6. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений// Мат. заметки. – 1985. – Т. 37.- № 5. – С. 727-733.
7. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48.- № 2. – С. 184-194.
9. Ільків В.С. Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами// Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 1999. – №318. – С. 318-323.
10. Ільків В.С. Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. № 4. – С. 78-82.
11. Задорожна Н.М. Задачі з нелокальними умовами для параболічних рівнянь і систем: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 17 с.
12. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49. – №11. – С. 1478-1487.
13. Гой Т.П. Задача з нелокальними умовами для одного класу систем рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. - 2000. – №411. – С. 73-79.
14. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их прозводных// Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1960. – Т. 24. - С. 883-896.
15. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
16. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

О. Д. Власій

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними двоточковими умовами за змінною t та локальними крайовими умовами за змінною x для диференціального рівняння з частинними похідними зі змінними за t та x коефіцієнтами у циліндричній області. Доведено метричні твердження, які стосуються оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

1. Задачі з нелокальними крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, є умовно коректними. Розв'язність таких задач пов'язана з проблемою малих знаменників. Для окремих видів рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними за t або за x коефіцієнтами такі задачі було досліджено в ряді робіт (див., наприклад, [1– 5]).

У даній статті, яка продовжує дослідження роботи [5, розд. 5], вивчається задача з нелокальними умовами за змінною t та умовами типу умов Діріхле за $x = (x_1, \ldots, x_p)$ для рівняння з частинними похідними зі змінними за t та x коефіцієнтами.

2. Будемо використовувати такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^{p+1}$; $y = (y_1, \ldots, y_l) \in \mathbf{R}^l$, $g(y) = (g_1(y), \ldots, g_r(y))$ – дійснозначна вектор-функція аргумента y, $|g(y)| = \sqrt{g_1^2(y) + \ldots + g_r^2(y)}$; $\mathbf{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbf{R}^p$ з цілими невід'ємними кординатами; $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbf{Z}_+^p$, $|\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_p$; $\Omega \in \mathbf{R}^p$ – деяка p-вимірна область, G – нормальна[1] область [6], яка міститься разом зі своєю межею ∂G в області Ω, $D = \{(t, x): t \in (0, T), x \in G\}$; $C^{h,\psi}(\Omega)$ – клас визначених в області Ω функцій, h-ті похідні яких в кожній обмеженій замкненій області, що належить Ω, задовольняють умову Гельдера з показником ψ, $0 < \psi \le 1$; $A^{h,\psi}(\Omega)$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать $C^{h,\psi}(\Omega)$ [6];

$$L = c(x) - \sum_{l,m=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lm}(x) \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \tag{1}$$

диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами, еліптичний в області Ω. Припустимо, що $c(x) \ge 0$, $x \in \Omega$, $a_{lm} \in C^{2n-1,\psi}(\Omega)$, $l, m = 1, \ldots, p$, $c \in C^{2n-2,\psi}(\Omega)$, а також $\overline{G} \in A^{2n,\psi}(\Omega)$. Тоді задача на власні значення [6]

$$\begin{cases} LX = \lambda X, \\ X|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

має повну ортогональну (надалі вважатимемо її ортонормованою) в $L_2(G)$ систему класичних власних функцій $X = \{X_k(x), k \in \mathbf{N}\}$, а всі власні значення цієї задачі λ_k, $k \in \mathbf{N}$, множину яких позначимо через Λ, є різні та додатні; крім цього, $X_k \in C^{2n}(\overline{G})$, $k \in \mathbf{N}$, і справедливі такі оцінки [6, 7]:

$$C_1 k^{2/p} \le \lambda_k \le C_2 k^{2/p}, \quad 0 < C_1 \le C_2, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

[1] Область G називається нормальною, якщо в цій області розв'язною є задача Діріхле для рівняння Лапласа при довільній неперервній межовій функції.

$$\max_{x\in G}\left|\frac{\partial^{\sigma} X_k(x)}{\partial x_1^{\sigma_1}\ldots\partial x_p^{\sigma_p}}\right| \le C_3\lambda_k^{\frac{p}{4}+\frac{\sigma}{2}},\ C_3=C_3(\sigma),\ |\sigma|=0,\ 1,\ldots,2n,\ k\in\mathbf{N}. \quad (3)$$

$C^{(n,2n)}(\overline{D})$ – банахів простір [7] функцій $w(t,x)$ з нормою

$$\|w\|_{C^{(n,2n)}(\overline{D})} = \sum_{2p+|\sigma|\le 2n}\max_{(t,x)\in \overline{D}}\left|\frac{\partial^{p+|\sigma|} w}{\partial t^p\partial x_1^{\sigma_1}\ldots\partial x_p^{\sigma_p}}\right|;$$

$B_\delta(G)$, $\delta>0$, – простір функцій $\varphi\in L_2(G)$, $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$, із нормою

$$\|\varphi\|_{B_\delta(G)} = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp(\delta\lambda_k);$$

$C([0,T],B_\delta(G))$ – простір функцій $\psi(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)X_k(x)$, визначених в D, які є неперервні за t і для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ належать простору $B_\delta(G)$,

$$\|\psi\|_{C([0,T],B_\delta(G))} = \sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|\psi_k(t)|\exp(\delta\lambda_k).$$

3. В області D розглянемо задачу

$$N[u]\equiv\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha_j(t)L-\beta_j(t)\right)u(t,x)=f(t,x), \quad (4)$$

$$M_q[u]\equiv\left(\frac{\partial^q u}{\partial t^q}+\nu\frac{\partial^{q-1}u}{\partial t^{q-1}}\right)\bigg|_{t=0}-\left(\mu\frac{\partial^q u}{\partial t^q}+\nu\frac{\partial^{q-1}u}{\partial t^{q-1}}\right)\bigg|_{t=T}=\varphi_q(x),\ q=0,1,\ldots,n-1, \quad (5)$$

$$L^r u\big|_{\partial G}=0,\qquad r=0,1,\ldots,n-1, \quad (6)$$

де $\alpha_j(t)=\alpha(t)+\alpha_j$, $\beta_j(t)=\beta(t)+\beta_j$, $\alpha_j,\beta_j\in\mathbf{C}$, $j=1,\ldots,n$; $\alpha_i\lambda_k+\beta_i\ne$ $\ne\alpha_j\lambda_k+\beta_j$, $\lambda_k\in\Lambda$, $i,j=1,\ldots,n$, $i\ne j$; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – комплекснозначні функції, $\alpha,\beta\in C^{n-1}([0,T])$; $\mu\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $\nu\in\mathbf{C}$; оператор L визначений формулою (1), $L^0u\equiv u$, $L^r u=L(L^{r-1}u)$, $r=1,\ldots,n-1$; $\frac{\partial^{-1}u}{\partial t^{-1}}=\int_0^t u(\tau,x)d\tau$.

Вважаємо, що в задачі (4) – (6) функції $\varphi_q(x)$, $q=0,1,\ldots,n-1$, та $f(t,x)$ допускають розвинення в ряди Фур'є за системою X, тобто

$$\varphi_q(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{qk}X_k(x),\quad q=0,1,\ldots,n-1,\quad f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)X_k(x). \quad (7)$$

де $\varphi_{qk} = \int_G \varphi_q(x)X_k(x)dx$, $f_k(t) = \int_G f(t,x)X_k(x)dx$.

Розв'язок задачі (4) – (6) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \tag{8}$$

За умови рівномірної збіжності в $\overline{D}$ ряду (8) та рядів, отриманих з нього шляхом почленного диференціювання за змінними $x_1,\dots,x_p$ до порядку $2n-2$ включно, функція $u(t,x)$, визначена формулою (8), задовольняє крайові умови (6). На підставі (4), (5), (7), (8), для визначення кожної з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, отримуємо таку крайову задачу з нелокальними умовами для звичайного диференціального рівняння:

$$N_k[u_k] \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k \alpha_j(t) - \beta_j(t)\right)u_k(t) = f_k(t), \tag{9}$$

$$M_q[u_k] \equiv u_k^{(q)}(0) + \nu u_k^{(q-1)}(0) - \mu u_k^{(q)}(T) - \nu u_k^{(q-1)}(T) = \varphi_{qk},\ q = 0,1,\dots,n-1. \tag{10}$$

Розглянемо однорідну задачу, що відповідає задачі (9), (10):

$$N_k[u_k] = 0, \tag{11}$$

$$M_q[u_k] = 0, \quad q = 0,1,\dots,n-1. \tag{12}$$

Рівняння (11) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$R_{sk}(t) = \exp\big(\lambda_k A(t) + B(t)\big)\exp\big((\lambda_k\alpha_s + \beta_s)t\big),\ s = 1,\dots,n, \tag{13}$$

де $A(t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau$, $B(t) = \int_0^t \beta(\tau)d\tau$. Характеристичний визначник [8] задачі (11), (12) $\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu) \equiv \det\left\|M_q[R_{sk}(t)]\right\|_{\substack{q=0,1,\dots,n-1\\ s=1,\dots,n}}$ має такий вигляд:

$$\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu) = (-1)^n W_n(\lambda_k,T)\mu^n + P(\lambda_k,\mu,\nu), \tag{14}$$

де $W_n(\lambda_k,t)$ – вронскіан системи функцій (13), який не перетворюється в нуль у жодній точці відрізка $[0,T]$; $P(\lambda_k,\mu,\nu)$ – многочлен відносно μ степеня, не вищого ніж $n-1$.

4. При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (4) – (6) будемо також розглядати однорідне рівняння

$$N[u] = 0 \tag{15}$$

з однорідними нелокальними умовами

$$M_q[u] = 0,\ q = 0,1,\dots,n-1. \tag{16}$$

Розв'язок задачі (4) – (6) є єдиним тоді й тільки тоді, коли задача (6), (15), (16) має лише тривіальний розв'язок. Звідси одержуємо таке твердження.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (4) – (6) у просторі $C^{(n,2m)}(\overline{D})$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$(\forall\lambda_k \in \Lambda) \qquad \Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu) \neq 0. \tag{17}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 із [5, розд. 2] і випливає з теореми про єдиність розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд Фур'є за повною системою ортогональних функцій.

5. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (4) – (6). Надалі будемо вважати, що виконується умова (17). Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ розв'язок задачі (9), (10) має вигляд

$$u_k(t) = H_k(t) + \sum_{s=1}^{n} C_{sk}R_{sk}(t), \tag{18}$$

де

$$\begin{gathered} H_k(t) = \exp(I_{nk}(t))\int_0^t \exp(\Delta I_{n-1,k}(\tau_1))\int_0^{\tau_1}\exp(\Delta I_{n-2,k}(\tau_2))\dots\int_0^{\tau_{n-2}}\exp(\Delta I_{1k}(\tau_{n-1}))\times \\ \times\int_0^{\tau_{n-1}} f_k(\tau_n)\exp(-I_{1k}(\tau_n))d\tau_n d\tau_{n-1}\dots d\tau_2 d\tau_1 , \end{gathered} \tag{19}$$

$I_{jk}(t) = \int_0^t (\lambda_k\alpha_j(\tau) + \beta_j(\tau))d\tau, \qquad j = 1,\dots,n, \qquad \Delta I_{jk}(t) = I_{jk}(t) - I_{j+1\,k}(t),$

$j = 1,\dots,n-1$; функції $R_{sk}(t)$ визначені формулами (13), а коефіцієнти C_{sk}, $s = 1,\dots,n$, знаходяться зі системи рівнянь

$$\sum_{s=1}^{n} C_{sk}M_q[R_{sk}] = \varphi_{qk} - M_q[H_k], \quad q = 0,1,\dots,n-1, \tag{20}$$

визначник якої $\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)$ зображається формулою (14). Розв'язок системи рівнянь (20) визначається формулами

$$C_{sk} = \frac{\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q(\varphi_{qk} - M_q[H_k])\Delta_{qs}(\lambda_k,\mu,\nu)}{\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)}, \quad s = 1,\dots,n. \tag{21}$$

в яких $\Delta_{qs}(\lambda_k,\mu,\nu)$, $q = 0,1,\dots,n-1$, $s = 1,\dots,n$, – визначники, одержані з $\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)$ шляхом викреслення із нього q-го рядка та s-го стовпця відповідно.

На підставі (8) та (18) формальний розв'язок задачі (4) – (6) зображається рядом

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(H_k(t)+\sum_{s=1}^{n}C_{sk}R_{sk}(t)\right)X_k(t). \qquad (22)$$

Ряд (22), взагалі, є розбіжним, бо відмінні від нуля вирази $\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)$, які входять знаменниками у формули (21) для визначення сталих C_{sk}, $s=1,\dots,n$, $k\in\mathbf{N}$, можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для безмежної кількості чисел $\lambda_k\in\Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (4) – (6) пов'язане з проблемою малих знаменників. Запровадимо такі позначення: $A=\max\limits_{t\in[0,T]}\operatorname{Re}\int_0^t\alpha(\tau)d\tau$,

$\Delta A=\max\limits_{t\in[0,T]}\operatorname{Re}\int_0^t\alpha(\tau)d\tau-\min\limits_{t\in[0,T]}\operatorname{Re}\int_0^t\alpha(\tau)d\tau$, $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\max\{\alpha_j,0\}$, $\rho_1=nA+TS$, $\rho_2=\Delta A+\rho_1$.

Теорема 2. Нехай справджуються умови (17) і нехай існують сталі $C_4>0$, R, такі, що для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k\in\Lambda$ і для довільного $\gamma>0$ виконується нерівність

$$|\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)|\ge C_4\exp(-(R+\gamma)\lambda_k). \qquad (23)$$

Якщо $\varphi_q\in B_{\delta_1}(G)$, $q=0,1,\dots,n-1$, $f\in C([0,T],B_{\delta_2}(G))$, $\delta_j>\max\{\rho_j+R,0\}$, $j=1,2$, то існує розв'язок задачі (4) – (6) із простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$, який неперервно залежить від $f(t,x)$ та $\varphi_q(x)$, $q=0,1,\dots,n-1$.

Доведення. За умов теореми, на підставі оцінок (2), (3) та формул (13), (19), (21), (22), отримуємо, що для довільного $\gamma>0$ виконується нерівність

$$\|u\|_{C^{(n,2n)}(\overline{D})}\le C_5\sum_{k=1}^{\infty}\max_{0\le q\le n-1}|\varphi_{qk}|\lambda_k^{n^2+1+p/4}\exp((\rho_1+R+\gamma)\lambda_k)+$$
$$+C_6\sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|\lambda_k^{n(n+1)+p/4}\exp((\rho_2+R+\gamma)\lambda_k), \qquad (24)$$

де C_5, C_6 – додатні сталі. Використовуючи нерівність

$$\lambda^d\le C_7\exp(\eta\lambda), \qquad (25)$$

де $C_7=C_7(d,\eta)>0$, $\lambda\ge0$, яка справедлива для довільних $d\ge0$, $\eta>0$, із (24) отримуємо

$$\|u\|_{C^{(n,2n)}(\overline{D})} \le$$

$$\le C_8 \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{qk}|\exp((\rho_1+R+\gamma+\eta_1)\lambda_k)+C_9\sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|\exp((\rho_2+R+\gamma+\eta_2)\lambda_k)) =$$

$$= C_8\sum_{q=1}^{n}\|\varphi_q\|_{B_{\delta_1}(G)} + C_9\|f\|_{C([0,T],B_{\delta_2}(G))} < \infty, \qquad (26)$$

де C_8, C_9 – додатні сталі, γ, η_1 та η_2 – такі додатні числа, що $\gamma+\eta_j=\delta_j-\max\{\rho_j+R,0\}$, $j=1,2$. З оцінки (26) випливає доведення теореми.

6. З'ясуємо, за яких умов виконуються оцінки (23). Для цього будуть використані наступні твердження.

Лема 1. Нехай $g(y)=(g_1(y_1,\dots,y_l),\dots,g_r(y_1,\dots,y_l))$ – дійснозначна вектор-функція, $g_\rho\in C^q(\overline{Q})$, $\rho=1,\dots,r$, де Q – обмежена однозв'язна область в $\mathbf{R}^l$, і нехай для довільного $C\in\mathbf{R}$ кожне з рівнянь

$$\left.\frac{\partial^s g_\rho(y)}{\partial y_1^{s_1}\dots\partial y_l^{s_l}}\right|_{y_j=y_j^0} = C, \quad \rho=1,\dots,r, \quad j=1,\dots,m-1,m+1,\dots,l, \quad |s|\le q,$$

при довільних фіксованих $y_1^0,\dots,y_{m-1}^0,y_{m+1}^0,\dots,y_l^0$ має в області Q обмежену кількість y_m-розв'язків ($1\le m\le l$). Тоді, якщо в Q справедливі нерівності

$$\left|\frac{\partial^q g(y)}{\partial y_1^{q_1}\dots\partial y_l^{q_l}}\right|\ge\delta>0, \quad q_j\in\mathbf{Z}_+, \ j=1,\dots,l, \ q=\sum_{j=1}^{l}q_j, \ q\ge 1,$$

то $\operatorname{mes}\{y\in Q:|g(y)|<\varepsilon\}\le C_{10}\sqrt[q]{\varepsilon/\delta}$, $\quad C_{10}=C_{10}(q,Q)$.

Доведення цього твердження проводиться за схемою доведення леми 2.3 із [5].

Лема 2. Нехай $g_n(z)$ – многочлен n-го степеня відносно комплексної змінної z, $z=z_1+iz_2$, $z_1,z_2\in\mathbf{R}$,

$$g_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n, \quad a_0\ne 0,$$

де $z\in Q\subset\mathbf{C}$, $a_j\in\mathbf{C}$, $j=0,1,\dots,n$; Q – однозв'язна обмежена область в комплексній площині. Тоді $\operatorname{mes}\{z\in Q:|g_n(z)|<\varepsilon\}\le C_{11}\sqrt[n]{\varepsilon/|a_0|}$, $C_{11}=C_{11}(n,Q)$.

Доведення. На основі леми 1 одержуємо, що в кожній обмеженій однозв'язній області $Q_1\subset\mathbf{R}^2$ для вектор-функції $(g_{1n}(z_1,z_2),g_{2n}(z_1,z_2))$, де $g_{1n}(z_1,z_2)=\operatorname{Re}g_n(z)$, $g_{2n}(z_1,z_2)=\operatorname{Im}g_n(z)$, міра тих $(z_1,z_2)\in Q_1$, для яких виконується нерівність

$\sqrt{g_{1n}^2(z_1,z_2)+g_{2n}^2(z_1,z_2)}<\varepsilon$, не перевищує величини $C_{11}\sqrt[n]{\varepsilon/|a_0|}$, де $C_{11}=C_{11}(n,Q_1)$. Отже, і міра тих $z\in Q\subset \mathbf{C}$, де $Q=\{z\in \mathbf{C}:(z_1,z_2)\in Q_1\subset \mathbf{R}^2\}$, для яких виконується умова $|g_n(z)|<\varepsilon$, не перевищує тієї ж величини $C_{11}\sqrt[n]{\varepsilon/|a_0|}$, що і треба було довести.

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbf{C}$) чисел $\mu\in\mathbf{C}$ нерівність

$$|\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)|<\lambda_k^{-\frac{pn}{2}-\theta}\exp(M\lambda_k),\ \ \theta>0, \tag{27}$$

де $M=n\int_0^1\alpha(t)dt+T\sum_{j=1}^n\alpha_j$, має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у числах $\lambda_k\in\Lambda$.

Доведення. Оцінюючи знизу за абсолютною величиною вронскіан системи функцій (13) при $t=T$, для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ одержуємо нерівність

$$|W_n(\lambda_k,T)|\geq C_{12}\exp\left((n\int_0^T\alpha(t)dt+T\sum_{j=1}^n\alpha_j)\right). \tag{28}$$

Оскільки характеристичний визначник $\Delta_n(\lambda_k,\mu,\nu)$ задачі (11), (12), згідно з (14), є многочленом n-го степеня відносно μ з коефіцієнтом $(-1)^n W_n(\lambda_k,T)$ при старшому члені, то, на підставі оцінок (28), із леми 2 отримуємо, що міра множини тих $\mu\in Q$, для яких виконується умова (27), не перевищує величини $C_{11}\sqrt[n]{\lambda_k^{-\frac{pn}{2}-\theta}}$, де Q довільна однозв'язна обмежена область в $\mathbf{C}$.

Зафіксуємо число $\hat{k}\in\mathbf{N}$ і через $F(\lambda_{\hat{k}})$ позначимо множину тих $\mu\in Q$, для яких нерівність (27) виконується при $\lambda_k=\lambda_{\hat{k}}$. Тоді для кожного $\hat{k}\in\mathbf{N}$ одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}F(\lambda_{\hat{k}})\leq C_{11}\sqrt[n]{\lambda_{\hat{k}}^{-\frac{pn}{2}-\theta}}=C_{11}\lambda_{\hat{k}}^{-\frac{p}{2}-\frac{\theta}{n}},\quad \theta>0.$$

Оскільки множина тих $\mu\in Q$, для яких нерівність (27) виконується для нескінченної кількості $\lambda_k\in\Lambda$, міститься в перетині нескінченної кількості множин $F(\lambda_k)$, і виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{mes}F(\lambda_k)\leq C_{11}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\theta}{n}}\leq C_{13}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1-\frac{2\theta}{pn}}<\infty,$$

то, на основі леми Бореля – Кантеллі, міра множини тих $\mu \in Q$, для яких нерівність (27) виконується для нескінченної кількості чисел $\lambda_k \in \Lambda$, дорівнює нулеві.

Покривши комплексну площину зліченною кількістю однозв'язних обмежених областей Q, на основі сигма-адитивності міри Лебега в **C** одержуємо доведення теореми.

З теореми 3 та нерівності (25) одержуємо наступне твердження.

Наслідок. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в **C**) чисел $\mu \in \mathbf{C}$ нерівність

$$|\Delta_n(\lambda_k, \mu, \nu)| < \exp((M - \eta)\lambda_k), \quad \eta > 0,$$

має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у числах $\lambda_k \in \Lambda$.

На основі цього наслідку та теореми 2 отримуємо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $\varphi_q \in B_{\delta_1}(G)$, $q = 0, 1, \dots, n-1$, $f \in C([0,T], B_{\delta_2}(G))$, $\delta_j > \max\{\rho_j - M, 0\}$, $j = 1, 2$. Тоді, за виконання умов (17), для майже всіх (стосовно міри Лебега в **C**) чисел μ (та при довільних інших параметрах задачі) існує єдиний розв'язок задачі (4)–(6), який належить простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$ і неперервно залежить від $f(t,x)$ та $\varphi_q(x)$, $q=0,1,\dots,n-1$.

Зауважимо, що задача з умовами (5) та умовами періодичності за змінною x для слабконелінійного гіперболічного рівняння зі сталими в головній частині оператора коефіцієнтами розглядалась в роботі [9].

Conditions of the univalent solvability of a problem with nonlocal two-point conditions in variable t and local boundary conditions in variable x for partial differential equation with variable in t and x coefficients in a cylindrical domain are established. The metric statements concerning lower bounds of small denominators which appearing in the construction of solution of the problem are proved.

1. Гой Т. П. Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком // Математичні студії. Праці Львівського матем. т-ва. – 1997. – Т.8. – №1. – С. 71-78.
2. Задорожна Н. М., Пташник Б. Й. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47. - №7. – С. 915-921.
3. Ільків В. С., Пташник Б. Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48. – №2. – С. 184-194.
4. Комарницька Л. І. Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17-23.
5. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

6. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – Т. 24. – С. 883 – 896.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука. 1983. – 424 с.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука. 1969. – 526 с.
9. Ptashnyk B., Symotyuk M., Zadorozhna N. Nonlocal boundary value problem for hyperbolic quasilinear equation // International Conference "Nonlinear partial differential equations", dedicated to J. P. Schauder (Lviv, August 23 – 29, 1999). Book of abstracts. – P. 170.

О.Р. Никифорчин

СИМЕТРИЧНІСТЬ ТЕНЗОРНОГО МНОЖЕННЯ І ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКТОРІВ В *COMP*

Для деякого певного класу коваріантних функторів, які є функторіальними частинами монад в категорії компактів Comp, доведено, що симетричність тензорного множення рівносильна простішій властивості, яка стосується тільки скінченних просторів.

Надалі позначаємо *Comp* категорію компактів (компактних гаусдорфових просторів), $n = \{0,1,\dots,n-1\}$ вважаємо скінченним компактом. Щодо означення категорії, функтора, природного перетворення, монади та основних властивостей коавріантинх функторів і монад див.[1,2].

Нехай F: *Comp*→*Comp* – функтор. Який зберігає мономорфізми, перетини, порожню і одноточкову множину і є функторіальною частиною монади $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$. Нагадаємо, що для такого функтора природне перетворення η: $1_{Comp} \to F$ існує і є єдиним. Операції тензорного множення [2] $\otimes\otimes$: $FX \times FY \to F(X \times Y)$, X,Y – компакти задаються для такого функтора наступним чином. Якщо $x \in X$ (відповідно $y \in Y$), то задамо вкладення i_x: $Y \to X \times Y$ ($i_y : X \to X \times Y$) формулою $i_x(y) = (x,y)$ $(i_y(x) = (x,y))$. Відповідності $x \mapsto i_x$ та $y \mapsto i_y$ є неперервними відображеннями відповідно $X \to C(Y, X \times Y)$ та $Y \to C(X, X \times Y)$ в простори неперервних відображень з компактно-відкритою топологією. Оскільки F зберігає перетини, індуковані функтором F відображення $C(Y, X \times Y) \to C(FY, F(X \times Y))$ та $C(X, X \times Y) \to C(FX, F(X \times Y))$ є неперервними [4]. Отже, неперервними є відображення