6. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – Т. 24. – С. 883 – 896.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. 1983. – 424 с.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука. 1969. – 526 с.
9. Ptashnyk B., Symotyuk M., Zadorozhna N. Nonlocal boundary value problem for hyperbolic quasilinear equation // International Conference "Nonlinear partial differential equations", dedicated to J. P. Schauder (Lviv, August 23 – 29, 1999). Book of abstracts. – P. 170.

О.Р. Никифорчин

СИМЕТРИЧНІСТЬ ТЕНЗОРНОГО МНОЖЕННЯ І ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКТОРІВ В *COMP*

Для деякого певного класу коваріантних функторів, які є функторіальними частинами монад в категорії компактів Comp, доведено, що симетричність тензорного множення рівносильна простішій властивості, яка стосується тільки скінченних просторів.

Надалі позначаємо *Comp* категорію компактів (компактних гаусдорфових просторів), $n = \{0,1,\dots,n-1\}$ вважаємо скінченним компактом. Щодо означення категорії, функтора, природного перетворення, монади та основних властивостей коавріантинх функторів і монад див.[1,2].

Нехай F: *Comp*→*Comp* – функтор. Який зберігає мономорфізми, перетини, порожню і одноточкову множину і є функторіальною частиною монади $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$. Нагадаємо, що для такого функтора природне перетворення η: $1_{Comp} \to F$ існує і є єдиним. Операції тензорного множення [2] $\otimes\otimes$: $FX \times FY \to F(X \times Y)$, X,Y – компакти задаються для такого функтора наступним чином. Якщо $x \in X$ (відповідно $y \in Y$), то задамо вкладення i_x: $Y \to X \times Y$ ($\bar{i}_y : X \to X \times Y$) формулою $i_x(y) = (x,y)(\bar{i}_y(x) = (x,y))$. Відповідності $x \mapsto i_x$ та $y \mapsto \bar{i}_y$ є неперервними відображеннями відповідно $X \to C(Y, X \times Y)$ та $Y \to C(X, X \times Y)$ в простори неперервних відображень з компактно-відкритою топологією. Оскільки F зберігає перетини, індуковані функтором F відображення $C(Y, X \times Y) \to C(FY, F(X \times Y))$ та $C(X, X \times Y) \to C(FX, F(X \times Y))$ є неперервними [4]. Отже, неперервними є відображення

$j: X \times FY \to F(X\times Y)$ і $\tilde{j}: FX\times Y \to F(X\times Y)$, задані формулами $j(x,b) = j_b(x) = Fi_x(b)$ та $\tilde{j}(a,y) = \tilde{j}_a(y) = F\tilde{j}_y(a), a\in FX, b\in FY$.

Задамо тензорні добутки $a\otimes b$ та $a\tilde{\otimes} b$ як $a\otimes b = \mu(X\times Y)\circ Fj_b(a), a\tilde{\otimes} b = \mu(X\times Y)\circ F\tilde{j}_b(b)$. Обидва тензорні добутки неперервні, природні за обома аргументами (в тому сенсі, що для довільних $a\in FX, b\in FY$) і неперервних $f: X\to X', g: Y\to Y'$ маємо $Fg(a)\otimes Fg(b) = F(f\times g)(a\otimes b), (Fg(a)\tilde{\otimes} Fg(b)) = F(f\times g)(a\tilde{\otimes} b))$, асоціативні (якщо ототожнити $X\times Y\times Z, (X\times Y)\times Z$) та $X\times(Y\times Z)$, то $(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c), (a\tilde{\otimes} b)\tilde{\otimes} c = a\tilde{\otimes}(b\tilde{\otimes} c)$ для довільних $a\in FX, b\in FY, c\in FZ$, тому вільно пишемо $a\otimes b\otimes c$ і т.п.). Неважко перевірити, що $Fpr_1(a\otimes b) = Fpr_1(a\tilde{\otimes} b) = a$, а $Fpr_2(a\otimes b) = Fpr_2(a\tilde{\otimes} b) = b$, якщо $a\in FX, b\in FY$.

Обидва тензорні добутки збігаються, наприклад, для монад гіперпростору чи ймовірнісних мір. На жаль, навіть для досить "гарних" (нормальних) монад $\otimes$ та $\tilde{\otimes}$ можуть бути різними, про що свідчить приклад побудованої Т. радулом модифікованої монади гіперпросторів включення [3]. Рівність $\otimes = \tilde{\otimes}$, яку називаємо симетричністю тензорного множення, є важливою, наприклад, для існування підняття монади на категорію абелевих напівгруп. Безпосередня перевірка симетричності часто викликає чисто комбінаторні труднощі. Ця стаття присвячена відшуканню еквівалентних, але простіших властивостей.

Нагадаємо, що сім'я відображень $\varphi_\alpha : X\to Y_\alpha, \alpha\in A$, називається спільно мономорфною (англ. Jointly monic), якщо для довільних $x_1, x_2\in X$ з рівності $\varphi_\alpha(x_1) = \varphi_\alpha(x_2)$ для всіх α випливає $x_1 = x_2$. Нормальні функтори не обов'язково зберігають спільну мономорфність. Наприклад, проекції $pr_1: X\times Y\to X$ та $pr_2: X\times Y\to Y$ декартового добутку просторів з $|X|>1, |Y|>1$ спільно мономорфні, але їх образи $\exp pr_1 : \exp X\times \exp Y\to \exp X$ та $\exp pr_2 : \exp X\times\exp Y\to\exp Y$ під дією експоненти не є такими.

Нехай $X = A\coprod B$ – зображення скінченного компакта у вигляді диз'юнктурного об'єднання непорожніх множин, і $p: X\to X/A, q: X\to X/B$ – фактор-відображення в простори, утворені відповідно ототожненням всіх точок з A та всіх точок з B. неважко бачити, що пара p,q – спільно мономорфна. Кажемо, що F має $\coprod$-властивість, якщо пара $Fp: FX\to F(X/A), Fq: FX\to F(X/B)$ теж спільно мономорфна для всіх таких X, A, B. зі згаданих вище функторів $\coprod$-властивістю володіють функтори експоненти та ймовірнісних мір, але не модифікований функтор гіперпросторів включення.

Нехай $a \in F2 = f\{0,1\}, b \in F3 = f\{0,1,2\}$. Покладемо $\varphi_l : 2 \to 4 = \{0,1,2,3\}, \varphi_l(0) = 0, \varphi_l(1) = l+1, l = 0,1,2$, а також $\psi_0, \psi_1 : 3 \to 4, \psi_0(k) = 0, \psi_1(k) = k+1, l = 0,1,2$. Якщо $\gamma_b : 2 \to F4, \gamma_b(x) = F\psi_x(b), \bar{\gamma}_a : 3 \to F4, \bar{\gamma}_a(y) = \varphi_y(a)$, то згідно з [4] γ_b і γ_b неперервні, і позначимо $a \circledast b = \mu 4(F\gamma_b(a))$, $a \circledcirc b = \mu 4(F\bar{\gamma}_a(b))$.

Теорема 1. Для симетричності тензорного множення монади $F = (F, \eta, \mu)$, де F: Comp→Comp – функтор, який зберігає мономорфізми, перетини, порожню і одноточкову множину, необхідно, щоб для кожних $a \in F2, b \in F3$ елементи $a \circledcirc b$, $a \circledast b \in F4$ збігалися. Якщо ж F зберігає епіморфізми і має $\coprod$-властивість, то ця умова є і достатньою.

Доведення. Доведемо необхідність. Розглянемо відображення $t : 2 \times 3 \to 4$, задане формулами: $t(0,k) = 0, t(1,k) = k+1$. Зауважимо, що для означених вище відображень $i_x : 3 \to 2 \times 3, x = 0,1, \bar{i}_y : 2 \to 2 \times 3, y = 0,1,2$, маємо $t \circ i_x = \psi_x, t \circ \bar{i}_y = \varphi_y$. Звідси випливає, що $Ft(a \otimes b) = a \circledcirc b$, $Ft(a \bar{\otimes} b) = a \circledast b$, отже, з симетричності випливає $a \circledcirc b = a \circledast b$.

Нехай тепер $a \circledcirc b = a \circledast b$, F епіморфний і має $\coprod$-властивість. З цієї властивості випливає, що для довільних скінченних компактів $m = \{0,1,\dots,m-1\}$ і $n = \{0,1,\dots,n-1\}$ спільно мономорфною є сім'я відображень $Fpr_1, Fp_0, Fp_1, \dots, Fp_{m-1}$, де $pr_1 : m \times n \to m$ – проекція, $p_i : m \times n \to n+1 = \{0,1,\dots,n\}$, $p_i(i,k) = k+1$, і $p_i(i,k) = 0$ при $j \neq i$.

За індукцією неважко довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ спільно мономорфною є сім'я $Ff : F(n+1) \to F4$, де f пробігає множину всіх таких відображень $n+1 \to 4$, що $f(0) = 0, f(\{1,2,\dots,n\}) \subset \{1,2,3\}$. Кожне таке відображення f можна задати як

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ g(x-1)+1, & x > 0 \end{cases}$$

де $g : n \to 3$ – довільна функція.

Тоді для довільних $a \in Fm, b \in Fn$ і згаданих вище f, g маємо: $Fpr_2(a \otimes b) = Fpr_2(a \bar{\otimes} b) = b, Ff \circ Fp_i(a \otimes b) = Fr_i(a) \circledcirc Fg(b)$,

$Ff \circ Fp_i(a \bar{\otimes} b) = Fr_i(a) \circledast Fg(b)$, де $r_i : m \to 2, r_i(x) = 1 \Leftrightarrow x = i$, звідки за $\circledcirc = \circledast$ та спільною мономорфністю Fpr_2 і сім'ї всіх $Ff \circ Fp_i$ маємо $a \otimes b = a \bar{\otimes} b$.

Оскільки довільні нескінченні нульвимірні компакти X, Y можна розкласти в зворотні спектри зі скінченних компактів, за неперервністю отримуємо, що $a \otimes b = a \otimes b$ для довільних $a \in FX, b \in FY, \dim X = \dim Y = 0$. Нарешті, кожен компакт є сюр'єктивним неперервним образом нульвимірного компакта, звідки випливає симетричність тензорного множення для всіх X, Y.

For certain class of covariant functors that are functorial parts of monads in the category Comp of compacta, the equivalence of symmetry of tensor product and a simpler property involving only finite spaces, is proved.

1. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. – Springler.New York etc. 1998. – 345p.
2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад в категорії компактів. – К.:ІСДО. – 1993. - 108 с.
3. Радул Т.М. Про монади, породжені деякими нормальними функторами // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 1990. – №34. – С. 59-62.
4. Nykyforchyn O.R. On continuity, opennes, and bicommutativity of functors in the category of compacta // Methods Funct.Anal. Topology. – 1998. – №4. – P. 82-85

Б. В. Атаманюк

МОДИФІКОВАНІ ІТЕРАЦІЇ ДОСКОНАЛО МЕТРИЗОВАНИХ ФУНКТОРІВ

Доводяться три теореми про геометричні властивості ітерованих функторів

В. Федорчук дав означення досконало метризованого функтора. Автор в [1] і [2] розширив його на некомпактний випадок.

В [3] наведена конструкція модифікації нескінченної ітерації функторів. Застосовуємо цю конструкцію до досконало метризованих функторів.

Нехай F – досконало метризований функтор, F^n – його ітерація, η_n^{n-1} – ізометричне вкладення, а ψ^n_{n-1} – натуральна (природня) проекція. Нехай $\alpha = \{k_i \mid 0 \le k_i \le i : i \in N\}$ - послідовність натуральних чисел. Задаємо відображення $\delta_i : F^i(X) \to F^{i+1}(X)$ формулою: $\delta_i = F^{k_i}\{\eta_{i-k(i)}\}$.

Одержимо цілий клас ізометричних вкладень

$$F(X) \hookrightarrow F^2(X) \hookrightarrow F^3(X) \hookrightarrow \ldots$$

$$\eta_1 \qquad \eta_2 \qquad \eta_3$$

$$\eta_1 \quad \curvearrowleft \quad \eta_2 \quad \curvearrowleft \quad \eta_3 \curvearrowleft$$