій до довільних неперервних зліва функцій з обмеженою зміною на відрізку $[a,b]$. Оскільки кожна така функція $\Phi(x)$ представляється у вигляді різниці $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$, то покладають

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_\Phi = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_{\Phi_1} - \int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_{\Phi_2}.$$

Відзначимо, що при цьому величина такого інтеграла не залежить від того, різницею яких монотонно неспадних неперервних зліва функцій є функція $\Phi(x)$.

Якщо $\Phi(x)$ не містить сингулярної складової, то такий інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu_\Phi = \int\limits_{[a,b]} f(x)\Phi'(x)d\mu + \sum_{x_n\in[a,b]} f(x_n)h_n,$$

де стрибки $h_n = \Phi(x_n+0) - \Phi(x_n)$ можуть бути і від’ємними.

§ 24. Інтеграл Рімана-Стільтьєса. Теорема Хеллі

Поряд з інтегралом Лебега-Стільтьєса введемо також поняття інтеграла Рімана-Стільтьєса, який є природним узагальненням інтеграла Рімана.

Нехай $\Phi(x)$ – неперервна зліва функція з обмеженою зміною, визначена на проміжку $[a,b)$. Не включення до нього точки b пояснюється тим, що окремо взяті точки можуть мати ненульову міру μ_Φ. Розглянемо розбиття

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

цього проміжку на частини $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1,\ldots,n$, і виберемо на кожній з таких частин довільним чином точку ξ_k відповідно. Складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\big).$$

Якщо при $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ ці суми мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a,b)$ на частини, ні від вибору точок ξ_k на цих частинах, то таку границю називають *інтегралом Рімана-Стільтьєса функції* $f(x)$ *відносно функції* $\Phi(x)$ *по проміжку* $[a,b)$ і позначають

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Очевидно, що для функції $\Phi(x)=x$ інтеграл Рімана-Стільтьєса функції $f(x)$ по проміжку $[a,b)$ співпадає з відповідним інтегралом Рімана даної функції по відрізку $[a,b]$.

Встановимо також взаємозв'язок між інтегралами Рімана-Стільтьєса та Лебега-Стільтьєса.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$*, то для кожної неперервної зліва функції* $\Phi(x)$ *з обмеженою зміною інтеграл Рімана-Стільтьєса функції* $f(x)$ *відносно функції* $\Phi(x)$ *по проміжку* $[a,b)$ *існує і співпадає з відповідним інтегралом Лебега-Стільтьєса.*

Доведення. Записані вище інтегральні суми можна розглядати як інтеграли Лебега-Стільтьєса від простих функцій $f_n(x)$, які набувають значень $f(\xi_k)$ на проміжках $[x_{k-1},x_k)$, $k=1,...,n.$ Послідовність таких функцій рівномірно збігається до функції $f(x)$ при $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0,$ тобто $n\to\infty.$ тому границя цих сум існує і є інтегралом Лебега-Стільтьєса від граничної функції $f(x).$ Але саме таку границю називають інтегралом Рімана-Стільтьєса. Теорема доведена.

Звідси, зокрема, випливає, що *інтеграли Рімана-Стільтьєса від неперервних функцій* $f(x)$ *можна обчислювати за тими ж формулами, що й відповідні інтеграли Лебега-Стільтьєса*.

Справедлива також (див. $[14]$, ст. 134) наступна *формула інтегрування частинами*:

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

при умові існування хоч одного з інтегралів у лівій частині цієї рівності.

Зауважимо без доведення (див. $[7]$, ст. 313 – 314), що *для неперервної функції* $f(x)$ *і функцій з обмеженими змінами* $\Phi_1(x)$ *та* $\Phi_2(x)$*, які відрізняються значеннями лише у скінченній чи зліченній кількості точок проміжку* $[a,b)$*, має місце рівність*

$$\int_a^b f(x)d\Phi_1(x)=\int_a^b f(x)d\Phi_2(x).$$

Відзначимо також що *для неперервної функції* $f(x)$ *величина інтеграла Рімана-Стільтьєса не залежить від значень, які набуває функція* $\Phi(x)$ *у своїх точках розриву* (див. $[7]$, ст. 314 – 315).

Окремо виділимо наступну важливу властивість інтеграла Рімана-Стільтьєса:

Теорема про середнє. *Справедлива оцінка*

$$\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)\right|\le \max\left|f(x)\right|\cdot V_a^{b-0}[\Phi].$$

Доведення. При кожному розбитті проміжку $[a,b)$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right|\le\sum_{k=1}^n\left|f(\xi_k)\right|\cdot\left|\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right|\le$$

$$\le\max\left|f(x)\right|\cdot\sum_{k=1}^n\left|\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)\right|\le\max\left|f(x)\right|\cdot V_a^{b-0}[\Phi].$$

Теорема доведена.

Скористаємося цією теоремою для обґрунтування граничного переходу під знаком інтегралів Стільтьєса відносно послідовності функцій $\Phi_n(x)$.

Теорема Хеллі. *Нехай функції* $\Phi_n(x)$ *з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$ *збігаються у кожній точці цього відрізка до функції* $\Phi(x)$*, причому повні зміни цих функцій обмежені в сукупності:*

$$V_a^b\left[\Phi_n\right]\le C,\ n=1,2,...$$

Тоді функція $\Phi(x)$ *також має обмежену зміну, і для кожної неперервної на* $[a,b]$ *функції* $f(x)$ *справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)d\Phi_n(x).$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що для кожного розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<...<x_m=b$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^m\left|\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m\left|\Phi_n(x_k)-\Phi_n(x_{k-1})\right|\le C.$$

Тому також

$$V_a^b\left[\Phi\right]\le C.$$

Нехай $f(x)-$ східчаста функція, яка набуває значень y_k на проміжках $[x_{k-1},x_k),\ k=1,...,m.$ Тоді

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x)=\sum_{k=1}^m y_k\left(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m y_k\left(\Phi_n(x_k)-\Phi_n(x_{k-1})\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)d\Phi_n(x).$$

Якщо ж $f(x)-$ довільна неперервна функція, то для кожного $\varepsilon>0$ існує така східчаста функція $f_\varepsilon(x)$, що

$$\left|f(x)-f_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon$$

для всіх $x\in[a,b]$. Тоді

$$\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)-\int_a^b f(x)d\Phi_n(x)\right|\le\left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)-\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi(x)\right|+$$

$$+\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi(x)-\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi_n(x)\right|+\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)d\Phi_n(x)-\int_a^b f(x)d\Phi_n(x)\right|.$$

У цій нерівності перший і третій доданки справа внаслідок теореми про середнє не перевищують εC, а другий доданок на підставі доведеної вище рівності для східчастих функцій прямує до нуля при $n\to\infty$. Оскільки ж $\varepsilon>0$ можна вибрати довільно, то теорема доведена.

Зрозуміло, що твердження теореми Хеллі залишається справедливим також для інтегралів Лебега-Стільтьєса.

§ 25. Деякі узагальнення поняття інтеграла

Вивчивши властивості інтеграла Лебега, ще раз повернемося до функції

$$f(x) = x^2 \cos\frac{\pi}{x^2},\ x \neq 0,\ \ f(0) = 0.$$

Як ми встановили у параграфі 12, вона скрізь на відрізку $[0,1]$ має скінченну похідну, але така похідна не є інтегровною за Лебегом. То ж виникає питання: *чи можна ввести поняття інтеграла так, щоб повністю вирішити задачу відновлення функції за її скінченною похідною?*

Позитивна відповідь на це питання була отримана у 1912 році французьким математиком Данжуа, а у 1914 році – німецьким ученим Перроном, кожен з яких побудував інтеграл більш загальний, ніж інтеграл Лебега. І хоч підходи до таких інтегралів у них були принципово різними, та, як було доведено пізніше, інтеграли Данжуа та Перрона є тотожними. Тому тепер такий інтеграл прийнято називати інтегралом Данжуа-Перрона. При цьому кожна функція, інтегровна за Лебегом, буде також інтегровною за Данжуа-Перроном, причому значення таких інтегралів співпадатимуть (див., наприклад, $[12]$, ст. 402).

Дальше узагальнення поняття інтеграла незалежно один від одного запропонували у 1916 році Данжуа та російський математик Хінчин.

Не вдаючись у деталі запропонованих ними підходів, сформулюємо тут тільки абстрактне означення понять інтегровності функції та інтеграла. Виходячи з властивостей вже відомих нам інтегралів Рімана та Лебега, всі такі підходи можуть бути охоплені наступною загальною схемою (див. $[12]$, ст. 403):

Кожному відрізку $[a,b]$, $a \le b$, поставимо у відповідність деякий не порожній клас $T[a,b]$ функцій, визначених на цьому відрізку. Систему T таких класів називають *правильною*, якщо

$$T[a,b] = T[a,c] \cap T[c,b]$$

при кожному $c \in [a,b]$. Якщо $T[a,b] \in T$, то кожній функції $f \in T[a,b]$ поставимо у відповідність число

$$\overset{b}{\underset{a}{T}}[f]$$

так, щоб виконувалися рівності

$$\overset{b}{\underset{a}{T}}[f] = \overset{c}{\underset{a}{T}}[f] + \overset{b}{\underset{c}{T}}[f] \quad \text{та} \quad \lim_{x \to c} \overset{x}{\underset{a}{T}}[f] = \overset{c}{\underset{a}{T}}[f]$$

при кожному $c \in [a,b]$.

Якщо така відповідність встановлена, то функції $f \in T[a,b]$ називаються $T-$*інтегровними на* $[a,b]$, а числа $\overset{b}{\underset{a}{T}}[f]-$ їх $T-$*інтегралами.*

Аналізуючи ці означення, зауважимо, що умова правильності системи T фактично означає, що з $T-$інтегровності функції f на відрізку $[a,b]$ випливатиме її $T-$інтегровність на кожному відрізку $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Відповідно вимоги, накладені на числа $\overset{b}{\underset{a}{T}}[f]$, означають адитивність та неперервність $T-$інтеграла. Зрозуміло, що інтеграли Рімана та Лебега всі ці вимоги задовольняли.

Детальніше ознайомитися з властивостями $T-$інтегровних функцій та $T-$інтегралів, а також інтегралів Перрона та Данжуа можна, наприклад, у [12].

Відзначимо також ще один напрям узагальнень поняття інтеграла – інтегрування функцій, визначених на довільних абстрактних множинах. Вперше це було розроблено у 1915 році математиком Фреше, а пізніше узагальнено Даніелем. Детальніше дивись, наприклад, у [14].

Задачі для самостійного розв’язування

Завдання 1. *Обґрунтуйте рівності:*

1. $\left(A\bigcup B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\bigcup\left(B\setminus C\right).$
2. $\left(A\setminus B\right)\bigcap C=\left(A\bigcap C\right)\setminus\left(B\bigcap C\right).$
3. $\left(A\setminus B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\setminus\left(B\setminus C\right).$
4. $\left(A\bigcap B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\bigcap\left(B\setminus C\right).$
5. $\left(A\setminus B\right)\setminus C=A\setminus(B\bigcup C).$
6. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C).$
7. $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C).$
8. $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C).$
9. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C).$
10. $(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C).$

Завдання 2. *Проаналізуйте необхідні і достатні умови, при яких виконуються наступні рівності:*

1. $A\bigcup(B\setminus C)=(A\bigcup B)\setminus C.$
2. $\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(A\setminus C\right)=A\setminus\left(B\bigcup C\right).$
3. $A\bigcup(B\setminus C)=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C).$
4. $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C).$
5. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus(A\setminus C).$
6. $(A\setminus B)\bigcup C=(A\bigcup C)\setminus B.$
7. $\left(A\setminus B\right)\bigcap C=\left(A\bigcup C\right)\setminus\left(B\bigcup C\right).$
8. $\left(A\bigcup B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\bigcap\left(B\setminus C\right).$
9. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C).$
10. $\left(A\bigcap B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\bigcup\left(B\setminus C\right).$

Завдання 3. *Обґрунтуйте наступні твердження:*

1. Об’єднання скінченної кількості скінченних множин є скінченна множина.
2. Об’єднання зліченної кількості скінченних множин, які попарно не перетинаються, є зліченна множина.
3. Об’єднання скінченної та зліченної множини є зліченна множина.
4. Будь-яка нескінченна множина цілих чисел є зліченною.

5. Множина всіх многочленів із раціональними коефіцієнтами є зліченною.
6. Множина всіх інтервалів на числовій прямій з раціональними кінцями є зліченною.
7. Потужність множини всіх підмножин скінченної множини потужності n дорівнює 2^n.
8. Об'єднання довільної скінченної або зліченної кількості множин потужності континууму також має потужність континууму.
9. Множина всіх скінченних підмножин зліченної множини злічення.
10. Множина всіх підмножин зліченної множини незлічення.

Завдання 4. *Встановіть взаємно однозначну відповідність між множинами A та B, якщо:*

1. $A=(0,1)$, $B=(0,+\infty)$.
2. $A=[0,\pi)$, $B=[0,+\infty)$.
3. $A=[1,3]$, $B=[2,4]\bigcup[5,6]$.
4. $A=(-\infty,+\infty)$, $B=[a,b]$.
5. $A=[0,+\infty)$, $B=(-\infty,+\infty)$.
6. $A-$ коло, $B-$ його діаметр.
7. $A-$ коло, $B-$ пряма.
8. $A-$внутрішня частина круга, $B-$ його зовнішня частина.
9. $A-$ внутрішня частина круга, $B-$ весь цей круг.
10. $A-$ сфера, $B-$ площина.

Завдання 5. *Нехай* $A=(-1,2)$, $B=\left\{\dfrac{2n(-1)^n}{n+4}, n\in N\right\}$, $C=[1,3]$.

Знайдіть всі внутрішні, ізольовані, граничні та точки дотику множини M, якщо:

1. $M=(A\bigcup B)\setminus C$.
2. $M=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.
3. $M=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.
4. $M=(A\setminus B)\setminus C$.
5. $M=A\setminus(B\bigcup C)$.
6. $M=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$.
7. $M=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.
8. $M=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$.
9. $M=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$.
10. $M=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.

Завдання 6. *Розв'яжіть наступні задачі, пов'язані із системами множин:*

1. Наведіть приклад півкільця підмножин множини $X=\{1,2,3\}$, яке не є кільцем.
2. Наведіть приклад кільця підмножин множини $X=\{1,2,3\}$, яке не є алгеброю.
3. Доведіть, що система всіх підмножин множини M утворює алгебру множин.
4. Опишіть всі алгебри множин, які можна отримати з елементів множини всіх підмножин множини $X=\{1,2,3\}$.
5. Наведіть приклад двох кілець множин, об'єднання яких не є кільцем.
6. Доведіть, що система всіх обмежених підмножин числової прямої утворює кільце множин без одиниці.
7. Доведіть, що сукупність всіх проміжків вигляду (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ та $(a,b]$ числової прямої, включаючи і порожні інтервали (a,a) та одноточкові множини $[a,a]$, утворює півкільце множин, яке не є кільцем.
8. Доведіть, що всяке $\sigma-$кільце є $\delta-$кільцем, а обернене твердження не вірне.
9. Доведіть, що сукупність всіх прямокутників P площини зі сторонами, паралельними до осей координат, утворює півкільце множин.
10. Доведіть, що сукупність плоских елементарних множин є кільцем множин.

Завдання 7. *Нехай $m-$ міра, визначена на кільці K. Для довільних множин $A,B\in K$ доведіть рівності:*

1. $m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B)$.
2. $m(A\setminus B)=m(A)-m(A\bigcap B)$.
3. $m(A\vartriangle B)=m(A)+m(B)-2m(A\bigcap B)$.
4. $m(A\bigcap B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcup B)$.
5. $m(A\bigcap(A\vartriangle B))=m(A)-m(A\bigcap B)$.
6. $m(A\bigcup(A\vartriangle B))=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B)$.

7. $m(A\bigcup B)+m(A\bigcap B)=m(A)+m(B)$.
8. $m(A\vartriangle(A\vartriangle B))=m(B)$.
9. $m(A\vartriangle B)=m(A\bigcup B)-m(A\bigcap B)$.
10. $m((A\vartriangle B)\vartriangle B)=m(A)$.

Завдання 8. *Доведіть або спростуйте наступні твердження:*

1. Міра елементарних множин є адитивною.
2. Для довільної множини $A\subset E$ виконується нерівність $\mu_*(A)\le\mu^*(A)$.
3. Міра Лебега довільної скінченної або зліченної множини дорівнює нулю.
4. Якщо множина $A\subset E$ вимірна, то $\mu(E\setminus A)=1-\mu(A)$.
5. Плоска міра Лебега незліченної множини може дорівнювати нулю.
6. Лінійна міра Лебега незліченної множини не може дорівнювати нулю.
7. Міра Лебега кожної відкритої не порожньої множини не дорівнює нулю.
8. Якщо міра множини дорівнює нулю, то міра замикання цієї множини також дорівнює нулю.
9. Ймовірностна міра є $\sigma-$адитивною мірою.
10. Всяка вимірна за Лебегом множина з додатною лінійною мірою має потужність континууму.

Завдання 9. *Знайдіть лінійну міру Лебега множини точок відрізка* $[0,1]$, *для яких існує:*

1. Десятковий запис, який не містить цифри 6.
2. Десятковий запис, який містить цифру 5 хоч один раз.
3. Вісімковий запис, який не містить цифри 4.
4. Вісімковий запис, який містить цифру 3 лише один раз.
5. Четвірковий запис, який не містить цифри 1.
6. Двійковий запис, у якому на парних місцях лише нулі.
7. Десятковий запис, який містить цифру 8 лише один раз.
8. Вісімковий запис, який містить цифру 2 хоч один раз.
9. Трійковий запис, у якому на непарних місцях лише нулі.
10. Трійковий запис, у якому на парних місцях лише двійки.

Завдання 10. *$\sigma-$адитивна міра μ визначена на $\sigma-$алгебрі множин A. Множини $A_n \in A, n \in N$, попарно не перетинаються. Обчислити $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, якщо:*

1. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
2. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{n(n+2)}$.
3. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{2n(2n+1)}$.
4. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{2n(2n-1)}$.
5. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{2n(2n+2)}$.
6. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
7. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{n(n+3)}$.
8. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
9. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.
10. $\mu(A_n) = \dfrac{1}{3n(3n+3)}$.

Завдання 11. *На відрізку $[0,1]$ побудуйте таку множину $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, що відрізки $[a_n, b_n], n \in N$, попарно не перетинаються навіть своїми кінцями, а лінійна міра Лебега $\mu(A)$ дорівнює:*

1. $\mu(A) = 0{,}5$.
2. $\mu(A) = 0{,}6$.
3. $\mu(A) = 0{,}7$.
4. $\mu(A) = 0{,}8$.
5. $\mu(A) = 0{,}9$.
6. $\mu(A) = 0{,}45$.
7. $\mu(A) = 0{,}55$.
8. $\mu(A) = 0{,}65$.
9. $\mu(A) = 0{,}75$.
10. $\mu(A) = 0{,}85$.

Завдання 12. *Нехай $X = [0,10)$, G – півкільце всіх проміжків $[a,b) \in X$, $a \le b$, $m[a,b) = F(b) - F(a)$, μ – лебегове продовження міри m. Вияснiть, чи є вимірними за мірою μ множини A та B, і у випадку вимірності знайдіть міри таких множин, якщо:*

1. $F(x)=\begin{cases}-1, & x\le -2,\\ 2, & -2<x\le 1,\\ 4, & x>1,\end{cases}$ $\quad A=[0,5],\ B=Q\cap[1,3].$

2. $F(x)=\begin{cases}-2, & x\le -3,\\ 1, & -3<x\le 4,\\ 4, & x>4,\end{cases}$ $\quad A=[-1,6],\ B=[1,3]\setminus Q.$

3. $F(x)=\begin{cases}1, & x\le -4,\\ 2, & -4<x\le 1,\\ 7, & x>1,\end{cases}$ $\quad A=[-1,8),\ B=Q\cap(2,6).$

4. $F(x)=\begin{cases}2, & x\le 2,\\ 3, & 2<x\le 6,\\ 6, & x>6,\end{cases}$ $\quad A=(2,\pi],\ B=(1,7)\setminus Q.$

5. $F(x)=\begin{cases}-1, & x\le -4,\\ 4, & -4<x\le 3,\\ 8, & x>3,\end{cases}$ $\quad A=[e,9],\ B=Q\cap\left(3,\sqrt{15}\right].$

6. $F(x)=\begin{cases}-1, & x\le -5,\\ 1, & -5<x\le 9,\\ 4, & x>9,\end{cases}$ $\quad A=[0,5],\ B=[\pi,8]\setminus Q.$

7. $F(x)=\begin{cases}-7, & x\le -1,\\ 6, & -1<x\le 7,\\ 8, & x>7,\end{cases}$ $\quad A=\left[7,5\sqrt{2}\right],\ B=Q\cap[-1,3].$

8. $F(x)=\begin{cases}5, & x\le -2,\\ 6, & -2<x\le 4,\\ 9, & x>4,\end{cases}$ $\quad A=[4,15],\ B=[1,3\pi]\setminus Q.$

9. $F(x)=\begin{cases}-1, & x\le 2,\\ 2, & 2<x\le 5,\\ 7, & x>5,\end{cases}$ $\quad A=[e,\pi],\ B=Q\cap[-2,3].$

10. $F(x)=\begin{cases}3, & x\le -3,\\ 4, & -3<x\le 9,\\ 6, & x>9,\end{cases}$ $\quad A=(2,7),\ B=[1,2e]\setminus Q.$

Завдання 13. *Намалюйте графік функції $f(x)$ і доведіть за означенням вимірність $f(x)$ на її області визначення, якщо:*

1. $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[-2,0),\\ 2, & x=0,\\ x^2, & x\in(0,2].\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\in[-1,1),\\ 0, & x=1,\\ 3-x, & x\in(1,2].\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}-3, & x=-3,\\ 1+x, & x\in(-3,-1),\\ x^2-1, & x\in[-1,1].\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\in(-2,0),\\ 5, & x=0,\\ x+2, & x\in(0,2).\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}2+3x, & x\in[-1,0),\\ 7x-2, & x\in[0,1),\\ 3, & x=1.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}5+2x, & x\in[-2,-1),\\ 5x+2, & x\in[-1,1),\\ 3-x, & x=1.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in[-2,-1),\\ 3, & x=-1,\\ 4-x, & x\in(-1,3).\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\in(-2,1),\\ 5, & x=1,\\ 3-2x, & x\in(1,3].\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\in(-2,0],\\ x^2+3, & x\in(0,2),\\ 3, & x=2.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\in(-2,1),\\ 6, & x=1,\\ 1-x, & x\in(1,2].\end{cases}$

Завдання 14. *Обґрунтуйте наступні твердження, пов'язані з вимірними функціями:*

1. Існують невимірні функції, визначені на вимірній множині, для яких при кожному значенні c множини $M[f=c]$ є вимірними.
2. Якщо $f(x)-$ вимірна функція, то функція $f^n(x), n\in N$, теж вимірна.
3. Якщо $f(x)-$ невід'ємна вимірна функція, то функція $\sqrt[n]{f(x)}, n\in N$, теж вимірна.
4. Функція $f(x)$ може бути і не вимірною, якщо функція $f^2(x)$ вимірна.
5. Границя збіжної за мірою послідовності вимірних функцій є вимірною функцією.

6. Послідовність функцій $f_n(x)$ може збігатися за мірою до двох різних функцій $f(x)$ та $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) \sim g(x)$.
7. Функція $f(x)$ вимірна тоді і тільки тоді, коли при всіх $a,b \in R,\ a < b,$ вимірними є множини $M[a < f < b]$.
8. Функція $f(x)$ вимірна тоді і тільки тоді, коли при всіх $a,b \in R,\ a < b,$ вимірними є множини $M[a \le f \le b]$.
9. Функція $f(x)$ вимірна тоді і тільки тоді, коли при всіх $c \in Q$ вимірними є множини $M[f \le c]$.
10. Функція $f(x)$ вимірна тоді і тільки тоді, коли при всіх $c \notin Q$ вимірними є множини $M[f > c]$.

Завдання 15. *Нехай μ – лінійна міра Лебега. Перевірити, чи на множині $A = [0,2]$ послідовність функцій $f_n(x)$ збігається:*

а) за мірою, б) майже скрізь, в) рівномірно.

Вказати таку функцію $f(x)$ та множину $A_0 \subset A$, на якій послідовність $(f_n(x))$ збігається до $f(x)$ рівномірно, і $\mu(A_0) > 1{,}95$:

1. $f_n(x) = (\cos \pi x)^n$.
2. $f_n(x) = e^{n(x-2)}$.
3. $f_n(x) = \cos^n \pi x$.
4. $f_n(x) = \sin^n \dfrac{2}{x+1}$.
5. $f_n(x) = \cos^n \dfrac{x}{n}$.
6. $f_n(x) = (\sin \pi x)^n$.
7. $f_n(x) = e^{-n\left|x^2-1\right|}$.
8. $f_n(x) = \sin^n \pi x$.
9. $f_n(x) = \cos^n \dfrac{1}{x+2}$.
10. $f_n(x) = \sin^n \dfrac{x}{n}$.

Завдання 16. *Довести, що функція $f(x)$ є простою на відрізку $[0,1]$, і обчислити $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\mu$, якщо він існує, або обґрунтувати не існування такого інтеграла:*

1. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right].$

2. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right].$

3. $f(x)=\left[\frac{16}{\sqrt{x+2}}\right].$

4. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}\right].$

5. $f(x)=\left[\frac{5}{\sqrt{x+1}}\right].$

6. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\right].$

7. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right].$

8. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\right].$

9. $f(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\right].$

10. $f(x)=\left[\frac{8}{\sqrt[3]{x+1}}\right].$

Завдання 17. *Обчислити за означенням інтеграла Лебега* $\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu$, *якщо:*

1. $f(x)=|5x-3|.$
2. $f(x)=|4x-1|.$
3. $f(x)=|3x-2|.$
4. $f(x)=|5x-4|.$
5. $f(x)=|4x-2|.$
6. $f(x)=|2x-1|.$
7. $f(x)=|5x-2|.$
8. $f(x)=|4x-3|.$
9. $f(x)=|3x-1|.$
10. $f(x)=|5x-1|.$

Завдання 18. *Нехай* $f(x)$ *та* $g(x)-$ *інтегровні за Лебегом на множині* E *функції. Доведіть або спростуйте наступні твердження:*

1. Якщо $\int\limits_E f(x)d\mu=0,$ то $f(x)=0$ майже скрізь на $E.$
2. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu=0$ для кожної множини $A\subset E,$ то $f(x)=0$ майже скрізь на $E.$
3. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu=0$ для кожної множини $A\subset E,$ то $f(x)=0$ скрізь на $E.$
4. Якщо $\int\limits_E f(x)d\mu\ge 0,$ то $f(x)\ge 0$ майже скрізь на $E.$

5. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu \geq 0$ для кожної множини $A \subset E,$ то $f(x) \geq 0$ майже скрізь на $E.$

6. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu \geq 0$ для кожної множини $A \subset E,$ то $f(x) \geq 0$ скрізь на $E.$

7. Якщо $\int\limits_E f(x)d\mu = \int\limits_E g(x)d\mu,$ то $f(x) = g(x)$ майже скрізь на $E.$

8. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu = \int\limits_A g(x)d\mu$ для кожної множини $A \subset E,$ то $f(x) = g(x)$ скрізь на $E.$

9. Якщо $\int\limits_E f(x)d\mu \geq \int\limits_E g(x)d\mu,$ то $f(x) \geq g(x)$ майже скрізь на $E.$

10. Якщо $\int\limits_A f(x)d\mu \geq \int\limits_A g(x)d\mu$ для кожної множини $A \subset E,$ то $f(x) \geq g(x)$ майже скрізь на $E.$

Завдання 19. *Доведіть, що функція* $f(x)$ *інтегровна за Лебегом на відрізку* $[0,1]$, *і обчисліть* $\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu,$ *якщо:*

1. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}, x \in [0,1] \cap Q, \\ \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [0,1] \setminus Q. \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} \arcsin x + \arccos x, x \in [0,1] \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4} \right\}, \\ \arcsin x - \arccos x, x \in \left\{ \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4} \right\}. \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}, x \in (0,1), \\ \cos 2x \cdot \cos^2 x, x \in \{0;1\}. \end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{3-2x^2}, x\in[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{n}\right\}, \\ \sqrt{3+2x^2}, x\in[0,1]\cap\left\{\frac{1}{n}\right\}, \end{cases} n\in N.$$

5. $$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x^4+1}, x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \frac{x^3}{x^4+1}, x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]. \end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right], \\ \cos 2x+x, x\in\left(\frac{\pi}{4},1\right]\cup\{0\}. \end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases} \sqrt[5]{(8-3x)^6}, x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right), \\ x+1, x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases} \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}, x\in(0,1)\setminus Q, \\ \sqrt{4+x^5}, x\in[0,1]\cap Q. \end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}, x\in[0,1]\setminus\left\{\frac{\pi}{4n}\right\}, \\ \sin^7 x, x\in\left\{\frac{\pi}{4n}\right\}, \end{cases} n\in N.$$

10. $$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1}, x\in\left(0,\frac{1}{e}\right), \\ e^{3x+2}, x\in\left[\frac{1}{e},1\right]\cup\{0\}. \end{cases}$$

Завдання 20. *Дослідити послідовності функцій* $f_n(x)$ *на збіжність до функції* $f(x)=0$ *на відрізку* $[0,2]$ *а) майже скрізь, б) в середньому, в) в середньому квадратичному:*

1. $f_n(x)=\begin{cases} n^2, \ x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right), \\ 0, \ x\notin\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right). \end{cases}$

2. $f_n(x)=\begin{cases} x, \ x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, \ x\notin\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

3. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{nx}{n^2+1}, \ x\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

4. $f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^n}, \ x\in[0,2]\setminus Q, \\ x^n, \ x\in[0,2]\bigcap Q. \end{cases}$

5. $f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin nx}{n}, x\in[0,2]\setminus Q, \\ nx, \ x\in[0,2]\bigcap Q. \end{cases}$

6. $f_n(x)=\begin{cases} n, \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right), \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^n, \ x\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

7. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, \ x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right), \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^n, x\notin\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right). \end{cases}$

8. $f_n(x)=\begin{cases} n, \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right), \\ \sin\dfrac{\pi x}{n}, x\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

9. $f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos nx}{n}, x\in[0,2]\setminus Q, \\ nx^n, \ x\in[0,2]\bigcap Q. \end{cases}$

10. $f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{x^n}{2^n}, \ x\in[0,2]\setminus Q, \\ nx, \ x\in[0,2]\bigcap Q. \end{cases}$

Завдання 21. *Доведіть , що послідовність функцій* $f_n(x)$ *майже скрізь на відрізку* $[0,1]$ *збігається до деякої функції* $f(x)$; *знайдіть цю функцію та перевірте для послідовності* $(f_n(x))$ *виконання умов теорем: а) Лебега, б) Леві, в) Фату; порівняйте* $\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu$ *та* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n(x)d\mu$:

1. $f_n(x)=\begin{cases} n^3, x\in\left[0,\dfrac{1}{3^n}\right], \\ x^5, x\notin\left[0,\dfrac{1}{3^n}\right]. \end{cases}$

2. $f_n(x)=\begin{cases} 2^n, x\in\left[0,\dfrac{1}{4^n}\right], \\ e^x, x\notin\left[0,\dfrac{1}{4^n}\right]. \end{cases}$

3. $f_n(x)=\begin{cases} n,\ x\in\left[0,\dfrac{1}{2^n}\right], \\ x^n, x\notin\left[0,\dfrac{1}{2^n}\right]. \end{cases}$

4. $f_n(x)=\begin{cases} 3^n,\ x\in\left[\dfrac{1}{4^{n+1}},\dfrac{1}{4^n}\right], \\ \sqrt{x^3}, x\notin\left[\dfrac{1}{4^{n+1}},\dfrac{1}{4^n}\right]. \end{cases}$

5. $f_n(x)=\begin{cases} n^2, x\in\left[\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^n}\right], \\ x^5, x\notin\left[\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^n}\right]. \end{cases}$

6. $f_n(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{n}, x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right], \\ x^3,\ x\notin\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$

7. $f_n(x)=\begin{cases} n^4, x\in\left[\dfrac{1}{4^n},\dfrac{1}{4^{n-1}}\right], \\ x^4, x\notin\left[\dfrac{1}{4^n},\dfrac{1}{4^{n-1}}\right]. \end{cases}$

8. $f_n(x)=\begin{cases} nx, x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right], \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$

9. $f_n(x)=\begin{cases} n,\quad x\in\left[0,\dfrac{1}{n^2}\right], \\ \sin x, x\notin\left[0,\dfrac{1}{n^2}\right]. \end{cases}$

10. $f_n(x)=\begin{cases} nx,\quad x\in\left[0,\dfrac{1}{3^n}\right], \\ \cos x, x\notin\left[0,\dfrac{1}{3^n}\right]. \end{cases}$

Завдання 22. *Доведіть існування і обчисліть інтеграли $\int\limits_E f(x,y)\,d\mu$, якщо E – одиничний квадрат, μ – плоска міра Лебега:*

1. $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, x+y\in Q, \\ x+y, x+y\notin Q. \end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases} 1, x-y\in Q, \\ xy^2, x-y\notin Q. \end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases} x^3, y\in Q, \\ x-y, y\notin Q. \end{cases}$

4. $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, \dfrac{x}{y}\in N, \\ \dfrac{x}{\sqrt{y}}, \dfrac{x}{y}\notin N. \end{cases}$

5. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin y, x\in Q, \\ e^{x+y}, x\notin Q. \end{cases}$

6. $f(x,y)=\begin{cases} y\cos x, x+y\in N, \\ xy, x+y\notin N. \end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, x-y\in N, \\ x+y^2, x-y\notin N. \end{cases}$

8. $f(x,y)=\begin{cases} e^{2x-y}, \dfrac{y}{x}\in N, \\ \dfrac{y}{x^2+1}, \dfrac{y}{x}\notin N. \end{cases}$

9. $f(x,y)=\begin{cases} e^{x+2y}, x^2+y\in Q, \\ \sqrt{xy}, x^2+y\notin Q. \end{cases}$ 10. $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, xy\in Q, \\ e^{x-y}, xy\notin Q. \end{cases}$

Завдання 23. *На області визначення функції* $f(x)$ *знайдіть її варіаційну функцію* $v(x)$ *і намалюйте графіки цих функцій:*

1. $f(x)=\begin{cases} x-4, x\in(-2,-1), \\ 2, x=-1, \\ \sqrt{x+1}, x\in(-1,1]. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2-x, x\in[-3,-1], \\ x^2+3, x\in(-1,1), \\ 5, x=1. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 4+2x, x\in(-2,1), \\ 2, x=1, \\ 3x^2-6, x\in(1,2). \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2, x=-2, \\ 5+x, x\in(-2,1), \\ x^2-4, x\in[1,3]. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, x\in(-2,1), \\ 3, x=1, \\ x+3, x\in(1,2]. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -2, x=-2, \\ 2+x, x\in(-2,1], \\ 3-x^2, x\in(1,2]. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 3+2x, x\in[-2,-1], \\ 3x-2, x\in(-1,1), \\ 4, x=1. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 2-x, x\in[-3,-1], \\ x+3, x\in(-1,1), \\ -2, x=1. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 2-x, x\in[-3,-2], \\ x^2-1, x\in(-2,1), \\ 5, x=1. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 5, x=-1, \\ 3+x, x\in(-1,0], \\ 2x^2-1, x\in(0,2]. \end{cases}$

Завдання 24. *Для функції* $f(x)$*, визначеної на відрізку* $[a,b]$*, знайти її невизначений інтеграл* $F(x)=\int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$*:*

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, x\in[-3,1), \\ 6, x=1, \\ 1-2x, x\in(1,2]. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 4+3x, x\in[-2,0], \\ x^2+2, x\in(0,2), \\ -3, x=2. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-2, x\in[-2,-1), \\ 3, x=-1, \\ 4-2x, x\in(-1,2]. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 5+3x, x\in[-2,-1), \\ 5x+1, x\in[-1,1), \\ 3, x=1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 2+4x, x\in[-1,0), \\ 7x-3, x\in[0,1), \\ 2, x=1. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -3, x=-3, \\ 1+2x, x\in(-3,-1), \\ x^2-2, x\in[-1,2]. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 5-2x^2, x\in[-2,0), \\ 3, x=0, \\ x+1, x\in(0,3]. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x+1, x\in[-1,1), \\ 0, x=1, \\ 3-2x, x\in(1,2]. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 1-2x, x\in[-2,0), \\ 3, x=0, \\ x^2-2, x\in(0,2]. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, x\in[-2,1), \\ 5, x=1, \\ 4-2x, x\in(1,3]. \end{cases}$

Завдання 25. *Обчисліть інтеграл* $\int\limits_{[0,3)} f(x)dF(x)$, *якщо:*

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \ x\le\dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-5, \ x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} x^2-1, \ 0\le x\le 1, \\ 2\sqrt{x}, \ 1<x\le 2, \\ 3-2x, \ 2<x<3. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, \ x\le\dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-7, \ x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} x^2-2, \ 0\le x\le 1, \\ 4\sqrt{x}, \ 1<x\le 2, \\ 1-2x, \ 2<x<3. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 4x+1, \ x\le\dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-2, \ x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} x^2+1, \ 0\le x\le 1, \\ 2\sqrt{x}, \ 1<x\le 2, \\ 5-2x, \ 2<x<3. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-1, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2+2, & 0\le x\le 1, \\ 4\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 3-4x, & 2<x<3. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 4x-1, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-4, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\le x\le 1, \\ 4\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 2-3x, & 2<x<3. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 4x-3, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-6, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x\le 1, \\ 2\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 4-3x, & 2<x<3. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 2x-2, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-8, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2+2, & 0\le x\le 1, \\ 4\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 1-4x, & 2<x<3. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 4x+4, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2+1, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2-3, & 0\le x\le 1, \\ 2\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 5-3x, & 2<x<3. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 4x-2, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-5, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2-2, & 0\le x\le 1, \\ 4\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 4-2x, & 2<x<3. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x\le \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-2, & x>\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} x^2+3, & 0\le x\le 1, \\ 2\sqrt{x}, & 1<x\le 2, \\ 2-4x, & 2<x<3. \end{cases}$

Список літератури.

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368с.
2. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
3. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
4. *Гелбаум И.М., Олмстед Дж. Т.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251с.
5. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
6. *Кириллов А.А, Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 384с.
7. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520с.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272с.
10. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
11. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
13. *Очан Ю.С.* Сборник задач по функциональному анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
14. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
15. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.

16. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.
17. *Фихтенгольц Г.М*. Основы математического анализа, том I. – М.: Наука, 1968. – 440с.
18. *Фихтенгольц Г.М*. Основы математического анализа, том II. – М.: Наука, 1968. – 464с.
19. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
20. *Шилов Г.Е*. Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 436с.
21. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Федак Іван Васильович
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напряму підготовки «Математика»

Підписано до друку 15 січня 2011р.
Формат 61x84, 1/16, папір офсетний, друк цифровий
Ум. обсяг 10,5 друк. арк. Наклад 300 пр.
Замовлення № 16 від 15.01.2011

Видавництво «Сімик»
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. Незалежності, 46/111,
тел.: (03422) 3-25-91, e-mail: symyk@com.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єкта
видавничої справи серія ІФ №11 від 27.03.2001 року.

Видрукувано: приватний підприємець Голіней О.М.,
76008, м. Івано-Франківськ,
вул. Галицька, 128,
тел. (0342) 58-04-32