Збірник праць до 80-річчя Б.Й.Пташника

УДК 517.956.6

Іван Савка[1], Павло Василишин[2], Тарас Гой[3]

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ БАГАТОТОЧКОВОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

У циліндричній області, що є декартовим добутком відрізка на багатовимірний тор, досліджено задачу спряження з нелокальною багатоточковою умовою за часовою змінною для пароболо-гіперболічного рівняння другого порядку. Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі у просторах Соболєва. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

1. Вступ

Процеси у двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями приводять до розгляду задач спряження, коли на одній частині області задано параболічне рівняння, а на іншій — гіперболічне [1]. При цьому особлива увага приділяється вибору крайових умов і умов спряження на межі розділу підобластей (контакту шарів) цього середовища. Такий вибір зумовлений необхідністю пошуку коректно поставлених крайових задач, сформульованих одночасно для обох диференціальних рівнянь.

Крайові задачі з різними типами умов для параболо-гіперболічних рівнянь другого порядку вивчались багатьма авторами (Врагов В., Джураєв Т., Єлєєв В., Корзюк В., Нахушев А., Сабітов К., Салахітдінов М., Lions J., Al-Droubi A., Ashyralyev A. та інші). Зокрема, у роботах Сабітова К.Б. та його учнів (наприклад, див. [7]) методом спектрального аналізу для параболо-гіперболічного рівняння в прямокутній області двох змінних (t, x) досліджено крайові задачі спряження з локальними та нелокальними умовами за змінними x та t, а у роботі [9] — нелокальна багатоточкова задача для гіперболо-параболічного рівняння в гільбертовому просторі із самоспряженим додатно визначеним оператором.

[1] *ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, s-i@ukr.net*

[2] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, pbvasylyshyn@ukr.net*

[3] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, tarasgoy@yahoo.com*

У роботі [8] встановлено коректну розв'язність у шкалі просторів Соболєва задачі спряження з інтегральною умовою за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими змінними для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку, а у роботі [5] із використанням метричного підходу досліджено задачу з нелокальною за часом умовою, що містить інтегральний доданок, в класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними.

2. Формулювання задачі

Нехай $\mathcal{D}^p = (-\alpha, \beta) \times \Omega^p$ — циліндрична область змінних (t, x), де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $p \in \mathbb{N}$. Поверхня $\{t = 0\} \times \Omega^p$ розбиває область $\mathcal{D}^p$ на дві підобласті: $\mathcal{D}^p_+ = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}$ і $\mathcal{D}^p_- = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}$.

В області $\mathcal{D}^p$ досліджуємо задачу спряження при $t = 0$ з m-багатоточковою нелокальною умовою, яка пов'язує шуканий розв'язок $u(t, x)$ у r точках при $t < 0$ та у $(m - r)$ точках при $t > 0$, для параболо-гіперболічного рівняння:

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - b\Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_+, \\ u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_-, \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} u(-\varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u(\varepsilon, x), \ \lim_{\varepsilon \to +0} u_t(-\varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u_t(\varepsilon, x), \ x \in \Omega^p, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j u(t_j, x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega^p, \tag{3}$$

де $a, b \in \mathbb{R}, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a > 0$, $b > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $-\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < t_{r+2} < \ldots < t_{m-1} < t_m = \beta$, $\varphi(x)$ — задана функція.

Надалі використовуватимемо такі простори функцій:

$\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва, отриманий поповненням множини скінченних тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k e^{i(k,x)}$, де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$, за нормою

$$\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(1 + \lambda_k^2\right)^q |\varphi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \lambda_k = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2}.$$

$\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$, — простір функцій

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)} \qquad (u_k(t) \in \mathbf{C}^n(I))$$

таких, що для кожного фіксованого $t \in I$ функції

$$\partial^j u(t,x)/\partial t^j \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) e^{i(k,x)}, \quad 0 \le j \le n,$$

належать простору $\mathbf{H}_q$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ задаємо формулою

$$\|u;\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in I} \|\partial^j u(t,x)/\partial t^j;\mathbf{H}_q\|^2.$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(3) *називаємо функцію* $u(t,x)$ *з класу*

$$\mathbf{C}^1([0,\beta];\mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha,0];\mathbf{H}_q),$$

для якої справжуються рівності

$$\|Lu;\mathbf{C}([-\alpha,0];\mathbf{H}_{q-2})\| = 0, \quad \|Lu;\mathbf{C}([0,\beta];\mathbf{H}_{q-2})\| = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|u(-\varepsilon,\cdot)-u(\varepsilon,\cdot);\mathbf{H}_q\| = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \|u_t(-\varepsilon,\cdot)-u_t(\varepsilon,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}\| = 0, \tag{5}$$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} \mu_j u(t_j,\cdot) - \varphi;\mathbf{H}_q \Big\| = 0. \tag{6}$$

3. Умови коректної розв'язності задачі

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}. \tag{7}$$

З умов (4)-(6) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ коефіцієнт $u_k(t)$ ряду (7) є розв'язком задачі

$$\begin{cases} u_k'(t) + b\lambda_k^2 u_k(t) = 0, & 0 < t < \beta \\ u_k''(t) + a^2\lambda_k^2 u_k(t) = 0, & -\alpha < t < 0, \end{cases} \tag{8}$$

з умовами спряження при $t = 0$

$$u_k(-0) = u_k(+0), \ u_k'(-0) = u_k'(+0) \tag{9}$$

та нелокальною багатоточковою умовою

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j u_k(t_j) = \varphi_k, \tag{10}$$

де φ_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$.

Загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$u_k(t) = \begin{cases} D_k e^{-b\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ A_k \cos(a\lambda_k t) + B_k \dfrac{\sin(a\lambda_k t)}{a\lambda_k}, & t < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{11}$$

де A_k, B_k і D_k — довільні сталі, для вектора $k = \vec{0}$ значення виразу $\frac{\sin(a\lambda_k t)}{a\lambda_k}$ приймаємо рівним t. Функція (11) задовольняє умови (9) тільки тоді, коли

$$A_k = D_k, \qquad B_k = -b\lambda_k^2 D_k.$$

Розв'язок рівняння (8), що справджує умови спряження (9), зображується формулою

$$u_k(t) = \begin{cases} D_k e^{-b\lambda_k^2 t}, & t \geq 0, \\ D_k\big(\cos(a\lambda_k t) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t)\big), & t < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Для знаходження коефіцієнтів D_k скористаємось умовою (10). Тоді

$$D_k \delta_k = \varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \left(\cos(a\lambda_k t_j) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t_j)\right) + \sum_{j=1}^{m-r} \mu_j e^{-b\lambda_k^2 t_{r+j}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\big(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p\big) \qquad \delta_k \neq 0. \tag{12}$$

Якщо виконуються умови теореми 1, то формальний розв'язок задачі (1)–(3) зображується рядом

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0}{\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} u_k(t) e^{i(k,x)}, \tag{13}$$

де

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k \delta_k^{-1}\big(\cos(a\lambda_k t) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t)\big), & t < 0, \\ \varphi_k \delta_k^{-1} e^{-b\lambda_k^2 t}, & t \geq 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{14}$$

Питання існування розв'язку задачі (1)–(3) у просторі

$$\mathbf{C}^1\big([0,\beta]; \mathbf{H}_q\big) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha,0]; \mathbf{H}_q),$$

взагалі кажучи, пов'язанt з проблемою малих знаменників [6], яка полягає в тому, що відмінні від нуля вирази δ_k можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів k. Це спричиняє розбіжність ряду (13) у вказаних шкалах просторів.

Якщо малі знаменники δ_k мають поліноміальну чи експоненційну асимтотичну поведінку при $\lambda_k \to \infty$, то за відповідного обмеження на праву частину нелокальної умови (3) можна встановити існування єдиного розв'язку задачі (1)–(3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (12) *та існує така стала* $\gamma > 0$, *що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$

$$|\delta_k| \geq \lambda_k^{-\gamma}. \tag{15}$$

Тоді, якщо $\varphi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+3}$, *то існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1)–(3), *який зображується рядом* (13); *при цьому виконуються нерівності*

$$\|u; \mathbf{C}^1([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q)\| \leq C_1 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+3}\|,$$

$$\|u; \mathbf{C}^1([0, \beta]; \mathbf{H}_q)\| \leq C_2 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+2}\|,$$

де додатні сталі C_1 *і* C_2 *не залежать від функції* φ.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{K}$ множину тих векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких виконується протилежна до (15) нерівність, тобто

$$\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{Z}^p : |\delta_k| < \lambda_k^{-\gamma}\}.$$

Оскільки за умовою теореми множина $\mathcal{K}$ є скінченна та $\inf\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} |\delta_k| > 0$, то для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$|\delta_k| \geq C_0 \lambda_k^{-\gamma} \tag{16}$$

зі сталою $C_0 = \min\left\{1, \min\limits_{k \in \mathcal{K}} \left\{\lambda_k^{\gamma} |\delta_k|\right\}\right\} > 0$.

Враховуючи оцінку (16), з формули (14) випливають такі оцінки:

$$|u_k^{(j)}(t)| \leq (1 + b/a) a^j \lambda_k^{j+1} \frac{|\varphi_k|}{|\delta_k|} \leq (1 + b/a)(1 + a^2) C_0 \lambda_k^{3+\gamma} |\varphi_k|, \; j = 0, 1, 2,$$

для $t \in [-\alpha, 0]$,

$$|u_k^{(j)}(t)| \leq b^j \lambda_k^j \frac{|\varphi_k|}{|\delta_k|} \leq (1 + b) C_0 \lambda_k^{2+\gamma} |\varphi_k|, \quad j = 0, 1, \quad t \in [0, \beta].$$

Тоді для розв'язку u задачі (1)–(3) отримуємо нерівності

$$\|u; \mathbf{C}^2([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q)\|^2 = \sum_{j=0}^{2} \max_{t \in [-\alpha, 0]} \|\partial^j u(t, x)/\partial t^j; \mathbf{H}_q\|^2 \leq$$

$$\leq 3(1+b/a)^2(1+a^2)^2C_0^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(1+\lambda_k^2\big)^q\lambda_k^{2(3+\gamma)}|\varphi_k|^2\leq$$

$$\leq 3(1+b/a)^2(1+a^2)^2C_0^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(1+\lambda_k^2\big)^{q+3+\gamma}|\varphi_k|^2=C_1^2\|\varphi;\mathbf{H}_{q+\gamma+3}\|^2,$$

$$\|u;\mathbf{C}^1([0,\beta];\mathbf{H}_q)\|^2=\max_{t\in[0,\beta]}\|u;\mathbf{H}_q\|^2+\max_{t\in[0,\beta]}\|u_t;\mathbf{H}_q\|^2\leq$$

$$\leq 2(1+b)^2C_0^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(1+\lambda_k^2\big)^{q+2+\gamma}|\varphi_k|^2=C_2^2\|\varphi;\mathbf{H}_{q+\gamma+2}\|^2,$$

де

$$C_1=\sqrt{3}(1+b/a)(1+a^2)C_0,\quad C_2=\sqrt{2}(1+b)^2C_0,$$

з яких випливає доведення теореми. ■

4. Оцінка малих знаменників задачі

З'ясуємо тепер можливість виконання оцінки (15). Для цього скористаємось метричним підходом [4], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі (коефіцієнтів рівняння, коефіцієнтів умов або параметрів області), для яких вказані оцінки виконуються або порушуються.

Лема 1 (Бореля–Кантеллі, [2]). *Нехай* $\{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— послідовність вимірних (за мірою Лебега) множин з* $\mathbb{R}$ *таких, що*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{meas}\mathcal{A}_m<\infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}$ *множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин цієї послідовності, дорівнює нулю, тобто*

$$\operatorname{meas}\mathcal{A}=0,\qquad \mathcal{A}=\limsup_{m\to\infty}\mathcal{A}_m=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{r=m}^{\infty}\mathcal{A}_r.$$

Означення 2. *Множину* $E(f,\varepsilon,I)$*, яка задається рівністю*

$$E(f,\varepsilon,I)=\{t\in I:|f(t)|<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0,$$

будемо називати $\varepsilon-$*винятковою множиною для функції* f *на відрізку* I*,* $I\subset\mathbb{R}$.

Лема 2 (Пяртлі, [3]). *Якщо функція* $f\in\mathbf{C}^n(I)$ *є такою, що*

$$\big(\forall t\in I\big)\quad |f^{(n)}(t)|\geq\delta>0,$$

то міра $\varepsilon-$*виняткової множини для функції* f *справджує нерівність*

$$\operatorname{meas}E(f,\varepsilon,I)\leq 2n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}.$$

Позначимо через I_T деякий фіксований відрізок $I_T = [T_1, T_2]$ прямої $\mathbb{R}$, де $T_1 < T_2 < 0$.

Теорема 3. *Якщо для фіксованого $s \in \{1, \ldots, r\}$ виконуються нерівності*

$$\mu_s \neq 0, \qquad |\mu_s| > 2 \sum_{j=1, j\neq s}^{r} |\mu_j|,$$

то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $t_s \in I_T$ оцінка (15) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > p-1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення теореми проведемо для $s = 1$.

Розглянемо вирази δ_k, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$, як функції змінної t_1 на відрізку I_T, а саме:

$$f_k(t_1) := \delta_k = \mu_1 \left(\cos(a\lambda_k t_1) - \frac{b\lambda_k}{a} \sin(a\lambda_k t_1) \right) + \Phi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

де через Φ_k позначено вираз, який не залежать від t_1, тобто

$$\Phi_k = \sum_{j=2}^{r} \mu_j \left(\cos(a\lambda_k t_j) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t_j) \right) + \sum_{j=1}^{m-r} \mu_{r+j} e^{-b\lambda_k^2 t_{r+j}}.$$

Запровадимо наступні ε-виняткові множини $\mathcal{A}_k$ при $\varepsilon = \lambda_k^{-\gamma}$:

$$\mathcal{A}_k = E(f_k, \lambda_k^{-\gamma}, I_T) = \{t_1 \in I_T : |f_k(t_1)| < \lambda_k^{-\gamma}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

а також позначимо через $\mathcal{A}$ множину тих чисел t_1, які належать нескінченній кількості множин множин $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$.

Продиференціюємо функцію f_k за змінною t_1. Тоді отримаємо, що

$$f_k'(t_1) = -\mu_1 \left(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \right).$$

Оскільки

$$a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) f_k(t_1) + \cos(a\lambda_k t_1) f_k'(t_1) =$$

$$= a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Big(\mu_1 \cos(a\lambda_k t_1) - \mu_1 \frac{b\lambda_k}{a} \sin(a\lambda_k t_1) + \Phi_k \Big) -$$

$$-\mu_1 \cos(a\lambda_k t_1) \Big(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Big) =$$

$$= a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Phi_k - \mu_1 b \lambda_k^2,$$

то

$$a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1)\big(f_k(t_1) - \Phi_k\big) + \cos(a\lambda_k t_1) f_k'(t_1) = -\mu_1 b \lambda_k^2,$$

звідки

$$-\frac{\mu_1 b}{a}\lambda_k = \sin(a\lambda_k t_1)\big(f_k(t_1) - \Phi_k\big) + \cos(a\lambda_k t_1)\frac{f_k'(t_1)}{a\lambda_k}.$$

Таким чином, у кожній точці $t_1 \in I_T$ виконується нерівність

$$\frac{|\mu_1| b}{a}\lambda_k \le |f_k(t_1) - \Phi_k| + \frac{|f_k'(t_1)|}{a\lambda_k} \le 2\max\left\{|f_k(t_1) - \Phi_k|, \frac{|f_k'(t_1)|}{a\lambda_k}\right\}. \quad (17)$$

Полічимо тепер кількість нулів на відрізку I_T функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_1)$, які визначаються формулами

$$g_k^+(t_1) = f_k(t_1) - \Phi_k + \frac{f_k'(t_1)}{a\lambda_k}, \quad g_k^-(t_1) = f_k(t_1) - \Phi_k - \frac{f_k'(t_1)}{a\lambda_k}.$$

Для цих функцій справедливі зображення

$$g_k^+(t_1) = \mu_1\big(1 - \tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\cos(a\lambda_k t_1) - \mu_1\big(1 + \tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\sin(a\lambda_k t_1) =$$

$$= -\mu_1\sqrt{2\big(1 + \tfrac{b^2}{a^2}\lambda_k^2\big)}\sin(a\lambda_k t_1 - \phi_k),$$

$$g_k^-(t_1) = \mu_1\big(1 + \tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\cos(a\lambda_k t_1) + \mu_1\big(1 - \tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\sin(a\lambda_k t_1) =$$

$$= \mu_1\sqrt{2\big(1 + \tfrac{b^2}{a^2}\lambda_k^2\big)}\cos(a\lambda_k t_1 - \phi_k),$$

де

$$\phi_k = \operatorname{arctg}\frac{a - b\lambda_k}{a + b\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{0\}.$$

Кількість нулів функції $g_k^+(t_1)$ (відповідно, функції $g_k^-(t_1)$) дорівнює кількості цілих чисел m_1 (відповідно, цілих чисел m_2), які справджують нерівність

$$\frac{T_1 a\lambda_k - \phi_k}{\pi} \le m_1 \le \frac{T_2 a\lambda_k - \phi_k}{\pi}$$

$$\left(\frac{T_1 a\lambda_k - \phi_k - \pi/2}{\pi} \le m_2 \le \frac{T_2 a\lambda_k - \phi_k - \pi/2}{\pi}\right).$$

Очевидно, що для фіксованого вектора $k \ne 0$ кожна з функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_1)$ може мати не більше ніж $C_3\lambda_k$ нулів, де

$$C_3 = C_3(I_T, a) = 1 + \frac{a}{\pi}(T_2 - T_1).$$

Позначимо через $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ різні нулі обох функцій $g_k^+(t_1)$, $g_k^-(t_1)$, які належать проміжку (T_1, T_2). Вважаючи, що точки $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ записано у порядку зростання $\xi_k^1 < \ldots < \xi_k^{\ell(k)}$, зробимо розбиття відрізка I_T цими точками наступним чином:

$$I_T = \bigcup_{j=0}^{\ell(k)} I_T^j, \qquad I_T^j = [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}], \tag{18}$$

де $\xi_k^0 = T_1$, $\xi_k^{\ell(k)+1} = T_2$. На кожному відрізку I_T^j, $j = 0, 1, \ldots, \ell(k)$, обидві функції $g_k^+(t_1)$, $g_k^-(t_1)$ зберігають знак, а відтак із нерівності (17) одержуємо, що

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k(t_1) - \Phi_k| \geq \frac{|\mu_1| b}{2a} \lambda_k \tag{19}$$

або

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k'(t_1)| \geq \frac{|\mu_1| b}{2} \lambda_k^2, \tag{20}$$

Якщо на відрізку I_T^j виконується умова (19), то жодна точка цього відрізка не може належати множині $\mathcal{A}_k$ для досить великого λ_k і $\gamma > 0$. Дійсно, з нерівностей

$$\frac{|\mu_1| b}{2a} \lambda_k \leq |f_k(t_1) - \Phi_k| \leq |f_k(t_1)| + |\Phi_k| \leq \lambda_k^{-\gamma} + \frac{b}{a} \lambda_k \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j|$$

випливає, що має виконуватись нерівність

$$\frac{b}{a} \lambda_k \left(\frac{|\mu_1|}{2} - \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| \right) \leq 1 + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j|.$$

За умовою теореми $|\mu_1| > 2 \sum_{j=2}^{r} |\mu_j|$, тому остання нерівність не виконується при

$$\lambda_k > \widetilde{\lambda} := \frac{a}{b} \left(1 + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j| \right) \left(\frac{|\mu_1|}{2} - \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| \right)^{-1}.$$

Тому при $\lambda_k > \widetilde{\lambda}$ і $\gamma > 0$ маємо $\mathcal{A}_k \cap I_T^j = \emptyset$, звідки

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \begin{cases} C_4, & 0 < \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}, \\ 0, & \lambda_k > \widetilde{\lambda}, \end{cases}$$

де $C_4 = \max\limits_{0 < \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}} \{\operatorname{meas} \mathcal{A}_k\}$.

Якщо ж на відрізку I_T^j виконується умова (20), то за лемою Пяртлі (при $n = 1$) для довільного $\gamma \in \mathbb{R}$ отримуємо оцінку

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|} \lambda_k^{-2-\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}.$$

Із рівності $\operatorname{meas} \mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{\ell(k)} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j$ та оцінок

$$\ell(k) \leq C_3 \lambda_k, \quad \max_j \{\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j\} \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|} \lambda_k^{-2-\gamma}$$

для $\lambda_k > \widetilde{\lambda}$ випливає, що

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \leq C_5 \lambda_k^{-1-\gamma}, \quad C_5 = \tfrac{4C_3}{b|\mu_1|}, \ \gamma > 0, \ \lambda_k > \widetilde{\lambda}.$$

Таким чином, при $\gamma > p - 1$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k$ є збіжним. Тому за лемою Бореля–Кантеллі $\operatorname{meas} \mathcal{A} = 0$ при $\gamma > p-1$. Отже, для кожного $t_1 \in I_T \backslash \mathcal{A}$ існує таке число $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(t_1)$, що оцінка $|\delta_k| \geq \lambda_k^{-\gamma}$ виконується для всіх $\lambda_k > \overline{\lambda}$. Теорему доведено. ∎

Зауважимо, що теорема 3 справджується й без умови

$$|\mu_s| > 2 \sum_{j=1, j \neq s}^{r} |\mu_j|,$$

але тоді показник γ повинен бути більшим, а саме $\gamma > 2p - 1$.

Теорема 4. *Якщо $\mu_s \neq 0$ для фіксованого $s \in \{1, \ldots, r\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $t_s \in I_T$ оцінка* (15) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > 2p - 1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення теореми знову проведемо для $s = 1$. Будемо використовувати ті ж самі позначення, що при доведенні теореми 3.

Двічі продиференціюємо функцію f_k:

$$f_k'(t_1) = -\mu_1 \left(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \right),$$

$$f_k''(t_1) = -\mu_1 \left(a^2 \lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) - ab\lambda_k^3 \sin(a\lambda_k t_1) \right).$$

Тоді одержуємо диференціальне рівняння

$$\sin(a\lambda_k t_1) f_k''(t_1) - a\lambda_k \cos(a\lambda_k t_1) f_k'(t_1) = \mu_1 ab\lambda_k^3,$$

з якого випливає нерівність

$$|\mu_1| b\lambda_k^2 \leq \frac{|f_k''(t_1)|}{a\lambda_k} + |f_k'(t_1)| \leq 2 \max \left\{ |f_k'(t_1)|, \frac{|f_k''(t_1)|}{a\lambda_k} \right\}. \tag{21}$$

Можна аналогічно показати, що кількість нулів функцій $h_k^+(t_1)$ і $h_k^-(t_1)$ на відрізку I_T, де

$$h_k^+ = f_k'(t_1) + \frac{f_k''(t_1)}{a\lambda_k}, \quad h_k^- = f_k'(t_1) - \frac{f_k''(t_1)}{a\lambda_k},$$

не перевищує $\widetilde{C}_3\lambda_k$, $\widetilde{C}_3$ — деяка додатна стала.

Далі зробимо розбиття (18) відрізка I_T, в якому $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ — всі різні нулі обох функцій $h_k^+(t_1)$, $h_k^-(t_1)$, які належать проміжку (T_1, T_2).

Із нерівності (21) отримаємо такі альтернативи на відрізку I_T^j:

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k'(t_1)| \geq \tfrac{|\mu_1| b}{2}\lambda_k^2 \tag{22}$$

або

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k''(t_1)| \geq \tfrac{|\mu_1| ab}{2}\lambda_k^3.$$

Якщо на відрізку I_T^j виконується умова (22), то за лемою Пяртлі для довільного $\gamma \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|}\lambda_k^{-2-\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

в іншому разі — оцінка

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{8}{ab|\mu_1|}\lambda_k^{\frac{-3-\gamma}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

Із нерівності для кількості $\ell(k)$ нулів функцій $h_k^+(t_1)$ і $h_k^-(t_1)$ та оцінок для мір множин $\mathcal{A}_k \cap I_T^j$ випливає, що

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{\ell(k)} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq C_6 \lambda_k^{\frac{-\gamma-1}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

де $C_6 = \frac{4\widetilde{C}_3}{b|\mu_1|} \max\left\{1, \frac{2}{a}\right\}$, $\gamma > -1$.

Таким чином, ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k$ мажорується збіжним рядом при $\gamma > 2p - 1$. На підставі леми Бореля–Кантеллі отримуємо, що міра Лебега множина тих точок $t_1 \in \mathcal{A}$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві. Теорему доведено. ■

1. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – **3**, Вып. 3(87). – С. 3–19.

2. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К. : Вища школа, 1979. – 408 с.

3. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісник НУ „Львівська політехніка“. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.

4. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

5. *Кузь А.М., Пташник Б.Й.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 635–644.

6. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

7. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – **89**, № 4. – С. 596–602.

8. *Савка І.Я., Симотюк М.М.* Задача спряження з інтегральною умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – 2015. – **1**, № 28. – С. 72–77.

9. *Ashyralyev A., Ozdemir Y.* On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations // Taiwanese J. Math. – 2007. – **11**, No. 4. – P. 1075–1089.

Ivan Savka, Pavlo Vasylyshyn, Taras Goy

CONJUGATE PROBLEM WITH MULTIPOINT NONLOCAL CONDITION IN TIME FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN A CYLINDRICAL DOMAIN

In the Cartesian product of the time segment and the spatial multidimensional torus, the conjugate problem with multipoint nonlocal condition in time for parabolic-hyperbolic equation is considered. The conditions for existence of the unique solution to the problem in Sobolev spaces are established. The metric theorems on the lower bounds of small denominators appearing in the solution of the problem are proved.