МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Фізико-технічний факультет
Кафедра фізики та методики викладання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти на тему
«РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ, НЕПОСТАВЛЕНИХ І ДОВІЛЬНИХ ЗАДАЧ В ЗАГАЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ»

Виконала: студентка 2-го курсу, групи Ф(СО)мз-21
Спеціальності 014.08 Середня освіта (фізика)
Назар В. В.
Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
кафедри матеріалознавства і новітніх технологій
Іван ГАСЮК
Рецензент: доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри фізики і методики викладання
Любов ЯБЛОНЬ

Івано-Франківськ – 2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Структурна побудова сучасного курсу загальної фізики для студентів фізичних та технічних спеціальностей передбачає вивчення основних фізичних явищ згідно їх поділу за розділами фізики, такими як механіка, молекулярна фізика і термодинаміка, електрика та магнетизм, оптика, атомна та ядерна фізика. Відповідно до такого поділу проводяться і практикуми з розв'язування задачі; цьому поділу відповідає більшість збірників задач та методичних посібників з їх розв'язування. При цьому нерідко зустрічається ситуація, коли студент добре засвоює звичайну теорію курсу фізики в цілому, але при розгляді умов деяких задач не орієнтується, особливо якщо задача не є окреслена рамками певного розділу фізики. Вирішення цієї проблеми може стати розгорнуте і систематичне застосування в процесі навчання узагальнених методів, загально-методологічних принципів, гранично-загальних понять. Тому **актуальним** є питання про розгляд теоретичних основ загального підходу до розв'язку задач, а також розв'язування нетрадиційних задач курсу загальної фізики у рамках точної теорії.

У даній дипломній роботі, на основі узагальнення теоретичного матеріалу, проводиться класифікація фізичних задач, розглядаються основні етапи розв'язування основних типів задач, на цій основі показана можливість застосування загального підходу як системи методів до розв’язування будь- якої фізичної задачі, в тому числі і нестандартної, непоставленої, проблемної і довільної. Окремо приведено приклади застосування методу аналізу розмірностей фізичної величини. У роботі також ілюструється застосування загального підходу до розв’язування задач практично із всіх класичних розділів курсу загальної фізики.

Метою роботи є узагальнення досвіду побудови алгоритмів розв’язування фізичних задач підвищеного рівня невизначеності умови.

Об’єктом дослідження є нестандартні, непоставлені і довільні задачі, що мають розв’язки у рамках законів та теорій, означених програмою загального курсу фізики у закладі вищої освіти.

Предметом дослідження є алгоритмізація процедури набуття студентами основних дидактичних компетентностей через практику розв’язання задач різного рівня складності.

У процесі роботи було розв’язано конкретні наукові задачі:

1. Здійснена класифікація фізичних задач різного типу за рівнем означеності, поставленості та невизначеності.
2. Опрацьовано та систематизовано основні підходи до етапизації процедури розв’язку таких задач з позиції оптимальності набуття відповідних компетенцій.
3. Розглянуто методи розв’язання задач з фізики, що не вкладаються у рамки стандартних алгоритмів.
4. Проілюстровано застосування пропонованих методик до розв’язання конкретних прикладів задач з різним типом нестандартності.

Результати, приведені у дипломній роботі, можуть бути використані для вдосконалення процесу навчання фізики як студентів закладів вищої освіти спеціальностей профільного напрямку, так і, частково, вчителями загальноосвітніх закладів для інтенсифікації зацікавленості учнів старших класів до вивчення предмету.

РОЗДІЛ І. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У ЗАГАЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

1.1. Класифікація задач з фізики

Відомо, що класифікувати різні об'єкти можна за будь-якими ознаками, але найбільш досконалою є класифікація за істотними параметрами. Фізичні задачі мають безліч ознак. Для того щоб одержати оптимальні класифікації задач з фізики, необхідно виділити істотні ознаки фізичної задачі. Отже, що таке фізична задача? які її істотні ознаки? Корисно поставити і ряд інших запитань: коли і як виникає фізична задача? що значить вирішити фізичну задачу? які бувають фізичні задачі? Ці питання не такі прості і далеко не настільки незначні, як може здатися на перший погляд. При вивченні якого-небудь фізичного явища певні фізичні величини, що характеризують це явище, можуть бути відомі, а інші - ні. Якщо при дослідженні якого-небудь фізичного явища людина про нього знає все, тоді ніяких запитань і задач для нього не виникає. Задачі і питання виникають тоді, коли в процесі цього дослідження деякі фізичні величини, що характеризують дане явище, з якихось причин невідомі. Отже, задача ставиться людиною при вивченні фізичного явища, коли в ньому (явищі) невідомі які-небудь зв'язки, взаємодії, фізичні величини і т.д. Таким чином, можна запропонувати таке визначення фізичної задачі. <u>Фізична задача</u> - це фізичне явище, точніше - його словесна модель (чи сукупність явищ) з деякими відомими і невідомими фізичними величинами, що характеризують це явище. Вирішити фізичну задачу - це значить знайти (відновити) невідомі зв'язки, фізичні величини і т. д. З цих визначень одразу випливають дві класифікації фізичних задач. Перша заснована на розходженні методів перебування невідомих величин, а друга - враховує зміст фізичного явища, що відображає кожна фізична задача.

Можливі два способи визначення невідомих величин якого-небудь фізичного явища: експериментальний і теоретичний. В експериментальному методі на досвіді, шляхом вимірів визначають невідомі величини. У теоретичному методі ці невідомі величини визначають шляхом фізичного аналізу даного явища, за допомогою відповідних фізичних законів, що керують цим явищем. Фізичні закони зв'язують між собою різні фізичні величини, серед яких можуть виявитися і відомі, і невідомі. Якщо в результаті застосування відповідних фізичних законів складена замкнута система рівнянь, у число невідомих якої входять і ті невідомі фізичні величини, які необхідно визначити, то після розв’язання цієї системи рівнянь дана задача може бути розв’язана теоретично.

З цих двох способів і випливає перша класифікація фізичних задач. Задачі можуть бути експериментальними і теоретичними [1]. Задачу називають експериментальною, якщо для її вирішення необхідно використовувати вимір. Експериментальні задачі розглядають у лабораторному практикумі. Теоретичною фізичною задачею назвемо фізичне явище (чи сукупність явищ) з деякими відомими і невідомими фізичними величинами, що характеризують це явище, якщо таку вирішують, не використовуючи вимірів. Надалі епітет «теоретична» перед словом «задача» буде для стислості опускатися.

Класифікацію теоретичних задач проведемо за двома найважливішими ознаками фізичної задачі, сформульованими вище. За першою ознакою розділимо усі фізичні задачі на два класи: непоставлені і поставлені [1]. Непоставленою назвемо задачу, у якій або не забезпечена сукупність необхідних даних (за винятком табличних величин) для її розв’язання, або не проведена її ідеалізація, або те й інше разом узяте.

У поставленій задачі не тільки забезпечена повнота величин і їхньому значенні, необхідних для її розв’язання, але і проведений процес ідеалізації. Отже, поставлена задача - це деяким чином «препарована» задача, що завжди має розв’язування.

Класифікацію поставлених задач проведемо на підставі другої істотної ознаки: задача виражає яке-небудь фізичне явище. За тими ж ознаками, що і фізичні явища, класифікуються і фізичні задачі: до якого типу відноситься фізичне явище, що виражає дана фізична задача, до такого ж типу відноситься і відповідна задача. Коротше, яке фізичне явище, така і відповідна цьому явищу задача. За загальною ознакою всі поставлені задачі розділимо на класичні і квантові. Далі, кожну класичну (і, звичайно, квантову) задачу можна було б віднести за приватними ознаками до відповідного типу (аж до підрозділу за елементарними ознаками). Але навряд чи доцільно проводити таку більш докладну класифікацію задач - не тільки тому, що для цього попередньо треба було б викласти всю сукупність фізичних явищ, але і внаслідок того, що для початківців вивчити загальну фізику виявилося б дуже громіздкою справою і, очевидно, малокорисною при вирішенні задач. Тому ми обмежимося вищенаведеною загальною класифікацією за двома узагальненими ознаками (непоставлені і поставлені, класичні і квантові задачі). Відзначимо, що якщо аналіз фізичної системи, часто ще до остаточного розв'язання, дозволяє визначити, чи є задача класичною чи квантовою, які в ній введені ідеальні об'єкти й ідеальні процеси, які взаємодії і їхні можливі наслідки і т.д., то приналежність даної задачі до непоставленої чи поставленої іноді можна визначити тільки після її розв'язання.

Корисно ввести ще поняття про так названу основну задачу. Кожне фізичне явище характеризується визначеною сукупністю фізичних величин. Ці величини зв'язані між собою деякими фізичними законами. Серед безлічі законів, керуючих даним фізичним явищем, є один або кілька головних, фундаментальних. Знаходження фізичних величин, що входять у фундаментальні закони, складає зміст основної задачі фізичного явища. Далі, використовуючи другорядні закони, визначають усю сукупність фізичних величин, що характеризують дане явище. Можна показати, що будь-яка основна задача з загального курсу фізики полягає в знаходженні стану відповідної фізичної системи [1].

1.2. Ідеалізація фізичної задачі

Нехай у поставленій задачі є необхідні дані (повнота яких забезпечена) і потрібно визначити які-небудь невідомі фізичні величини. Найважливішим у такій задачі є те, що вона вже ідеалізована. Автор задачі ввів безліч додаткових умов, що спрощують задачу і тим самим відкидають зв'язки даного фізичного явища з іншими явищами. Передбачається також, що вплив деяких інших, додаткових умов малий і ними можна знехтувати. Таким чином, поставлена фізична задача - це задача про «чисте» , «ідеалізоване» явище [7]. Дуже часто в науці об'єктом розгляду виступає не реальна річ, а її ідеальний образ. Це пояснюється тим, що реальні об'єкти і явища настільки складні і взаємозалежні, що їхнє вивчення і кількісне дослідження з урахуванням усіх сторін, взаємозв'язків і взаємодій представляло б нездоланні математичні труднощі. Розумна ідеалізація конкретних фізичних задач є найважливішою в фізиці як науці. Спрощуючі умови й обмеження формулюються зазвичай в самій задачі, але іноді вони присутні у прихованому чи неявному вигляді.

Приклад 1.1 Снаряд випущений зі знаряддя під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 600$ м/с. Знайти дальність польоту снаряда. Опором повітря знехтувати.

Задача поставлена. Вона ідеалізована. Одну додаткову умову, що спрощує задачу (опором повітря знехтувати), явно зазначено в умовах задачі. Однак багато інших умов, що спрощують, тільки припускаються. Вважається, що:

а) знаряддя розташоване на Землі;

б) не враховується рух Землі навколо Сонця;

в) не враховується обертання Землі навколо власної осі;

г) передбачається, що вектор прискорення вільного падіння g у будь-якій точці траєкторії снаряда має той самий напрямок;

д) прискорення вільного падіння на Землі вважається постійним: $g = 9{,}8$ м/с$^2 = const;$

е) снаряд приймається за матеріальну точку.

У даній задачі вплив пунктів б), в), г), д) малий і ними дійсно можна знехтувати. Якщо відкинути, наприклад, пункт г), вважаючи Землю кулею (тоді вектор прискорення g у різних точках траєкторії має неоднаковий напрямок), то задача ускладнюється. Якщо враховувати всі додаткові умови, то вона стає вкрай складною.

У різних задачах умови, що спрощують, різноманітні, але загальним для всіх способів ідеалізації задачі є нехтування несуттєвими, другорядними зв'язками і взаємодіями [11]. У зв'язку з цим виникає питання: коли, при яких умовах тим чи іншим можна знехтувати, а при яких - не можна? Це питання тісно пов'язане з методом аналізу розв’язання задачі і методом оцінки, що докладно будуть розглянуті нижче.

Найчастіше при вирішенні фізичних задач використовуються наступні два способи ідеалізації: введення ідеальних фізичних об'єктів і нехтування несуттєвими взаємодіями і процесами. До останнього способу відноситься і введення ідеальних фізичних процесів.

Зазначимо, що в будь-якому ідеальному фізичному об'єкті нехтують тільки якоюсь його властивістю: насправді цією властивістю дане тіло володіє, але в конкретних умовах задачі ця властивість виявляє себе настільки слабко, що нею можна знехтувати.

У фізику вводиться безліч об'єктів, використовуваних при ідеалізації фізичних задач. Приведемо деякі з них.

Матеріальна точка. Фундаментальний і універсальний фізичний об'єкт. У понятті матеріальної точки нехтують геометричними розмірами тіла в порівнянні з характерною відстанню, що розглядається у даній задачі.

Абсолютно тверде тіло (чи просто тверде тіло). У цьому ідеальному об'єкті нехтують можливою деформацією тіла.

Абсолютно пружне тіло. Тут нехтують залишковою деформацією тіла. Вона в умовах конкретної задачі настільки мала, що її можна не враховувати. Важливо, що при взаємодії абсолютно пружних тіл не відбувається перетворення механічної енергії в інші види енергії (тобто виконується закон збереження енергії в механіці).

Абсолютно непружне тіло. У цьому випадку нехтують здатністю тіл відновлювати первісну форму після деформації. Ця властивість в абсолютно непружного тіла практично не виявляється і нею можна знехтувати.

При другому способі ідеалізації вводять ідеальні фізичні процеси, або нехтують несуттєвими фізичними процесами (явищами) і взаємодіями. Прикладами ідеальних процесів є ізохорний, ізобарний, ізотермічний, адіабатичний та інші процеси.

Дуже часто, вирішуючи конкретну задачу, нехтують зміною тієї чи іншої фізичної величини, припускаючи, що ця зміна мала. Наприклад, у розглянутому вище прикладі з артилерійським снарядом всупереч добре відомому факту - залежності прискорення вільного падіння від висоти точки над поверхнею Землі ми вважали, що це прискорення постійне *(*$g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$*)*. Але тому що висота h підйому снаряда (кілька кілометрів) мала в порівнянні з радіусом Землі *(*$R = 6400\ \text{км}$*)*, то припущення про те, що в даній задачі прискорення вільного падіння g постійне, є цілком розумним.

Таким чином, внаслідок ідеалізації і спрощення фізики розглядають замість реального фізичного явища його схематичну модель [1]. Звичайно в моделі реального фізичного явища відбивається головне, враховуються тільки істотні зв'язки та взаємодії, і замість реальних тіл розглядаються різні ідеальні об'єкти. Дуже часто успіх у рішенні тієї чи іншої фізичної задачі чи проблеми залежить від того, наскільки вдало обрана ця модель. Класифікація моделей фізичних явищ, мабуть, збігається з класифікацією самих явищ. Таким чином, у змісті фізики в залежності від властивостей фізичної системи й умов, у яких відбуваються різні фізичні явища, можна виділити дві загальні моделі: модель класичних фізичних явищ (класична модель) і модель квантових фізичних явищ (квантова модель).

1.3. Етапи розв'язування задачі

У процесі розв'язування поставленої задачі корисно розрізняти три етапи: фізичний, математичний і аналіз розв'язування [7].

Фізичний етап починається з ознайомлення з умовами задачі і закінчується складанням замкнутої системи рівнянь, у число невідомих якої входять і шукані величини.

Математичний етап починається розв'язуванням замкнутої системи рівнянь і закінчується одержанням числової відповіді. Цей етап можна розділити на два наступних:

а) одержання розв'язку задачі в загальному вигляді;

б) знаходження числової відповіді задачі.

Розв'язавши систему рівнянь, знаходять розв'язок задачі в загальному вигляді. Зробивши арифметичні обчислення, одержують числову відповідь задачі.

У математичному етапі майже відсутній фізичний елемент. Безумовно, що математичний етап є менш важливим, ніж етап фізичний, але необхідно підкреслити, що він не є другорядним. На жаль, іноді недооцінюють роль цього етапу, вважаючи, що його взагалі можна не проводити. Невірно також вважати, що помилки, допущені на математичному етапі, є другорядними. Якщо при вирішенні системи рівнянь, чи при переводі одиниць, або при арифметичному розрахунку зроблена помилка, розв'язок задачі в цілому виявиться невірним. З погляду практики задача розв'язана правильно тільки в тому випадку, якщо отримана її вірна загальна і числова відповідь [20]. Неправильно математичний етап вважати другорядним ще й тому, що після нього повинен випливати етап аналізу розв'язку. Останній етап взагалі не можна провести, якщо не отримана загальна і числова відповідь задачі. Таким чином, для остаточного розв'язку задачі з фізики фізичний і математичний етапи її розв'язування є в однаковій мірі необхідними.

Після одержання розв'язку в загальному вигляді і числовій відповіді проводять етап аналізу розв'язку. На цьому етапі виясняють, як і від яких фізичних величин залежить знайдена величина, при яких умовах ця залежність здійснюється і т.д. На закінчення аналізу загального розв'язування розглядається можливість постановки і розв'язування інших задач шляхом зміни і перетворення умов даної задачі. Іноді при аналізі загального розв'язання методом теорії розмірностей встановлюють правильність отриманого розв'язку. Слід відзначити, що даний метод дає лише необхідну ознаку правильності розв’язування. При аналізі числової відповіді часто досліджують

а) розмірність отриманої величини;

б) відповідність отриманої числової відповіді фізично можливим значенням шуканої величини; наприклад, якщо для швидкості якого-небудь тіла отримане значення більше, ніж швидкість світла у вакуумі $(c = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с})$ то відповідь ця явно помилкова;

в) при одержанні багатозначної відповіді відповідність отриманих відповідей умовам задачі.

Аналіз розв’язування задачі в якійсь мірі є творчим процесом, і тому його метод (який ми тільки що виклали) не повинен бути дуже жорстким і може містити в собі (у залежності від умов задачі) і ряд інших елементів. Аналіз розв’язку тісно зв'язаний з методом постановки задачі.

Система етапів розв’язування поставленої фізичної задачі важлива не сама по собі. Одного знання цієї системи ще недостатньо для розв’язування задач. Особливість системи етапів полягає в тому, що вона безпосередньо зв'язана з проблемою системи методів розв’язування задач з фізики. Справа в тому, що на кожному етапі той, хто розв’язує задачу, повинен здійснювати відповідну цьому етапу самостійну діяльність. Часто говорять що, для того щоб навчитися розв’язувати задачі з фізики, необхідно розв’язувати їх самостійно [1]. Це, звичайно, вірно. Але якщо не вказати тому, хто розв’язує задачу, загальних способів (методів) його діяльності, то він буде діяти на основі болісного методу проб і помилок. Звідси випливає необхідність у системі загальних методів для проведення всіх етапів розв’язування довільної задачі з фізики як способів самостійної діяльності того, хто цю задачу розв’язує. Отже, система загальних методів повинна мати наступні властивості:

а) універсальність;

б) охоплення всіх етапів розв’язування довільної задачі.

У результаті аналізу проведення кожного етапу розв’язування довільної задачі з фізики можна запропонувати наступну систему загальних методів, що поєднує:

1) метод аналізу фізичної ситуації задачі;
2) метод застосування фізичного закону;
3) систему загально-обов'язкових методів;
4) метод спрощення й ускладнення; метод оцінки;
5) метод аналізу розв'язування;
6) метод постановки задачі;
7) метод аналізу розмірностей фізичних величин

Необхідно відзначити, що ніякий метод, взятий окремо як такий, не є універсальним. Кожен метод має сенс і виявляє свою найбільшу силу тільки в системі методів. Передостання ж не завжди автоматично гарантує розв'язування задачі. Отже, система загальних методів - це не догма, а керівництво до самостійної діяльності при рішенні задач з фізики, це система розумних порад, а не інструкція. Для проведення кожного етапу при вирішенні задачі можуть бути використані відповідні методи.

1.4. Метод аналізу фізичної задачі

Помітимо, що розв'язування будь-якої фізичної задачі - це насамперед розумовий процес. Однак ми не будемо досліджувати тонкості психологічного розгляду цього процесу, а відразу перейдемо до результатів.

Будь-яка фізична задача виражає якесь фізичне явище (чи групу явищ). Співвідношення між шуканими і відомими фізичними величинами містяться всередині цього явища. Для того щоб знайти ці, необхідно не тільки знати сутність даного явища, систему його фізичних параметрів, законів і границь його застосованості, але і вміти виділити всі ці елементи в даній задачі. Практично фізичний аналіз задачі зводиться в основному до виділення й аналізу фізичного явища [7].

Вступна частина методу аналізу фізичної задачі носить допоміжний характер, це як би входження, вступ у світ фізичних явищ задачі. Аналіз явищ тут виробляється вже на стадії попереднього знайомства з задачею. Після прочитання задачі корисно записати її умови намагаючись осмислити дані і шукані величини, а також зв'язок між ними. Далі необхідно здійснювати креслення (схему, рисунок), позначивши на ньому всі дані і шукані величини. Рисунок дозволяє наочно представити фізичне явище задачі.

В основній частині цього методу треба вже конкретно провести аналіз фізичних явищ. Як відомо, фізичне явище містить якісну і кількісну сторони. Тому спочатку визначають якісну характеристику явища (чим це явище відрізняється від інших, яка його сутність, як воно відбувається і т.д.). Конкретно тут, по-перше, вибирають фізичну систему (які фізичні об'єкти включають у систему), по-друге, визначають якісні характеристики цих об'єктів (яким ідеальним об’єктом є кожне тіло: матеріальна точка, тверде тіло і т.д.), по-третє, розглядають, у яких фізичних процесах беруть участь об'єкти системи.

Потім встановлюють кількісні зв'язки і співвідношення між різними фізичними величинами, що характеризують дане явище. Застосовуючи відповідні фізичні закони, одержують замкнуту систему рівнянь. Після складання замкнутої системи рівнянь задача вважається фізично вирішеною.

Таким чином, метод аналізу фізичної задачі відповідає на запитання: з чого починати, що і як треба здійснювати при рішенні будь-якої поставленої фізичної задачі. Легко побачити, що цей метод застосовується лише на фізичному етапі розв’язання задачі.

1.5. Загально-часткові методи. Метод диференціювання та інтегрування

Система загально-часткових методів є універсальною в тому, що може бути застосована до вирішення задач майже з будь-якого розділу курсу загальної фізики та дозволяє успішно розв’язувати практично будь-які поставлені задачі.

Загально-часткових методів відносно небагато. З них ми розглянемо наступні: кінематичний, динамічний, законів збереження, розрахунку фізичних полів, диференціювання й інтегрування.

У методі диференціювання та інтегрування велике значення має положення про границі застосованості фізичних законів. Як відомо, зміст фізичного закону не є абсолютним, а його використання обмежене рамками умов застосованості.

Часто фізичний закон можна поширити (змінивши його форму) і за границі його застосованості за допомогою методу диференціювання і інтегрування. В основі цього методу лежать два принципи: принцип можливості представлення закону в диференціальній формі і принцип суперпозиції.

Сутність методу диференціювання і інтегрування полягає в наступному. Припустимо, що фізичний закон має вигляд

$$K = LM, \tag{1.1}$$

де $K,$ L і M- деякі фізичні величини, причому умовою його застосованості є $L = const.$ Виникає питання як поширити даний закон на випадок, якщо $L \neq const$ і L є деякою функцією від $M,$ тобто $L = L(M)$. Виділимо настільки малий проміжок dM зміни величини $M,$ щоб зміною величини L на цьому проміжку можна було нехтувати.

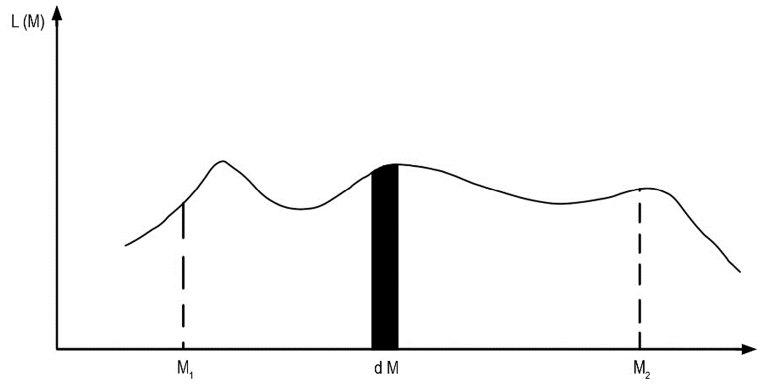

Рис. 1.1. Виділення елемента довжини dm.

Отже, умови застосовності закону на ділянці dm виконані (приблизно). Тоді

$$dK = L(M)dM, \tag{1.2}$$

де dK - зміна величини K на ділянці dM.

Використовуючи принцип суперпозиції, одержуємо значення величини K у вигляді

$$K = \int_{M1}^{M2} L(M)dM\,, \tag{1.3}$$

де M_1 і M_2 - початкове і кінцеве значення величини M.

Таким чином, метод диференціювання і інтегрування складається з двох частин. У першій знаходять диференціал (1.2) шуканої величини. Для цього в більшості випадків або роблять поділ тіл на настільки малі частини, щоб останні можна було прийняти за матеріальні точки, або поділ великого проміжку часу на такі малі проміжки часу dt, щоб протягом цих малих проміжків процес можна було приблизно вважати, рівномірним (чи стаціонарним), і т. д.

В другій частині методу роблять сумування (інтегрування). Найбільш важкими в цій частині є вибір змінної інтегрування і визначення меж інтегрування [1]. Для визначення змінної інтегрування необхідно детально проаналізувати, від яких змінних залежить диференціал шуканої величини і яка змінна є головною, найбільш істотною. Цю змінну найчастіше і вибирають у якості змінної при інтегруванні. Після цього всі інші змінні виражають як функції від цієї змінної. У результаті диференціал шуканої величини приймає вигляд функції від змінної інтегрування. Потім визначають межі інтегрування як крайні (граничні) значення змінної інтегрування. Після обчислення визначеного інтеграла одержують числове значення шуканої величини.

Приклад 1.2. Тонкий стержень довжини $l = 1$ м рівномірно заряджений зарядом $Q = 10^{-12}$ Кл. Визначити потенціал електричного поля цього заряду в точці А, розташованої на осі стержня на відстані $d = 1$ м від його кінця (Рис. 1.2.). Середовище - вакуум.

Розв'язання. Відповідь, записана у вигляді $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$, звідси випливає, що $\varphi = 9 \cdot 10^{-3}$В є помилковим, тому що ця формула справедлива тільки для потенціалу електричного поля, створеного точковим електричним зарядом. У нашому випадку заряд Q розташований на тілі (стержні), геометричними розмірами якого ($l = 1$м) не можна знехтувати в порівнянні з характерною відстанню ($d = 1$м) розглянутою у даній задачі. Отже, заряд Q не можна вважати точковим.

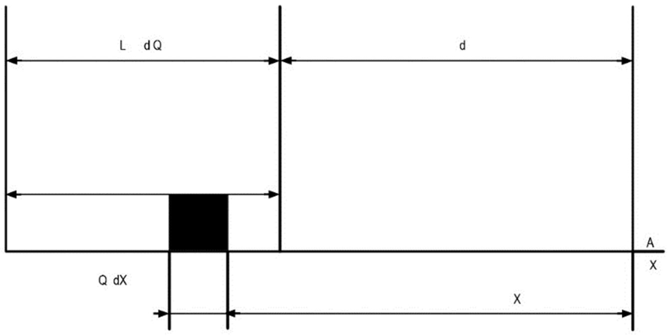

Рис.1.2. Ілюстрація до прикладу 1.2.

Застосуємо метод диференціювання та інтегрування. Розділимо стержень на настільки малі ділянки, щоб кожну з них можна було прийняти за матеріальну точку. Тому заряд, розташований на такій ділянці, можна вважати точковим. Розглянемо одну таку ділянку довжини dx, що стоїть від точки A на відстані x. Заряд цієї ділянки точковий і складає $dQ = (Q/l)dx$. Заряд dQ створює електричне поле, потенціал $d\varphi$ якого в точці A може бути обчислений за формулою

$$d\varphi = \frac{dQ}{(4\pi\varepsilon_0 x)} \qquad (1.4)$$

Підставивши значення $dQ = (Q/l)dx$, одержуємо диференціал шуканої величини як функцію однієї змінної:

$$d\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon l} \cdot \frac{dx}{x} \qquad (1.5)$$

Перша частина методу закінчена. Переходимо до підсумовування потенціалів полів, створених всіма елементарними зарядами (за побудовою вони всі точкові), на які був розділений початковий заряд Q. Змінна інтегрування x

змінюється в межах від $d = l$ м до $d + l = 2$ м. Інтегруючи по x у цих межах, остаточно одержуємо значення шуканої величини:

$$\varphi = \int_{d}^{d+1} \frac{Qdx}{4\pi\varepsilon lx} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon l} \cdot \ln(1 + \frac{l}{d})$$

Підставивши числові значення, одержимо $\varphi \approx 6{,}3 \cdot 10^{-8} B$

Метод диференціювання й інтегрування є універсальним і необхідним як при вивченні теорії, так і особливо при розв'язуванні задач з фізики. У механіці за допомогою цього методу роблять обчислення роботи змінної сили, моментів інерції, при вивченні фізичних полів його використовують для розрахунку напруженостей і потенціалів полів, створених неточковими масами, неточковими зарядами, макрострумами і т.д.

Математичну основу методу складають диференціювання й інтегрування функцій. Тому розглянутий метод дозволяє практично здійснити міжпредметний зв'язок при вивченні курсів фізики і вищої математики.

1.6. Метод спрощення і ускладнення. Метод оцінки

Цей метод використовують при рішенні складних задач, а також при рішенні непоставлених і нестандартних задач. Його широко застосовують на етапі аналізу розв'язування фізичної задачі, що дозволяє розгорнути будь-яку задачу в «блок» усе більш складних чи більш простих задач.

Складовими частинами методу спрощення й ускладнення є два взаємозалежних і протилежних процеси: процес спрощення (ідеалізація, оцінка і відкидання другорядних явищ, нехтування несуттєвими деталями і т.д.) і процес ускладнення (облік і розгляд раніше відкинутих об'єктів, явищ, деталей, ускладнення фізичної системи, зв'язків і т.д.). Матеріальну основу цих процесів складає метод оцінки.

Цей метод часто використовують при аналізі будь-якої фізичної ситуації, роблячи оцінку фізичних величин чи оцінку фізичних явищ.

Оцінка фізичної величини полягає, по-перше, в арифметичному розрахунку порядку самої величини і, по-друге, у порівнянні однорідних величин за їх порядками.

При арифметичному розрахунку порядку величини, що залежить від інших величин, числове значення кожної з цих величин представляють у стандартному вигляді (добуток першої значущої цифри на десять у відповідному степені). Потім оцінюють порядок кожного що складається (якщо вираження, що розраховується, є алгебраїчна сума). Виділяють доданки з найвищим порядком. Ті що складаються, порядок яких принаймні на два порядки нижче найвищого порядку, відкидають. Точну значущу цифру доданків, що залишилися, визначають за допомогою логарифмічної лінійки, або на мікрокалькуляторі.

Приклад 1.3. Нехай у результаті загального розв'язування задачі отримана наступна розрахункову формулу:

$$\Delta m = \frac{VM(p_1T_2 - p_2T_1)}{RT_1T_2}$$

де $V = 9$ л - об'єм газу, $\mathrm{M} = 2 \cdot 10^{-3}$кг/моль - його молярна маса, $\mathrm{p}_1 = 52 \cdot 10^5$Па - початковий тиск газу, $\mathrm{T}_1 = 296$К - його початкова температура, $\mathrm{p}_2 = 5 \cdot 10^4$Па - кінцевий тиск газу, $\mathrm{T}_2 = 283$К - його кінцева температура, $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ - універсальна газова стала, Δm- зміна маси газу. Визначити порядок величини Δm.

Розв'язування. Переводимо дані величини в систему СІ, одночасно округлюємо їхні значення і представляємо в стандартному вигляді. В результаті одержуємо:

$$V \approx 10^{-2}\text{м}^3,\ \mathrm{M} = 2 \cdot \frac{10^{-3}\text{кг}}{\text{моль}}, \mathrm{p}_1 \approx 5 \cdot 10^6\ \text{Па}, \mathrm{T}_1 \approx 3 \cdot 10^2\ \text{К}, \mathrm{p}_2 \approx 5 \cdot 10^4\ \text{Па}, \mathrm{T}_2 \approx$$

$$\approx 3 \cdot 10^2\ \text{К}, R \approx 8\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}.$$

З цих даних, по-перше, видно, що наближені значення початкової і кінцевої температури однакові і, отже, замість початкової формули виходить більш простий вираз

$$\Delta m = \frac{VM(p_1 - p_2)}{RT}.$$

По-друге, кінцевий тиск $\mathrm{p}_2 = 5 \cdot 10^4$ Па за порядком величини значно менший початкового тиску $\mathrm{p}_1 = 5 \cdot 10^6$ Па (на два порядки) і, отже, ним можна нехтувати. В остаточному підсумку для оцінки порядку величини Δm одержуємо $\Delta m = \frac{VMp_1}{RT}$, звідки $\Delta m = \frac{(10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^6)}{8} \cdot 3 \cdot 10^2 \approx 4 \cdot 10^{-2}$ кг.

Більш точний, але і більш тривалий розрахунок дає для шуканої величини значення $\Delta m = 3{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг.

Груба, але швидка оцінка порядку шуканої величини дуже важлива для наступного етапу аналізу розв'язування. При порівнянні фізичних величин (що залежать від інших величин) спочатку знаходять їхнє відношення в загальному вигляді, а потім роблять числовий розрахунок порядку цього відношення.

Приклад 1.4. Порівняти силу тяжіння $F_т$ двох протонів і силу їхнього електричного відштовхування F_a.

Розв'язування. Знайдемо відношення цих сил:

$$\frac{F_т}{F_a} = \frac{Gm^2 4\pi\varepsilon_0 r^2}{r^2 Q^2},$$

де $G \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11} H \cdot \mathrm{м}^2/\mathrm{кг}^2$ - гравітаційна стала, $m \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг - маса протона, $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$Кл - заряд протона, $4\pi\varepsilon_0 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10}\,\Phi/\mathrm{м}$.

Після арифметичного розрахунку одержуємо

$$F_т/F_a \approx 7 \cdot 10^{-37} \approx 10^{-36}.$$

Таким чином, сила тяжіння двох протонів на 36 порядків менша сили їхнього електричного відштовхування (гравітаційна взаємодія фантастично мала в порівнянні з електромагнітною взаємодією).

Приклад 1.5. Яке тіло притягає Місяць сильніше: Земля чи Сонце?

Розв'язування. На підставі закону всесвітнього тяжіння знайдемо відношення сил притягання Землі ($F_З$) і Сонця ($F_С$):

$$\frac{F_З}{F_С} = \frac{M_З(r_З{}^2)}{M_С(r_С{}^3)},$$

де $M_3 \approx 6 \cdot 10^{24}$кг - маса Землі, $M_С \approx 2 \cdot 10^{30}$кг – маса Сонця, $r_С \approx 1{,}5 - 10^{11}$м - середня відстань Місяця (Землі) від Сонця, $r_3 \approx 4 \cdot 10^8$ м - середня відстань Місяця від Землі. Після розрахунку одержуємо

$$F/Fc \approx 3/8.$$

Отже, за порядком величини сили притягання Місяця до Землі і Сонця однакові, але все-таки Сонце притягає Місяць приблизно в два з половиною рази сильніше, ніж Земля. У цьому нічого парадоксального немає, якщо врахувати, що під дією сили притягання до Сонця Місяць рухається навколо Сонця, а під дією сили притягання до Землі Місяць рухається навколо Землі.

Оцінка фізичного явища зводиться, по-перше, до одержання фундаментального закону, що керує даним явищем, і, по-друге, до числового розрахунку порядку фізичної величини.

Часто задачі на оцінку є непоставленими.

Приклад 1.6. Оцінити тиску центрі Землі.

Розв'язування. Постановка задачі. Введемо деякі спрощення. Будемо вважати Землю однорідною кулею радіуса R_3. Поле тяжіння однорідної кулі еквівалентно полю матеріальної точки такої ж маси, розташованої в центрі кулі. Будь-яке тіло масою /и, розташоване на поверхні Землі, притягається до Землі із силою, рівної $F_Т = G(mM\text{^}R_3^2)$ і, отже, воно робить на Землю тиск $p = F_Т/S$, де S - площа опори тіла. Якщо безліч таких тіл розташовуються на поверхні Землі тонким сферичним шаром, то тиск такого сферичного шару масою dm

$GMvdm$

$$dp = \frac{GM_3 \cdot dm}{4\pi R^4}$$

Сила тяжіння тіла до Землі залежить від відстані до центра Землі. Отже, товщина сферичного шару повинна бути мала в порівнянні з цією відстанню. Кожен сферичний шар робить тиск на нижчі шари. Тепер уже ясно, що для розрахунку тиску в центрі Землі необхідно застосувати метод ДІ. Розділимо Землю на тонкі сферичні шари. Розглянемо один такий шар товщини $dr,$

розташований на відстані r від центра Землі. Він притягається до частини Землі, що знаходиться всередині нього (зовнішня частина Землі не діє на шар), з силою

$$dF_T = G4\pi r^2\, dr\, \rho \cdot 4\pi r^3\, \rho/3r^2$$

де ρ - середня густина Землі. Звідси тиск шару

$$dp = \frac{dF_T}{4\pi r^2} = \frac{4\pi G\rho^2 r dr}{3}$$

Після інтегрування одержуємо, позначивши R_3 - радіус Землі,

$$\mathrm{P} = \int_r^{R_3} dp\ = (2\pi/3)G\rho^2\left({R_3}^2 - r^2\right)$$

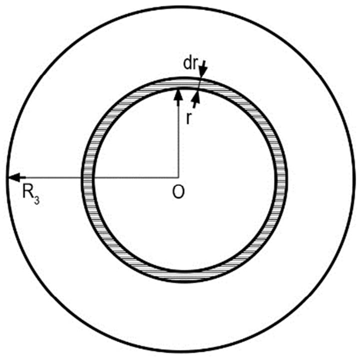

Рис.1.3. Ілюстрація до прикладу 1.6.

тиск всередині Землі на відстані *r* від центра Землі. При $r = 0$ знаходимо тиск у центрі Землі:

$$p\ = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 {R_3}^2$$

Оцінимо порядок цієї величини (вважаючи $p \approx 5{,}5 - 10^3 \text{кг/м}^3$*):*

$$\mathrm{p} \approx 1{,}6 \cdot 10^{11}\text{Па} \approx 2 \cdot 10^{11}\text{Па}.$$

Відомо, що нормальний атмосферний тиск дорівнює приблизно 10^5 Па. Таким чином, тиск у центрі Землі на шість порядків перевищує нормальний атмосферний тиск.

Часто, використовуючи метод оцінки, порівнюють між собою різні фізичні явища. При цьому роблять оцінки фундаментальних фізичних величин, що характеризують ці явища.

Приклад 1.7. Плоский контур площею $S = 1\,\text{м}^2$, опором $R = 1\,\text{Ом}$ розташований в однорідному магнітному полі, індукція якого змінюється за законом $B = B_0 - \frac{\alpha t^2}{2S}$, де $B_0 = 10$ Тл, $\alpha = 10^{-1}$Тл $\cdot$ м^2/с^2 - площина контуру перпендикулярна вектору $\vec{B}$. Визначити силу струму в контурі в момент часу $t = l$ с, якщо індуктивність контуру дорівнює L і при $t = 0$ сила струму в контурі $I = 0$.

Розв'язування. В залежності від значення індуктивності контуру конкретні фізичні явища будуть протікати різним чином. Розглянемо два граничних випадки.

1. Індуктивність контуру L настільки мала, що явищем самоіндукції можна знехтувати. У фізичну систему включимо контур і магнітне поле. Внаслідок зміни магнітного поля в контурі виникає явище електромагнітної індукції. Тому що е.р.с. індукції залежить від часу, то виникаючий індукційний струм також залежить від часу. Отже, у контурі виникає явище самоіндукції (е.р.с. самоіндукції дорівнює $E = L\frac{dI}{dt}$).

Таким чином, розглядається випадок настільки малих *L,* що можна знехтувати е.р.с. самоіндукції порівняно з е.р.с. індукції. Тоді за другим законом Кірхгофа для даного контуру одержуємо $Ej = IR$. Так як $E_i = \alpha t$, то, $I_i = \alpha t/R, I_i = 10^{-1}$ А.

2. Індуктивність контуру настільки велика, що явищем самоіндукції нехтувати не можна. Це означає, що е.р.с самоіндукції порівнянна е.р.с. індукції. За другим законом Кірхгофа для даного контуру знаходимо

$$E_i = -L\,\frac{dI}{dt} = IR \text{ або } \alpha t - L\frac{dI}{dt} = IR$$

Розв'язком цього диференціального рівняння, що задовільняє початковим умовам *(*$I = 0$ при $t = 0$*),* є наступна функція:

$$I = \frac{\alpha\cdot t}{R} - \frac{\alpha\cdot L}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{1.6}$$

Другий член у правій частіші останнього рівняння враховує явище самоіндукції. Нехай індуктивність контуру $L = 1$Гн. Підставляючи дані величини в (1.6) одержуємо $I = 0{,}04$ А, що значно відрізняється від отриманого раніше значення. Таким чином, при великих значеннях індуктивності контуру в даному випадку не можна нехтувати явищем самоіндукції.

Замітимо, що останній висновок справедливий тільки для невеликих проміжків часу. З рівняння (1.6) видно, що роль явища самоіндукції буде зменшуватися з часом. Наприклад, у момент часу $t = 100$ с без обліку явища само - індукції $I = 10$ А, а з обліком - $I = 9{,}9$ А, тобто виправлення на явище самоіндукції складають всього 1 %.

Таким чином, для моментів часу $t \geq 100$ явищем самоіндукції можна знехтувати навіть при такому великому значенні індуктивності контуру ($L = 1$ Гн).

1.7. Метод постановки задачі

Цей метод використовують на етапі аналізу розв'язання задачі, чи (найчастіше) на етапі постановки задачі при розв'язуванні непоставлених задач.

Вище непоставлена задача була визначена як задача неідеалізована, чи як задача з неповної (незамкнутої) системи фізичних величин і умов, або одне та інше, разом узяте. Отже, непоставлена задача відрізняється від поставленої, по-перше, тим, що вона не ідеалізована, і, по-друге, тим, що розв'язок її неоднозначний і така задача розпадається на ряд поставлених задач.

У типовій непоставленій задачі іноді немає конкретних даних, не завжди відомо, що необхідно шукати, немає додаткових умов і т. д. Тому першим етапом (найбільш важливим і найбільш важким) у розв'язуванні непоставленої задачі є постановка самої задачі [1].

При проведенні аналізу фізичного необхідно з'ясувати, які можна ввести спрощення, чим можна знехтувати, які можна ввести додаткові умови і т. д. Раніше цей процес був названий процесом ідеалізації. Після розумної ідеалізації задачі необхідно з'ясувати, які дані можуть бути відомі, що можна взяти з довідників, таблиць і т. д. Деякі дані згодом можуть виявитися зайвими, а деяких може бракувати. Це з'ясується тільки після розв’язання задачі в загальному вигляді. Очевидно, не існує методу (алгоритму) проведення процесу ідеалізації задачі - це творчий процес.

Після проведення процесу ідеалізації задача ставиться (формулюється): при таких-то умовах дано конкретно щось, потрібно знайти щось. На цьому перший етап і розв’язок, і постановки непоставленої задачі закінчується. Задача поставлена. Далі іде уже відомий етап - розв’язок поставленої задачі. Необхідно вдруге провести аналіз фізичного явища, скласти замкнуту систему рівнянь і вирішити її в загальному вигляді. Перш ніж приступити до числового розрахунку, треба переконатися в тому, що всі дані для цього є. Якщо їх немає, то відсутні дані необхідно додатково додати до спочатку заданого чи взяти з таблиць, довідників і т.д. Тільки після введення цих додаткових даних, що забезпечують однозначний розв’язок поставленої задачі, можна вважати, що задача поставлена. Потім йде арифметичний розрахунок, на якому і закінчується розв’язок однієї задачі даної проблеми.

Далі, знімаючи одне чи кілька додаткових умов, можна сформулювати інші задачі і так само, як зазначено вище, вирішити їх. Таким чином, з однією непоставленою задачею може бути зв'язана велика група («блок») різноманітних і різної степені трудноці фізичних задач.

Приклад 1.8. На клині (похилої площини) розташоване тіло. Дослідити рух клина і тіла.

Розв’язування. Задача не поставлена. Неясно, які фізичні величини дані, що необхідно шукати, немає додаткових умов (де знаходяться дані тіла, які їхні властивості і т. д.).

На першому етапі аналізу можливого фізичного явища спробуємо спочатку поставити задачу. У фізичну систему доцільно включити обидва тіла. Всі інші тіла будемо вважати зовнішніми.

Проведемо ідеалізацію задачі. Для цього введемо ряд додаткових умов і обмежень, при яких буде справедливий розв’язок майбутньої (коли вона буде поставлена) задачі. Припустимо, що:

1) дана фізична система знаходиться на Землі;

2) тертя між клином і Землею настільки велике, що клин залишається нерухомим відносно Землі;

3) клин і тіло - абсолютно тверді тіла, тобто деформації їх настільки малі, що ними можна знехтувати. Однак виникаючі при цьому пружні сили ми будемо враховувати; з цієї умови, зокрема, випливає, що грані клина можна вважати плоскими;

4) висота клина настільки мала, що можна прийняти $g = 9{,}8 \text{ м/с}^2 = const;$

5) тіло - матеріальна точка ;

6) тертям між тілом і клином мале і ним можна знехтувати;

7) горизонтальна грань клина настільки мала, що можна не враховувати кульову форму Землі (тобто вважати напрямок вектора прискорення вільного падіння Землі g постійним).

Тепер, ввівши ці умови й обмеження, можна сформулювати першу задачу:

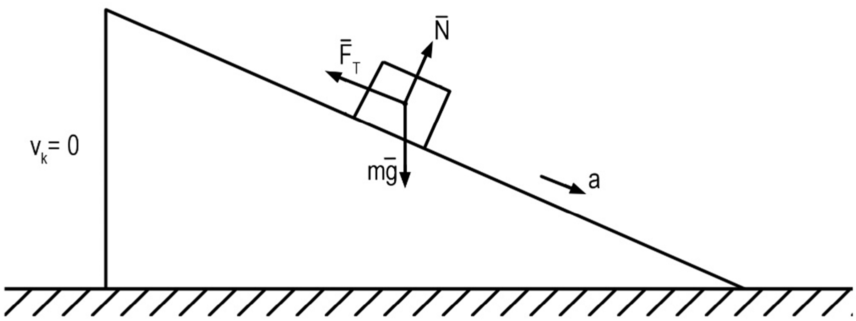

Рис. 1.4.1. Ілюстрація прикладу 1.8.

Матеріальна точка масою $m = 1$кг рухається по абсолютно твердій похилій площині з висоти $h = 10$м. Початкова швидкість тіла $v_k = 0$. Кут при основі похилої площини $\alpha = 30°$. Визначити час руху тіла до основи похилої площини (або прискорення a, або швидкість v, чи який-небудь інший параметр рух), якщо тертя між тілом і похилою площиною відсутнє. Опором повітря нехтувати.

Задача поставлена і, як показує її розв'язок, поставлена коректно. Аналіз цього розв'язок показує, що шуканий час t залежить від висоти похилої площини h і кута α, таким чином:

$$t = \frac{1}{g \cdot \sin\alpha}\sqrt{2gh} \quad (1.7)$$

Підстановка числових значень приводить до результату $t \approx 3$ с.

Одна поставлена задача розв'язана. Знімаючи поступово обмеження і додаткові умови, сформульовані вище, можна поставити більш складні задачі. Наприклад, знімаючи умову п.6, одержуємо задачу про рух матеріальної точки з врахуванням сили тертя.

Матеріальна точка масою *m=1кг* рухається по абсолютно твердій похилій площині клина з висоти *h=10м*. Клин лежить на горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя між клином і поверхнею рівний μ. В початковий момент часу тіло і клин нерухомі. Визначити (припустимо) час руху тіла до основи похилої площини та швидкість, якої набуде клин за цей час. Опором повітря нехтувати.

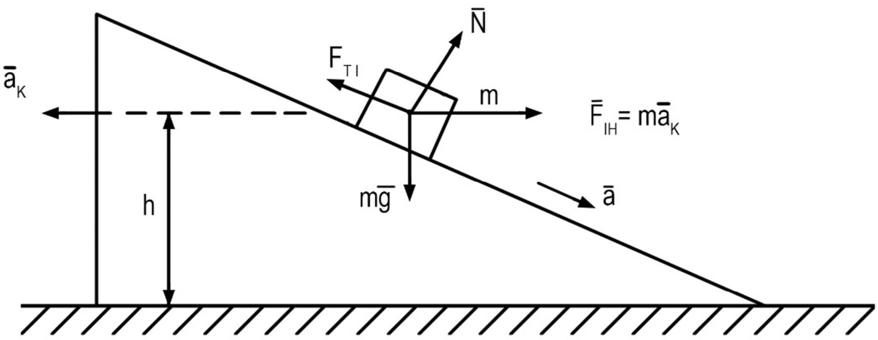

Рис. 1.4.2. Ілюстрація прикладу 1.8.

В даному випадку будемо розглядати рух відносно НІСВ пов'язаної з клином, де на тіло, крім сили тяжіння та сили реакції опори, діятиме сила інерції в напрямку, протилежному до напрямку руху клина (горизонтально) рівна $m \cdot a_к$, де $a_к$ – прискорення клина. Розв'язок цієї другої задачі корисно порівняти з першим розв’язком.

Якщо зняти умову п.5, то будемо мати задачу про рух нематеріальної точки (твердого тіла) по похилій площині. При цьому знову необхідно ввести припущення про форму тіла (куля, циліндр і т. д.). Розв’язування третьої задачі можна порівняти з першими двома, досліджувати виникаючі тут питання (чому в одному випадку час t більший, менший і т.д., і т.п.). Таким чином, з однієї непоставленої задачі можна одержати безліч («блок») найрізноманітніших задач.

1.8. Метод аналізу розмірностей фізичних величин

Метод аналізу розмірностей є суто якісним і не дає змоги зробити остаточні висновки щодо точного вигляду рівнянь фізики, застосовується до розв’язання таких задач, в яких точні розрахунки або вимірювання зробити важко, а часом просто неможливо. Основою даного методу є пошук показників степенів у формулі розмірностей і на основі цього запис функціональної залежності між ними. А, отже, при його використанні безрозмірні сталі величини (тобто просто числа) не розглядаються. Таким чином, усі результати, одержані за допомогою аналізу розмірностей, є справедливими з точністю до числового множника.

Даний метод привабливий тим, що дозволяє майже «з нічого» отримувати правильні оцінки масштабів досліджуваних явищ або створювати «портрет» експериментальної установки. Витончений і потужний інструмент, що дозволяє вивчати непрості фізичні закономірності [21].

При цьому принципове значення мають два моменти: вибір системи розмірностей та перелік суттєвих величин. Обидві проблеми вирішуються тільки на основі достатньо глибокого розуміння фізичного механізму досліджуваного процесу. Тому для успішного застосування аналізу розмірностей необхідно володіти певним рівнем фізичних уявлень та інтуїцією дослідника. Остаточно вирішити, які розмірнісні сталі слід або не слід включати в рівняння, що описує даний процес, можна лише після ретельного аналізу і значною мірою, інтуїтивно. При цьому слід пам’ятати, що збільшення числа основних величин на одиницю приводить до появи нової розмірної сталої.

Характерною особливістю аналізу розмірностей є те, що він не вимагає залучення основних рівнянь задачі. Крім того, часто виникає ситуація, коли рівняння відомі, проте аналітичне їх дослідження наштовхується на значні математичні труднощі. У таких випадках головну роль відіграють експериментальні методи дослідження, які дозволяють встановити найпростіші факти і записати їх у вигляді деяких математичних співвідношень. Для правильної постановки експериментів і узагальнення одержаних результатів на випадки, коли експеримент безпосередньо не проводився, необхідно вміти складати безрозмірні комплекси із величин, які суттєві для процесу і які для подібних явищ залишаються незмінними. Можливість такого попереднього теоретичного аналізу якраз і забезпечує теорія розмірностей [22].

Оскільки розв’язування задач цим методом є невеликим самостійним дослідженням, на початковому етапі потрібно, опираючись на власну інтуїцію та досвід, проаналізувати фізичну ситуацію і вибрати потрібні фізичні величини. Отже, цей початковий етап можна віднести до дослідницького типу творчого завдання, оскільки під час його виконання потрібно дати відповідь на запитання: чому певна фізична величина повинна залежати від тієї чи іншої? Окрім цього, важливо встановити припущення стосовно імовірної залежності шуканої фізичної величини від інших, висунути гіпотезу для якісного пояснення цієї залежності та перевірити її. Оскільки така послідовність дій повністю відповідає стадіям методу гіпотез у наукових дослідженнях, то, безумовно, вона сприяє формуванню вмінь застосовувати даний метод на практиці. Окрім цього метод розмірностей фізичних величин дає можливість орієнтуватися у складних фізичних ситуаціях, надійно оцінювати масштабність досліджуваних явищ, відновлювати в пам’яті забуті формули, перевіряти правильність проміжних і кінцевих результатів при розв’язуванні задач [23].

Для розв’язання задач методом розмірностей потрібно спиратися на такі твердження:

1. Розмірність фізичної величини може бути лише добутком степенів розмірностей основних величин.

2. Розмірності обох частин рівності, яка відображає певну фізичну закономірність, мають бути тотожними.

3. Розмірність фізичної величини співпадає з розмірністю її одиниці [21].

Приклад 1.9. Знайти період коливань математичного маятника.

Розв'язування. Під математичним маятником будемо розуміти важку матеріальну точку, яка підвішена на невагомому та недеформованому стержні, який закріплений іншим своїм кінцем так, що може вільно обертатися в деякій вертикальній площині навколо точки підвісу [22].

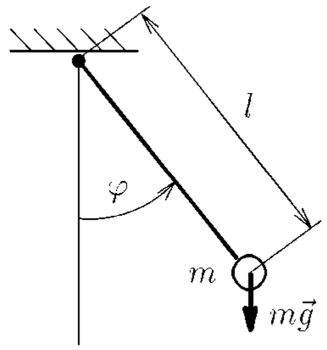

Рис. 1.5. Ілюстрація прикладу 1.9.

Спочатку виберемо систему одиниць в якій будемо працювати. В загальному випадку будемо користуватися міжнародною система одиниць СІ, хоча інколи використання інших систем одиниць фізичних величин може полегшити розв'язання задачі, що ми покажемо далі.

Наступним кроком складемо перелік фізичних величин, від яких може залежати відповідь. Очевидно, що період коливання може залежати від довжини маятника, його маси, прискорення вільного падіння і кутової амплітуди коливань. Випишемо розмірності цих величин, застосовуючи основну систему величин, тобто масу, довжину і час: $[t] = T, [l] = L, [m] = M, [g] = LT^{-2}, \varphi$ – безрозмірна величина.

Оскільки одна з величин безрозмірна (кут φ), то період коливань можна представити у вигляді:

$$T = C(\varphi) m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}, \tag{1.8}$$

де $C(\varphi)$ – парна функція, яка залежить від кутової амплітуди коливання і вигляд якої є невизначеною в рамках методу розмірностей, α, β, γ – невідомі показники степенів відповідних фізичних величин.

У рівняння (1.8) замість фізичних величин підставимо їх розмірності.

$$T^1 = M^{\alpha} L^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma}. \tag{1.8′}$$

Прирівняємо степені однорідних одиниць величин:

$$M: \qquad \alpha = 0;$$

$$L: \qquad \beta + \gamma = 0;$$

$$T: \qquad -2\gamma = 1.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, одержимо: $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$.

Остаточна формула для знаходження періоду коливань математичного маятника матиме вигляд:

$$T = C(\varphi)\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1.9}$$

Отже, період коливань маятника не залежить від його маси, а залежить лише від довжини маятника, та географічної широти.

Подальші дослідження не пов`язані з аналізом розмірностей, тому лише зауважимо, що для малих значень амплітуди $C(\varphi)$ може бути покладеним рівним 2π. Як відомо, кожен методичний прийом не є ідеальним, це відноситься і до методу розмірностей. Разом з тим, він поєднує необхідність аналізу фізичної залежності шуканої величини від інших величин або в теоретичному плані, або експериментально.

Приклад 1.10. Вивести формулу шляху рівноприскореного руху без початкової швидкості.

Розв'язування. Будемо шукати формулу у вигляді степеневої функції виду:

$$l = f(a, t)$$

або

$$l = C \cdot a^{\alpha} t^{\beta}.$$

На підставі правила про однорідність фізичних формул можемо написати:

$$[l] = [a]^{\alpha} [t]^{\beta}$$

або

$$L = L^{\alpha} T^{-2\alpha} L^{\beta},$$

звідки одержимо такі значення коефіцієнтів: $\alpha = 1, \beta = 2$. Отже, шукана формула має вигляд:

$$l = C \cdot at^2. \tag{1.10}$$

Постійний множник C методом розмірностей не може бути визначений, про це йшлося вище.

Приклад 1.11. Довести, що друга космічна швидкість залежить від розмірів планети – R, прискорення вільного падіння – g і не залежить від маси ракети m.

Розв'язування. Представимо функціональну залежність між даними величинами у вигляді:

$$v = CR^{\alpha} g^{\beta} m^{\gamma}.$$

Розмірність цього співвідношення запишеться так:

$$LT^{-1} = L^{\alpha} L^{\beta} T^{-2\beta} M^{\gamma},$$

де використані розмірності швидкості, прискорення, маси і відстані.

Очевидно, що показник ступеня $\gamma = 0$ і тоді повинні виконуватися наступні рівності для показників степенів:

$$L: \qquad 1 = \alpha + \beta,$$

$$T: \qquad -1 = -2\beta.$$

Отже, маємо, що $\alpha = \frac{1}{2}$ і $\beta = \frac{1}{2}$. Таким чином, формула для другої космічної швидкості має вигляд:

$$v = C\sqrt{Rg}. \tag{1.11}$$

Приклад 1.12. Оцініть гравітаційний тиск у центрі Землі.

Розв'язування. Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю величину неможливо. Розв'яжемо задачу методом розмірностей. Проаналізуємо умову й укладемо повний перелік фізичних величин, які відбивають істотні, на нашу думку, грані виникнення гравітаційного тиску: p — тиск, який необхідно оцінити, m — маса, R — радіус Землі й гравітаційна стала G. Розмірності даних фізичних величин мають наступний вигляд: $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, $[m] = M$, $[R] = L, [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$.

Розв’язок задачі шукатимемо у вигляді рівності:

$$p = f(m, R, G),$$

або

$$p = x \cdot m^\alpha R^\beta G^\gamma,$$

де x — числовий коефіцієнт, значення якого в межах методу розмірностей є невизначеним, α, β і γ — невідомі показники степенів відповідних фізичних величин.

Запишемо рівність розмірностей одиниць фізичних величин:

$$M^1L^{-1}T^{-2} = M^\alpha L^\beta M^{-\gamma} L^{3\gamma} T^{-2\gamma}$$

Прирівняємо степені однорідних одиниць величин:

$$L: \quad -1 = \beta + 3\gamma;$$

$$T: \quad -2 = -2\gamma;$$

$$M: \quad 1 = \alpha - \gamma;$$

Розв’язуючи систему рівнянь, одержимо: $\alpha = 2, \beta = -4, \gamma = 1$. Остаточна формула матиме вигляд:

$$p = x \cdot \frac{m^2 G}{R^4}. \tag{1.12}$$

Для оцінки тиску покладемо $x = 1$. Тоді:

$$p = \frac{m^2 G}{R^4}. \tag{1.12′}$$

При підстановці відповідних величин отримаємо, що тиск у центрі Землі $p = 1{,}4 \cdot 10^{12}$ Па. Цікаво, що геофізики в ході спеціальних досліджень оцінюють цей тиск як $4 \cdot 10^{12}$ Па, як бачимо ці величини одного порядку [22].

РОЗДІЛ ІІ. НЕСТАНДАРТНІ, НЕПОСТАВЛЕНІІ ДОВІЛЬНІ ЗАДАЧІ

2.1. Розв'язування нестандартних і оригінальних задач

Вище уже відзначалося, що для розв'язування нестандартних задач одних конкретних і узагальнених знань уже недостатньо. Застосовуючи їх, ми, як правило, одержуємо незамкнуту систему рівнянь, де потрібно шукати дуже невизначене «щось», врахування якого дозволить замкнути систему рівнянь. Невловимі і невизначені «щось» у нестандартних задачах настільки різноманітні, що роблять спробу класифікації таких задач майже безнадійною. У прикладах, що нижче приводяться, зазначені деякі характерні «щось» і способи їхнього знаходження.

Приклад 2.1. На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя f лежить тіло масою m. У момент часу $t = 0$ до нього приклали горизонтальну силу, що змінюється за законом $F = at$, де $\vec{a}$ - постійний вектор. Знайти шлях, пройдений тілом за перші t секунд після початку дії цієї сили.

Розв'язування. Проводимо звичайний аналіз, застосовуючи метод аналізу фізичної задачі. У фізичну систему включаємо тільки одне тіло масою m. Його можна вважати матеріальною точкою. Тіло рухається під дією деяких сил, одна з яких залежить від часу. Необхідно визначити один з параметрів цього руху - шлях, пройдений тілом. Це основна задача динаміки матеріальної точки [1].

Застосуємо другий закон Ньютона. Інерціальну систему відліку зв'яжемо з площиною, вісь ОХ виберемо в напрямку вектора $\vec{a}$**.** У процесі руху на тіло діють чотири сили: дана сила $\vec{F} = \vec{a}t = \vec{\imath}\vec{a}t,$ де $\vec{\imath}$ - одиничний вектор, сила тертя $\overrightarrow{F_T} = -fmg\vec{\imath},$ реакція опори $\vec{N}$ і сила тяжіння $\overrightarrow{mg}$. Останні дві сили компенсують одна одну. За другим законом Ньютона,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = at\vec{\imath} - fmg\vec{\imath}\,,$$

чи в проекціях на вісь ОХ

$$m\frac{dv_x}{dt} = at - fmg\,.$$

Інтегруючи це рівняння і з огляду на початкові умови, знаходимо закон зміни швидкості:

$$V_x = \frac{at^2}{2m} - fgt,$$

і далі (після інтегрування рівняння $\frac{dx}{dt} = v_x$) - закон руху:

$$x = \frac{at^3}{6m} - \frac{fgt^2}{2} \qquad (2.1)$$

Останній вираз дає шукану відповідь задачі. Але, виявляється, приведене розв'язування невірне. Формально проведений фізичний аналіз: не врахована сила тертя спокою взагалі й особливо той факт, що ця сила, як і дана сила $F = at,$ змінюється (росте) з часом. Рух тіла почнеться тільки в момент часу $t_0 = fmg/a,$ коли сила тертя спокою досягне свого максимального значення. До цього моменту часу тіло знаходиться в стані спокою. Підставляючи у формулу замість t різницю $t - t_0,$ одержимо вірне розв'язування:

$$x = \frac{a(t-t_0)^3}{6m} - \frac{fg(t-t_0)^2}{2}\text{, де} \geq t_0\,.$$

Таким чином, у даній нестандартній задачі «щось» полягало в ретельному обліку сили тертя спокою й у тому, що ця сила є змінною (вона росте від нуля до свого максимального значення fmg при зростанні діючої сили $F = at$).

Дуже часто в нестандартних задачах використовується так звана умова відриву (при припиненні взаємодії тіл пружна сила реакції опори перетворюється в нуль: $\vec{N} = 0$).

Приклад 2.2. На невелике тіло масою m, що лежить на гладкій горизонтальній площині, у момент часу $t = 0$ почала діяти сила, що залежить від часу за законом $F = at$, де a - стала. Напрямок цієї сили увесь час складає кут α, з горизонтом. Визначити момент часу, у який тіло відірветься від площини, а також швидкість тіла в будь-який момент часу до і після відриву.

Розв'язання. У фізичну систему включимо тільки одне дане тіло, яке можна прийняти за матеріальну точку. Всі інші тіла - зовнішні. У результаті взаємодії з зовнішніми тілами відбувається рух даного тіла. Помітимо, що одна з зовнішніх сил залежить від часу t. Необхідно визначити момент часу якоїсь події (відрив тіла від площини), а також швидкість тіла в будь-який момент часу до і після цієї події. Тому що рух тіла розглядається не формально (задана сила), то дана задача зв'язана з основною задачею динаміки матеріальної точки.

Застосуємо другий закон Ньютона. Інерціальну систему відліку зв'яжемо з площиною, вісь OX направимо горизонтально, вісь OY вертикально вгору. Тоді за другим законом Ньютона одержимо

$$m\frac{dv_x}{dt} = at \cdot \cos\alpha \qquad (2.2)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = N + at \cdot \sin\alpha - mg \qquad (2.3)$$

Неважко здогадатися, що до відриву $v_y = const = 0$ і, отже, система рівнянь (2.2) - (2.3) здобуває вигляд

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{at} \cdot \cos\alpha \qquad (2.4)$$

$$0 = \mathrm{N} + \mathrm{at} \cdot \sin\alpha\text{-}\mathrm{mg} \qquad (2.5)$$

Отримано систему з двох рівнянь із трьома невідомими ($\mathrm{v_x}, \mathrm{N}$ і t), але якщо ми догадаємося, що в момент відриву реакція опори перетворюється в нуль ($\mathrm{N} = 0$), то з рівняння (2.5) відразу знайдемо момент часу відриву:

$$\mathrm{t_0} = \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{a}\sin\alpha} \qquad (2.6)$$

Далі, після інтегрування рівняння (2.6) і обліку початкових умов одержимо закон зміни швидкості до відриву:

$$\mathrm{v_x} = \frac{\mathrm{at^2} \cdot \cos\alpha}{2\mathrm{m}} \qquad (2.7)$$

Після відриву ($\mathrm{N} = 0$) система (2.4) - (2.5) здобуває вигляд

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{at} \cdot \cos\alpha \qquad (2.8)$$

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{dv_y}}{\mathrm{d(t - t_0)}} = \mathrm{a(t - t_0)}\sin\alpha\ \text{-}\ \mathrm{mg} \qquad (2.9)$$

У рівнянні (2.9) враховано, що рух по осі OY починається з моменту відриву

$t_0 = \frac{mg}{a}\sin\alpha$. Після інтегрування рівнянь (2.8) і (2.9) і враховуючи початкові умови знаходимо закон зміни вектора швидкості після відриву ($t \geq t_0$):

$$v = \frac{at^2 \cdot \cos\alpha}{2m} i + \left[\frac{a(t - t_0)^2 \sin\alpha}{2m} - g(t - t_0)\right] j$$

(i та j - одиничні вектори).

На перший погляд здається, що здогадки, про які йшла мова в процесі розв'язування задачі (до відриву $v_y = 0$, у момент відриву $N = 0$, після відриву час руху тіла по осі OY дорівнює $t - t_0$) - це, очевидно, дрібні деталі. Так - це деталі, але деталі, без яких задачу вирішити неможливо. Цим визначається важлива роль вищезгаданих маленьких «щось». Після розв'язування таких задач наш досвід і фізична інтуїція збагачуються. Втім, звичайно, усе відоме і вирішене здається простим і очевидним, а невідоме і невирішене - складним і незрозумілим.

Дуже розповсюдженим при рішенні нестандартних задач є вдалий вибір системи відліку (СВ) [11]. Приведемо три приклади. У першому вибір системи відліку байдужний, у другому - істотний настільки, що при одному виборі СВ задача є стандартною, а при іншому - нестандартною, нарешті, у третьому вдалий вибір СВ є визначальним (звичайна стандартна задача стає оригінальною).

Приклад 2.3. Ланцюжок масою m, що утворює окружність радіуса R, надітий на гладкий круговий конус з кутом θ (див. Рис.2.1.). Знайти натяг ланцюжка, якщо він обертається з постійною кутовою швидкістю навколо вертикальної осі, що збігається з віссю симетрії конуса.

Розв'язування. Фізичну систему утворимо з одного тіла - ланцюжка. Ланцюжок - нематеріальна точка. Сила натягу, яку необхідно визначити, діє на кожен елемент ланцюжка. Тому розділимо ланцюжок на дуже малі й однакові елементи, щоб кожний з них можна було прийняти за матеріальну точку. Розглянемо один такий елемент масою Δm. Він рухається по окружності відомого радіуса R з відомою кутовою швидкістю ω під дією деяких сил. Одну з них необхідно визначити. Це одна з основних задач динаміки обертального руху матеріальної точки [1].

Застосуємо другий закон Ньютона. Надалі ми запишемо систему рівнянь паралельно в двох системах відліку. Виберемо неінерціальну систему відліку (НІСВ), зв'язану з елементом Δm, та інерціальна (ІСВ), зв'язану з будь-яким нерухомим тілом. На елемент Δm у ІСВ діють чотири сили: сила тяжіння $\Delta \overrightarrow{mg}$ (Рис.2.1), пружна сила реакції опори $\vec{N}$ і дві однакові сили натягу $\vec{T}$, кожна з яких напрямлена по дотичній до окружності у відповідній точці. У НІСВ до цих сил додається відцентрова сила інерції $\Delta m\vec{\omega}$. Проектуючи сили на осі, записуємо другий закон Ньютона в ІСВ:

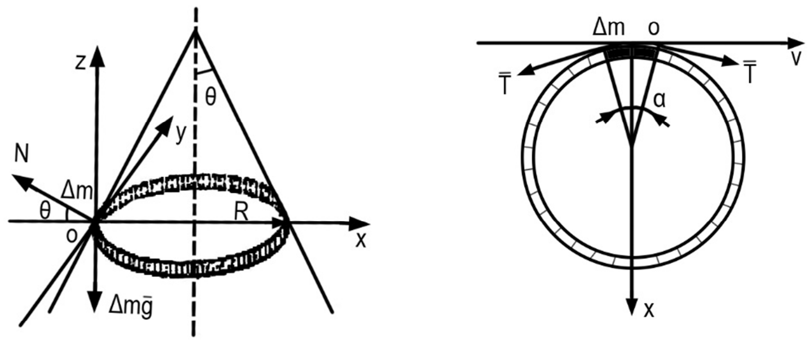

Рис.2.1. Ілюстрація прикладу 2.3

$$N\ \sin\theta - 2T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \text{ (для осі } OZ) \quad (2.11)$$

$$2T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - N\ \cos\theta - \Delta m\omega^2\ R = 0 \text{ (для осі OX)} \quad (2.12)$$

Відповідно в НІСВ:

$$N\ \sin\theta - 2T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0, \quad (2.13)$$

$$2T\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - N\ \cos\theta - \Delta m\omega^2\ R = 0 \quad (2.14)$$

Легко побачити, що системи рівнянь (2.11) - (2.12) і (2.13) - (2.14) еквівалентні. Однак у будь-якому випадку - це незамкнута система з двох рівнянь із трьома невідомими (T, α і N). Отже, необхідно знайти «щось», що замкнуло б систему рівнянь. Виникає здогад (з рис. 2.1), що кут a якось зв'язаний з елементом Δm. Легко бачити, що цей зв'язок має вигляд $\Delta m/m = \alpha/(2\pi)$

І нарешті, з огляду на ще одне «щось» - малий кут α (і, тому, $\sin\alpha \approx \alpha$), одержуємо просту і замкнуту систему рівнянь (у ІСВ):

$$N\ \sin\alpha - \Delta mg = 0,$$

$$T\alpha - N\cos\theta\ = \Delta m\omega^2\, R$$

$$\Delta m/m = \alpha/(2\pi)$$

Після розв'язування цієї системи знаходимо відповідь у загальному вигляді:

$$T = \frac{m(\omega^2\, R\ +\ g\cdot ctg\theta)}{2\pi}$$

Замітимо, що в рішенні цієї задачі визначальними є конкретні й узагальнені знання, проте і роль маленьких «щось» уже стає значною.

Приклад 2.4. Через блок, прикріплений до стелі кабіни ліфта, перекинута нитка, до кінців якої прив'язані вантажі з масами m_1 і m_2 (Рис. 2.2). Кабіна піднімається з прискоренням a. Нехтуючи масами блоку і нитки, а також тертям, знайти силу, з яким блок діє на стелю кабіни.

Розв'язування. Проведемо розв'язування задачі, вибравши різні системи відліку: спочатку систему відліку зв'яжемо з кабіною (НІСВ), а потім із Землею (ІСВ).

Розв'язування в НІСВ. У фізичну систему включимо два тіла m_1 і m_2 (їх можна прийняти за матеріальні точки), невагомі блок і нитка. Під дією деяких сил тіла системи рухаються прискорено. Необхідно знайти одну з сил, ту з якою блок діє на стелю кабіни. Це одна з основних задач динаміки [1].

Застосуємо другий закон Ньютона для тіл m_1 *і* m_2 відносно обраної НІСВ. Вісь ОХ направимо вниз (Рис.2.2). На тіло m_1 діють сила тяжіння $\overrightarrow{m_1 g_1}$, сила натягу нитки і сила інерції $(-m_1\vec{a})$. Проектуючи ці сили на вісь ОХ, по другому законі Ньютона для тіла m_1 одержуємо $m_1 g + m_1 a - T = m_1 b$, де b - проекція вектора прискорення тіла m_1 відносно обраної НІСВ. Ми умовно прийняли, що $m_1 > m_2$ і, отже, вектор прискорення $\vec{b}$ напрямлений вниз. Відповідно для тіла m_2 знаходимо $m_2 g + m_2 a - T = -m_2 b$.

Отримано замкнуту систему з двох рівнянь із двома невідомими (T і

b)Шукану силу F знайдемо, записавши другий закон Ньютона для центра мас блоку (він нерухомий): $2T - F = 0$. Звідси

$$F = \frac{4m_1 m_2 (g + a)}{m_1 + m_2} \tag{2.15}$$

Таким чином, у НІСВ задача виявилася стандартною.

Розв'язування в ІСВ.

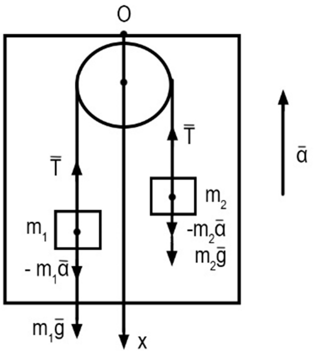

Рис.2.2. Ілюстрація прикладу 2.4

Другий закон Ньютона для тіл m_1 $і$ m_2 дає

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \tag{2.16}$$

$$m_2 g - T = -m_2 a_2 \tag{2.17}$$

де a_1 $і$ a_2- модулі проекцій векторів прискорень $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ відповідно тіл m_1 $і$ m_2 відповідно обраної ІСВ. Отримано незамкнуту систему з двох рівнянь із трьома невідомими ($\vec{T}$, $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$). Отже, необхідно шукати «щось», що замкнуло б цю систему. Виникає здогад: a_1 і a_2 зв'язані між собою. Як? Очевидно, що

$$a_2 = a_1 + 2a \tag{2.18}$$

Дійсно, так як $a_2 = b + a_1$, $a_1 = b - a_2$**,** тоді $\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 = 2\mathrm{a}$**.**

Вирішуючи замкнуту систему рівнянь (2.16) - (2.18) знаходимо

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g\ +\ a)}{m_1 + m_2}$$

Отже,

$$F = 2T = \frac{4m_1m_2(g+a)}{m_1+m_2} \quad ,$$

що збігається з (2.15). Таким чином, ця ж задача в ІСВ виявилася нестандартною.

Приклад 2.5. Зенітний снаряд, що одержав початкову швидкість v_0, спрямовану вертикально вгору, розривається в найвищій точці своєї траєкторії на n однакових осколків. Швидкості осколків однакові, рівні u_0 і спрямовані під різними полярними θ і азимутальними φ кутами. Визначити положення довільного осколка в будь-який момент часу.

Розв'язування. Виберемо ІСВ, зв'язану з Землею. Легко показати, що при такому виборі задача є стандартною. У фізичну систему включимо тільки довільний осколок, який можна прийняти за матеріальну точку. Його початкова висота $h_0 = {v_0}^2/(2g)$, початкова швидкість v_0, а також кут $\alpha = 90° - \theta$, що складає вектор u_0 з горизонтом (Рис.2.4.) відомі. Необхідно знайти положення осколка в будь-який момент часу t. Це основна задача кінематики матеріальної точки [1]. Виберемо площину, у якій рухається (по параболі) довільний осколок, як координатну площину OXY (Рис.2.3.). Тоді закон руху осколка в параметричній формі має вигляд

$$\mathrm{x} = \mathrm{u}_0 \cos\alpha t\,;\ \mathrm{y} = \frac{{v_0}^2}{2g} \pm \mathrm{u}_0 \sin\alpha t + \frac{gt^2}{2}.$$

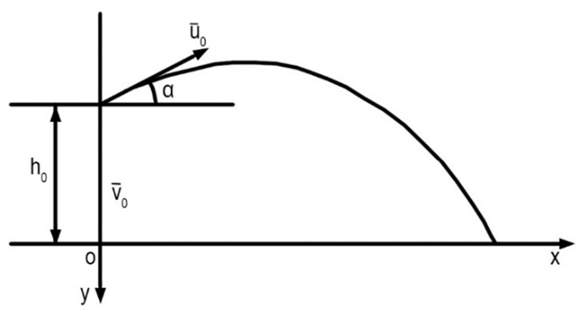

Рис.2.3. Ілюстрація прикладу 2.5

Очевидно, що цей закон руху дозволяє визначити положення довільного осколка в будь-який момент часу.

Виберемо НІСВ, зв'язану з центром маси снаряда. Після розриву центр мас (початок координат) рухається вниз із прискоренням g. У цій системі відліку рух довільного осколка є рівномірним (з швидкістю u_0) і, отже, у будь- який момент часу кожен осколок розташовується на сфері радіуса $R = u_0 t$ з центром в початку координат. Задача розв'язана, причому розв'язування, крім того що він простий і добірний, ще і дуже наочний.

Таким чином, ця ж задача в НІСВ виявилася оригінальною.

ОРИГІНАЛЬНІ ЗАДАЧІ

Краще говорити не про стандартні, нестандартні й оригінальні задачі (тому що ми бачили, що та сама задача, наприклад, в залежності від вибору системи відліку може виявитися і стандартною, і нестандартною, і навіть оригінальною), а про способи розв'язування задач (стандартний, нестандартний і оригінальний).

Очевидно, що спроба класифікації оригінальних задач, мабуть, теж (як і взагалі для всіх нестандартних задач) є безнадійною. Можна тільки помітити, що оригінальні задачі часто допускають і стандартне, і нестандартне, і оригінальне розв'язування. У першому випадку для розв'язування задачі досить застосувати тільки конкретні й узагальнені знання, у другому використовують ще і здогад, причому роль останнього елемента не настільки істотна, і, нарешті, у третьому випадку задача може бути розв'язана тільки за допомогою здогаду, інтуїції. Ці останні задачі і можна було б назвати власне оригінальними. Приведемо кілька прикладів.

Приклад 2.6. У колі радіуса R вирізане коло радіуса $r < R/2$, центр якого розташований на відстані $a < (R - r)$ від центра великого кола (Рис. 2.4, а). Визначити центр мас фігури, що утворилася.

Розв'язування. Задача допускає і стандартне розв'язування, що випливає з визначення центра мас. Стандартне розв'язування зв'язане з відносно громіздкими обчисленнями. Спробуємо пошукати нестандартне, а може бути, і оригінальне розв'язування. Особливість даної фізичної системи в тому, що кола - фігури симетричні з нескінченно великим числом осей симетрії (діаметри кіл)

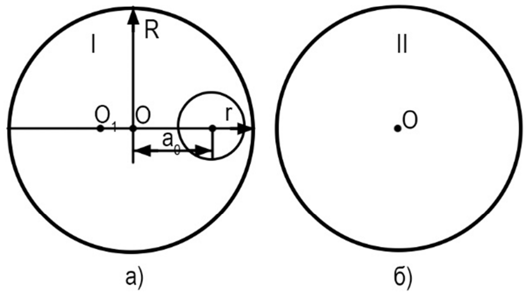

Рис.2.4, Ілюстрація прикладу 2.6.

Центр мас великого кола (позначимо цю фігуру символом *II,* рис. 2.4, б) до вирізу знаходився в центрі кола (точка О). Фігура, що утворилася після вирізу малого кола (позначимо її символом *I*), залишилася симетрично, але тільки з однією віссю

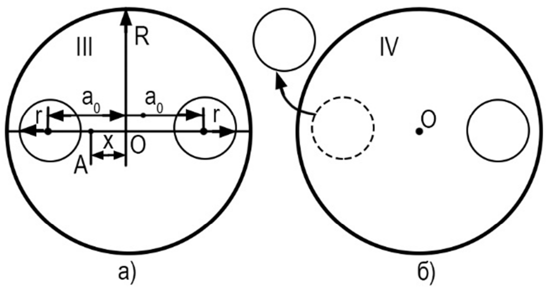

Рис. 2.5. Ілюстрація прикладу 2.6.

Виникає здогадка: а якщо вирізати не одне, а два малих, кола розміщених симетрично відносно центра великого кола (Рис.2.5,б). Центр маси утвореної фігури (позначим її символом *III)* в силу симетрії буде знаходитися в т.О. Повернемо друге мале коло (символ *IV)* на своє місце. Тоді задача про положення центра мас зводиться до визначення центра мас, системи фігури *I* та *IV,* центри мас яких відомі. Так як центр мас двох тіл лежить на прямій, що з'єднує їх центри мас в точці *A* (Рис.2.5,а), що ділить відстань α_0 між ними у відношенні, обернено пропорційному їхнім масам, тоді

$$\frac{x}{\alpha_0 - x} = \frac{m_1}{m_4} \tag{2.19}$$

де $x = |AO|$, $m_1 = \alpha\pi r^2$ - маса фігури *IV,* $m_4 = \alpha(\pi R^2 - 2\pi r^2)$ - маса фігури *III,* $\alpha = const.$ З (2.19) знаходимо шукану координату центра мас фігури *I:*

$$x = \frac{\alpha_0 r^2}{R^2 - r^2}$$

Замітимо, що найважливішим у другому (оригінальному) рішенні цієї задачі був здогад про виріз додаткового (другого) малого кола. А цей здогад - елемент досвіду, фізичної інтуїції.

Ускладнимо умови вирішеної задачі: нехай виріз зроблений *у* несиметричній фігурі, наприклад, у трикутнику.

Приклад 2.7. У трикутнику зі сторонами a, b і c вирізане коло радіуса r, центр якого лежить на медіані AD на відстані $\alpha_1 = |MN|$ від точки перетинання медіан M (Рис. 2.6). Визначити центр мас фігури, що утворилася.

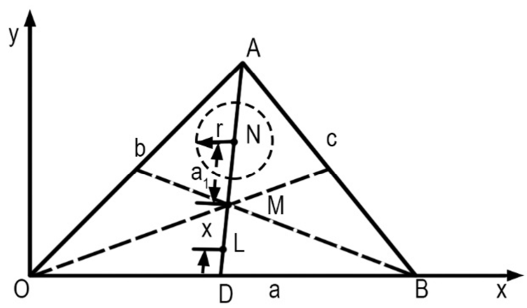

Рис. 2.6. Ілюстрація прикладу 2.7.

Розв'язування. Легко побачити, що і ця задача допускає стандартне розв'язування за формулою із громіздкими обчисленнями. Спробуємо знайти інше розв'язування. Спосіб (з вирізанням іншого кола з метою одержати фігуру з більшою симетрією), використаний у попередній задачі, тут не підходить: вихідна фігура (трикутник) несиметричний. Але ідею про комбінацію фігур можна спробувати застосувати. Вставимо вирізане коло (позначимо цю фігуру символом *I*). Тоді ми одержимо трикутник *OAB* (позначимо цю фігуру символом *III),* центр мас якого лежить у точці перетинання медіан *M.* Але центр мас фігури *II* (трикутник з вирізаним колом) лежить у точці L на медіані AD на невідомій відстані x від точки *M,* і виникає ідея розглядати фігуру *ПІ* як комбінацію фігур *I* і *II.* Тому що маси фігур відомі ($m_1 = \alpha\pi r^2$, m_2=m_3−m_1, $m_2 = \alpha\left[\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \pi r^2\right]$, де p= $(\mathrm{a} + b + \mathrm{c})/2$), то рівняння (2.19), що визначає центр мас системи фігур *I* і *II,* приймає в даному випадку вигляд

$$\frac{x}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

В загальному вигляді його розв’язування:

$$x = \frac{\pi r^2 a_1}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \pi r^2}$$

Приклад 2.8. У рівномірно зарядженій електричній кулі є сферична порожнина, центр якої знаходиться на відстані а від центра кулі (Рис.2.7). Знайти напруженість електричного поля в довільній точці порожнини, якщо густина заряду дорівнює ρ .

Розв’язування. Фізична система складається з рівномірно зарядженої кулі з порожниною. Необхідно розрахувати електричне поле в порожнині. Це основна задача в теорії електростатичного поля[1].

Так як заряд кулі неточковий, то можна було б застосувати метод диференціювання та інтегрування. Але це зв'язано з трудомісткими обчисленнями інтегралів. Використовуємо комбінаційні ідеї, викладені вище. Позначимо r радіус порожнини, а R - радіус великої кулі. Розглянемо сукупність трьох тіл, рівномірно заряджених струмом з густиною ρ *:* мала куля радіуса r (позначимо це тіло символом *I*), великий куля радіуса R (символ *III)* і куля з порожниною (символ *II).* За принципом суперпозиції напруженість поля E_3 у будь-якій точці всередині великої кулі дорівнює геометричній сумі напруженостей полів малої кулі (E_1) і кулі з порожниною *(*E_2*):* $E_3 = E_1 + E_2$. Звідси шукана напруженість $E_2 = E_3 - E_1$

Нехай довільна точка *A* всередині порожнини знаходиться на відстані у від центра порожнини і на відстані *x* від центра кулі (Рис.2.7.). Тоді за формулою для поля всередині кулі маємо

$$E_1 = \rho y/(3\varepsilon_0), \tag{2.20}$$

$$E_3 = \rho x/(3\varepsilon_0) \tag{2.21}$$

Розглянемо трикутники AOO_1 і ABC. Враховуючи (2.20) і (2.21), знаходимо

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|E_1|}{|E_3|} = \frac{y}{x} = \frac{|AO_1|}{|AO|},$$

Отже, ці трикутники подібні, звідси

$$\frac{|BC|}{|OO_1|} = \frac{|AC|}{|AO|} \text{ або } \frac{E_2}{a} = \frac{E_3}{x}.$$

Таким чином, $E_2 = a\rho/(3\varepsilon_0)$. Так як $E_2 \parallel OO_1$ (це випливає з подібності трикутників AOO_1 і ABC), то остаточно знаходимо, що електричне поле всередині порожнини однорідне.

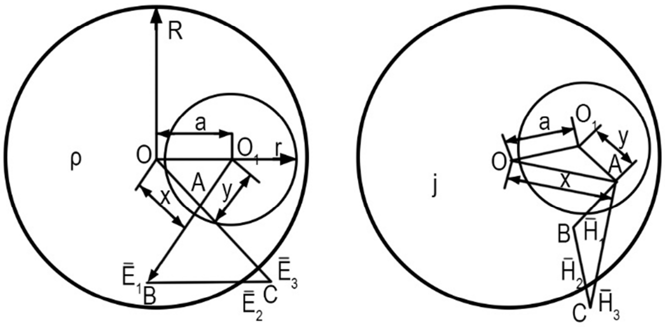

Рис.2.7. Ілюстрація прикладу 2.9

Приклад 2.9. По нескінченно суцільному циліндричному провідникові тече постійний струм густиною j. У провіднику є нескінченна циліндрична порожнина, вісь якої рівнобіжна до осі провідника і знаходиться від неї на відстані a. Визначити напруженість магнітного поля в довільній точці порожнини.

Розв'язування. Використовуємо метод, викладений вище розглянемо довільну точку A порожнини, що стоїть від осі великого циліндра на відстані x і від осі порожнини на відстані y (Рис.2.7.). Корисно виділити три системи: струм і його магнітне поле суцільного (без порожнини) великого циліндра (позначимо символом *III),* струм і його магнітне поле великого циліндра з порожниною (символ *II)* і струм і його магнітне поле малого циліндра радіуса, рівного радіусу порожнини (символ *I).* Так як (за принципом суперпозиції) $\overrightarrow{H_3} = \overrightarrow{H_1} + \overrightarrow{H_2},$ то шукана напруженість $\overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{H_3} - \overrightarrow{H_2}$.

За теоремою про циркуляцію вектора $\vec{H}$ знаходимо $H_1 = \frac{1}{2}y,\ H_3 = \frac{1}{2}x$ отже,

$$\frac{H_1}{H_3} = \frac{y}{x} = \frac{|AO_1|}{|AO|}.$$

Тому що кути BAC і OAO_1 рівні, то трикутники ABC і OAO_1 подібні. Таким чином, $H_2/a = H_3/x$ і $H_2 = ja/2.$ Легко показати, що вектор $\overrightarrow{H_2}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OO_1}$ і, отже, магнітне поле всередині порожнини однорідне.

Помітимо, що розв’язування останньої задачі виявилося стандартним тому, що до цього ми вирішили три майже такі ж задачі і наш досвід і фізична інтуїція зросли. Тепер уже можна поставити десятки подібних задач, і вони будуть для нас не оригінальними, а звичайними стандартними задачами тому, що в процесі розв’язування перших трьох подібних задач ми знайшли спеціальний метод їхнього розв’язування. Таким чином, поняття стандартної, нестандартної чи оригінальної задачі дуже умовні і відносні і залежать від досвіду і фізичної інтуїції того, хто цю задачу розв’язує. Проте класифікація задач на стандартні, нестандартні й оригінальні є корисною

2.2. Непоставлені задачі і методи їх вирішення

Вище непоставлена задача була визначена як задача з неповною системою даних для її розв’язування, або неідеалізована, або те й інше разом узяте. Розв’язування непоставленої задачі починається з постановки задачі: перш ніж розв’язувати задачу, необхідно її поставити. Однак таке представлення загального розв’язування непоставленої задачі у вигляді двох послідовних етапів (постановка і подальше розв’язування) відбиває лише її зовнішню сторону. В загальному розв’язуванні задачі необхідно бачити не тільки взаємний зв'язок і проникнення цих етапів, але і їхню послідовну зміну. Вже в процесі постановки першої (звичайно найпростішої) задачі підготовляється і її розв’язання. У наступному ж процесі розв’язування першої поставленої задачі (на етапі аналізу розв’язування) створюються умови для проведення другого процесу постановки більш складної задачі і т. д.

Така приблизно внутрішня діалектика процесу загального розв’язування непоставленої задачі.

І все ж таки саме етап постановки задачі є найважливішим, визначальним. Недарма говорять, що правильно поставити задачу - це значить уже наполовину її розв’язати [5].

Постановку задачі (як і розв’язування поставленої задачі) починають з вибору фізичної системи. Необхідно з'ясувати, які тіла включаються в дану систему, а також визначити, які тіла будуть вважатися зовнішніми. Потім проводять аналіз фізичної системи: по-перше, досліджують, якими властивостями володіють тіла системи (класичні вони чи квантові, пружні чи непружні, абсолютно тверді і т. д.), і, по-друге, у яких умовах вони (тіла системи) знаходяться. Відомо, що властивості тіл системи й умови, у яких вони знаходяться, визначають фізичні явища, що відбуваються в даній системі. Будь-яка ж фізична задача виникає всередині фізичного явища і відбиває його.

У процесі аналізу фізичної системи починається проведення ідеалізації задачі: вводяться ідеальні об'єкти (матеріальні точки, невагомі тіла, точкові заряди і т. д.), проводяться оцінки тих чи інших взаємодій, взаємозв'язків (якими з них можна нехтувати і т. д.). Ідеалізація задачі здійснюється практично до кінця розв’язування непоставленої задачі, і тут важливо бачити і розрізняти два взаємозалежних і взаємно-проникаючих процеси: процес спрощення і процес ускладнення умов задачі. Спочатку переважає перший процес. Особливо при постановці першої задачі вводять якнайбільше спрощень, нехтують тими чи іншими властивостями тіл, не враховують різні умови і т.д.

При постановці і рішенні більш складних задач основним стає другий процес, хоча і тут в умовах задачі можуть уводитися різні обмеження і припущення.

Після вибору й аналізу фізичної системи йде процес аналізу фізичних явищ, що можуть відбуватися в даній фізичній системі при тих чи інших умовах. І на цьому етапі продовжується ідеалізація задачі, вводяться і розглядаються різні ідеальні процеси, відбувається подальше спрощення умов, досліджуються можливі обмеження і т. д. Власне тут-то, при аналізі, вже якого- небудь фізичного явища, і народжується перша задача: вибираються визначені дані і шукані величини і формулюються умови задачі. Задача поставлена. Поставлена вона коректно чи ні, це з'ясується лише після одержання розв’язування задачі в загальному вигляді. Тільки тоді буде видно, чи є всі необхідні дані для одержання числової відповіді. Якщо деякі величини невідомі, то їхні значення повинні бути додатково додані до початкових умов. Після аналізу розв’язування першої задачі ускладнюються умови і ставиться друга задача і т. д.

Таким чином, як це уже відзначалося вище, з кожною непоставленою задачею може бути зв'язаний комплекс («блок») задач різного ступеня трудності.

Непоставлені задачі настільки різноманітні, що не завжди вищеописана схема може бути застосована до розв’язування таких задач. Втім, такої єдиної і твердої схеми і не може існувати, тому що розв’язування непоставленої задачі — це творчий процес. Але яка б не була непоставлена задача, при її рішенні необхідно проводити процес постановки, а отже, і ідеалізації задачі. Приведемо спочатку приклад непоставленої задачі, що має (на перший погляд) дуже загальний характер.

Приклад 2.10. Дослідити рух двох електрично заряджених тіл.

Розв’язування. У цій задачі невідомо, що дано, які величини необхідно визначати, коротше - задача непоставлена.

Проведемо спочатку перший етап - етап постановки задачі. Фізичну систему утворимо з двох даних тіл і Землі (припустимо, що фізичні явища відбуваються на Землі). Впливом інших зовнішніх тіл будемо нехтувати. Ми знаємо, що на етапі постановки задачі проводиться процес ідеалізації, основою якого є врахування і прийняття різних припущень, і умов, що спрощують. Частина цих умов уже сформульована. Продовжимо процес спрощення. Для простоти припустимо:

1. обидва тіла - матеріальні точки з масами m_1 i m_2. Отже, заряди Q_1 і Q_2-точкові;
2. заряди Q_1 і Q_2 мають однаковий знак;
3. впливом електричного полюсу Землі нехтуємо;
4. тіло m_2 із зарядом Q_2 закріплено на поверхні Землі, а тіло m_1 з зарядом Q_1 знаходиться на одній вертикалі з тілом m_2 і на висоті h від поверхні Землі;
5. висота h мала в порівнянні з радіусом R Землі. Отже, зміною при - скорення вільного падіння g в межах цієї висоти h можна знехтувати (тобто $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2 = const$)
6. початкова швидкість тіла m_1 дорівнює нулю ($v_{01} = 0$)
7. опір повітря малий.

Таким чином, можна сформулювати умови першої (найпростішої) задачі.

Приклад 2.11. На поверхні Землі закріплена матеріальна точка масою m_2 і зарядом Q_2. Над нею (на одній вертикалі) на висоті $h << R$ (R - радіус Землі) розташована матеріальна точка, масою m_1 і зарядом Q_1. Заряди Q_1 і Q_2 мають однакові знаки. Визначити швидкість тіла ті на відстані h_1 від поверхні Землі, якщо його початкова швидкість дорівнює нулю. Опором повітря і впливом електричного поля Землі нехтувати.

Розв'язування. Застосовуючи закон збереження енергії до замкнутої системи (тіло m_1, тіло m_2 і Земля), у якій діють тільки консервативні сили (сила тяжіння і кулонівська сила), одержуємо

$$m_1 g h + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 h} = m_1 g h_1 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 h_1}.$$

Звідси визначаємо шукану швидкість:

$$v = \sqrt{2g(h - h_1) - \frac{2Q_1 Q_2 (h - h_1)}{4\pi\varepsilon_0 m_1 h h_1}} \quad (2.22)$$

Аналіз і постановка інших задач. Припустимо, що $h_1 << h$. Тоді формула (2.22) прийме вигляд

$$v = \sqrt{2gh - \frac{2Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 m_1 h_1}} \quad (2.23)$$

Аналізуючи формулу (2.23) можна поставити, наприклад, таку задачу.

Приклад 2.12. При якому заряді Q_2 в умовах задачі 2.10 швидкість тіла m_1 на висоті h_1 дорівнює нулю?

Розв'язування. З формули (2.23) легко одержуємо Розв'язування задачі №2.2:

$$\boldsymbol{Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 m_1 h h_1}{Q_1}}$$

Зробивши розрахунок (при наступних значеннях даних величин: $m_1 = 10^{-3}$ *кг,* $h_1 = 10$ *м,* $h = 10$ *м,* $Q_1 = 10^8$ *Кл),* отримаємо $Q_2 = 10^{-4}$ *Кл.* Напруженості поля такого заряду на висотах h_1 і h розраховуються за формулами.

Підстановка числових значень дає $E'_2 \approx 9 \cdot 10^6$ В/м і $E''_2 \approx 9 \cdot 10^4$ В/м - ці напруженості дійсно великі в порівнянні з напруженістю електричного поля Землі $E_З \approx 130$ В/м. Потім можна поставити таку задачу.

Приклад 2.13. Що буде відбуватися з тілом m_1, якщо на висоті h_1 його швидкість перетвориться в нуль? На якій висоті h_2 тіло m_1 буде знаходитися в рівновазі і який буде характер коливань цього тіла, якщо його вивести з положення рівноваги?

Далі можна поставити ще сотні задач, знімаючи чи змінюючи умови, сформульовані вище. Але всі ці задачі будуть лише окремими випадками узагальненої задачі.

Узагальнена задача. Тіло масою m, що володіє зарядом Q, рухається в довільному електричному полі тяжіння. Визначити характер його руху.

Важливо помітити, що в принципі ця узагальнена задача вирішується динамічним методом, чи застосуванням законів збереження. Отже, і всі задачі можуть бути вирішені цими ж методами. Поставимо, наприклад, таку задачу.

Приклад 2.14. В сферичну металеву посудину радіуса R, у верхній частині якого є невеликий отвір, з висоти h падають заряджені крапельки ртуті. Маса кожної краплі m, заряд Q. Яким буде номер n останньої краплі, що ще може попасти в посудину?

Розв'язування. Легко побачити, що дана задача є окремий випадок задач № 2.2 і № 2.3, розглянутих вище. Кожна крапля ртуті, що потрапила у посудину, збільшує його заряд на Q. Ці заряди розподіляються по зовнішній поверхні сфери і створюють електричне поле. Як відомо, електричне поле рівномірне зарядженої сфери еквівалентно полю такого ж, але точкового заряду, розташованому в центрі сфери. Таким чином, заряд $Q_2=Qn$, а заряд Qi - це заряд *(n+1)-ї* краплі, що знаходиться в рівновазі на висоті h від поверхні Землі. З умови рівності нулю суми сили тяжіння mg і кулонівської сили поля заряду Q_2, що діє на заряд *Q(n+l)-i* краплі, одержуємо рівняння для визначення *n:* $\frac{nQ^2}{4\pi\varepsilon_0(h-R^2)} = mg.$

При рішенні цієї задачі відповідно до п.З) спрощень до умов першої задачі ми нехтували електричним полем Землі. Тому для коректної постановки задачі з крапельками ртуті необхідно задати такі значення величин R, h, m і Q, щоб дана умова (а також і інші) була виконана.

2.3. Проблемні і довільні задачі

Розглянуті вище задачі хоча і відносяться до категорії непоставлених і неідеалізованих, але в них *у* явному вигляді не було «зерна» проблеми. Розглянемо приклад задачі (назвемо його приклад 1), що не тільки є непоставленою і неідеалізованою, але і містить у собі ідею проблеми. У процесі аналізу цієї задачі ми побачимо, що вона представляє окремий випадок непоставленої задачі, розглянутої в прикладі вище (рух зарядженого тіла в електричному полі й у полі тяжіння), але в ній на відміну від узагальненої задачі поставлена конкретна проблема.

Підхід до постановки проблеми. Відомо, що газ з атмосфери планети вивітрюється в космічний простір. Через деякий проміжок часу планета може позбавитися своєї атмосфери (як це, наприклад, відбулося з Місяцем). Зникнення атмосфери планети пояснюється тим, що молекули атмосфери розподілені за швидкостями за законом Максвелла (точніше, за законом Максвелла - Больцмана).

Тому в атмосфері завжди є молекули, швидкості яких більші другої космічної швидкості для цієї планети. Такі молекули можуть перебороти силу тяжіння планети і назавжди піти від неї. Замість цих молекул, що пішли, в атмосфері знову утворяться молекули, швидкості яких перевищать другу космічну швидкість, що дозволить і цим молекулам залишити планету. Цей процес буде продовжуватися доти, поки атмосфера не зникне.

Як легко тут молекули здобувають другу космічну швидкість! Друга космічна швидкість... Подолання сили притягання... Поле тяжіння..., але проти поля тяжіння можна діяти й іншим полем, наприклад електричним. Відомо, що Земля має електричне поле, напруженість якого в поверхні Землі $\mathrm{E_З} \approx 130$ В/м. *А* чи не можна використовувати електричне поле планети для того, щоб надати зарядженому тілу другу космічну швидкість?

Можна розрахувати, що якщо електрон пройде різницю потенціалів усього в 1В, то він матиме швидкість, приблизно рівну 600км/с, що значно перевищує значення другої космічної швидкості для Землі ($v_2 \approx 11{,}2$км/с). Протон, пройшовши різницю потенціалів у 100В, здобуває швидкість 14 км/с, що також перевищує значення v_2?. Таким чином, протони легко можуть «полетіти» від Землі.

Постановка проблеми. Досліджувати можливість використання електричного поля планети для старту космічних кораблів.

Підхід до постановки проблемної задачі. Як планету розглянемо гіпотетичну планету з параметрами Землі. Приймемо, що Земля — куля радіуса $R \approx 6400$ км із масою $M = 6 \cdot 10^{24}$кг. Зробимо деякі оцінки (числові розрахунки порядку деяких величин). Розрахуємо спочатку електричний заряд Q і потенціал φ Землі:

$$Q = E4\pi\varepsilon_0 R^2, Q \approx 5{,}9 \cdot 10^5 Кл, \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \varphi \approx 8{,}3 \cdot 10^{\,8}\text{В}.$$

Ми знаємо (це можна показати і розрахунком), що протон, який має заряд $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл і масу $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, рухаючись в електричному полі Землі, легко може отримати швидкість, більшу від другої космічної швидкості

Землі і полетіти в космічний простір. Поставимо наступне запитання: яка максимальна маса m тіла, що має заряд, рівний заряду протона, що, рухаючись в електричному полі Землі, може перебороти її силу тяжіння і піти в нескінченність? Припустимо, що тіло - матеріальна точка - стартує з поверхні Землі з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Тоді за законом збереження енергії маємо

$$-G\frac{mM}{R} + \frac{QQ_p}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0 \qquad (2.24)$$

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 - гравітаційна стала. Звідси визначаємо максимальну масу тіла: $m = \frac{QQ_p}{4\pi\varepsilon_0 GM}, m \approx 2{,}1 \cdot 10^{-18}$кг. Таку масу має порошина. Отже, порошина з масою $2{,}1 \cdot 10^{-18}$ кг, що має заряд $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, може полетіти від Землі. Але порошині можна надати заряд значно більший, ніж заряд протона Q_p. Тут виникають два запитання: яким може бути максимальний заряд Q_{max} порошини (тіла) і як цей заряд може бути наданий тілу (порошині)? Відповідь на обидва питання можна одержати, якщо представити тіло (порошину) у вигляді металевої кульки радіуса r, що буде заряджатися від Землі шляхом безпосереднього контакту. Електричні заряди перетікають від Землі до кульки доти, поки не зрівняються потенціали цих тіл. Тому що ємність кульки

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r \text{ і } C = \frac{Q_{max}}{\varphi} \text{ тоді}$$

$$Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi = \frac{4\pi\varepsilon_0 rQ}{4\pi\varepsilon_0 rR}, \text{ де } \varphi \text{ - потенціал Землі.}$$

Нехай ρ- густина кульки, тоді її маса

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad (2.25)$$

Підставляючи значення максимального заряду кульки Q_{max} і його маси m у формулу (2.24), одержуємо рівняння для визначення радіуса r кульки густиною ρ що може полетіти від Землі:

$$-G\frac{M\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{R} + \frac{QrQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 0.$$

Звідси

$$r = \frac{Q}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon_0 G\rho MR}} \qquad (2.26)$$

Нехай, густина кульки $\rho = 10^3 \text{кг/м}^3$ (кулька може бути і порожньою). Зробивши розрахунок у СІ, одержуємо $r_1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ м $= 1{,}8$ см. Маса такої кульки за формулою (2.25) складає приблизно 17 г.

Постановка проблемної задачі. Отже, від Землі з початковою швидкістю, рівної нулю, може стартувати мініатюрний космічний кораблик радіуса $r \approx 1{,}8$ см з масою 17 г. Для того щоб від Землі могли стартувати дійсні космічні кораблі, необхідно змінити (збільшити) електричне поле Землі. Приймемо, що радіус космічного корабля $r_1 \approx 180\ c$м $= 1{,}8$ м. Тепер ми можемо сформулювати умови першої задачі.

Приклад 2.13. Яким повинен бути заряд Q_1 Землі, щоб від неї міг стартувати без початкової швидкості сферичний космічний корабель радіуса $r_1 = 1{,}8$ м і густиною $\rho = 10^3$ кг/м^3, що одержав від Землі максимальний електричний заряд Q_{max}. Опором повітря знехтувати.

Розв'язування. Розв'язування цієї задачі легко одержати з формули (2.26):

$Q_1 = 4\pi r_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0 G\rho MR}{3}}$, $Q_1 \approx 5{,}9 \cdot 10^7$ *Кл.*

Напруженість електричного поля Землі в її поверхні стане рівною $R_1 \approx$*13000* В/м, а потенціал $\varphi = 8{,}2 \cdot 10^{10}$В. За формулою (2.25) визначаємо масу космічного корабля: $m_1 \approx 17 \cdot 10^3$ кг.

Аналогічну задачу можна поставити для Місяця.

Розглянемо тепер інший приклад (назвемо його приклад 2).

Підхід до постановки проблеми. Відомо, що в стані невагомості (у космосі) багато фізичних явищ протікають інакше, ніж на Землі. Розглянемо таке явище, як коливання математичного маятника.

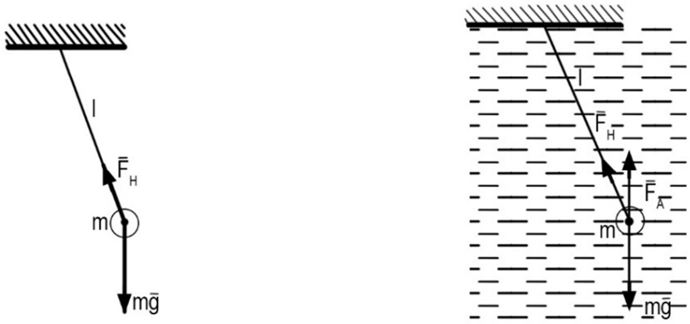

Рис.2.8. Ілюстрація прикладу 2.

В умовах вакууму і Землі він робить коливання під дією сили тяжіння $\overrightarrow{mg}$ і сили натягу нитки $F_н$ (2.8). їхній період дорівнює

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.27}$$

де l - довжина маятника.

Якщо маятник поміщений у нев'язке середовище (ідеальну рідину), то на нього додатково діє сила Архімеда F_A, спрямована проти сили тяжіння $\overrightarrow{mg}$ (Рис. 2.8), період коливань у цьому випадку полів: поля тяжіння й однорідного електричного поля напруженості E. На маятник діє сила інерції $F_I = -mg$. Для її компенсації напруженість електричного поля E повинна бути такою, щоб виконувалася умова

$$mg=QE. \tag{2.28}$$

Тоді період коливань маятника можна обчислити, тобто маятник повинен здійснювати коливання з тією ж частотою, що й у звичайних умовах на Землі.

Матеріальну точку маятника представимо у вигляді кульки радіуса r і густиною ρ. Запропонуємо, щоб заряд кульки був настільки малим, що його електричним полем можна знехтувати в порівнянні з зовнішнім електричним полем напруженості E. Останнє ж може бути створене в плоскому конденсаторі з відстанню d між пластинами. Нехай кулька робить коливання на відстані $d/2$ від кожної пластини. Тоді умова малості поля заряду кульки Q можна записати у вигляді

$$\varphi_1 = 10^{-2}\varphi \qquad (2.29)$$

де $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ - потенціал кульки, $\varphi = E \cdot d/2$ - потенціал зовнішнього поля в місці розташування кульки. Отже, умова (2.29) здобуває вигляд

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = E\frac{d}{2}\text{, або}$$

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 rEd}{2}10^{-2}\,. \qquad (2.30)$$

Підставляючи це значення заряду кульки у формулу (2.25) і враховуючи (2.25), одержуємо

$$E = 10r\sqrt{\frac{2\rho g}{3\varepsilon_0 d}}. \qquad (2.31)$$

Розрахунок напруженості поля E для значень r=10^{-3}*м³*$, \rho = 10^3$кг/м³, $d = 2 \cdot 10^{-1}$м дає $\text{E} = 6 \cdot 10^5$В/м. Звідси знаходимо різницю потенціалів на конденсаторі: $\Delta\varphi = Ed = 1{,}2 \cdot 10^5$В.

Очевидно, таке поле в умовах космічного корабля здійснити важко. Тому зробимо розрахунок напруженості поля для «мініатюрного» маятника, прийнявши такі значення: $r = 10^{-5}$м³, $\rho = 10^3$кг/м³, $d = 2 \cdot 10^{-2}$м. Тоді з формули (2.31) одержимо $E \approx 2 \cdot 10^4$В/м. Різниця потенціалів $\Delta\varphi \approx 400$В. Зменшуючи радіус кульки r, можна одержати практично можливі значення для напруженості E і різниці потенціалів $\Delta\varphi$.

Таким чином, маятниковий механізм в електричному полі в умовах невагомості можна, очевидно, здійснити лише в «мініатюрному вигляді». Сформулюємо умови першої задачі.

Приклад 2.14. У вільно падаючому (в умовах Землі) ліфті розташований, плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого дорівнює $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м. До верхньої пластини конденсатора прикріплений математичний маятник довжиною $d/2$. Матеріальна точка маятника має форму кульки радіуса $r = 10^{-5}$ м і густиною $\rho = 10^3$ кг/м³. Яку різницю потенціалів необхідно прикласти до обложок конденсатора, а також який заряд Q повинен бути повідомлений кульці для того, щоб маятник міг здійснювати коливання з такою ж частотою, що й в умовах нерухомого ліфта на Землі? Електричне поле заряду Q кульки повинне бути мале в порівнянні з електричним полем у конденсаторі. Опором повітря в конденсаторі коливанням маятника нехтувати.

Розв'язування цієї задачі вже отримано: воно здійснюється за формулами (2.30) і (2.31).

Далі можна поставити й інші задачі, наприклад розглянути коливання в однорідному електричному полі зарядженого фізичного маятника і т. д.

ДОВІЛЬНІ ЗАДАЧІ

Раніше ми вирішували задачі на визначену (відому) тему. Спочатку викладалася коротка теорія цієї теми, потім розглядалася основна задача, використовувалися визначені методи її розв'язування, пропонувалися якісь інші методичні прийоми і вказівки до розв'язування задач з цієї теми і т.д. Зазначимо, що і розв'язування таких задач ми проводили на основі загального підходу. У житті, на практиці частіше приходиться розв'язувати задачі не на визначену (відому) тему, а задачі будь-якого, довільного змісту.

Уся теорія, методика і «технологія» розв'язування задач з фізики, що була викладена вище, орієнтована особливо на розв'язування довільних задач, тобто задач на довільну, до початку розв'язування не відому тему. Застосуємо цю методику до розв'язування таких задач.

Приклад 2.15. При ізотермічному розширенні одного моля кисню, що мав температуру T_1 =300 К, газ поглинув теплоту $Q = 2$ кДж. В скільки разів збільшився об'єм газу?

Розв'язування. Задача поставлена не зовсім коректно: не дано початковий тиск газу. В залежності від його значення газ можна вважати ідеальним, чи реальним. Тому тут можливі два Розв'язування: перше - для фізичної системи, що складається з ідеального газу, друге - для реального.

Нехай фізична система - ідеальний газ. У цій системі здійснюється ізотермічний процес, у результаті якого поглинається кількість теплоти Q і відбувається робота $A = RT\ln(\frac{V_2}{V_1})$.Необхідно визначити відношення деяких макропараметрів системи (відношення об'ємів $\frac{V_2}{V_1}$). Це основна задача термодинаміки [1]. Тому використовуємо термодинамічний метод. Застосовуючи перший закон термодинаміки, знаходимо

$$Q = RT\ln(\frac{V_2}{V_1}).$$

Тут враховано, що зміна внутрішньої енергії ідеального газу $\Delta U = 0$. Звідси

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{Q/(RT)}, \frac{V_2}{V_1} \approx 2{,}23$$

Припустимо, що фізична система - реальний газ, що підкоряється рівнянню Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

де a $і$ b- сталі Ван-дер-Ваальса.

Внутрішня енергія одного моля реального газу $U = c_v T - a/V$, залежить не тільки від температури T, але і від об'єму V. За першим законом термодинаміки,

$$Q = a\frac{V_2 - V_1}{V_2 V_1} + RT \cdot \ln\left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b}\right).$$

Оскільки $b = 0{,}032 \text{м}^3/\text{кмоль}$ (для кисню), то останнє рівняння можна приблизно переписати у вигляді

$$Q = a\frac{x - 1}{V_2} + RT \cdot \ln x, \text{ де } x = \frac{V_2}{V_1}.$$

Для розв'язування цього трансцендентного рівняння необхідно задати кінцевий об'єм системи V_2.

Приклад 2.16. Частинка рухається в додатному напрямку осі OX так, що її швидкість змінюється за законом $v = a\sqrt{x}$, де а- позитивна стала. Маючи на увазі, що в момент $t = 0$ вона знаходилася в точці х $= 0$, знайти: а) залежність від часу швидкості і прискорення частинки; б) середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде шлях від $x = 0$, до x.

Розв'язування. Фізична система складається з одного тіла (частинки), яке можна прийняти за матеріальну точку. Тіло рухається прямолінійно (одно -

мірний випадок) вздовж осі OX, причому цей рух розглядається формально. Задано зв'язок деяких параметрів руху (швидкості v і координати x). Необхідно визначити деякі інші параметри руху (швидкість, прискорення, середню швидкість). Це зворотна задача кінематики [1].

Знайдемо закон руху тіла. Так як $v_x = \frac{dx}{dt}$ то рівняння зв'язку $v_x = \sqrt{x}$ можна записати у вигляді $\frac{dx}{dt} = a\sqrt{x}$.

Розділяючи змінні, інтегруючи і враховуючи початкові умови, одержуємо закон руху

$$x=a^2t^2/4 \tag{2.32}$$

Звідси знаходимо закон зміни швидкості від часу:

$$x = \frac{dx}{dt} = \frac{at^2}{2} \quad ,$$

закон зміни прискорення:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{a^2}{2}$$

і середню швидкість:

$$< v_x >= \frac{1}{t}\int_0^t v_x dt = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{a^2 t}{2} dt = \frac{a^2 t}{4} \tag{2.33}$$

Підставляючи значення часу руху $t = 2\sqrt{x/a}$, знайдене з рівняння (2.32), у формулу (2.33), остаточно одержуємо середню швидкість:

$$< v_x >= \frac{a}{2}\sqrt{x} \, .$$

З аналізу Розв’язування видно, що задача може бути ускладнена, якщо замість рівняння зв'язку $v_x = a\sqrt{x}$ використовувати співвідношення вигляду $v_x = f(x)$, де функція $f(x)$ повинна задовільняти деяким умовам.

Приклад 2.17. У довгій вертикальній циліндричній трубці, закритої з нижнього кінця, може ходити без тертя поршень, маса M якого велика в порівнянні з масою газу, укладеного всередині трубки. У положенні рівноваги відстань між поршнем і дном трубки дорівнює l_0 (Рис.2.10). Визначити період малих коливань, що виникнуть при відхиленні поршня з положення рівноваги припустивши, що вони є ізотермічними, а газ — ідеальним. Площа поперечного перерізу трубки дорівнює S, нормальний атмосферний тиск p_0 . Розглянути граничний випадок, коли $p_0 = 0$.

Розв'язування. У фізичну систему включимо три тіла: поршень (тверде тіло масою *M),* ідеальний газ під поршнем всередині трубки і повітря над поршнем (ідеальний газ). Як будуть поводитися тіла системи після того, як поршень зміститься вниз на відстань x від положення рівноваги (Рис.2.9.)? Стан газу над поршнем не зміниться (його тиск p_0 і температура T залишаться постійними). Стан газу під поршнем зміниться (температура T_0 залишиться постійною, об'єм зменшиться на $\Delta V = xS$ а тиск зросте на Δp*).* Отже, на поршень буде діяти додаткова сила $F = \Delta pS$*,* напрямлена вгору.

Під дією цієї сили поршень піде вгору. У положенні рівноваги додаткова сила F перетвориться в нуль.

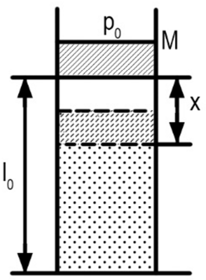

Рис.2.9. Ілюстрація до прикладу 2.17.

Але так як швидкість поршня в цьому положенні відмінна від нуля, то він, пройшовши положення рівноваги, зміститься вгору на відстань $\boldsymbol{x}$ (тертя немає). Тиск газу під поршнем зменшиться на Δp. Під дією сили ΔpS**,** тепер уже спрямованої вниз, поршень почне рухатися також вниз. Таким чином, поршень буде здійснювати коливання біля положення рівноваги.

Використовуємо динамічний метод. Знайдемо спочатку додаткову силу $F = \Delta pS$*,* що діє на поршень. За законом Бойля - Маріотта для ізотермічного процесу в газі під поршнем одержуємо

$$p_1 l_0 S = (p_1 + \Delta p)(S l_0 - S x) \quad (2.34)$$

де $p_1 = (Mg + p_0 S)/S$ - тиск газу під поршнем у стані рівноваги. Вважаючи, що x<<l_0, з (2.34) знаходимо зміну тиску газу: $\Delta \mathrm{p} = p_1 \mathrm{x}/l_0$.

Отже, додаткова сила

$$F = -\frac{Mg + p_0 S}{l_0} x = 0.$$

пропорційна зсуву x поршня від положення рівноваги і спрямована до положення рівноваги.

Під дією цієї сили поршень здійснює гармонійні коливання. За другим законом Ньютона знаходимо диференціальне рівняння цих коливань:

$$M\ddot{x} + \frac{Mg + p_0 S}{l_0} x = 0.$$

Порівнюючи це рівняння з загальним диференціальним рівнянням вільних незатухаючих коливань, знаходимо період коливань поршня:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M l_0}{Mg + p_0 S}}\,.$$

Звідси $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$ в граничному випадку $p_0 = 0$. Це період коливань математичного маятника.

Приклад 2.18. Куля, пробивши дошку товщиною h, змінила свою швидкість від v_0 до v_1]. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційної квадрату швидкості.

Розв'язування. Матеріальна точка (куля) рухається під дією відомої сили. Відомі початкові умови $(v_0 = (v_0, 0, 0), r_0 = (0,0,0)$ при $t = 0)$**.** Необхідно визначити один з параметрів руху (час). Це основна задача динаміки матеріальної точки [5].

Використовуємо динамічний метод. За другим законом Ньютона,

$$m\frac{dv}{dt} = -av^2, \qquad (2.35)$$

де m - маса кулі, α- коефіцієнт пропорційності. Помітимо, що ці параметри (m і α)

невідомі. Інтегруючи рівняння і з огляду на початкову умову, знаходимо закон зміни швидкості:

$$v = \frac{v_0}{1+\alpha v_0 t/m}\,.$$

Враховуючи, що в цьому рівнянні $v = v_1$, одержуємо шуканий час:

$$t_1 = \frac{m\left(1-\frac{v_1}{v_0}\right)}{\alpha v_1}, \tag{2.36}$$

Для визначення невідомого відношення *m/α* знайдемо закон руху кулі, вирішуючи зворотну задачу кінематики:

$$x = \frac{m}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha v_0}{m}t\right).$$

або

$$h = \frac{m}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha v_0}{m}t\right) \tag{2.37}$$

Виразивши відношення m/α *з* рівняння (2.36)

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{v_1 t_1}{\left(1-\frac{v_1}{v_0}\right)}$$

і підставивши його у формулу (2.36), остаточно знаходимо шуканий час:

$$t_1 = \frac{h(v_0-v_1)}{v_0 v_1 \ln(v_0/v_1)}.$$

Приклад 2.19. Дві квадратні пластини зі стороною $a = 300$мм, закріплені на відстані d=2мм один від одного, утворять плоский конденсатор, підключений до джерела постійної напруги $\Delta\varphi = 250$В. Розташовані вертикально пластини занурюють в посудину з гасом зі швидкістю $v = 5\text{мм}/c$. Знайти силу струму I, що тече при цьому по провідниках, що з'єднують.

Розв'язування. Фізична система складається з плоского конденсатора, приєднаного до джерела постійної напруги. До занурення в гас на одній з обкладок конденсатора зосереджений заряд $Q = C\Delta\varphi$, де $C = \varepsilon_0 a^2/d$ - ємність конденсатора.

При зануренні пластин у гас у провідниках, що з'єднують, тече електричний струм. Чому? Гас - діелектрик (діелектрична постійна (*ε=2*). Коли він з'являється в конденсаторі, електричне поле в останньому змінюється. Це приводить до перерозподілу зарядів на обкладках конденсатора, у провідниках що з'єднують, виникає струм. Збільшення заряду на пластинах при незмінній напрузі ($\Delta\varphi = const$) обумовлено зростанням ємності С конденсатора.

Знайдемо ємність конденсатора в довільний момент часу t. До цього моменту часу пластини зануряться у гас на глибину $h = vt$. Конденсатор у цей момент можна представити як батарею з двох плоских конденсаторів, з'єднаних паралельно: один - з діелектриком між обкладками, інший - без діелектрика. Ємність цієї системи

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon vta}{d} + \frac{\varepsilon_0 (a - vt)a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}[(\varepsilon - 1)vt + a].$$

Заряд Q на обкладці змінюється з часом t за законом

$$Q = \frac{\varepsilon_0 \alpha \Delta\varphi}{d}[(\varepsilon - 1)vt + a].$$

Звідси визначаємо шуканий струм:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \alpha \Delta\varphi}{d}(\varepsilon - 1)v\ .$$

Підстановка числових значень дає $I = 1{,}7 - 10^{-9}$ А.

Приклад 2.20. На горизонтальній площині лежить котушка ниток. З яким прискоренням a рухається вісь котушки, якщо за нитку тягти із силою F (Рис. 2.11)? Яким чином треба тягти за нитку для того, щоб котушка рухалася вбік натягнутої нитки? Котушка рухається по поверхні столу без ковзання. Знайти силу тертя між котушкою і столом.

Розв'язування. Фізична система складається з одного тіла - котушки, яку можна прийняти за тверде тіло. Відомі сили (їх можна визначити), що діють на котушку. Необхідно знайти прискорення тіла. Це основна задача динаміки твердого тіла [1]. На котушку діють наступні сили: дана сила натягу нитки F, сила тяжіння mg, сила тертя F_{mp} і реакція опори N.

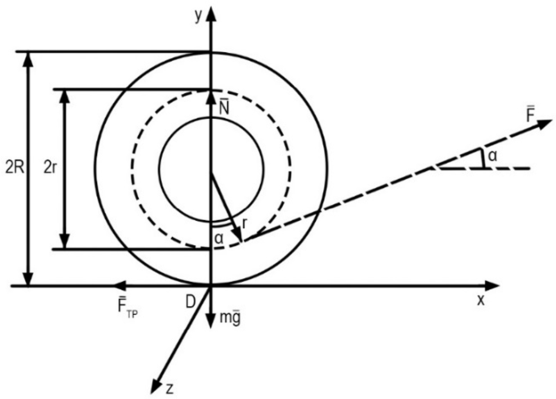

Рис.2.10. Ілюстрація до прикладу 2.20

Інерціальну систему відліку зв'яжемо з Землею, осі координат направимо (як показано на Рис. 2.10.). За теоремою про рух центра мас, $ma = F\ cos\alpha\ -\ F_{mp}, 0 = N + F\ sin\alpha - mg$.

З рівняння руху твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас, знаходимо $J\beta =\ F_{mp}R -\ F,$ де $\beta\ = \alpha/R$ - кутове прискорення котушки, а J - її момент інерції відносно цієї ж осі. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо шукане прискорення:

$$a = \frac{RF(R\cos\alpha\ - r)}{J + mR^2}$$

і силу тертя: $F_{mp} = Fcos\alpha\ -$ та.

З рівняння (2.38) випливає, що умова а $>$ о виконується при $cos\alpha > r/R$. Для Розв'язування задачі повинні бути задана маса m і момент інерції J котушки.

Приклад 2.21. Плосковипукла скляна лінза опуклою поверхнею стикається зі скляною пластинкою (Рис.2.12.). Радіус кривизни опуклої поверхні лінзи R, довжина хвилі світла λ. Знайти ширину $\varDelta r$ кільця Ньютона в залежності від його радіуса в області, де $\varDelta r << r$.

Розв'язування. У фізичну систему можна включити наступні тіла: скляну пластинку, лінзу і тонкий повітряний клин між ними (Рис.2.11). У результаті відображення хвилі від верхньої і нижньої граней повітряного клина відбувається явище інтерференції світла й утворяться кільця Ньютона. Необхідно визначити ширину кільця, Δr (чи знайти відстань між центрами сусідніх темних і світлих кілець). Це основна задача в явищі інтерференції хвиль [1].

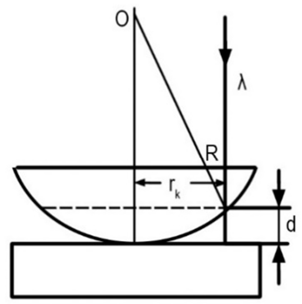

Рис.2.11. Ілюстрація прикладу 2.21.

Спочатку необхідно визначити оптичну різницю ходу, а потім використовувати умову максимуму і мінімуму.

Оптична різниця ходу променів, відбитих від верхньої і нижньої граней повітряного клина

$$\delta = 2d + \lambda/2, \qquad (2.39)$$

де d- товщина повітряного клина. З геометричних міркувань

$$d \cdot 2R = r_k^2, \qquad (2.40)$$

У цьому рівнянні r_k — радіус $k-$го темного чи світлого кільця. Під - ставляючи значення d з (2.40) у рівняння (2.39) і використовуючи умови максимуму і мінімуму, знаходимо радіуси k-го темного

$$r_{km} = \sqrt{k\lambda R}$$

і світлого

$r_{kc} = \sqrt{\left(k\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) R}$ кілець. З цих рівнянь одержуємо

$$r_{kT}{}^2 - r_{kc}{}^2 = (r_{kT} - r_{kc})(r_{kT} + r_{kc}) = R\frac{\lambda}{2}.$$

Враховуючи, що $r_{km} + r_{kc} \approx 2r$, знаходимо ширину кільця:

$$\Delta r = r_{km} - r_{kc} \approx \frac{R\lambda}{4r}.$$

Приклад 2.22. Ебонітова куля радіуса $R = 50$ мм заряджена з допомогою тертя рівномірно розподіленим поверхневим зарядом густиною $\rho\ = 10$ мкКл/м^2. Куля приводиться в обертання навколо своєї осі зі швидкістю $v = 600об/хв$. Знайти магнітну індукцію B, що виникає в центрі кулі.

Розв'язування. Поверхневі електричні заряди, що рухаються по окружностях, створюють кільцеві струми, навколо кожного з яких утвориться магнітне поле. Необхідно визначити сумарну індукцію цих полів у центрі кулі. Це основна задача в теорії магнітного поля [5]. Скористаємося принципом суперпозиції і методом диференціювання та інтегрування. В силу симетрії виберемо сферичну систему координат, початок якої помістимо в центр кулі. Площинами, перпендикулярними осі обертання, розділимо поверхню кулі на настільки вузькі сферичні шари, щоб магнітне поле струму, створюваного електричним зарядом цього шару, можна було розраховувати за законом Біо-Савара-Лапласа. Розглянемо нескінченно малий елемент одного такого шару (на Рис. 2.13, цей елемент заштрихований). Його площа $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi,$ а електричний заряд $dQ = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta\, d\Theta d\varphi.$ Так як $d\varphi = \omega dt,$ то кільцевий струм, обумовлений рухом зарядів цього шару,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta \qquad (2.41)$$

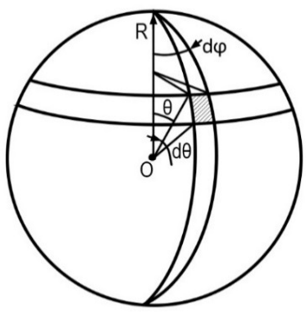

Рис.2.12. Ілюстрація до прикладу 2.22

Відомо (цей результат можна одержати), що кільцевий струм I радіуса r створює магнітне поле, індукція B який у точці, розташованої на осі цього струму на відстані d від його площини, обчислюється за формулою

$$B = \mu_0 \mu \frac{Ir^2}{2(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

Таким чином, кільцевий струм (2.41) створює магнітне поле, індукція якого в центра кулі

$$dB = \mu\mu_0 \frac{\sigma\omega R sin^3\theta d\theta}{2} \quad (2.42)$$

Інтегруючи (2.42) по Θ у межах від 0 до π, знаходимо

$$B = \int_0^\pi \mu\mu_0 \frac{\sigma\omega R sin^3\theta d\theta}{2} = \frac{2\mu\mu_0\sigma\omega R}{3}$$

Враховуючи те, що $\omega = 2\pi\nu$, остаточно визначимо шукану індукцію:

$$B = \frac{4\pi\mu\mu_0\sigma\nu R}{3}.$$

Підставивши числові значення, одержимо $B \approx 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ Тл.

Висновок

В результаті опрацювання літературних джерел з тематики дипломної роботи та проведення комплексного дослідження фізичних задач різного рівня непоставленості, неозначеності та довільності зроблено наступні висновки:

1. Загальний підхід до рішення будь-якої задачі, з курсу загальної фізики, в основному зводиться до вміння проводити аналіз довільного фізичного явища чи сукупності явищ. Фундаментальне поняття "фізичне явище" пов'язане з більшістю узагальнених понять фізики: фізична система, фізична величина, і фізичний закон та його найважливіші сторони (фізичний зміст, умови та метод застосування), взаємодії, стан фізичної системи й поняття основної задачі, ідеальні фізичні об'єкти і процеси, фізична модель.

2. Метод аналізу фізичної ситуації дозволяє вирішити будь-яку поставлену задачу з курсу загальної фізики, при цьому метод постановки задачі допоможе не тільки знайти підхід до рішення непоставленої задачі, але й сформулювати і вирішити першу задачу, і далі, використовуючи метод спрощення й ускладнення, поставити і розв'язати ще десятки задач різного ступеня складності, тобто розглянути так званий «блок» задач.

3. Метод аналізу розмірностей фізичних величин не є універсальним, але практично незамінний для розв’язання задач з фізики, де строгий аналітичний розв’язок задач пов'язаний із значними труднощами, а кількість параметрів, що визначають фізичне явище, велика. У випадку, якщо виникають сумніви щодо доцільності врахування певної величини, її можна включити до розгляду у задачі і за виглядом кінцевої формули судити про її необхідність. Важливим аспектом методу є його застосування для опрацювання експериментальних задач.

4. Застосування методик розв’язання непоставлених, нестандартних та довільних задач при вивченні фізики на різних рівнях значно інтенсифікує пізнавальну діяльність здобувачів освіти та сприяє набуттю відповідних загальних та фахових компетенцій у процесі навчання.

Список використаних джерел:

1. Мельник Ю. С. Задачі прикладного змісту з фізики у старшій школі: навч.-метод. посіб. Київ: Педагогічна думка, 2013. 120 с.
2. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах: Учеб. пособие. - 3-є изд., перероб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат., 1989.- 464с.

M. Rousseau, J. P. Mathieu, Problems in Optics, 1st ed., Pergamon, 2013, 366 p.

3. Баканин Л.П., Белопучкин В.Е., Козел С.М., Колачевский Н.Н., Косоуров Г.И. Мазанько И.П. Зборник задач по физике. Вища школа, 1970. - 448с.
4. Jeremiah A. Cronin, David F. Greenberg, Valentine L. Telegdi Problems in Physics with Solutions Addison-Wesley University of Chicago, 1967, 263 p.
5. Збірник задач з фізики: Навч. пос. Для студ. Вищ. Техн. Закл. / Гаркуша І. П., Курінний В.П., М.П. Гевзнер. -К.: Вища школа, 1995. 410с.
6. Лумпієва Т.П., Русакова Н.М., Волков О.Ф. Практикум з фізики. Розв’язання задач. Част. 1: навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Донецьк: ДВНЗ «ДонН-ТУ», 2014. 248 с.
7. Балаш Вячеслав Олександрович. Задачи по физике и методы их решения: Пособие для учит. - 4-е изд. перераб. и доп. - М.: Просвещение. - 432с.
8. Загальний курс фізики: Збірник задач (за ред. І.П. Гаркуші). К.: Техніка, 2003
9. Рыбакова Галина Ивановна. Зборник задач по общей физике: [Учеб. пособие для высш. техн. учебн. заведений]. - М.: Высш. школа, 1984. - 159с.
10. Остроухов А.К., Стрижевський В.Д. та ін. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум. [Посібник для студентів універс. і пед. ін-тів]. К.: Рад. школа, 1966. 503с.
11. Сахаров Дмитрий Иванович. [Зборник задач по физике для пед. ин-тов]. Изд. 12-е, перераб. М.: Просвещение , 1973. - 288с.
12. Зборник качественных вопросов и задач по общей физике: [Учебн. пособие для

вузов]. /Е.И. Бабаджан, В.И. Гервиидс, В.М. Дубовик, З.А. Нерсесов. - М.: Наука, 1990. - 338с.

13. Сена Лев Аронович. Зборник задач и вопросов по физике: [Для вузов]. - М.: Высш. школа, 1986. -236с.
14. Волькенштейн В.С. Зборник задач по общему курсу физики: [Учеб. пособие для вузов]. - изд. 12-е, испр. - М.: Наука, 398с.
15. Sonin, A.A. (2001) The Physical Basis of Dimensional Analysis. 2nd Edition, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge.
16. Грабовський Ростислав Иванович. Курс физики. [Для вузов]. 3-є изд., перераб. М.: Высш. школа, 1970. -353с.
17. Галущак М.О. Курс загальної фізики: у 3-х кн.: [Навч. посібн]. - Ів,-Франківськ.: Факел, 2000. 447с.
18. Геворкян Рубен Георгиевич и Шенель Владимир Владимирович. Курс общей физики. [Для вузов]. Изд. 3-є, перераб. М.: Высш. школа, 1972. - 344с.
19. Загальна фізика: 36. задач: Навч. посібнник /В.М. Барановський, П.В. Бережанський, Г.О. Вояний та ін.: За заг. ред. І.Т. Горбачука. - К.: Вища школа, 1993. 359с.
20. Галатюк Ю. М. та інші. Методи розв’язування фізичних задач — Х.: Вид. група «Основа», 2010.— 224 с.
21. Касьяненко В. В. Деякі методи розв’язування фізичних задач // Фізика в школах України. – Х.: Вид. група «Основа», 2011р. - № 15-16 (187-188). – С. 48-51.
22. Основи теорії подібності та аналізу розмірностей та їх застосування в задачах механіки: Навчальний посібник / Упорядники: Т.Ю.Кепич та О.Г.Куценко — К.:Вища школа, 2004. – 101 с.
23. Рибалко А. В., Рибалко О. С. Класифікація методів розв’язування навчальних фізичних задач за основними методами теоретичного пізнання у фізиці // Фізика для фізиків. – Рівне: РОІППО, 2011. – № 1(13). – С. 119-121.

24. Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 1 Механіка. Термодинаміка. Електростатика . Суми : Сумський державний університет, 2013. 224 с.
25. А. В. Дворниченко, Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко, Г. С. Корнющенко Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 2. Електричний струм. Магнітне поле. Оптика. Радіоактивність . Суми : Сумський державний університет, 2015. 230 с.
26. Навчальний посібник. Друге видання, доповнене і перероблене / За ред. І. Є. Лопатинського, А. М. Андрейка. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 320 с.
27. https://lib.iitta.gov.ua/
28. https://problemsphysics.com/
29. https://www.physics.ox.ac.uk/