Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.956.4

Малицька Г.П.

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова другого порядку // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 180–190.

Розглянуто один клас ультрапараболічних систем рівнянь другого порядку, що мають чотири групи змінних, за якими є виродження, і коефіцієнти залежать тільки від часової змінної, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, одержано оцінки цієї матриці та всіх її похідних.

Ця стаття є продовженням робіт [2–3], де розглянуто системи вироджених параболічних рівнянь колмогоровського типу з коефіцієнтами, залежними тільки від часової змінної. Зауважимо, детальний опис досліджень і розвитку теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами змінних, за якими є виродження параболічності, зроблено в роботі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.М. Кочубея [5]. Ми розглянули системи рівнянь колмогоровського типу другого порядку, що мають чотири групи виродження параболічності з коефіцієнтами, залежними від часової змінної, встановили існування і єдиність фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), дослідили властивості і оцінки похідних ФМРЗК.

1 Позначення і постановка задачі Коші

Нехай n, n_j – фіксовані натуральні числа, $n_j \geq n_{j+1}$ для $j = \{1,2,3\}$, $\sum\limits_{j=1}^{4} n_j = n_0$, $p = \sum\limits_{j=1}^{4}(2j-1)n_j$; $x \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x = (x_1, ..., x_4)$, $x_j = (x_{j1}, ..., x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $s \in \mathbb{R}^{n_0}$, $(x,s) = \sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{m=1}^{n_j} x_{jm}s_{jm}$, $\bar{x}_j = (x_{j1}, ..., x_{jn_{j+1}})$, $\bar{\bar{x}}_j = (x_{j1}, ..., x_{jn_{j+2}})$, $x'_j = (x_{j1}, ..., x_{jn_4})$, $x''_j = (x_{jn_4+1}, ..., x_{jn_3})$, $x'''_j = (x_{jn_3+1}, ..., x_{jn_2})$, $x^*_j = (x_{jn_{j+1}+1}, ..., x_{jn_j}), x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x_4)$, $\rho(t,x;\tau,\xi) = |x_1 - \xi_1|^2/4(t-\tau) + 3|x_2 + (\overline{x}_1 + \overline{\xi}_1)(t-\tau)/2 - \xi_2|^2(t-\tau)^{-3} + 180|x_3 + (t-$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.
Ключові слова і фрази: фундаментальна матриця розв'язків, задача Коші, система рівнянь типу Колмогорова.

$\tau)(\bar{x}_2+\bar{\xi}_2)/2+(\bar{\bar{x}}_1-\bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12-\xi_3|^2(t-\tau)^{-5}+63000|x_4+(\bar{x}_3+\bar{\xi}_3)(t-\tau)/2+(\bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10+(\bar{\bar{x}}_1+\bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^3/120-\xi_4|^2(t-\tau)^{-7}),\ \ \xi\in\mathbb{R}^{n_0},$

$$d(t,x;\tau,y)=\sum_{j=1}^{4}|x_j-y_j|^2(t-\tau)^{-(2j-1)}.$$

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\partial_t u_r(t,x)-\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}x_{jm}\partial_{x_{j+1}m}u_r(t,x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a_{km}^{rl}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}}+a_m^{rl}(t,x)\partial_{x_{1m}}+$$
$$a_0^{rl}(t,x)]u_l(t,x),r=\{1,...,n\},\ \ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{1}$$

де $\Pi_{(0,T]}=\{(t,x),t\in(0,T],T>0,x\in\mathbb{R}^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_{km}^{rl}(t,x)$, $a_m^{rl}(t,x),a_0^{rl}(t,x)$ цієї системи – комплекснозначні функції, такі що

$$\partial_t w_r(t,x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a_{km}^{rl}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}}+a_m^{rl}(t,x)\partial_{x_{1m}}+a_0^{rl}(t,x)]w_r(t,x),r=\{1,...,n\},\tag{2}$$

тобто система (2) є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$, в якій (x_2,x_3,x_4) вважаються параметрами.

Будемо розглядати такі системи, що

$$a_{km}^{rl}(t,x)=a_{km}^{lr}(t,x),\ \ a_m^{rl}(t,x)=a_m^{lr}(t,x),\ \ a_0^{rl}(t,x)=a_0^{lr}(t,x).\tag{3}$$

Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u(t,x)-\sum_{j=1}^{3}\bar{x}_j\partial_{x_{j+1}}u(t,x)=\sum_{|k|\le 2}a_k(t,x)\partial_{x_1}^k u(t,x).$$

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau}=u_0(t,x),\ \ x\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ 0\le\tau<t\le T,\tag{4}$$

де τ-задане число, $u_0(t,x):=col(u_1(x),...,u_0(x))$ – задана матриця-стовпчик.

Означення 1. *Під ФМРЗК (1),* (4) *будемо розуміти квадратну матрицю* $G(t,x;\tau,y)$, $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^{n_0}$, $0\le\tau<t\le T$, *порядку* n *таку, що для будь-якої гладкої фінітної функції* $u_0(t,x)$ *та довільного* $\tau\in[0,T]$ *формулою* $u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^{n_0}}G(t,x;\tau,y)u_0(y)dy,\ (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}$, *визначається розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову* (4).

2 Розв'язання задачі Коші для системи із коефіцієнтами залежними тільки від t:

Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якої коефіцієнти $a_{km}^{rl}(t),a_m^{lr}(t),a_0^{lr}(t)$ — неперервні функції на $[0,T]$.

$$\partial_t u_r(t,x)-\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}x_{jm}\partial_{x_{j+1}m}u_r(t,x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a_{km}^{rl}(t)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}}+$$
$$a_m^{rl}(t)\partial_{x_{1m}}+a_0^{rl}(t)]u_l(t,x),\ \ 0\le\tau<t\le T,\ \ x\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ r=\{1,...,n\}.\tag{5}$$

$$u_r(t,x)|_\tau = u_{0r}(x), x\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ r=\{1,...,n\}, \tag{6}$$

де $u_{0r}(x)$ – досить гладкі фінітні функції. Припускатимемо, що λ – корені $\lambda_1,...,\lambda_n$ рівняння $det(A(is_1)^2-\lambda I)=0$, де $A=(\sum\limits_{k,m=1}^{n_1} a_{km}^{rl}(t))_{r,l=1}^n$, I – одинична матриця порядку n, i – уявна одиниця, задовольняють умову:
$Re\lambda_r(s_1)\le -\delta_0|s_1|^2,\ \ s_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ \ r=\{1,...,n\}$ з деякою сталою $\delta_0>0$, незалежною від $t,\ 0\le\tau<t\le T$.

Зведемо задачу Коші (5), (6) до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,...,u_n$ розв'язку задачі Коші (5), (6) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $v_1,...,v_n$, тобто

$u_r(t,x):=F^{-1}[v_r(t,s)](t,x):=(2\pi)^{-n_0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}}\exp\{i(x,s)\}v_r(t,s)ds,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ r=\{1,...,n\}$. Враховуючи рівності

$$\partial_t F^{-1}[v_r]=F^{-1}[\partial_t v_r], x_{jm}\partial_{x_{j+1,m}}F^{-1}[v_r]=F^{-1}[-s_{j+1,m}\partial_{s_{j,m}}v_r],$$

$$\partial^2_{x_{1k}x_{1m}}F^{-1}[v_r]=F^{-1}[(is_{1m})(is_{1k})v_r]=F^{-1}[-s_{1m}s_{1k}v_r],$$

одержимо для $v_1,...,v_n$ таку задачу Коші

$$\partial_t v_r(t,s)+\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}}v_r(t,s)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k}+$$
$$a_m^{rl}(t)s_{1m}+ia_0^{rl}(t)]v_r(t,s), 0\le\tau<t\le T,\ \ s\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ r=\{1,...,n\}. \tag{7}$$

$$v_0(t,s)|_{t=\tau}=v_{0r}(s),\ \ s\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ r=\{1,...,n\}, \tag{8}$$

Оскільки функції $u_{0r}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їх перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких справджуються нерівності:

$|v_{0r}(s)|\le C(1+|s|)^m,\ \ s\in\mathbb{R}^{n_0},\ \ m\ge n_0+1$, де

$$v_{0r}(s):=F[u_0(x)]=\int_{\mathbb{R}^{n_0}}\exp\{-i(x,s)\}u_{0r}(x)dx. \tag{9}$$

У задачі (7), (8) s – параметр. Система (7) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно [3,с. 146-148], така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню

$$\partial_t w+\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}}s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}}w-\sum_{r,l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k}+ia_m^{rl}(t)s_{1m}+a_0^{rl}(t)]v_r\partial_{v_l}w=0$$

з частинними похідними першого порядку для фукнкції w від $n+1+n_0-n_1$ незалежних змінних $t, s_{11}, ..., s_{1n_2}, s_{21}, ..., s_{2n_3}, s_{31}, ..., s_{3n_4}, v_1, ..., v_n$, яке в свою чергу, як відомо, еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_{11}}{s_{21}} = ... = \frac{ds_{1n_2}}{s_{2n_2}} = \frac{ds_{21}}{s_{31}} = ... = \frac{ds_{2n_3}}{s_{3n_3}} = \frac{ds_{31}}{s_{41}} = ... = \frac{ds_{3n_4}}{s_{4n_4}} =$$

$$\frac{dv_1}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{1l}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{1l}(t)s_{1m} + a_0^{1l}(t)]v_l} = ... =$$

$$\frac{dv_n}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{nl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{nl}(t)s_{1m} + a_0^{nl}(t)]v_l}.$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=2}^{n} n_j + n + 1$ рівнянь. Шукаємо $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ незалежних інтегралів. З рівнянь $dt = \frac{ds_{3j}}{s_{4j}},\ j = \{1, ..., n_4\}$ знаходимо

$$s_{3j} = ts_{4j} + c'_{1j}, \quad j = \{1, ..., n_4\}, \tag{10}$$

із $dt = \frac{ds_{2j}}{s_{3j}},\ \ j = \{1, ..., n_4\}$, враховуючи (10), маємо

$$s_{2j} = t^2 s_{4j}/2 + tc'_{1j} + c'_{2j}, \tag{11}$$

а із $dt = ds_{1j}/s_{2j},\ \ j = \{1, ..., n_4\}$ і (11), одержимо

$$s_{1j} = t^3 s_{4j}/6 + t^2 c'_{1j}/2 + tc'_{2j} + c'_{3j}. \tag{12}$$

При $j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$ із $dt = ds_{2j}/s_{3j}$ маємо

$$s_{2j} = ts_{3j} + c''_{1j}, \tag{13}$$

тому із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ при $j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$ –

$$s_{1j} = t^2 s_{3j}/2 + tc''_{1j} + c''_{2j}. \tag{14}$$

Розглядаючи $j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$, із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ одержимо

$$s_{1j} = ts_{2j}/2 + c'''_{1j}. \tag{15}$$

Враховуючи (10)–(15), запишемо

$$\begin{aligned} s_1 = (s_{11}, ..., s_{1n_1}) = (&t^3 s_{4j}/6 + t^2 c'_{11}/2 + tc'_{21} + c'_{31}, ..., t^3 s_{4n_4}/6 + t^2 c'_{1n_4}/2 + tc'_{2n_4}+ \\ &c'_{3n_4}, t^2 s_{3n_4+1}/2 + tc''_{1n_4+1} + c''_{2n_4+1}, ..., t^3 s_{3n_3}/2 + tc''_{1n_3} + c''_{2n_3}, ts_{2n_3+1}+ \\ &c'''_{1n_3+1}, ..., ts_{2n_2} + c'''_{1n_2}, s_{1n_2+1}, ..., s_{1n_1}) := P_1(t, s_4, c'; s_3^*, c''; s_2^*, c'''; s_1^*), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} s_2 = (s_{21}, ..., s_{2n_2}) = (&t^2 s_{41}/2 + c'_{11} + c'_{21}, ..., t^2 s_{4n_4}/2 + tc'_{1n_4} + c'_{2n_4}, ts_{3n_4+1}/2+ \\ &c''_{1n_4+1}, ..., t^3 s_{3n_3} + c''_{1n_3}, s_{2n_3+1}, ..., s_{2n_2}) := P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s_3^*, c''_1; s_2^*), \end{aligned} \tag{17}$$

$$s_3 = (ts_{41} + c'_{11}, ..., ts_{4n_4} + c'_1, s_{3n_4+1}, ..., s_{3n_3}) := P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), \quad s_4 \in \mathbb{R}^{n_4}. \tag{18}$$

Підставимо (16)-(18) в систему рівнянь

$$dv = \sum_{|k|\le 2} a_k(t)(is_1)^k v dt, \tag{19}$$

одержимо систему рівнянь (19) на характеристиках (10)–(15)

$$dv(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4) =$$

$$\sum_{|k|\le 2} a_k(t)(iP_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k v dt \tag{20}$$

з початковою умовою

$$v(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4)|_{t=\tau} =$$
$$v_0(P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(\tau, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(\tau, s_4, c'_1; s^*_3), s_4). \tag{21}$$

Задача (20),(21) має єдиний розв'язок для $0 \le \tau < t \le T < +\infty$. Врахувавши умови (3), маємо, що матриця $\sum\limits_{|k|\le 2} a_k(t)(iP_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k$ комутує з матрицею $\sum\limits_{|k|\le 2} \int\limits_\tau^t a_k(\beta)(iP_1(\beta, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k d\beta$, тому розв'язок задачі Коші (20),(21) має вигляд

$$v(t, P_1(t, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1), P_2(t, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(t, s_4, c'_1; s^*_3), s_4)|_{t=\tau} =$$
$$\exp\{\sum_{|k|\le 2} \int_\tau^t a_k(\beta)(iP_1(\beta, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1))^k d\beta\} v_0(P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2,$$
$$c'''; s^*_1), P_2(\tau, s_4, c'_1, c'_2; s^*_3, c''_1; s^*_2), P_3(\tau, s_4, c'_1; s^*_3), s_4), \quad 0 \le \tau < t \le T. \tag{22}$$

Знайдемо c', c'', c''' із (10)–(15):

$$c'_{1j} = s_{3j} - ts_{41}, c'_{2j} = s_{2j} - ts_{3j} + t^2 s_{4j}/2,$$

$$c'_{3j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2 s_{3j}/2 - t^3 s_{4j}/6, \quad j = \{1, ..., n_4\}, \tag{23}$$

$$c''_{1j} = s_{2j} - ts_{3j}, c''_{2j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2 s_{3j}/2, \quad j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}, \tag{24}$$

$$c'''_{1j} = s_{1j} - ts_{2j}, \quad j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}. \tag{25}$$

Підставивши (23)–(25) в $P_1(\tau, s_4, c'; s^*_3, c''; s^*_2, c'''; s^*_1)$, маємо

$\tau^3 s_{4j}/6 + c'_{1j}\tau^2 + c'_{2j}\tau + c'_{3j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2 s_{3j}/2 - (t-\tau)^3 s_{4j}/6 := \alpha'_{1j}(t - \tau, s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}, s_{4j}), \quad j = \{1, ..., n_4\}$;

$\tau^2 s_{3j}/2 + c''_{1j}\tau + c'_{2j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2 s_{3j}/2 := \alpha''_{1j}(t-\tau, s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}), \quad j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$;

$\tau s_{2j} + c'''_{1j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} := \alpha'''_{1j}(t-\tau, s_{1j}, s_{2j}), j = \{n_3+1, ..., n_2\}$, або скорочено запишемо

$$\alpha_1(t-\tau, s) = (\alpha'_1(t-\tau, s'), \alpha''_1(t-\tau, s''), \alpha''_1(t-\tau, s''), s_1^*). \tag{26}$$

Враховуючи (25), (26), одержимо

$$v(t,s) = \exp\{\int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\alpha_1(t-\beta, s))^k d\beta\} v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 -$$
$$(t-\tau)^3 s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s_2, s_1^*, s'_2 + (t-\tau)s'_3 +$$
$$(t-\tau)^2 s_4/2, s''_2 + (t-\tau)s_3, s_2^*, s'_3 - (t-\tau)s_4, s_3^*, s_4). \tag{27}$$

За побудовою формулою (27) виражається розв'язок задачі Коші для системи (7) з початковою умовою (8) і тому $u(t,x)$ – розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x,s) + \int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\alpha_1(t-\beta, s))^k d\beta\} v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 +$$
$$(t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s_2,$$
$$s_1^*, s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2, s''_2 - (t-\tau)s_3, s_2^*, s'_3 - (t-\tau)s_4, s_3^*, s_4) ds. \tag{28}$$

У інтегралі (28), зробивши заміну змінних,

$s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2 s'_3/2 - (t-\tau)^3 s_4/6 = y'_1$, $\quad s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2 s_3/2 = y''_1$, $s'''_1 - (t-\tau)s_2 = y'''_1$, $\quad s_1^* = y_1^*$, $\quad s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2 s_4/2 = y'_2$, $\quad s''_2 - (t-\tau)s_3 = y''_2$, $s_2^* = y_2^*$, $\quad s'_3 - (t-\tau)s_4 = y'_3$, $\quad s_3^* = y_3^*$, $\quad s_4 = y_4$, матимемо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x_1, y_1) + i(x_2 + \bar{x}_1(t-\tau), y_2) + i(x_3 + \bar{x}_2(t-\tau) +$$
$$(t-\tau)^2 \bar{\bar{x}}_1/2, y_3) + i(x_4 + \bar{x}_3(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6, y_4) +$$
$$\int_\tau^t \sum_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y))^k d\beta\} v_0(y) dy, \tag{29}$$

де $\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y) := (y'_1 + (\beta-\tau)y'_2 + y'_3(\beta-\tau)^2/2 + y_4(\beta-\tau)^3/6,\ \ y''_1 + (\beta-\tau)y''_2 + y_3(\beta-\tau)^2/2; y'''_1 + (\beta-\tau)y_2, y_1^*)$.

Матриця $Q(t,\tau,y) := \exp\{\int_\tau^t \sum\limits_{|k|\le 2} a_k(\beta)(i\tilde{\alpha}_1(\beta-\tau, y))^k d\beta\}$ – нормальна матриця системи $\frac{dv}{dt} = \sum\limits_{|k|\le 2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}_1(t-\tau, y))^k v$, $Q(t,\tau,y)|_{t=\tau} = I$.

У інтегралі (29) зробимо заміну змінних $y_j(t-\tau)^{(2j-1)/2} = \sigma_j, \quad j = \{1, ..., 4\}$,

$\beta-\tau=\theta(t-\tau)$, тоді

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n_0}(t-\tau)^{-p/2}\int_{R^{n_0}}\exp\{i(x_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_1)+i(x_2+\bar{x}_1(t-\tau))(t-\tau)^{-3/2},$$
$$\sigma_2)+i((x_3+\bar{x}_2(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2)(t-\tau)^{-5/2},\sigma_3)+i((x_4+\bar{x}_3(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2+$$
$$x_1'(t-\tau)^3/6)(t-\tau)^{-7/2},\sigma_4)+\int_0^1\sum_{|k|\le 2}a_k(\theta(t-\tau)+\tau)i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},$$
$$\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}v_0(\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},$$
$$\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\sigma,\ \ 0\le\tau<t\le T,\ \ x\in\mathbb{R}^{n_0}. \qquad (30)$$

Далі буде доведена оцінка матриці
$Q_1:=\exp\{\sum_{|k|\le 2}\int_0^1 a_k i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\ \sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}$, а саме

$$|Q_1|\le C\exp\{-c_0[|\sigma_1'+\sigma_2'/2+\sigma_3'/6+\sigma_4/24|^2+|\sigma_1''+\sigma_2''/2+\sigma_3/6|^2+|\sigma_1'''+\sigma_2/2|^2+$$
$$|\sigma_3^*|^2+|\sigma_2'+\sigma_3'/2+3\sigma_4/20|^2+|\sigma_2''+\sigma_3/2|^2+|\sigma_2^*|^2+|\sigma_3'+\sigma_4/2|^2+|\sigma_3^*|^2+|\sigma_4|^2]\}, \qquad (31)$$

де C,c_0 – додатні сталі, $c_0<\delta_0,\ \ \sigma\in R^{n_0},\ \ 0\le\tau<t\le T$.

Оскільки $Q(t,\tau,y)|_{y_j=\sigma_j(t-\tau)^{-(2j-1)/2}}=Q_1,\ j=\{1,...,4\}$, то $|Q(t,\tau,y)|\le C\exp\{-c_0[(|y_1'+y_2'(t-\tau)/2+y_3'(t-\tau)^2/6+y_4(t-\tau)^3/24|^2+|y_1''+y_2''(t-\tau)/2+y_3(t-\tau)^2/6|^2+|y_1'''+y_2(t-\tau)/2|^2+|y_1^*|^2)(t-\tau)+(|y_2'+y_3'(t-\tau)/2+3y_4/20|^2+|y_2''+y_3(t-\tau)/2|^2+|y_2^*|^2)(t-\tau)^3+|y_3'+y_4(t-\tau)/2|^2+|y_3^*|^2)(t-\tau)^5+|y_4|^2(t-\tau)^7]\},\ \ 0\le\tau<t\le T,\ \ y\in R^{n_0}$.

Скориставшись виразом (9), оцінкою (31) і змінивши порядок інтегрування у формулі (30), одержимо

$$u(t,x)=\int_{R^{n_0}}G(t,x;\tau,\xi)u_0(\xi)d\xi,0\le\tau<t\le T,\{\xi,x\}\subset R^{n_0}, \qquad (32)$$

де

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}}\exp\{i((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},\sigma_1)+i(x_2+\bar{x}_1(t-\tau)-\xi_2)\times$$
$$(t-\tau)^{-3/2},\sigma_2)+i((x_3-\xi_3+\bar{x}_2(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2)(t-\tau)^{-5/2},\sigma_3)+i((x_4-\xi_4+$$
$$\bar{x}_3(t-\tau)+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2+x_1'(t-\tau)^3/6)(t-\tau)^{-7/2},\sigma_4)+\sum_{|k|\le 2}\int_0^1 a_k(\theta(t-\tau)+\tau)\times$$
$$i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\}d\sigma. \qquad (33)$$

3 Доведення оцінки (31) у випадку сталих коефіцієнтів

Дослідимо вираз

$$\int_0^1 a_k i^k\tilde{\alpha}^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},$$
$$\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)\},\ \ |k|\le 2, \qquad (34)$$

Для аналізу випишемо усі можливі інтеграли з (34).

Зокрема:

$$a) \int_0^1 (\sigma_{1j} + \theta p_1 \sigma_{2j} + \theta^2 p_2 \sigma_{3j}/2 + \theta^3 p_3 \sigma_{4j}/6) d\theta = \sigma_{1j} + p_1 \sigma_{2j}/2 + p_2 \sigma_{3j}/6 + p_3 \sigma_{4j}/24, \quad (35)$$

де, якщо 1) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$, то $j = \{1, ..., n_4\}$; 2) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 0)$, то $j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$; 3) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$, то $j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$; 4) $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0)$, то $j = \{n_2 + 1, ..., n_1\}$.

$$\int_0^1 (\sigma_{1j} + \sigma_{2j} p_1 \theta + \sigma_{3j} p_2 \theta^2/2 + \sigma_{4j} p_3 \theta^3/6)(\sigma_{1m} + \sigma_{2m} q_1 \theta + \sigma_{3m} q_2 \theta^2/2 + \sigma_{4m} q_3 \theta^3/6) d\theta =$$
$$(\sigma_{1j} + p_1 \sigma_{2j}/2 + p_2 \sigma_{3j}/6 + p_3 \sigma_{4j}/24)(\sigma_{1m} + q_1 \sigma_{2m}/2 + q_2 \sigma_{3m}/6 + q_3 \sigma_{4m}/24) + (\sigma_{2m} q_1 +$$
$$\sigma_{3m} q_2/2 + 3 q_3 \sigma_{4m}/20)(\sigma_{2j} p_1 + \sigma_{3j} p_2/2 + 3\sigma_{4j} p_3/20)/12+$$
$$+\frac{(\sigma_{3m} q_2 + \sigma_{4m} q_3/2)(p_2 \sigma_{3j} + p_3 \sigma_{4j}/2)}{720} + \frac{p_3 q_3 \sigma_{4m} \sigma_{4j}}{252000}, \quad (36)$$

де, якщо

1) $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$, то $m, j = \{1, ..., n_4\}$;
2) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$, $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$, $j = \{1, ..., n_4\}$;
3) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$, $(q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0)$, то $m = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$, $j = \{1, ..., n_4\}$;
4) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$, $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$, то $m = \{n_2 + 1, ..., n_1\}$, $j = \{1, ..., n_4\}$;
5) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 0)$, $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m, j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$;
6) $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$, $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m = \{n_4 + 1, ..., n_3\}$, $j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$;
7) $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0)$, то $m, j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$;
8) $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0)$, $(q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0)$, то $j = \{n_2 + 1, ..., n_1\}$, $m = \{n_3 + 1, ..., n_2\}$;
9)$(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 0)$, то $m, j = \{n_2 + 1, ..., n_1\}$.

Проаналізувавши вирази (35)–(36), прийдемо до висновку, що, підставивши в $\sum_{|k|\le 2} a_k (is_1)^k$ замість s_1 вектори μ, ν, ω, z з відповідними компонентами:

$\mu : \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 + \sigma_{4j}/24, j = \{1, ..., n_4\}, \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6, j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}, \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2, j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}, \sigma^*_{1j}, j = \{n_2 + 1, ..., n_1\}$;

$\nu : \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2 + 3\sigma_{4j}/20), j = \{1, ..., n_4\}, \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2), j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}, \sigma_{2j}, j = \{n_3 + 1, ..., n_2\}, \nu_{n_2+1} = 0, ..., \nu_{n_1} = 0$;

$\omega : \frac{1}{12\sqrt{3}} \sigma_{4j}/2, j = \{1, ..., n_4\}, \omega_{n_3+1} = 0, ..., \omega_{n_1} = 0$;

$z : \frac{1}{60\sqrt{7}}(\sigma_{3j} + \sigma_{4j}/2, j = \{1, ..., n_4\}, \frac{1}{12\sqrt{3}} \sigma_{3j}, j = \{n_4 + 1, ..., n_3\}, \sigma_{2j}, j = \{n_3 + 1, ..., n_4\}$, $z_{n_4+1} = 0, ..., z_{n_1} = 0$, і додавши результати, одержимо:

$$\sum_{|k|\le 2} a_k i^k (\mu^k + \nu^k + \omega^k + z^k) = \sum_{|k|\le 2} a_k i^k \int_0^1 \widetilde{\alpha}(\theta(t - \tau), \sigma_1 (t - \tau)^{-1/2},$$

$$\sigma_2 (t - \tau)^{-3/2}, \sigma_3 (t - \tau)^{-5/2}, \sigma_4 (t - \tau)^{-7/2}) d\theta(t - \tau).$$

Оскільки, використавши параболічність, маємо $Re\lambda(\mu) \le -\delta_0 |\mu|^2$, то

$$Re\lambda(\mu) \le -\delta_0 (|\sigma_1^*|^2 + |\sigma_1'''/2|^2 + |\sigma_1'' + \sigma_2'' + \sigma_3/6|^2 + |\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' + \sigma_4/24|^2).$$

Аналогічно $Re\lambda(\nu) \le -\delta_0(|\sigma'_{2j} + \sigma'_{3j}/2 + 3\sigma_4/20|^2 + |\sigma''_2 + \sigma_3/2|^2 + |\sigma'''_2/2|^2)/12;$

$$Re\lambda(\omega) \le -\delta_0(|\sigma'_3 + \sigma_4/2|^2 + |\sigma''_3|^2)/720; \quad Re\lambda(z) \le -\delta_0|\sigma_4|^2/252000.$$

Враховуючи оцінки $Re\lambda$, одержимо оцінку матриці $Q(t-\tau,\sigma)$

$$|\exp \sum_{|k|\le 2} a_k i^k(\mu^k + \nu^k + \omega^k + z^k)| \le C \exp\{-\delta_1[|\sigma^*_1|^2 + |\sigma'''_1/2|^2 + |\sigma''_1 + \sigma''_2 +$$

$$\sigma_3/6|^2 + |\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 + \sigma_4/24|^2 + |\sigma'_{2j} + \sigma'_{3j}/2 + 3\sigma_4/20|^2 + |\sigma''_2 + \sigma_3/2|^2 +$$

$$|\sigma'''_2/2|^2/12 + |\sigma'_3 + \sigma_4/2|^2 + |\sigma''_3|^2/720 + |\sigma_4|^2/252000]\}. \tag{37}$$

З (37) маємо (31), де $c_0 = \delta_1/25200,\ 0 < \delta_1 < \delta_0,\ C > 0.$

4 Встановлення оцінки (31) у випадку коефіцієнтів, залежних тільки від t

Для встановлення оцінки (31) використаємо підхід, застосований в [1], [4, с. 47-48]. Тому розглянемо систему

$$\frac{dQ(t,\tau,y)}{dt} = \sum_{|k|=2} a_k(t_0)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k Q(t,\tau,y) + \{\sum_{|k|=2}[a_k(t) - a_k(t_0)](i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k +$$

$$\sum_{|k|<2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k\}Q(t,\tau,y), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad y \in R^{n_0}.$$

$Q(t,\tau,y)|_{t=\tau} = I$, тоді

$Q(t,\tau,y) = \exp\{\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t (i\tilde{\alpha}(\gamma-\tau,y))^k d\gamma\}\}Q(t_0,\tau,y) + \int_{t_0}^t \exp\{\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{\beta}^t (i\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y))^k d\beta + [\sum\limits_{|k|=2}(a_k(\beta) - a_k(t_0)) + \sum\limits_{|k|<2}(a_k(\beta)](i\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y))^k Q(\beta,\tau,y)d\beta.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, щоб для всіх t, t_0 таких, що $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, виконувалася нерівність $|a_k(t) - a_k(t_0)| < \varepsilon$. Крім того, $|\sum\limits_{|k|<2} a_k(t)(i\tilde{\alpha}(t-\tau,y))^k\| \le \varepsilon|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2$ при $|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)| > R > 0$, тому

$|Q(t,\tau,y)| \le |\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t (\tilde{\alpha}^k(\beta-\tau,y)d\beta\}Q(t_0,\tau,y) + \int_{t_0}^t |\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{\beta}^t \tilde{\alpha}^k(\gamma-\tau,y)d\gamma\}|2\varepsilon|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2|Q(\beta,\tau,y)|d\beta.$

Використавши лему Гроноулла, одержимо нерівність

$|Q(t,\tau,y)| \le c_1|Q(t_0,\tau,y)||\exp\{-\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)\int_{t_0}^t \tilde{\alpha}^k(\beta-\tau,y)d\beta\}|\times\exp\{2\varepsilon\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta\}.$

Розкривши інтеграли $\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta$, використавши параболічність, підібравши ε, після чого записавши показник знову через інтеграл, одержимо

$$|Q(t,\tau,y)| \le c_1|Q(t_0,\tau,y)|\exp\{-\delta_2\int_{t_0}^t |\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 d\beta\}, \quad 0 < \delta_2 < \delta_0. \tag{38}$$

Ввівши розбиття $t_0 = \tau, ...\tau + \delta(\varepsilon), ...\tau + m_1\delta(\varepsilon),\ m_1 = [\frac{T}{\varepsilon}] + 2,\ c_1 \geq 1$, послідовно оцінюючи $Q(t, \tau, y)$ через (38), одержимо оцінку:

$$|Q(t,\tau,y)| \leq c_1^{m_1} \exp\{-\delta_2 \int_\tau^t |\tilde{\alpha}(\beta - \tau, y)|^2 d\beta\}. \tag{39}$$

З (39), використавши (36), одержимо (31).

Як і у випадку [1], можна довести оцінку для $Q(t, \tau, y + i\tilde{y})$.

$$|Q(t,\tau,y+i\tilde{y})| \leq C \exp\{\int_\tau^t (-\delta_3|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,y)|^2 + c_1|\tilde{\alpha}(\beta-\tau,\tilde{y})|^2) d\beta\}, \tag{40}$$

де $0 < \delta_3 < \delta_2,\ \ c_1 > 0, C > 0,\ \ c_1,\ C$ залежать від $T,\ n,\ \delta_0,\ sup|A(t)|,\ \{y, \tilde{y}\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$.

5 Аналітичний опис ФМРЗК

Щоб дослідити $G(t, x; \tau, \xi)$, зробимо таку заміну змінних в (33):

$\sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 + \sigma_{4j}/24 = s_{1j},\ \ j = \{1, ..., n_4\};\ \ \ \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 + \sigma_{3j}/6 = s_{1j},\ \ j = \{n_4 + 1, ..., n_3\};\ \ \ \sigma_{1j} + \sigma_{2j}/2 = s_{1j},\ \ j = \{n_3 + 1, ..., n_2\};\ \ \ \sigma^*_{1j} = s_{1j},\ \ j = \{n_2 + 1, ..., n_1\};\ \ \ \sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2 + 3\sigma_{4j}/(20) = s_{2j},\ \ j = \{1, ..., n_4\};\ \ \ \sigma_{2j} + \sigma_{3j}/2) = s_{2j},\ \ j = \{n_4 + 1, ..., n_3\};\ \ \ \sigma_{2j} = s_{2j},\ \ j = \{n_3 + 1, ..., n_2\};\ \ \ \sigma_{3j} + \sigma_{4j}/2 = s_{3j},\ \ j = \{1, ..., n_4\};\ \ \sigma_{3j} = s_{3j},\ \ j = \{n_4 + 1, ..., n_3\};\ \ \ \sigma_{4j}/2 = s_{4j},\ \ j = \{1, ..., n_4\}$.

У випадку сталих кофіцієнтів маємо

$$\begin{gathered} G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0} \int_{R^{n_0}} \exp\{i((x_1 - \xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, s_1) + i(x_2 + (\bar{x}_1 + \bar{\xi}_1)\times \\ (t-\tau)/2 - \xi_2)(t-\tau)^{-3/2}, s_2) + i((x_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)\times \\ (t-\tau)^2/12 - \xi_3)(t-\tau)^{-5/2}, s_3) + i((x_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2 + (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)\times \\ (t-\tau)^2/10 + (x_1' + \xi_1')(t-\tau)^3/120 - \xi_4)(t-\tau)^{-7/2}, s_4) + \\ \sum_{|k|\leq 2} a_k i^k (s_1^k + s_2^k 12^{\frac{k}{2}} + s_3^k 720^{\frac{k}{2}} + s_4^k 252000^{\frac{k}{2}})\} ds (t-\tau)^{-\frac{p}{2}}. \end{gathered} \tag{41}$$

Аналізуючи (41), аналогічно як у випадку рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами, інерція якого залежить від 4-ох груп змінних [2], одержимо аналітичний опис ФМРЗК. У загальному випадку, використовуючи (39), (40), (31), (35), (36), одержимо твердження:

Теорема 1. *ФМРЗК системи (5) має вигляд*

$G(t, x; \tau, \xi) = (t-\tau)^{-\frac{p}{2}} \Omega(t, \tau; ((x_1 - \xi_1)(t-\tau)^{-1/2}, (x_2 - \xi_2 + (\bar{x}_1 + \bar{\xi}_1)(t-\tau)/2)(t-\tau)^{-3/2}, (x_3 - \xi_3 + (t-\tau)(\bar{x}_2 + \bar{\xi}_2)/2 + (\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12)(t-\tau)^{-5/2}, (x_4 - \xi_4 + (\bar{x}_3 + \bar{\xi}_3)(t-\tau)/2 + (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10 + (x_1' + \xi_1')(t-\tau)^3/120 - \xi_4)(t-\tau)^{-7/2})$, де $\Omega(t, \tau, z_1, z_2, z_3, z_4)$ *при фіксованих* t, τ *є цілою функцією аргументів* $z_1, ...z_4$ *порядку зростання 2 при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки;

$$|\partial_x^m \partial_\xi^l G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C_{ml}(t-\tau)^{-M_{ml}} \exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$|(\partial_t - \sum_{j=1}^{3} \bar{x_j}\partial_{x_{j+1}})G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-1-p/2}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\};$$

$$M_{ml} = \sum_{j=1}^{4}(2j-1)(n_j+|m_j|+|l_j|)/2;$$

$|\partial_t G(t,x+iy;\tau,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-p/2}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1 d(t,y;\tau,0)\}((t-\tau)^{-1}+\sum_{j=1}^{3}(|x_j|+|\xi_j|)(t-\tau)^{-(2j+1)/2})$, $\{x,\xi,y\}\subset \mathbb{R}^{n_0}$, $0\le\tau<t\le T$, де F_1, C_{lm}, C, C_1, c_0 – додатні сталі, залежать від $\sup|A(t)|$, характеру неперервності $a_k(t)$, T, n_j, δ_0.

Аналогічно, як для параболічних систем [4, с. 91-92], можна показати, що існує ФМРЗК спряженої системи до (5), та встановити оцінки її похідних, довести нормальність $G(t,x;\tau,\xi)$, формулу згортки і єдиність ФМРЗК.

Література

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.:Мир,1964. – 830 с.
2. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.12, №3. – С. 1650-1563.
3. Малицька Г.П. *Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42, №3. – С. 56-60.
4. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
5. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type Operator Theory, Adv.and Appl.,**152** (2004), 390p.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.11.2009

Malytska H.P. *The systems of the equations by Kolmogorow's type of second oder*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 180–190.

We consider one class of systems of ultraparabolic equation of second order, that have four groups of variables after which are degeneration and coefficients are depend only on a time variable, we construct the fundamental matrix of Cauchy problem and obtain the estimations of this matrix and all its derivatives.

Малицкая А.П. *Системы уравнений типа Колмогорова второго порядка // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 180–190.

Рассмотрен один класс ультрапараболических систем уравнений второго порядка, имеющих четыре группы переменных по которых есть вырождение и коэффициенты зависят только от часовой переменной, построена фундаментальная матрица решений задачи Коши, получены оценки этой матрицы и всех ее производных.