УДК 517.956

О. Д. Власій [1], Т. П. Гой [1], Б. Й. Пташник [1,2]

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГОЛОВНІЙ ЧАСТИНІ ОПЕРАТОРА

У циліндричній області досліджено коректність задачі з нелокальними умовами для слабко нелінійних рівнянь високого порядку з частинними похідними та змінними коефіцієнтами в лінійній частині оператора. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі встановлено умови класичної розв'язності задачі.

Вступ. Нелокальні крайові задачі для диференціальних операторів із частинними похідними є, взагалі, некоректними, а питання про їх розв'язність часто пов'язане з проблемою малих знаменників. Задачі з нелокальними крайовими умовами, що узагальнюють умови періодичності, для нелінійних гіперболічних рівнянь і систем вивчались, зокрема, в [1, 5, 8–10].

У даній праці, яка є розвитком робіт [2, 11], встановлено умови класичної розв'язності задачі з двоточковими нелокальними умовами за виділеною змінною t та крайовими умовами за $x = (x_1, ..., x_p)$ для слабко нелінійних безтипних рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами в лінійній частині оператора.

1. Нижче будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{Z}^p$ ($\mathbb{Z}^p_+$) – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими (невід'ємними цілими) координатами; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$; $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{Z}^p_+$; $|h| = h_1 + \ldots + h_p$; $G \subset \mathbb{R}^p$ – нормальна[1] обмежена область [3] із гладкою межею ∂G; $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in G\}$; $C^{h,\gamma}$ – клас визначених в $\overline{G}$ функцій, h-ті похідні яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником γ, $0 < \gamma \leqslant 1$; $A^{h,\gamma}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать $C^{h,\gamma}$.

2. В області Q розглянемо задачу

$$P[u] \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2s} L^{n-s} u(t,x) = f(t,x) + \varepsilon F(t, x, \bar{u}(t,x)), \qquad (1)$$

$$M_\theta[u] \equiv \sum_{l=1}^{2n} \sum_{q=0}^{n-[l/2]} b_\theta^{ql} L^q \left(\left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}\right|_{t=T} \right) = \varphi_\theta(x), \quad \theta = 1, \ldots, 2n, \qquad (2)$$

$$L^{q-1} u\big|_{\partial G} = 0, \quad q = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

де a_s, $b_\theta^{ql} \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 2$; $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; $L \equiv c(x) - \sum\limits_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ – диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами, еліптичний в $\overline{G}$, $L^0 u = u$, $L^q u = L(L^{q-1} u)$, $q = 1, \ldots, n$; $\bar{u}(t,x) = \left\{ \frac{\partial^{l+|h|} u}{\partial t^l \partial x_1^{h_1} \cdots \partial x_p^{h_p}}, 0 \leqslant l + |h| \leqslant N \right\}$, де стала N, $0 \leqslant N \leqslant 2n-3$, буде визначена нижче.

Функція $f(t,x)$ неперервна за змінною t і досить гладка за x в області $\overline{Q}$; функція $F(t, x, \bar{y})$, де $\bar{y} = \{y_{lh} \in \mathbb{C},\ 0 \leqslant l + |h| \leqslant N\}$, неперервна за t і досить гладка за іншими змінними в області $\overline{D}_N(W)$, де $D_N(W) = \Big\{(t, x, \bar{y}) : (t,x) \in Q,$

[1] Область називається нормальною, якщо в цій області розв'язною є задача Діріхле для рівняння Лапласа при довільній неперервній межовій функції.

$\left.\sum\limits_{0\leqslant l+|h|\leqslant N}|y_{lh}|<W<\infty\right\}$, тобто $F\in C^{(0,\zeta)}(D_N(W))$, де ζ – достатньо велике натуральне число.

Припустимо, що $c(x)\geqslant 0$, $x\in\overline{G}$, $c\in C^{2n-2,\gamma}$, $a_{ij}\in C^{2n-1,\gamma}$, $i,j=1,\dots,p$, $\overline{G}\in A^{2n,\gamma}$. Тоді задача на власні значення [3, 6]

$$LX=\lambda X,\quad X|_{\partial G}=0$$

має повну ортогональну (надалі вважатимемо її ортонормованою) в $L_2(G)$ систему класичних власних функцій $\mathbf{X}=\{X_k(x),k\in\mathbb{N}\}$, а всі власні значення цієї задачі $\lambda_k,k\in\mathbb{N}$, множину яких позначимо через $\mathbf{\Lambda}$, є додатними. При цьому $X_k\in C^{2n}(\overline{G})$, $k\in\mathbb{N}$, і справджуються такі оцінки:

$$C_1k^{2/p}\leqslant\lambda_k\leqslant C_2k^{2/p},\quad 0<C_1\leqslant C_2,\quad k\in\mathbb{N},\tag{4}$$

$$\max_{x\in\overline{G}}\left|\frac{\partial^{|h|}X_k(x)}{\partial x_1^{h_1}\cdots\partial x_p^{h_p}}\right|\leqslant C_3\lambda_k^{p/4+|h|/2},\quad C_3=C_3(|h|),\ |h|=0,1,\dots,2n,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{5}$$

Тут і надалі C_j, $j=1,\dots,16$, – додатні сталі, які не залежать від k.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x).\tag{6}$$

Вважаємо, що функції $f(t,x)$, $F(t,x,\bar{u}(t,x))$ та $\varphi_\theta(x)$, $\theta=1,\dots,2n$, розвиваються у ряди Фур'є за ортонормованою системою $\mathbf{X}$:

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x),\qquad f_k(t)=\int_G f(t,x)X_k(x)dx,$$

$$\varphi_\theta(x)=0\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{\theta k}X_k(x),\qquad \varphi_{\theta k}=\int_G\varphi_\theta(x)X_k(x)dx,\quad\theta=1,\dots,2n,$$

$$F(t,x,\bar{u}(t,x))=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t;U)X_k(x),\ F_k(t;U)=\int_G F(t,x,\bar{u}_\Sigma(t,x))X_k(x)dx,\tag{7}$$

де $U=\{\bar{u}_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\quad\bar{u}_m(t)=\big(u_m(t),u_m'(t),\dots,u_m^{(N)}(t)\big)$,
$\bar{u}_\Sigma(t,x)=\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{d^lu_k(t)}{dt^l}\cdot\frac{\partial^{|h|}X_k(x)}{\partial x_1^{h_1}\cdots\partial x_p^{h_p}},\quad 0\leqslant l+|h|\leqslant N\right\}$.

3. Розглянемо незбурену (при $\varepsilon=0$) задачу (1)–(3). Її розв'язок $u^0(t,x)$ шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^0(t)X_k(x).\tag{8}$$

Тоді на підставі (7) кожна з функцій $u_k^0(t)$, $k\in\mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$P_k[u_k]\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda_k^{n-s}u_k^{(2s)}(t)=f_k(t),\tag{9}$$

$$M_{\theta k}[u_k]\equiv\sum_{l=1}^{2n}\sum_{q=0}^{n-[l/2]}b_\theta^{ql}\lambda_k^q\left(u_k^{(l-1)}(0)-\mu u_k^{(l-1)}(T)\right)=\varphi_{\theta k},\quad\theta=1,\dots,2n.\tag{10}$$

Якщо ряд (8) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінною x до порядку $2n-2$ включно, рівномірно збігаються в області $\overline{Q}$, то функція $u^0(t,x)$, визначена формулою (8), задовольняє крайові умови (3).

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглядатимемо однорідну задачу, яка відповідає задачі (9), (10):

$$P_k[u_k] = 0, \tag{11}$$

$$M_{\theta k}[u_k] = 0, \quad \theta = 1,\ldots,2n. \tag{12}$$

Позначимо через $\eta_1,\ldots,\eta_r$ ненульові корені рівняння $\sum_{s=0}^{n} a_s\eta^s = 0$ із кратностями $n_1,\ldots,n_r$ відповідно; якщо нуль є коренем цього рівняння кратності n_0, то його позначимо через η_0 ($n_0+n_1+\ldots+n_r=n$). Тоді для кожного $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$ фундаментальна система розв'язків рівняння (11) має вигляд

$$u_{kw}(t) = \frac{t^{\alpha(w)-1}}{(\alpha(w)-1)!}\exp\left(\sqrt{\lambda_k}\beta_{g(w)}t\right), \quad w = 1,\ldots,2n,$$

де $g(w)=0$, $\alpha(w)=w$ для $w=1,\ldots,2n_0$; $g(w)=j$, $\alpha(w)=\kappa_j$ для $w=n_0+\tilde{n}_j+\kappa_j$ та $g(w)=r+j$, $\alpha(w)=\kappa_j$ для $w=n+\tilde{n}_j+\kappa_j$, $\kappa_j = 1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,r$; $\tilde{n}_j = n_0+n_1+\ldots+n_{j-1}$; $\beta_0=0$, $\beta_j=-\sigma_j$, $\beta_{r+j}=\sigma_j$, $\sigma_j=\sqrt{|\eta_j|}\exp\left(i(\arg\eta_j)/2\right)$.

Для характеристичного визначника [7] задачі (11), (12) отримуємо формулу

$$\Delta(\lambda_k) = B(\lambda_k)Y\lambda_k^{d_1}\prod_{j=0}^{r}\left(\left(1-\mu\exp(-\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\right)\left(1-\mu\exp(\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\right)\right)^{n_j}, \tag{13}$$

у якій $d_1 = n^2-n_0^2-(n_1^2+\ldots+n_r^2)/2$,

$$B(\lambda_k) = \det\left\|\sum\nolimits_{q=0}^{n-[l/2]} b_\theta^{ql}\lambda_k^q\right\|_{\theta,l=1}^{2n}, \tag{14}$$

$$Y = \det\|Y_0,Y_1,\ldots,Y_{2r}\| =$$

$$= \prod_{0\leqslant g<h\leqslant 2r}(\beta_g-\beta_h)^{\gamma_g\gamma_h} = (-1)^{d_2}\left(\prod_{j=1}^{r}(2\sigma_j)^{n_j^2}\right)\left(\prod_{0\leqslant i<j\leqslant r}\left(\sigma_j^2-\sigma_i^2\right)^{2n_in_j}\right), \tag{15}$$

де

$$Y_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_g & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \beta_g^2 & C_2^1\beta_g & 1 & \cdots & 0 \\ \beta_g^3 & C_3^2\beta_g^2 & C_3^1\beta_g & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{\gamma_g}^1\beta_g \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_g^{2n-1} & C_{2n-1}^{2n-2}\beta_g^{2n-2} & C_{2n-1}^{2n-3}\beta_g^{2n-3} & \cdots & C_{2n-1}^{2n-\gamma_g}\beta_g^{2n-\gamma_g} \end{vmatrix}, \quad g=0,1,\ldots,2r,$$

$\gamma_0 = 2n_0$, $\gamma_j=\gamma_{r+j}=n_j$, $j=1,\ldots,r$, $d_2 = ((n-n_0)^2-n_1^2-\ldots-n_r^2)/2$.

Зі співвідношень (13)–(15) випливає, що $\Delta(\lambda_k)\neq 0$ для всіх $\lambda_k\in\mathbf{\Lambda}$ тоді й тільки тоді, коли справджуються умови

$$\forall\lambda_k\in\mathbf{\Lambda} \quad 1-\mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\neq 0, \quad j=0,1,\ldots,r, \tag{16}$$

$$\forall\lambda_k\in\mathbf{\Lambda} \quad B(\lambda_k)\neq 0. \tag{17}$$

Зауважимо, що у випадку простих коренів η_1, …, η_r (при $\eta_0=0$) незбурена задача (1)–(3) є частковим випадком задачі з [9, § 12].

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку незбуреної задачі* (1)–(3) *в просторі* $C^{2n}(\overline{Q})$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови* (16), (17).

Д о в е д е н н я теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 7.5 із [9] та випливає з єдності розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд Фур'є за системою функцій $\mathbf{X}$. $\diamondsuit$

4. Надалі вважатимемо, що для всіх $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$ $\Delta(\lambda_k) \neq 0$.

Введемо такі позначення: $B_{\theta l}(\lambda_k)$ – алгебричне доповнення у визначнику $B(\lambda_k)$ елемента θ-го рядка та l-го стовпця; Y_{lw} – алгебричне доповнення у визначнику Y елемента l-го рядка та w-го стовпця. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі (11), (12), за допомогою якої розв'язок задачі (9), (10) зображається формулою

$$u_k^0(t) = H_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

де

$$H_k(t) = \frac{1}{B(\lambda_k)} \sum_{w=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{\theta=1}^{2n} \varphi_{\theta k} B_{\theta l}(\lambda_k) S_{lw}(\lambda_k) u_{kw}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

$$G_k(t,\tau) = \frac{1}{a_n} \sum_{w=1}^{2n} \left(S_{2n,w}(\lambda_k) + \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)-1}{2} \cdot \lambda_k^{-n+\alpha(w)/2} \frac{Y_{2n,w}}{Y} \right) u_{kw}(t-\tau), \tag{20}$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant t,\tau \leqslant T,$$

$S_{lw}(\lambda_k) = \sum\limits_{\delta=0}^{\gamma_{g(w)}-\alpha(w)} \frac{Y_{l,w+\delta}}{Y} \frac{T^\delta}{\delta!} \lambda_k^{\frac{\alpha(w)+\delta-l}{2}} \sum\limits_{s=0}^{\delta} \frac{D_\delta^s \left(\mu \exp(\beta_{g(w)} \sqrt{\lambda_k} T)\right)^s}{\left(1-\mu \exp(\beta_{g(w)} \sqrt{\lambda_k} T)\right)^{\delta+1}}$, $l,w = 1,\ldots,2n$, $D_\delta^s = \sum_{\omega=0}^{s} (-1)^{s-\omega} C_{\delta+1}^{s-\omega} \omega^\delta$, $\delta \geqslant 0$, $s = 0,1,\ldots,\delta$, ($D_0^0 = 1$, $\sum_{s=0}^{\delta} D_\delta^s = \delta!$).

При цьому розв'язок незбуреної задачі (1)–(3) зображається у вигляді

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) X_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau X_k(x). \tag{21}$$

Збіжність рядів у (21), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки відмінні від нуля визначник $B(\lambda_k)$ і вирази $1-\mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)$, $j = 1,\ldots,r$, які входять знаменниками у формули (19), (20), можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості значень $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$.

Зауваження 1. Якщо $\operatorname{Re}\sigma_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$, то в будь-якому околі одиниці з радіусом θ, $0 < \theta < 1$, міститься лише скінченна кількість чисел $\mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$. Тоді за умов (16) виконуються оцінки

$$\left|1 - \mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\right| \geqslant C_4 > 0, \quad \lambda_k \in \mathbf{\Lambda}.$$

Зауваження 2. Якщо $\operatorname{Re}\sigma_j = 0$, $0 \leqslant j \leqslant r$, $|\mu| \neq 1$, то справджуються оцінки

$$\left|1 - \mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\right| \geqslant |1-|\mu|| > 0, \quad \lambda_k \in \mathbf{\Lambda}.$$

Зауваження 3. Якщо $\operatorname{Re}\sigma_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $|\mu| = 1$, то отримуємо оцінки

$$\left|1-\mu\exp(\pm\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T)\right| = 2\left|\sin\!\left(\frac{\arg\mu \pm \operatorname{Im}\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T}{2}\right)\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\left|\arg\mu \pm \operatorname{Im}\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T - m\right|,$$

де $m = m(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\arg\mu \pm \operatorname{Im}\sigma_j\sqrt{\lambda_k}T - m \in (-\pi;\pi]$.

Оцінимо функції (18) і їхні похідні.

Використовуючи нерівність $\left|\frac{z}{1-z}\right| \leqslant 1+\frac{1}{|1-z|}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, отримуємо, що для довільного $\rho \in \mathbb{C}$, для якого $\mu \exp(\rho T) \neq 1$, справджуються нерівності

$$\max_{(t,\tau)\in K_T} \left| \left(\frac{1}{1-\mu\exp(\rho T)} + \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)-1}{2} \right) \exp(\rho(t-\tau)) \right| \leqslant MZ(\rho T), \tag{22}$$

$$\max_{(t,\tau)\in K_T} \left| \frac{\sum\limits_{s=0}^{\delta} D_\delta^s (\mu\exp(\rho T))^s}{(1-\mu\exp(\rho T))^{\delta+1}} \exp(\rho(t-\tau)) \right| \leqslant M\delta! Z^{\delta+1}(\rho T), \quad \delta = 1,\ldots,2n, \tag{23}$$

де $M = \max\{|\mu|, |\mu|^{-1}\}$, $Z(\omega) = 1 + |1-\mu\exp(\omega)|^{-1}$, $K_T = \{(t,\tau) : 0 \leqslant t,\tau \leqslant T\}$.

Із (18)–(20) на підставі (22), (23) для $q = 0,1,\ldots,2n$ отримуємо оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \int_0^T G_k(t,\tau)d\tau \right| \leqslant C_5 \lambda_k^{-n+q/2} \Omega(\lambda_k), \tag{24}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \sum_{w=1}^{2n} S_{lw}(\lambda_k) u_{kw}^{(q)}(t) \right| \leqslant C_6 \lambda_k^{(q-l)/2} \Omega(\lambda_k), \quad l = 1,\ldots,2n, \tag{25}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^q u_k^0(t)}{dt^q} \right| \leqslant C_7 \left(\sum_{l,\theta=1}^{2n} |\varphi_{\theta k}| \left| \frac{B_{\theta l}(\lambda_k)}{B(\lambda_k)} \right| \lambda_k^{-l/2} + \bar{f}_k \lambda_k^{-n} \right) \lambda_k^{q/2} \Omega(\lambda_k), \tag{26}$$

де $\bar{f}_k = \max\limits_{t\in[0,T]} |f_k(t)|$, $\Omega(\lambda_k) = \sum\limits_{g=0}^{2r} \lambda_k^{\gamma_g/2} Z^{\gamma_g}(\beta_g \sqrt{\lambda_k} T)$, $C_5 = \dfrac{M}{|a_n|} \cdot \max\limits_{1\leqslant l,w\leqslant 2n} \left| \dfrac{Y_{lw}}{Y} \right| \times$ $\times (\max\{1,T\})^{\bar{n}} \cdot \max\{1,\sigma_1,\ldots,\sigma_r\} \cdot \left(\max\{1,\lambda_1^{-1/2}\} \right)^{\bar{n}}$, $\bar{n} = \max\{2n_0, n_1, \ldots, n_r\}$.

Припустимо, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$ виконуються оцінки

$$|B(\lambda_k)| \geqslant C_8 \lambda_k^{-\delta}, \quad C_8 > 0, \quad \delta > 0. \tag{27}$$

Тоді на підставі (26), (27) для $q = 0,1,\ldots,2n$ отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^q u_k^0(t)}{dt^q} \right| \leqslant \left(C_9 \sum_{\theta=1}^{2n} |\varphi_{\theta k}| \lambda_k^{n^2+\delta} + C_{10} \bar{f}_k \right) \lambda_k^{-n+q/2} \Omega(\lambda_k). \tag{28}$$

5. Для встановлення умов існування розв'язку незбуреної задачі (1)–(3) використаємо наступне твердження.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ і для довільних фіксованих $a \in \mathbb{R}$ та $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$, нерівності*

$$\left| 1 - \mu \exp(ia\sqrt{\lambda_k} T) \right| \geqslant C_{11} \lambda_k^{-d}, \qquad C_{11} > 0, \tag{29}$$

виконуються при $d > p/2$ для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$.

Д о в е д е н н я аналогічного твердження міститься в [9, с. 62]. $\diamondsuit$

Зауважимо, що за виконання умов (16) нерівності (29) справджуються для всіх значень $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$. При цьому $C_{11} = \inf\limits_{\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}} \left\{ \lambda_k^d \left| 1 - \mu\exp(ia\sqrt{\lambda_k} T) \right| \right\} > 0$.

Позначимо $J = \{j,\ 1 \leqslant j \leqslant r : \operatorname{Re}\sigma_j = 0, \operatorname{Im}\sigma_j \neq 0\}$. Надалі вважатимемо, що $\zeta_0 = p + [p/2] + 1 + \max\left\{ (p+1) \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r, j\in J} \gamma_j \ ; \ \max\limits_{0\leqslant j\leqslant r, j\notin J} \gamma_j \right\} \leqslant 2n$ і $N = 2n - \zeta_0$.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (16), (17), (27)*. Припустимо, що* $|\mu| = 1$ *і серед чисел* ρ_j , $j = 1, \dots, r$, *є дійсні від'ємні. Якщо* $f \in C^{(0,\zeta_0)}(\overline{Q})$, $\varphi_\theta \in C^{\psi}(\overline{G})$, $\theta = 1, \dots, 2n$, $a_{ij} \in C^{\psi-1}(\overline{G})$, $i,j = 1, \dots, p$, $c \in C^{\psi-2}(\overline{G})$, *де* $\psi = \zeta_0 + 2n^2 + 2\delta$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$ *) чисел* $T > 0$ *існує єдиний розв'язок* $u^0 \in C^{2n}(\overline{Q})$ *задачі* (1)–(3) *при* $\varepsilon = 0$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1, \dots, 2n$.

Д о в е д е н н я. Для коефіцієнтів Фур'є функції $f \in C^{(0,\zeta_0)}(\overline{Q})$ виконуються оцінки

$$\bar{f}_k \leqslant C_{12}(\zeta)\lambda_k^{-\zeta_0/2+p/4} \|f\|_{C^{(0,\zeta_0)}(\overline{Q})}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

а для коефіцієнтів Фур'є функцій $\varphi_\theta \in C^{(0,\psi)}(\overline{G})$, $\theta = 1, \dots, 2n$, маємо

$$|\varphi_{\theta k}| \leqslant C_{12}(\psi)\lambda_k^{-\psi/2+p/4} \|\varphi_\theta\|_{C^{\psi}(\overline{G})}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \theta = 1, \dots, 2n. \tag{31}$$

Із оцінок (30), (31) на підставі (4), (5) та (28), використовуючи лему 1, отримуємо

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant C_{13} \sum_{\theta=1}^{2n} \|\varphi\|_{C^{\psi}(\overline{G})} + C_{14} \|f\|_{C^{(0,\zeta_0)}(\overline{Q})},$$

звідки випливає доведення теореми. $\diamondsuit$

Теорема 3. *Нехай* $(|\mu| \neq 1) \vee (J = \emptyset)$ *і нехай справджуються умови* (16), (17), (27)*. Якщо* $f \in C^{(0,\zeta_0)}(\overline{Q})$, $\varphi_\theta \in C^{\psi}(\overline{G})$, $\theta = 1, \dots, 2n$, $a_{ij} \in C^{\psi-1}(\overline{G})$, $i,j = 1, \dots, p$, $c \in C^{\psi-2}(\overline{G})$, *то для всіх чисел* $T > 0$ *існує єдиний розв'язок* $u^0 \in C^{2n}(\overline{Q})$ *незбуреної задачі* (1)–(3)*, який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1, \dots, 2n$.

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно до доведення теореми 2. $\diamondsuit$

Зауваження 4. Якщо $b_\theta^{ql} = \begin{cases} \delta_{\theta l}, & q = 0, \\ 0, & q > 0, \end{cases}$ де $\delta_{\theta l}$ – символ Кронекера, тобто матриця $\Big\| \sum_{q=0}^{n-[l/2]} b_\theta^{ql} \lambda_k^q \Big\|_{\theta,l=1}^{2n}$ є одиничною, то теореми 2 і 3 справджуватимуться, якщо

$$\varphi_\theta \in C^{\zeta_0+2n-\theta}(\overline{G}), \theta = 1, \dots, 2n; a_{ij} \in C^{\zeta_0+2n-2}(\overline{G}),\ i,j = 1, \dots, p; c \in C^{\zeta_0+2n-3}(\overline{G}).$$

6. Розглянемо тепер збурену ($\varepsilon \neq 0$) задачу (1)–(3). Її розв'язок шукаємо у вигляді ряду (6).

Введемо такі позначення: $\Theta(u^0, R) = \{u \in C^{2n}(\overline{Q}) : \|u - u^0\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant R\}$, де $u^0 = u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1) – (3); $\widetilde{F}_\zeta = \|F(t,x,\bar{y})\|_{C^{(0,\zeta)}(\overline{D}_N(W))}$; $\Phi = 1 + R + \|u^0\|_{C^{2n}(\overline{Q})}$. Надалі будемо вважати, що $W > \|u^0\|_{C^{2n}(\overline{Q})} + R$.

Враховуючи формулу (6), отримуємо, що задача (1)–(3) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int_Q K(t,x,\tau,\xi) F(\tau,\xi,\bar{u}(\tau,\xi)) d\tau d\xi \tag{32}$$

за умови, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) X_k(x) X_k(\xi) \tag{33}$$

рівномірно збігається в області $Q \times Q$ до функції $K(t,x,\tau,\xi)$.

Із оцінок (4), (5), (22), (23) та леми 1 випливає рівномірна збіжність ряду (33) в області $Q \times Q$ при $\zeta_0 \leqslant 2n$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$.

Подамо рівняння (32) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u^0}\, u(t,x), \tag{34}$$

де оператор A_v заданий так: $A_v u(t,x) = v(t,x) + \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) \int\limits_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau;U) d\tau$.

Якщо $F \in C^{(0,\zeta)}(\overline{D}_N(W))$, $\zeta \leqslant \zeta_0$, то для довільного елемента $u \in \Theta(u^0, R)$ справджуються оцінки

$$|F_k(\tau;U)| \leqslant C_{15} \lambda_k^{-\zeta/2+p/4} \left(1 + \|u\|_{C^{2n}(\overline{Q})}\right)^{\zeta} \widetilde{F}_\zeta \leqslant C_{15} \lambda_k^{-\zeta/2+p/4} \Phi^\zeta \widetilde{F}_\zeta. \tag{35}$$

Якщо, крім того, $F \in C^{(0,\zeta+1)}(\overline{D}_N(W))$, то для довільних $u_1, u_2 \in \Theta(u^0, R)$ виконуються оцінки

$$|F_k(\tau;U_2) - F_k(\tau;U_1)| \leqslant 2^{\zeta_0} C_{15} \lambda_k^{-\zeta/2+p/4} \Phi^\zeta \widetilde{F}_{\zeta+1} \|u_2 - u_1\|_{C^{2n}(\overline{Q})}, \tag{36}$$

де $C_{15} = 2^{\zeta_0^2} \zeta_0! \overline{C}_3 \widetilde{\lambda} \Big(\|c\|_{C^{2n-2}(\overline{G})} + 2 \sum\limits_{i,j=1}^{p} \|a_{ij}\|_{C^{2n-1}(\overline{G})} \Big)^n \operatorname{mes} G$, $\overline{C}_3 = \max\limits_{0 \leqslant q \leqslant 2r} \{C_3(q)\}$, $C_3(q)$ – сталі з оцінок (5). Тоді з (20), (24), (35), (36) при $q = 0, 1, \ldots, 2n$ отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^q}{dt^q} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau;U) d\tau \right| \leqslant C_{16} \lambda_k^{-n+(q-\zeta)/2+p/4} \Omega(\lambda_k), \tag{37}$$

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^q}{dt^q} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) \left(F_k(\tau;U_2) - F_k(\tau;U_1)\right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} \lambda_k^{-n+(q-\zeta)/2+p/4} \Omega(\lambda_k) \|u_2 - u_1\|_{C^{2n}(\overline{Q})}, \tag{38}$$

де $C_{16} = C_5 C_{15} \Phi^\zeta \widetilde{F}_\zeta$, $C_{17} = 2^{\zeta_0} C_5 C_{15} \Phi^\zeta \widetilde{F}_{\zeta+1}$.

Нехай $\varepsilon_0 = R|a_n| \Big((2r+1) C_{2n+p+1}^{p+1} M \widehat{Y} (\overline{C}_3)^2 \widetilde{T}^{\bar{n}} \big(\max\{1, C_1^{-1/2}\}\big)^{\bar{n}+1} \widetilde{\sigma} \operatorname{mes} G \times$ $\times \big(\|c\|_{C^{2n-2}(\overline{G})} + 2 \sum\limits_{i,j=1}^{p} \|a_{ij}\|_{C^{2n-1}(\overline{G})} \big)^n \zeta_0! 2^{\zeta_0(\zeta_0+1)} \Phi^{\zeta_0} \widetilde{F}_{\zeta_0+1} S \Big)^{-1}$, де $S = (1 + \widetilde{C}_4^{-1})^{\bar{n}} \times$ $\times \big(\max\{C_2, C_2/C_1\}\big)^{-\zeta_0/2+p/4+\bar{n}/2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{1}{2p}}$, якщо $J = \varnothing$, і $S = (1 + C_1^{-1} +$ $+ \widetilde{C}_4^{-1} + \widetilde{C}_{11}^{-1})^{\bar{n}} \big(\max\{C_2, C_2/C_1\}\big)^{-\zeta_0/2+p/4+(d+1/2)\bar{n}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{1}{2p}+\frac{2d-p}{p}}$, якщо $J \neq \varnothing$; $\widetilde{C}_4 = \inf\limits_{\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}, j \notin J} \big|1 - \mu \exp(\pm \sigma_j \sqrt{\lambda_k} T)\big| > 0$, $\widetilde{C}_{11} = \inf\limits_{\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}, j \in J} \{\lambda_k^d \big|1 - \mu \exp(\pm \sigma_j \sqrt{\lambda_k} T)\big|\} > 0$, $d \in (p/2,\ p/2 + 1/4)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 2. Якщо*

$$F \in C^{(0,\zeta_0+1)}(\overline{D}_N(W)),$$

то при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) з простору $C^{2n}(\overline{Q})$, який неперервно залежить від $f(t,x)$, $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1, \ldots, 2n$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що для $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ оператор A_{u^0} переводить кулю $\Theta(u^0, R)$ в себе. Дійсно, для $u \in \Theta(u^0, R)$ із (34), (37) отримуємо

$$\left\|u^0 - A_{u^0}u\right\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant \left\|\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau;\bar{u}) d\tau\right\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant$$
$$\leqslant |\varepsilon| C_{16} \sum_{0 \leqslant l+|h| \leqslant 2n} \sum_{k=1}^{\infty} C_3(|h|) \lambda_k^{-n+(l+|h|-\zeta_0)/2+p/4} \Omega(\lambda_k) \leqslant R.$$

Покажемо тепер, що при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ оператор A_{u^0} є оператором стиску. Дійсно, якщо $u_1, u_2 \in \Theta(u^0, R)$, то на підставі (34), (38) отримуємо

$$\|A_{u^0}u_2 - A_{u^0}u_1\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant |\varepsilon| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \int_0^T G_k(t,\tau) \left(F_k(\tau;\bar{u}_2) - F_k(\tau;\bar{u}_1)\right) d\tau\right\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_2 - u_1\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \varepsilon_0^{-1} |\varepsilon|.$$

Отже, за умов теореми задача (1)–(3) еквівалентна рівнянню (34). Використовуючи принцип Каччопполі–Банаха про нерухому точку [4, розд. 16], отримуємо, що рівняння (34) має єдиний розв'язок; а оскільки оператор A_{u^0} є неперервним за u^0, то й розв'язок рівняння (34) неперервно залежить від $u^0(t,x)$. Застосовуючи твердження теореми 2, отримуємо, що існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), який неперервно залежить від $f(t,x)$, $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1, \ldots, 2n$.

Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 3. Якщо*

$$F \in C^{(0,\zeta_0)}(\overline{D}_N(W)),$$

то при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *для всіх чисел* $T > 0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^{2n}(\overline{Q})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$, $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1, \ldots, 2n$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 4. $\diamondsuit$

З'ясуємо умови, за яких виконується оцінка (27). Визначник $B(\lambda_k)$ є многочленом степеня $4n^2$ відносно λ_k, і його можна подати у вигляді

$$B(\lambda_k) = \sum_{\Psi=0}^{4n^2} B_\Psi \lambda_k^\Psi = \sum_{\Psi=0}^{4n^2} \mathrm{Re} B_\Psi \lambda_k^\Psi + i \sum_{\Psi=0}^{4n^2} \mathrm{Im} B_\Psi \lambda_k^\Psi. \tag{39}$$

Позначимо через $w_R \in \mathbb{R}^{4n^2+1}$ та $w_I \in \mathbb{R}^{4n^2+1}$ вектори, складені відповідно із коефіцієнтів $\mathrm{Re}\, B_\Psi$ та $\mathrm{Im}\, B_\Psi$ многочлена (39).

Теорема 6. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{4n^2+1}$) *векторів* w_R *та довільного фіксованого* w_I (*або для майже всіх* w_I *та довільних фіксованих* w_R) *нерівність* (27) *виконується при* $\delta > p/2$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *чисел* $\lambda_k \in \mathbf{\Lambda}$.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$|B(\lambda_k)| \geqslant \max\left\{|\mathrm{Re}\, B(\lambda_k)|,\ |\mathrm{Im}\, B(\lambda_k)|\right\}, \quad \lambda_k \in \mathbf{\Lambda}.$$

Зупинимося на розгляді $\mathrm{Re}\, B(\lambda_k)$, припустивши, не обмежуючи загальності, що степінь цього многочлена відмінний від нуля.

Якщо вільний член многочлена $\mathrm{Re}\, B(\lambda_k)$ відмінний від нуля, то доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.4 із [9], а якщо він дорівнює нулеві, то доведення базується на теоремах 3.2 та 3.3 із [9]. $\diamondsuit$

Зауважимо, що застосовуючи до рівняння (32) принцип Шаудера про нерухому точку [4], можна довести існування розв'язку задачі (1)–(3) з простору $C^{2n}(\overline{Q})$ для ширших класів функцій $f(t,x)$, $F(t,x,\bar{y})$, $\varphi_\theta(x)$, $\theta = 1,\ldots,2n$.

1. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком // Мат. студії. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71–78.
2. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.
3. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883–896.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
5. *Кміть І. Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1307–1313.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
8. *Плотников П. И., Юнгерман Л. Н.* Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 9. – С. 1599–1607.
9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 161–167.
11. *Goy T. P., Ptashnyk B. Yo.* Nonlocal boundary value problems for quasilinear hyperbolic equations // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – Вып. 8. – С. 114–120.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ОПЕРАТОРА

В цилиндрической области исследована корректность задачи с нелокальными граничными условиями для слабо нелинейных уравнений высокого порядка с частными производными и переменными коэффициентами в линейной части оператора. Для почти всех (относительно меры Лебега) параметров задачи установлены условия классической разрешимости задачи.

PROBLEM WITH NON-LOCAL CONDITIONS FOR WEAK-NONLINEAR EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN MAIN PART OF OPERATOR

Correctness of the problem with non-local boundary conditions for high-order weakly nonlinear partial differential equations with variable coefficients in the linear part of operator in the cylindrical domain is investigated. Conditions of classical solvability of the problem are established for almost all (concerning Lebesgue's measure) parameters of the problem.

[1] Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.10.03