© Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. 2000. Випуск 1

МАТЕМАТИКА

П.Б.Василишин, Б.Й. Пташник

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕІЗОТРОПНИХ БЕЗТИПНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за просторовими координатами для лінійних безтипних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами, неізотропних стосовно похідних за змінною t та змінними $x_1, \ldots, x_p$. Доведено нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку розглядуваної задачі.

1. Запровадимо деякі позначення та функціональні простори, які використовуватимемо при вивченні задачі:
$k=(k_1,\ldots,k_p)\in Z^p$; $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$; $s=(s_0,s_1,\ldots,s_p)\in Z_+^{p+1}$;

$|s|=s_0+s_1+\ldots+s_p$; $\Omega^p_{2\pi}$ – p-вимірний тор $R^p/[0,2\pi]^p$;

Γ – простір всіх тригонометричних поліномів

$$P(x)=\sum_{k_1=-m}^{m}\ldots\sum_{k_p=-m}^{m}C_k(P)\exp(i(k,x)),\qquad m=0,1,\ldots,\ x\in[0,2\pi]^p,$$

з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається наступним чином: $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} P$, якщо, починаючи з деякого номера, степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа N і $C_k(P_n)\underset{n\to\infty}{\to} C_k(P)$ при кожному k;

Γ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над Γ зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [1];

$C^n([0,T],\Gamma)(C^n([0,T],\Gamma'))$ – простір функцій $z(t,x)$, визначених в області $\overline{Q}^p$ і n раз неперервно диференційовних за t, і таких, що при кожному $t\in[0,T]$ $\dfrac{\partial^m z}{\partial t^m}\in\Gamma(\Gamma')$, $m=0,1,\ldots,n$;

$C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)$ – простір функцій u(t,x), визначених в області $\overline{Q}^p$, які є n раз неперервно диференційовні за t та N раз неперервно диференційовні за сукупністю змінних t, $x_1, \ldots, x_p$,

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)} \equiv \sum_{\substack{|s|\le N \\ s_0\le n}} \max_{(t,x)\in\overline{Q}^p} \left| \frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p), \delta>0, \beta>0,$ – простір 2π-періодичних комплекснозначних функцій вигляду $g(x)=\sum_{|k|\ge 0} g_k \exp(i(k,x))$, для яких

$$\|g\|_{A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p)} = \sum_{|k|\ge 0} |g_k| \exp(\delta|k|^\beta) < \infty;$$

$C^n([0,T], A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p))$ – простір функцій h(t,x), визначених в області $\overline{Q}^p$ і n раз неперервно диференційовних за змінною t, і таких, що при кожному $t\in[0,T]$ $\frac{\partial^m h}{\partial t^m} \in A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p), m=0,1,\ldots,n,$

$$\|h\|_{C^n([0,T],A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p))} \equiv \sum_{m=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^m h(t,\cdot)}{\partial t^m} \right\|_{A_\delta^\beta(\Omega_{2\pi}^p)}.$$

2. В області Q^p розглянемо задачу

$$Hu(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{\substack{|s|\le N \\ s_0 < n}} A_s \frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad N\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{|l|\le N-1 \\ l_0<n}} b_{l,j} \frac{\partial^{|l|}u(t_j,x)}{\partial t^{l_0}\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_p^{l_p}} = \varphi_j(x), \qquad \begin{pmatrix} j=1,\ldots,n, \\ 0\le t_1<t_2<\ldots<t_n\le T, \end{pmatrix} \tag{2}$$

де $A_s\in\mathbb{C}, |s|\le N, s_0<n$; $b_{l,j}\in\mathbb{C}$, $b_{(0),j}\ne 0$, $|l|\le N-1$, $l_0<n$, $j=1,\ldots,n$.

Вигляд області Q^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на функції u(t,x) та $\varphi_j(x)$, j=1,…,n. На тип диференціального виразу H ніяких обмежень не накладається.

Задача з простішими, ніж (2), багатоточковими умовами для коректного за Петровським рівняння (1) вивчена в роботі [2]. Частинний випадок задачі (1)-(2), коли $N=n, b_{l,j}=0, l\ne(0), b_{(0),j}=1, j=1,\ldots,n,$ досліджений у роботі [3].

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}u_k(t)\exp(i(k,x)). \qquad (3)$$

Припустимо, що

$$\varphi_j(x)=\sum_{|k|\geq 0}\varphi_{jk}\exp(i(k,x)), \qquad j=1,\ldots,n, \qquad (4)$$

$$\varphi_{jk}=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\Omega^p_{2\pi}}\varphi_j(x)\exp(-i(k,x))dx, \qquad j=1,\ldots,n. \qquad (5)$$

Підставивши ряди (3), (4) у рівняння (1) та умови (2), одержимо, що кожна з функцій $u_k(t), k\in Z^p$, є розв'язком наступної багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n}+\sum_{\substack{|s|\leq N\\ s_0<n}}A_s(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}u_k^{(s_0)}(t)=0, \qquad (6)$$

$$\sum_{\substack{|l|\leq N-1\\ l_0<n}}b_{l,j}(ik_1)^{l_1}\ldots(ik_p)^{l_p}u_k^{(l_0)}(t)=\varphi_{jk}, \qquad j=1,\ldots,n. \qquad (7)$$

Для спрощення викладок припустимо, що для всіх $k\in Z^p$ λ-корені характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (6),

$$P(\lambda,k)\equiv\lambda^n+\sum_{\substack{|s|\leq N\\ s_0<n}}A_s(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\lambda^{s_0}=0 \qquad (8)$$

є різні; позначимо їх таким чином: $\lambda_j(k)\equiv\lambda_j^{(1)}(k)+i\lambda_j^{(2)}(k)$, $\lambda_j^{(m)}(k)\in R$, $j=1,\ldots,n$, $m=1,2$. Зі структури рівняння (8) випливає, що

$$|\lambda_j(k)|\leq C|k|^{N-n+1}, \qquad k\in Z^p, \quad |k|>K>0, \quad j=1,\ldots,n, \quad C>0. \qquad (9)$$

Для кожного $k\in Z^p$ розв'язок задачі (6), (7) зображується формулою

$$u_k(t)=\sum_{m=1}^{n}C_{km}\exp(\lambda_m(k)t), \qquad (10)$$

де сталі C_{km}, $m=1,\ldots,n$, визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{|l|\leq N-1\\ l_0<n}}b_{l,j}(ik_1)^{l_1}\ldots(ik_p)^{l_p}(\lambda_m(k))^{l_0}\exp(\lambda_m(k)t_j)C_{km}=\varphi_{jk}, \quad j=1,\ldots,n, \qquad (11)$$

визначник $\Delta(k)$ якої має вигляд

$$\Delta(k)\equiv\det\left\|\sum_{|l|\leq N-1,\ l_0<n}b_{l,j}(ik_1)^{l_1}\ldots(ik_p)^{l_p}(\lambda_m(k))^{l_0}\exp(\lambda_m(k)t_j)\right\|_{j,m=1}^{n}. \qquad (12)$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$(\forall k \in Z^p) \qquad \Delta(k) \neq 0. \tag{13}$$

Доведення модифікує схему доведення теореми 3.1 [4, розд.2].

3. Нехай справджується умова (13). Тоді для кожного $k \in Z^p$ система (11) має єдиний розв'язок

$$C_{km} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{jm}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} \qquad m = 1,...,n,$$

а розв'язок задачі (1), (2) формально зображається рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \sum_{m,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jm}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} \exp(i(k,x) + \lambda_m(k)t), \tag{14}$$

де $\Delta_{jm}(k)$ – алгебраїчне доповнення елемента

$$\sum_{\substack{|l|\leq N-1 \\ l_0<n}} b_{l,j}(ik_1)^{l_1}...(ik_p)^{l_p}(\lambda_m(k))^{l_0} \exp(\lambda_m(k)t_j)$$

у визначнику $\Delta(k)$.

Зауваження 1. Із формули (14) (враховуючи, що у просторі Γ' будь-який тригонометричний ряд збіжний) випливає, що якщо $\varphi_j \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 1,...,n$, то, за умови (13), існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^n([0,T],\Gamma)$ $(C^n([0,T],\Gamma'))$.

В інших випадках ряд (14), взагалі, розбіжний, оскільки відмінна від нуля величина $|\Delta(k)|$ може ставати як завгодно малою для нескінченної множини векторів $k \in Z^p$.

Теорема 2. Нехай справджується умова (13) і нехай існують сталі $\alpha > 0$, $H \geq 0$ такі, що

$$(\forall k \in Z^p, |k| \geq K > 0) \qquad |\Delta(k)| \geq |k|^{-\alpha} \exp(-H|k|^{N-n+1}T). \tag{15}$$

Якщо $\varphi_j \in A_\delta^{N-n+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j = 1,...,n$, $\delta > (H + nC)T$, де C – стала з нерівностей (9), то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{(n,N)}(\overline{Q^p})$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,...,n$.

Доведення. Враховуючи (9) і (12), одержуємо нерівності

$$|\Delta_{jm}(k)| \leq H_1|k|^\nu \exp((n-1)C|k|^{N-n+1}T), \qquad j,m = 1,...,n, \tag{16}$$

де

$$H_1 = H_1(n,N,p,C) > 0, \quad \nu = (n(N-n) + 2(n-1))(n-1)/n.$$

На підставі формули (14) та нерівностей (9), (15), (16) отримуємо

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q^p})} = \sum_{\substack{|s|\leq N \\ s_0\leq n}} \max_{(t,x)\in Q^p} \left| \frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1}...\partial x_p^{s_p}} \right| =$$

$$= \sum_{\substack{s \le N \\ s_0 \le n}} \max_{(t,x)\in Q^p} \left| \sum_{|k|\ge 0} \sum_{m,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jm}(k)}{\Delta(k)} (\lambda_m(k))^{s_0} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \varphi_{jk} \exp(i(k,x) + \lambda_m(k)t) \right| \le$$

$$\le nH_1C^n \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_{jk}|\, |k|^{\nu+\alpha+N(n+1)-n(n-1)} \exp((nC+H)|k|^{N-n+1}T). \qquad (17)$$

Скориставшись елементарною нерівністю

$$\delta^{\mu} \le A(\mu)\exp(\theta\delta), \qquad A(\mu) > 0, \qquad (18)$$

яка при $0 < \delta < +\infty$ справедлива для довільних $\mu \ge 0$ і $\theta \ge 0$, і поклавши в ній $\theta = \delta - (H + nC)T$, із (17) одержуємо оцінку

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\bar{Q}^p)} \le nH_1C^nA \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_{jk}| \exp(\delta |k|^{N-n+1}) = nH_1C^nA \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{A_\delta^{N-n+1}(\Omega_{2\pi}^p)},$$

де $A = A(\nu,\alpha,N) > 0$, з якої випливає доведення теореми.

Зауваження 2. За умов теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) належить простору $C^n([0,T], A_{\delta_1}^{N-n+1}(\Omega_{2\pi}^p))$, $\delta_1 < \delta - (H + nC)T$.

З'ясуємо, коли виконується умова (15). Позначимо через $\vec{A} = (z_1,\ldots,z_{2\sigma})$ вектор, складений із дійсних та уявних частин коефіцієнтів A_s, а через $\vec{b}_j = (y_{1j},\ldots,y_{2\tau j})$ – вектор, складений із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $b_{l,j}$, $j = 1,\ldots, n$, де σ – число розв'язків $(s_0,s_1,\ldots,s_p) \in Z_+^{p+1}$ нерівностей $|s| \le N$, $s_0 < n$, а τ – число розв'язків $(l_0,l_1,\ldots,l_p) \in Z_+^{p+1}$ нерівностей $|l| \le N-1$, $l_0 < n$.

Лема 1. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\sigma}$) векторів $\vec{A}$ нерівність

$$\prod_{1\le r<q\le n} |\lambda_q(k) - \lambda_r(k)| > |k|^{-(p-N)(n-1)/2-\varepsilon_1/2}, \qquad 0<\varepsilon_1<1, \qquad (19)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^p$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.5 із [4, розд.2] і належить Б. О. Сализі [2].

Лема 2. Для майже кожного (стосовно міри Лебега в $R^{2\tau}$) вектора $\vec{b}_j$, нерівність

$$\left| \sum_{\substack{|l|\le N-1 \\ l_0<n}} b_{l,j}(ik_1)^{l_1} \ldots (ik_p)^{l_p} (\lambda_j(k))^{l_0} \right| > |k|^{-p-\varepsilon_1/(2n)}, \qquad 0 < \varepsilon_1 < 1, \qquad (20)$$

де $j = 1,\ldots,n$, справджується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^p$.

Доведення. Зафіксуємо j, $1 \le j \le n$. Позначимо через M множину тих векторів $\vec{b}_j$, що належать деякому 2τ – вимірному паралелепіпеду $P_{2\tau} = [\alpha_1, \beta_1]\times P_{2\tau-1}$, для яких нерівність

$$\left| \sum_{\substack{|l|\le N-1 \\ l_0<n}} b_{l,j}(ik_1)^{l_1}\ldots(ik_p)^{l_p}(\lambda_j(k))^{l_0} \right| < |k|^{-p-\varepsilon_1/(2n)} \qquad (21)$$

має безмежне число розв'язків $k\in Z^p$. Зафіксуємо вектор k та вектор $\vec{b}'_j = (y_{2j}, y_{3j}, \ldots, y_{2\tau j})$ і припустимо (без обмеження загальності), що $y_{1j} = \mathrm{Re}\ b_{(0),j} \ne 0$. Тоді для $M_k(\vec{b}'_j)$ – множини тих $y_{1j} \in [\alpha_1, \beta_1]$, що задовольняють нерівність (21) при фіксованих k та $\vec{b}'_j$, справджується оцінка

$$\mathrm{mes}\, M_k(\vec{b}'_j) < 2|k|^{-p-\varepsilon_1/(2n)}. \qquad (22)$$

Інтегруючи оцінку (22) по паралелепіпеду $P_{2\tau-1}$, одержуємо, що міра множини M(k) тих векторів $\vec{b}_j$, для яких нерівність (21) виконується при фіксованому k, задовольняє оцінку

$$\mathrm{mes}\, M(k) < 2V|k|^{-p-\varepsilon_1/(2n)},$$

де V – об'єм паралелепіпеда $P_{2\tau-1}$. Оскільки ряд $\sum_{|k|\ge 0} 2V|k|^{-p-\varepsilon_1/(2n)}$ збігається, то з леми 2.1 [4, розд.1] випливає, що mes M = 0, тобто для майже всіх векторів $\vec{b}_j$ нерівність, протилежна до нерівності (21), виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^p$. Враховуючи, що простір $R^{2\tau}$ можна покрити зліченним числом паралелепіпедів $P_{2\tau}$, одержуємо доведення леми.

Побудуємо функції $g_j(k,\vec{t})$, $j = 1,\ldots, \mu(n)$, $\mu(n) = n(n-1)/2$, наступним чином (див. схему доведення теореми 6 із [5]):

$$g_r(k,\vec{t}) = \sum_{j=r}^{n} \prod_{s=1}^{r-1} (\lambda_j(k) - \lambda_s(k)) S_{n,j}(k) \exp((\lambda_j(k) - \lambda_r(k))t_n), \qquad (23)$$

де $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $S_{m,j}(k) = \sum\limits_{|l|\le N-1, l_0<n} b_{l,m}(ik_1)^{l_1}\ldots(ik_p)^{l_p}(\lambda_j(k))^{l_0}$, $m, j = 1,\ldots,n$, $A_{n,j}$ – алгебраїчне доповнення елемента $S_{n,j}(k)\exp(\lambda_j(k)t_n)$ у визначнику $\Delta(k)$, $r = 1,2,\ldots,n-1$;

$$g_{n+r-1}(k,\vec{t}) = S_{n,n}(k)\prod_{s=1}^{n-1}[(\lambda_n(k) - \lambda_s(k))\times$$

$$\times \sum_{j=r}^{n-1} \prod_{s=1}^{r-1} (\lambda_j(k) - \lambda_s(k)) S_{n-1,j}(k) \exp((\lambda_j(k) - \lambda_r(k))t_{n-1}) A_{n-1,j}, \quad r = 1,\ldots,n-2;$$

$$g_{\mu(n)+r-3}(k,\hat{t})=\prod_{m=4}^{n}S_{m,m}(k)\prod_{l=4}^{n}\prod_{q=1}^{l-1}(\lambda_l(k)-\lambda_q(k))\times$$

$$\times\sum_{j=r}^{3}\prod_{s=1}^{r-1}(\lambda_j(k)-\lambda_s(k))S_{3,j}(k)\exp((\lambda_j(k)-\lambda_r(k))t_3)A_{3,j},\quad r=1,2;$$

....

$$g_{\mu(n)}(k,\hat{t})=\prod_{m=3}^{n}S_{m,m}(k)\prod_{\substack{1\le r<s\le n\\ s\ne 2}}^{l-1}(\lambda_s(k)-\lambda_r(k))(S_{1,1}(k)S_{2,2}(k)\times$$

$$\times\exp((\lambda_2(k)-\lambda_1(k))t_2+\lambda_1(k)t_1)-S_{1,2}(k)S_{2,1}(k)\exp(\lambda_2(k)t_1)),\quad (24)$$

де $A_{r-1,j}$ – алгебраїчне доповнення елемента $S_{r-1,j}(k)\exp(\lambda_j(k)t_{r-1})$ у визначнику $A_{r,r}$, $r=n,n-1,\dots,4$.

Із (24) знаходимо, що

$$\frac{\partial g_{\mu(n)}(k,\hat{t})}{\partial t_2}=B(k)\prod_{m=1}^{n}S_{m,m}(k)\exp((\lambda_2(k)-\lambda_1(k))t_2+\lambda_1(k)t_1),\quad (25)$$

де $B(k)=\prod_{1\le r<s\le n}(\lambda_s(k)-\lambda_r(k))$.

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\hat{t}$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\tau n}$) векторів $\hat{b}=(y_{11},\dots,y_{2\tau 1},\dots,y_{1n},\dots,y_{2\tau n})$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\sigma}$) векторів $\hat{A}$ умова (15) виконується при $\alpha>(p(n^2+2n-1)+(N-n)(n-1)^2)/2$ і $H=nC$, де C – стала з оцінок (9).

Доведення. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\lambda_1^{(1)}(k)\le\ \le\lambda_2^{(1)}(k)\le\dots\le\lambda_n^{(1)}(k)$. На підставі лем 1 і 2, із (25) одержуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\sigma}$) векторів $\hat{A}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\tau n}$) векторів $\hat{b}$ нерівність

$$\left|\frac{\partial g_{\mu(n)}(k,\hat{t})}{\partial t_2}\right|>|k|^{-\beta-\varepsilon_1}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1),\quad (26)$$

де $\beta=(p-N)(n-1)/2+np$, $0<\varepsilon_1<1$, справджується для всіх (крім скінченного числа) $k\in Z^p$. За нерівністю (26) інтервал $[0,\ T]$ розбивається на підмножини (які, можливо, перетинаються) A_1 і B_1, $A_1\cup B_1=[0,T]$, такі, що

$$(\forall t_2\in A_1)\qquad \left|\mathrm{Re}\frac{\partial g_{\mu(n)}(k,\hat{t})}{\partial t_2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-\varepsilon_1}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1),\quad (27)$$

$$(\forall t_2 \in B_1) \qquad \left|\operatorname{Im}\frac{\partial g_{\mu(n)}(k,\hat{t})}{\partial t_2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-\varepsilon_1}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1). \qquad (28)$$

Покладемо $\varepsilon_j = j\varepsilon/(\mu(n)+1)$, $j=1,\ldots,\mu(n)+1$, $0<\varepsilon<1$. На підставі (27) та леми 2.2 [4, розд.1] для кожного з інтервалів множини A_1 одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}\left\{t_2 : \left|\operatorname{Re} g_{\mu(n)}(k,\hat{t})\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-p-N+n-1-\varepsilon_2}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1)\right\} \le$$
$$\le H_1|k|^{-p-N+n-1-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}.$$

Оскільки функція

$$\exp(-((\lambda_2^{(1)}(k)-\lambda_1^{(1)}(k))t_2+\lambda_1^{(1)}(k)t_1))\operatorname{Re} g_{\mu(n)}(k,t)/\partial t_2 =$$
$$=\operatorname{Re}B(k)\cos((\lambda_2^{(2)}(k)-\lambda_1^{(2)}(k))t_2+\lambda_1^{(2)}(k)t_1)-$$
$$-\operatorname{Im}B(k)\sin((\lambda_2^{(2)}(k)-\lambda_1^{(2)}(k))t_2+\lambda_1^{(2)}(k)t_1)$$

є періодичною за змінною t_2 з періодом $2\pi/\left|\lambda_2^{(2)}(k)-\lambda_1^{(2)}(k)\right|$, то число інтервалів множини A_1 не перевищує такої величини:

$$\left(1+T\left|\lambda_2^{(2)}(k)-\lambda_1^{(2)}(k)\right|\right)/\pi \le H_2|k|^{N-n+1}.$$

Отже,

$$\operatorname{mes}\left\{t_2 \in A_1 : \left|\operatorname{Re} g_{\mu(n)}(k,\hat{t})\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-p-N+n-1-\varepsilon_2}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1)\right\} \le$$
$$\le H_3|k|^{-p-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}, \qquad H_3 = H_1H_2. \qquad (29)$$

Аналогічними міркуваннями з нерівності (28) одержуємо

$$\operatorname{mes}\left\{t_2 \in B_1 : \left|\operatorname{Im} g_{\mu(n)}(k,\hat{t})\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-p-N+n-1-\varepsilon_2}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1)\right\} \le$$
$$\le H_4|k|^{-p-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}. \qquad (30)$$

Із (29) і (30) випливає, що

$$\operatorname{mes}\left\{t_2 \in [0,T] : \left|g_{\mu(n)}(k,\hat{t})\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}|k|^{-\beta-p-N+n-1-\varepsilon_2}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1)\right\} \le$$
$$\le (H_3+H_4)|k|^{-p-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}. \qquad (31)$$

Інтегруючи оцінку (31) в кубі $[0,T]^{n-1}$ за змінними t_1, t_3, ..., t_n, отримуємо

$$\operatorname{mes}\{t_2 \in [0,T]^n : \left|g_{\mu(n)}(k,\hat{t})\right| < |k|^{-\beta-p-N+n-1-\varepsilon_2}\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_1)\} \le$$
$$\le H_5|k|^{-p-(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}.$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для $|g_{\mu(n)}(k,\hat{t})|$ до оцінки для $|g_{\mu(n)-1}(k,\hat{t})|$ і т. д., знаходимо, що для майже всіх векторів $\hat{A}\in R^{2\sigma}$ і для майже всіх векторів $\hat{b}\in R^{2n\tau}$ нерівність

$$|g_1(k,\hat{t})|<|k|^{-(p(n^2+2n-1)+(N-n)(n-1)^2)/2-\varepsilon}\exp\left(\lambda_1^{(1)}(k)\sum_{j=1}^{n-1}t_j\right)$$

справедлива для множини векторів $t\in[0,T]^n$ (позначимо її M(k)), міра якої задовольняє оцінку)

$$\operatorname{mes}M(k)<H_6|k|^{-p-\varepsilon_1},\qquad H_6>0;\tag{32}$$

при цьому використовується той факт, що кількість інтервалів зміни компоненти $t_s\in[0,T], s=3,4,\ldots,n,$, на яких виконуються нерівності вигляду

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial g_r(k,\hat{t})}{\partial t_s}\right|>\frac{l(k)}{\sqrt{2}},\qquad r=1,\ldots,\mu(n)-1,$$

або

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial g_r(k,\hat{t})}{\partial t_s}\right|>\frac{l(k)}{\sqrt{2}},\qquad r=1,\ldots\mu(n)-1,$$

при фіксованих k і $t_1,\ldots, t_{s-1}, t_{s+1},\ldots, t_n$, не перевищує $L|k|^{N-n+1}, L>0$. Доведення цього твердження проводиться за схемою доведення аналогічного факту в теоремі 6 із [5].

Підсумовуючи оцінку (32) за всіма $k\in Z^p$, одержимо, що

$$\sum_{|k|\geq 0}\operatorname{mes}M(k)<H_6\sum_{|k|>0}|k|^{-p-\varepsilon_1}.\tag{33}$$

Оскільки ряд у правій частині нерівності (33) збігається, то, на основі леми 2.1 [4, розд.1], одержуємо, що для майже всіх векторів $\hat{t}\in[0,T]^n$, для майже всіх векторів $\hat{A}\in R^{2\sigma}$ і для майже всіх векторів $\hat{b}\in R^{2\tau n}$ оцінка

$$|g_1(k,\hat{t})|\geq|k|^{-(p(n^2+2n-1)+(N-n)(n-1)^2)/2-\varepsilon}\exp\left(\lambda_1^{(1)}(k)\sum_{j=1}^{n-1}t_j\right)\tag{34}$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) $k\in Z^p$.

Оскільки, $|\Delta(k)|=\exp(\lambda_1^{(1)}(k)t_n)|g_1(k,\hat{t})|$, то, на підставі (9) і (34), отримуємо доведення теореми.

5. В цьому пункті розглянемо частинний випадок задачі (1), (2), коли рівняння (1) є коректним за Петровським, тобто коли справджуються умови

$$\lambda_j^{(1)}(k)<M,\qquad k\in Z^p,\ j=1,\ldots,n,\ M\in R.\tag{35}$$

Теорема 4. Нехай справджуються умови (13), (35), і нехай $\varphi_j \in A_{\delta_2}^{N-n+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $j=1,\dots,n$, $\delta_2 > nCT$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t}$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\sigma}$) векторів $\vec{A}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\tau n}$) векторів $\vec{b}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)$, який неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, j=1,…, n.

Доведення. За умов (35) вірні такі нерівності (див. оцінки (16)):

$$|\Delta_{jm}(k)| \le C_1 |k|^{\nu}, \qquad j, m = 1, \dots, n, \tag{36}$$

де $C_1 = C_1(n, N, p, C, M) > 0$. На підставі формули (14), теореми 3 та нерівностей (9), (18), (35), (36) отримуємо, що для майже всіх векторів $\vec{t}$ та для майже всіх векторів $\vec{A}$ і $\vec{b}$ справедлива оцінка

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)} \le C_2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_{jk}| \, |k|^{\mu+\varepsilon} \exp(nC|k|^{N-n+1}T) \le C_3 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{A_{\delta_2}^{N-n+1}(\Omega_{2\pi}^p)},$$

в якій $\mu = \nu + (p(n^2+2n-1) + (N-n)(n-1)^2)/2 + N(n+1) - n(n-1)$, $C_3 = C_3(M, C, C_1, N, n, p, \varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$. З останньої нерівності випливає доведення теореми.

Теорема 5. Нехай справджуються умови (35) і умови

$$\lambda_j^{(1)}(k) > -\gamma \ln|k| \qquad k \in Z^p \setminus \{(0)\}, \; j=1,\dots,n, \; \gamma > 0. \tag{37}$$

Тоді для майже всіх векторів $\vec{t} \in R^n$, для майже всіх векторів $\vec{A} \in R^{2\sigma}$ і для майже всіх векторів $\vec{b} \in R^{2\tau n}$ нерівність

$$|\Delta(k)| \ge |k|^{-\omega}, \tag{38}$$

виконується при $\omega > (p(n^2+2n-1) + (N-n)(n-1)^2 + n(n+1)\gamma T)/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^p$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3; при цьому використовується той факт, що, за умов (37), вірні оцінки

$$\exp(\lambda_j^{(1)}(k)T) > |k|^{-\gamma T}, \qquad k \in Z^p \setminus \{(0)\}, \; j=1,\dots,n.$$

Теорема 6. Нехай справджуються умови (13), (35) і (37). Якщо $\varphi_j \in C^r(\Omega_{2\pi}^p)$, $j=1,\dots,n$, $r = [\nu+\omega] + p + 2N + 1$, де ν, ω – сталі з нерівностей (16), (38) відповідно, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t}$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\sigma}$) векторів $\vec{A}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $R^{2\tau n}$) векторів $\vec{b}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить простору $C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)$ і неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, j = 1, …, n.

Доведення. За умов теореми з (5) отримуємо, що

$$|\varphi_{jk}| \le C_4 |k|^{-r} \|\varphi_j\|_{C^r(\Omega_{2\pi}^p)}, \qquad j=1, \dots, n, \quad C_4 > 0. \tag{39}$$

На підставі (9), (14), (35)-(39) одержуємо, що нерівність

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\bar{Q}^p)} \le C_5 \sum_{|k|\ge 0} |k|^{\tau-r} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_{jk}\|_{C^r(\Omega^p_{2\pi})} = C_5 \sum_{|k|\ge 0} |k|^{-p-\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{C^r(\Omega^p_{2\pi})}, \quad (40)$$

де

$$C_5 = C_5(M, C, C_1, C_4) > 0, \;\; \tau = \nu + (p(n^2 + 2n - 1) + (N - n)(n - 1)^2 + $$
$$+ n(n+1)\gamma T)/2 + 2N + \varepsilon, \;\; \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon - \{\nu + \omega\}, \;\; 0 < \varepsilon < 1 - \{\nu + \omega\},$$

справджується для для майже всіх векторів $\hat{t}$ та для майже всіх векторів $\hat{A}$ і $\bar{b}$. Зі збіжності ряду у правій частині нерівності (40) випливає доведення теореми.

Conditions are established of uniqueness solvability of the problem with multipoint conditions on chosen variable t and with conditions of periodicity on space coordinates for high order linear typeless equations with constant coefficients, nonisotropic rather derivatives on a variables $x_1, \ldots, x_p$. The new metric theorems are proved on the lower bounds of small denominators, which appear in the problem.

1. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. - К.: Наук. Думка. - 1984. 284с.
2. Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для уравнений, корректных по И.Г.Петровкому // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып.17. – С. 8-13.
3. Пташник Б. Й., Силюга Л. П. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. НАН України. – 1996. – №3. – С. 10-14.
4. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Київ: Наук. думка, 1984. – 264с.
5. Василишин П. Б., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1998. – 50. – №9. – С. 1155-1168.

Г. П. Малицька

ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння Колмогорова високого порядку

В цій статті побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для класу рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією в інерціальній частині, зокрема, мають довільну кількість груп змінних, за якими є виродження, а за просторовими змінними містять похідні порядку, не вищого $2b$, $b \ge 1$.