П.Б. Василишин, Б.Й. Пташник, Л.П. Силюга

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗТИПНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для безтипних систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за всіма іншими координатами. Встановлено умови однозначної розв'язності та доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

1. Вступ. Багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь вивчались у різних аспектах багатьма авторами (див., наприклад, [1-7,18,19]). Для систем лінійних та нелінійних рівнянь першого порядку (за змінною t) такі задачі вивчались у роботах [8-12], а задачі з локальними багатоточковими умовами для систем лінійних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами вивчались у працях [13-15]. У даній статті, яка є розвитком робіт [14,15], вперше досліджено коректність задач із багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами типу умов Діріхле за просторовими координатами для безтипних систем диференціальних рівнянь зі змінними за коефіцієнтами. Ці задачі є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників, для вирішення яких використано метричний підхід.

Введемо позначення та функціональні простори, які використовуватимемо при дослідженні розглядуваних у роботі задач.

$D=\{(t,x): t\in(0,T),\ x\in G\}$, де $G-$ обмежена однозв'язна область із $\mathbb{R}^p$.

$C^{q+\mu}(\bar{G})-$ клас функцій $y(x)$, що мають в області $\bar{G}$ неперервні похідні до порядку q включно, причому похідні q-го порядку задовольняють умову Гельдера з показником μ, $0<\mu<1$.

$A^{q+\mu}$ – клас замкнених областей $\bar{G}\subset\mathbb{R}^p$ таких, що функції, які задають у локальних координатах рівняння їх межових поверхонь, належать класу $C^{q+\mu}$.

$C^r(\bar{D})-$ банахів простір функцій $u(t,x)$, неперервних разом зі всіма похідними до порядку r включно в області $\bar{D}$,

$$\|u\|_{C^r(\bar{D})}=\sum_{|s|\le r}\max_{(t,x)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|$$

$C^{(0,m)}(\bar{D})$ – банахів простір функцій $g(t,x)$, неперервних за змінною t та m разів неперервно диференційовних за змінними $x_1,\dots,x_p$,

$$\|g\|_{C^{(0,m)}(\bar{D})} = \sum_{|s|\le m} \max_{(t,x)\in\bar{D}} \left| \frac{\partial^{|s|} g(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \right|$$

L – лінійний самоспряжений еліптичний диференціальний вираз з дійснозначними достатньо гладкими коефіцієнтами, заданий формулою

$$L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x), \tag{1}$$

де $h_{ij}(x) > h_0 > 0$, $i,j = 1,\dots,p$, $q(x) \ge 0$;

$\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ – множина власних значень задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)|_{\partial G} = 0, \tag{2}$$

які є дійсними і різними; за умов

$$\bar{G} \in A^{2\sigma+\nu}, \quad h_{ij}(x) \in C^{2\sigma-1+\nu}(\bar{G}), \quad i,j = 1,\dots,p, \quad q(x) \in C^{2\sigma-2+\nu}(\bar{G}),$$
$$\sigma \in \mathbb{N}, \quad 0 < \nu < 1,$$

власні функції $X_k(x), k \in \mathbb{N}$, задачі (2) належать простору $C^{2\sigma}(\bar{G})$ і утворюють повну ортонормовану систему в просторі $L_2(G)$; при цьому справджуються такі асимптотичні оцінки [16,17]:

$$C_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le C_1 k^{2/p}, \qquad 0 < C_0 \le C_1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\max_{x\in\bar{G}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \right| \le C_2 \lambda_k^{p/4+|s|/2}, \qquad C_2 = C_2(|s|), \quad |s| = 0,1,\dots,2\sigma. \tag{4}$$

$B_\delta^\beta(G) =$

$$= \left\{ \varphi \in L_2(G) : \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),\ \|\varphi\|_{B_\delta^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp(\delta\lambda_k^\beta) < \infty \right\}, \quad \delta,\ \beta > 0.$$

$C([0,T], B_\delta^\beta(G))$ – простір функцій $w(t,x)$, визначених і неперервних в області $\bar{D}$, які для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ належать простору $B_\delta^\beta(G)$,

$$\|w\|_{C([0,T],B_\delta^\beta(G))} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t\in[0,T]} |w_k(t)| \exp(\delta\lambda_k^\beta),$$

де

$$w_k(t) = \int_G w(t,x) X_k(x)\,dx.$$

$\bar{C}^r(\bar{D}), \bar{C}^{(0,m)}(\bar{D}), \bar{B}_\delta^\beta(G), \bar{C}([0,T], \bar{B}_\delta^\beta(G))$ - відповідні простори вектор-функцій.

2. Системи рівнянь другого порядку.

В області D розглянемо задачу

$$Nu(t,x) \equiv \left(E\frac{\partial^2}{\partial t^2} - BL\right)u(t,x) = f(t,x), \tag{5}$$

$$u(t_1,x) = \varphi_1(x), \quad u(t_2,x) = \varphi_2(x), \qquad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \tag{6}$$

$$u(t,x)|_{\partial G} = 0, \tag{7}$$

де $E-$ одинична матриця, $B = \|b_{rq}\|_{r,q=1}^{2}$ – невироджена матриця зі сталими комплексними елементами,

$$u(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x), u_2(t,x)), \quad f(t,x) = \operatorname{col}(f_1(t,x), f_2(t,x)),$$
$$\varphi_j(x) = \operatorname{col}(\varphi_{j1}(x), \varphi_{j2}(x)), \qquad j = 1,2.$$

Припустимо, що $f_j(t,x) \in C([0,T], L_2(G))$, $\varphi_{jq}(x) \in L_2(G)$, $j,q = 1,2$. Тоді справедливі розвинення

$$f_j(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{kj}(t) X_k(x), \quad \varphi_{jq}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{kjq} X_k(x), \qquad j,q = 1,2, \tag{8}$$

де

$$f_{kj}(t) = \int_G f_j(t,x) X_k(x) dx, \qquad j = 1,2, \tag{9}$$

$$\varphi_{kjq}(t) = \int_G \varphi_{jq}(x) X_k(x) dx, \qquad j,q = 1,2. \tag{10}$$

Розв'язок задачі (5)-(7) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{11}$$

в якому кожна з вектор-функцій $u_k(t) = \operatorname{col}(u_{k1}(t), u_{k2}(t))$, $k \in \mathbb{N}$, буде розв'язком наступної двоточкової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$N(\lambda_k) u_k(t) \equiv \left(E\frac{d^2}{dt^2} + B\lambda_k\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{12}$$

$$u_k(t_1) = \varphi_{k1}, \quad u_k(t_2) = \varphi_{k2}, \tag{13}$$

де

$$\varphi_{kj} = \operatorname{col}(\varphi_{kj1}, \varphi_{kj2}), \ j = 1,2, \quad f_k(t) = \operatorname{col}(f_{k1}(t), f_{k2}(t)).$$

Розв'язок задачі (12), (13) має вигляд

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

де вектор-функції $w_k(t) = \operatorname{col}(w_{k1}(t), w_{k2}(t))$, $v_k(t) = \operatorname{col}(v_{k1}(t), v_{k2}(t))$ є розв'язками, відповідно, таких задач:

$$N(\lambda_k) w_k(t) = 0, \quad w_k(t_1) = \varphi_{k1}, \quad w_k(t_2) = \varphi_{k2}, \tag{15}$$

$$N(\lambda_k) v_k(t) = f_k(t), \quad v_k(t_1) = 0, \quad v_k(t_2) = 0. \tag{16}$$

Нехай $\gamma_j = \gamma_j^{(1)} + i\gamma_j^{(2)}$, $\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)} \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,-$ власні числа матриці B, які є відмінними від нуля і зображаються формулами

$$\gamma_1 = b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}},$$
$$\gamma_2 = b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}.$$

Припустимо, що $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Тоді фундаментальна система розв'язків рівняння $N(\lambda_k) w_k(t) = 0$ визначається формулами

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} g(\gamma_1)\exp(\mu_1 t) & g(\gamma_2)\exp(\mu_2 t) \\ \exp(\mu_1 t) & \exp(\mu_2 t) \end{pmatrix},$$

$$y_2(t) = \begin{vmatrix} g(\gamma_1)\exp(-\mu_1 t) & g(\gamma_2)\exp(-\mu_2 t) \\ \exp(-\mu_1 t) & \exp(-\mu_2 t) \end{vmatrix},$$

де

$$g(\gamma) = (\gamma - b_{22} + b_{12})/(\gamma - b_{11} + b_{21}),$$

$\pm\mu_j \equiv \pm\mu_j(\lambda_k)$, $j = 1,2,$ – корені характеристичного рівняння

$$\det\|E\mu^2 + B\lambda_k\| = 0,$$

$$\mu_j(\lambda_k) = i\sqrt{\lambda_k|\gamma_j|}\,(\cos(\theta_j/2) + i\sin(\theta_j/2)), \qquad \theta_j = \arg\gamma_j,\ j = 1,2. \tag{17}$$

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ компоненти розв'язку задачі (15) зображаються формулами

$$\left.\begin{aligned} w_{k1}(t) &= \sum_{j=1}^{2}(C_{kj}g(\gamma_j)\exp(\mu_j t) + C_{k2+j}g(\gamma_j)\exp(-\mu_j t)), \\ w_{k2}(t) &= \sum_{j=1}^{2}(C_{kj}\exp(\mu_j t) + C_{k2+j}\exp(-\mu_j t)), \end{aligned}\right| \tag{18}$$

де коефіцієнти C_{km}, $m = 1,2,3,4$, визначаються зі системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2}(C_{kj}g(\gamma_j)\exp(\mu_j t_q) + C_{k2+j}g(\gamma_j)\exp(-\mu_j t_q)) &= \varphi_{kq1},\quad q = 1,2, \\ \sum_{j=1}^{2}(C_{kj}\exp(\mu_j t_q) + C_{k2+j}\exp(-\mu_j t_q)) &= \varphi_{kq2},\quad q = 1,2. \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Визначник системи (19) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (g(\gamma_1) - g(\gamma_2))^2\prod_{j=1}^{2}(\exp(-\mu_j(t_2 - t_1)) - \exp(\mu_j(t_2 - t_1))).$$

Враховуючи формули для γ_1, γ_2, $g(\gamma)$ маємо, що $g(\gamma_1) - g(\gamma_2) \neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (5)-(7) у просторі $C^2(\bar{D})$ необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\lambda_k \in \Lambda\ \ \forall l \in \mathbf{Z}) \qquad \gamma_j(t_2 - t_1)^2\lambda_k \neq \pi^2 l^2,\ j = 1,2. \tag{20}$$

Доведення ***Необхідність.*** Якщо для деяких $\lambda_k = \lambda_{k_0} \in \Lambda$ і $l = l_0 \in \mathbf{Z}$ не виконується хоча б одна з умов (20), то $\Delta(\lambda_{k_0}) = 0$ та існують нетривіальні розв'язки $w_{k_0}(t)$ однорідної задачі, що відповідає задачі (15) при $\lambda_k = \lambda_{k_0}$, які зображаються формулами (18), де $C_{k_0 m}$, $m = 1,2,3,4,$ – розв'язок при $\lambda_k = \lambda_{k_0}$ системи однорідних рівнянь, яка відповідає системі (19). Тоді відповідна до (5)-(7) однорідна задача має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t,x) = u_{k_0}(t)X_{k_0}(x)$, а розв'язок неоднорідної задачі (5)-(7), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1(t,x)$ і $u_2(t,x)$ задачі (5)-(7) із простору $C^2(\bar{D})$. Тоді вектор-функція $\tilde{u}(t,x) = (u_1(t,x) - u_2(t,x)) \in C^2(\bar{D})$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (5)-(7) і розвивається в ряд вигляду (11) за системою функцій $\{X_k(x)\}$; при цьому векторний ряд для $N\tilde{u}(t,x)$ співпадає із рядом, одержаним шляхом формального застосування оператора N до ряду для вектор-функції $\tilde{u}(t,x)$. Із рівностей Парсеваля для компонент вектор-функцій $N\tilde{u}(t,x), \tilde{u}(t_1,x), \tilde{u}(t_2,x)$ випливає, що кожний з коефіцієнтів Фур'є $\tilde{u}_k(t)$ вектор-функції $\tilde{u}(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (15). Якщо виконуються умови (20), то для всіх $k \in \mathbb{N}$ $\tilde{u}_k(t) = 0$. Тоді з рівностей Парсеваля для компонент вектор-функції $\tilde{u}(t,x)$ та з їх неперервності випливає, що $\tilde{u}(t,x) = 0$, тобто $\tilde{u}_1(t,x) \equiv \tilde{u}_2(t,x)$.

Наслідок 1. *Якщо* $\gamma_j^{(2)} \neq 0$, $j = 1,2$, *то для довільних чисел* t_1, t_2 *задача (5)-(7) не може мати двох різних розв'язків із* $C^2(\bar{D})$.

Наслідок 2. *При* $\gamma_j^{(2)} = 0$, $j = 1,2$, *для єдиності розв'язку задачі (5)-(7) у просторі* $\tilde{C}^2(\bar{D})$ *достатньо, щоб числа* $\gamma_j^{(1)}(t_2 - t_1)^2\lambda_k/\pi^2$, $j = 1,2$, *не були натуральними.*

Припустимо, що справджуються умови (20). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ система рівнянь (19) має єдиний розв'язок, а отже, існує єдиний розв'язок задачі (15); крім того, існує єдина матриця Ґріна $\bar{G}_k(t,\tau)$ однорідної задачі, яка відповідає задачі (16). Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ компоненти $w_{k1}(t)$ та $w_{k2}(t)$ розв'язку задачі (15) мають вигляд

$$\begin{aligned} w_{k1}(t) = {}& (g(\gamma_1) - g(\gamma_2))^{-1} \times \\ &\times((g(\gamma_1)\Phi(\mu_1,t,t_2)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) - g(\gamma_2)\Phi(\mu_2,t,t_2)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k11} + \\ &+g(\gamma_1)g(\gamma_2)(\Phi(\mu_1,t,t_2)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + \Phi(\mu_2,t,t_2)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k12} + \\ &+(g(\gamma_1)\Psi(\mu_1,t,t_1)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + g(\gamma_2)\Psi(\mu_2,t,t_1)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k21} + \\ &+g(\gamma_1)g(\gamma_2)(\Psi(\mu_1,t,t_1)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + \Psi(\mu_2,t,t_1)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k22}), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} w_{k2}(t) = {}& (g(\gamma_1) - g(\gamma_2))^{-1} \times \\ &\times((\Phi(\mu_1,t,t_2)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) - \Phi(\mu_2,t,t_2)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k11} + \\ &+(g(\gamma_2)\Phi(\mu_1,t,t_2)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + g(\gamma_1)\Phi(\mu_2,t,t_2)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k12} + \\ &+(\Psi(\mu_1,t,t_1)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + \Psi(\mu_2,t,t_1)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k21} + \\ &+(g(\gamma_2)\Psi(\mu_1,t,t_1)/\Phi(\mu_1,t_1,t_2) + g(\gamma_1)\Psi(\mu_2,t,t_1)/\Phi(\mu_2,t_1,t_2))\varphi_{k22}), \end{aligned} \tag{22}$$

а розв'язок задачі (16) зображається формулою

$$v_k(t) = \int_0^T \bar{G}_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau, \tag{23}$$

$$\bar{G}_k(t,\tau) = \begin{cases} g_k(t,\tau) - Z(\lambda_k)\Big/\left(4(g(\gamma_1) - g(\gamma_2))\prod\limits_{j=1}^{2}\Phi(\mu_j,t_1,t_2)\right), & 0 < \tau < t_1, \\ g_k(t,\tau) - H(\lambda_k)\Big/\left(4(g(\gamma_1) - g(\gamma_2))\prod\limits_{j=1}^{2}\Phi(\mu_j,t_1,t_2)\right), & t_1 < \tau < t_2, \\ g_k(t,\tau) + H(\lambda_k)\Big/\left(4(g(\gamma_1) - g(\gamma_2))\prod\limits_{j=1}^{2}\Phi(\mu_j,t_1,t_2)\right), & t_2 < \tau < T, \end{cases} \tag{24}$$

$$g_k(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4(g(\gamma_1)-g(\gamma_2))}\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix} g(\gamma_1)\Psi(\mu_1,\tau,t)-g(\gamma_2)\Psi(\mu_2,\tau,t) & g(\gamma_1)g(\gamma_2)(\Psi(\mu_2,\tau,t)-\Psi(\mu_1,\tau,t)) \\ \Psi(\mu_1,\tau,t)-\Psi(\mu_2,\tau,t) & g(\gamma_1)\Psi(\mu_2,\tau,t)-g(\gamma_2)\Psi(\mu_1,\tau,t)\end{matrix}\right\|, \tag{25}$$

$$Z(\lambda_k)\equiv\|z_{ij}(\lambda_k)\|_{i,j=1}^2=$$
$$=\left\|\begin{matrix} g(\gamma_1)R(\lambda_k)-g(\gamma_2)S(\lambda_k) & g(\gamma_1)g(\gamma_2)(S(\lambda_k)-R(\lambda_k)) \\ R(\lambda_k)-S(\lambda_k) & g(\gamma_1)S(\lambda_k)-g(\gamma_2)R(\lambda_k)\end{matrix}\right\|, \tag{26}$$

$$H(\lambda_k)\equiv\|h_{ij}(\lambda_k)\|_{i,j=1}^2=$$
$$=\left\|\begin{matrix} g(\gamma_1)E(\lambda_k)-g(\gamma_2)P(\lambda_k) & g(\gamma_1)g(\gamma_2)(P(\lambda_k)-E(\lambda_k)) \\ E(\lambda_k)-P(\lambda_k) & g(\gamma_1)P(\lambda_k)-g(\gamma_2)E(\lambda_k)\end{matrix}\right\|, \tag{27}$$

$$R(\lambda_k)=\Phi(\mu_2,t_1,t_2)(\Phi(\mu_1,\tau+t_1,t+t_2)-\Phi(\mu_1,\tau+t_2,t+t_1)),$$
$$S(\lambda_k)=\Phi(\mu_1,t_1,t_2)(F(\mu_2,\tau+t_2,t+t_1)-\Phi(\mu_2,\tau+t_1,t+t_2)),$$
$$E(\lambda_k)=\Phi(\mu_2,t_1,t_2)(\Phi(\mu_1,\tau+t_1,t+t_2)+\Phi(\mu_1,\tau+t_2,t+t_1)+$$
$$+2\Phi(\mu_1,t_1+t_2,t+\tau)),$$
$$P(\lambda_k)=\Phi(\mu_1,t_1,t_2)(\Phi(\mu_2,\tau+t_2,t+t_1)+\Phi(\mu_2,\tau+t_1,t+t_2)+$$
$$+2\Phi(\mu_2,t_1+t_2,t+\tau)),$$
$$\Psi(\mu,\xi,\eta)=\exp(-\mu(\eta-\xi))+\exp(\mu(\eta-\xi)),$$
$$\Phi(\mu,\xi,\eta)=\exp(-\mu(\eta-\xi))-\exp(\mu(\eta-\xi)).$$

На підставі формул (11), (14) формальний розв'язок задачі (5)-(7) зображається рядом

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(w_k(t)+v_k(t))X_k(x), \tag{28}$$

де $w_k(t)$ і $v_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, визначаються, відповідно, формулами (21)- (23).

Ряд (28), взагалі, розбіжний, оскільки величини $\Phi(\mu_j,t_1,t_2)$, $j=1,2$, які містяться в знаменниках виразів для функцій $w_k(t)$, $v_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими за модулем для нескінченного числа $\lambda_k\in\Lambda$. Тому питання про існування розв'язку розглядуваної задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Введемо позначення:

$$\alpha_j=\sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\,(t_2-t_1)/\pi,\ \ \beta_j=\sqrt{|\gamma_j|}\,(t_2-t_1)\sin(\theta_j/2),\ \ j=1,2,\ \ \beta=\max(\beta_1,\beta_2).$$

Якщо $\gamma_j^{(2)}\neq 0$, $j=1,2$, то для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ справджуються нерівності

$$|\Phi(\mu_j,t_1,t_2)|\geq 2\beta_j(t_2-t_1)\sqrt{\lambda_k}\,\exp(-\beta\sqrt{\lambda_k}),\qquad j=1,2. \tag{29}$$

За умови, що $\gamma_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2$, на основі нерівності $\sin x>2x/\pi$, яка виконується для всіх $x\in(0,\pi/2)$, одержуємо, що для довільного $\lambda_k\in\Lambda$ справджуються оцінки

$$|\Phi(\mu_j,t_1,t_2)| = 2\left|\sin\left(\sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\,(t_2-t_1)\sqrt{\lambda_k}\right)\right| =$$
$$= 2\left|\sin\left(\left(\sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\,(t_2-t_1)\sqrt{\lambda_k}/\pi - m(k)\right)\pi\right)\right| \geq$$
$$\geq 4a_j k^{1/p}\left|\frac{\sqrt{\lambda_k}}{k^{1/p}} - \frac{m(k)}{a_j k^{1/p}}\right|, \quad j=1,2, \tag{30}$$

де $m(k)\in\mathbf{Z}$ таке, що $|a_j\sqrt{\lambda_k} - m(k)| < 1/2$. Із леми [18] та оцінок (3) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_j, j=1,2,$ нерівності

$$\left|\frac{\sqrt{\lambda_k}}{k^{1/p}} - \frac{m(k)}{a_j k^{1/p}}\right| > \frac{1}{\lambda_k^{(p+1+\varepsilon)/2}}, \qquad j=1,2,\ 0<\varepsilon<1, \tag{31}$$

виконуються для всіх (крім скінченного числа) пар $(\lambda_k;m)$, $\lambda_k\in\Lambda, m\in\mathbf{Z}$.

Теорема 2. *Нехай* $\gamma_q^{(2)}\neq 0, q=1,2$. *Якщо* $f\in \tilde{C}([0,T],\bar{B}_\delta^{1/2}(G))$, $\varphi_j\in\bar{B}_\delta^{1/2}(G), j=1,2,\ \delta>3\beta$, *то для довільних чисел* $t_q\in[0,T]$, $q=1,2$, *існує розв'язок задачі (5)-(7) із простору* $\tilde{C}^2(\bar{D})$, *який неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *та* $f(t,x)$.

Доведення. Із (26) і (27) випливає, що для довільного $\lambda_k\in\Lambda$ справджуються нерівності

$$\left.\begin{aligned}|z_{ij}(\lambda_k)| &\leq c_1\exp(2\beta\sqrt{\lambda_k}),\\ |h_{ij}(\lambda_k)| &\leq c_2\exp(2\beta\sqrt{\lambda_k}),\end{aligned}\right|\quad i,j=1,2,\ \ c_1,c_2>0. \tag{32}$$

На підставі формул (4), (21)-(29), (32) та елементарної нерівності

$$\delta^\mu \leq A(\mu)\exp(\theta\delta), \qquad A(\mu)>0, \tag{33}$$

яка при $0<\delta<+\infty$ справедлива для довільних $\mu>0$ і $\theta>0$, отримуємо оцінку

$$\|u\|_{\tilde{C}^2(\bar{D})} = \sum_{j=1}^{2}\|u_j\|_{C^2(\bar{D})} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_3|\varphi_{jk}|\lambda_k^{p/4+1/2}\exp(3\beta\sqrt{\lambda_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_4\bar{f}_k\lambda_k^{p/4}\exp(3\beta\sqrt{\lambda_k}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_5|\varphi_{jk}|\exp(\delta\sqrt{\lambda_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_6\bar{f}_k\exp(\delta\sqrt{\lambda_k}) \leq$$
$$\leq c_7\left(\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_j\|_{\bar{B}_\delta^{1/2}(G)} + \|f\|_{\tilde{C}([0,T],\bar{B}_\delta^{1/2}(G))}\right),$$

де

$$\bar{f}_k = \max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)|, \qquad k\in\mathbb{N},$$

$c_j, j=3,4,5,6,7,$ – додатні сталі, що не залежать від λ_k. З останньої нерівності випливає твердження теореми.

Теорема 3. *Нехай* $\gamma_1^{(2)}=0,\ \gamma_2^{(2)}\neq 0$ *(або* $\gamma_1^{(2)}\neq 0,\ \gamma_2^{(2)}=0$*). Якщо* $\varphi_j\in\bar{B}_{\delta_1}^{1/2}(G)$, $j=1,2,\ f\in\tilde{C}([0,T],\bar{B}_{\delta_1}^{1/2}(G))$, $\delta_1>3\beta_2$ *(або* $\varphi_j\in\bar{B}_{\delta_2}^{1/2}(G), j=$

$= 1,2, f \in C([0,T], \bar{B}^{1/2}_{\delta_2}(G)),\ \delta_2 > 3\beta_1)$), *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* a_1 *і довільного фіксованого* γ_2 *(або для майже всіх(стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* a_2 *і довільного фіксованого* γ_1*) існує розв'язок задачі (5)-(7) із простору* $\bar{C}^2(\bar{D})$*, який неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ f(t,x)$.

Доведення. При $\gamma_1^{(2)} = 0, \gamma_2^{(1)} \neq 0$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності

$$\left.\begin{array}{l} |z_{ij}(\lambda_k)| \le h_1 \exp(2\beta_2\sqrt{\lambda_k}), \\ |h_{ij}(\lambda_k)| \le h_2 \exp(2\beta_2\sqrt{\lambda_i}), \end{array}\right| \quad i,j = 1,2,\ \ h_1, h_2 > 0. \tag{34}$$

На основі нерівностей (30), (31) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел a_1 і для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ справедлива оцінка

$$|\Phi(\mu_1, t_1, t_2)| > h_3 \lambda_k^{-(p+\varepsilon)/2}, \qquad 0 < \varepsilon < 1,\ \ h_3 > 0. \tag{35}$$

На підставі формул (21)-(28) та нерівностей (4), (33), (34), (35), одержуємо, що для майже всіх чисел α_1 справджується нерівність

$$\|u\|_{\bar{C}^2(\bar{D})} \le h_4\left(\sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j\|_{B^{1/2}_{\alpha_1}} + \|f\|_{C([0,T], B^{1/2}_{\lambda_1})}\right), \qquad h_4 > 0,$$

з якої випливає твердження теореми при $\gamma_1^{(2)} = 0, \gamma_2^{(2)} \neq 0$. У випадку, коли $\gamma_1^{(2)} \neq 0, \gamma_2^{(2)} = 0$, доведення теореми проводиться аналогічно.

Теорема 4. *Нехай* $\gamma_j \in \mathbb{R}, j = 1,2$. *Якщо функції* $\varphi_j(x), j = 1,2,$ *і* $f(t,x)$ *задовольняють умови*

$$\varphi_j \in \bar{C}^{4p+2}(\bar{G}), \qquad L^m\varphi_j(x)|_{\partial G} = 0, \qquad j = 1,2,\ m = 0,1,\dots,2p, \tag{36}$$

$$f \in \bar{C}^{(0,4p+2)}(\bar{D}), \quad L^m f(t,x)|_{\partial G} = 0, \qquad j = 1,2,\ m = 0,1,\dots,2p, \tag{37}$$

то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$*) чисел* $a_j, j = 1,2$, *існує розв'язок задачі (5)-(7) із простору* $\bar{C}^2(\bar{D})$*, який неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ f(t,x)$.

Доведення. Якщо функції $\varphi_j(x), j = 1,2,$ і $f(t,x)$ задовольняють умови теореми, то на підставі формул (9), (10) одержуємо нерівності

$$|\varphi_{kjq}| \le M_1 \lambda_k^{-7p/4-1} \|\varphi_{jq}\|_{C^{4p+2}(\bar{G})}, \qquad j,q = 1,2. \tag{38}$$

$$\max_{0\le t\le T} |f_{kj}(t)| \le M_2 \lambda_k^{-7p/4-1} \|f_j\|_{C^{(0,4p+2)}(\bar{D})}, \qquad j = 1,2. \tag{39}$$

Із формул (21)-(28) на основі оцінок (3), (4), (30), (31), (38), (39) отримуємо, що для майже всіх чисел $a_j, j = 1,2$, справедлива нерівність

$$\|u\|_{\bar{C}^2(\bar{D})} \le M_3\left(\|f\|_{\bar{C}^{(0,4p+2)}(\bar{D})} + \sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j\|_{\bar{C}^{4p+2}(\bar{G})}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-(1-\varepsilon)/p},$$

де M_3 – додатна стала, що не залежать від λ_k. Зі збіжності ряду в правій частині отриманої нерівності випливає твердження теореми.

3. Системи рівнянь високого порядку.

У цьому пункті результати п. 2 поширено на системи рівнянь довільного скінченного порядку.

3.1. Випадок простих коренів характеристичного рівняння.

В області D розглянемо задачу

$$\sum_{q_0+2q_1\le n} A_q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{q_0} L^{q_1}u(t,x)=0, \qquad q=(q_0,q_1)\in \mathbf{Z}_+^2, \tag{40}$$

$$M_j u(t,x)=\sum_{r=0}^{n-1} B_r\frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r}=\varphi_j(x),\ j=1,\dots,n,\ \ 0\le t_1<\dots<t_n\le T, \tag{41}$$

$$L^m u(t,x)|_{\partial G}=0,\ m=0,1,\dots,[n/2]-1, \tag{42}$$

де

$$u(t,x)=\mathrm{col}\,(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)),$$

$$\varphi_j(x)=\mathrm{col}\,(\varphi_{j1}(x),\dots,\varphi_{jm}(x)),\ \ j=1,\dots,n,$$

$A_q=\|a_q^{ij}\|_{i,j=1}^{m}$, $B_r=\|b_r^{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ – квадратні матриці зі сталими комплексними елементами, $\det A_{(n,0)}\ne 0$. Припустимо, що

$$\bar G\in A^{2[n/2]+\mu},\ h_{ij}(x)\in C^{2[n/2]-1+\mu}(\bar G),\ i,j=1,\dots,p,\ q(x)\in C^{2[n/2]-2+\mu}(\bar G).$$

Нехай $\varphi_j(x)\in \tilde L_2(G)$, $j=1,\dots n$. Тоді

$$\varphi_j(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{kj}X_k(x),\quad \varphi_{kj}=\mathrm{col}\,(\varphi_{kj1},\dots,\varphi_{kjm}),\ j=1,\dots,n,$$

де

$$\varphi_{kjq}=\int_G \varphi_{jq}(x)X_k(x)dx,\ \ j=1,\dots,n,\ q=1,\dots,m.$$

Розв'язок задачі (40)-(42) шукаємо у вигляді векторного ряду (11). Тоді кожна з вектор-функцій $u_k(t)=\mathrm{col}\,(u_{k1}(t),\dots,u_{km}(t))$, $k\in\mathbf{N}$, визначається відповідно як розв'язок такої багатоточкової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{q_0+2q_1\le n} A_q(-\lambda_k)^{q_1}u_k^{(q_0)}(t)=0, \tag{43}$$

$$M_j u_k(t)=\sum_{r=0}^{n-1} B_r u_k^{(r)}(t_j)=\varphi_{kj},\qquad j=1,\dots,n. \tag{44}$$

Нехай для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ корені $\mu_j\equiv\mu_j(\lambda_k)$, $j=1,\dots,mn$, характеристичного рівняння

$$\det P(\mu,\lambda_k)\equiv\det\left\|\sum_{q_0+2q_1\le n}A_q(-\lambda_k)^{q_1}\mu^{q_0}\right\|=0 \tag{45}$$

є простими і не рівними нулеві. Тоді для кожного μ_j $\mathrm{rang}\,P(\mu_j,\lambda_k)= =m-1, j=1,\dots,mn$, тобто хоча б один із мінорів $(m-1)$-го порядку визначника матриці $P(\mu_j,\lambda_k)$ відмінний від нуля (вважатимемо, що це мінор одного із елементів рядка з номером $l=l(j)$). Фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (43) має вигляд

$$Y_{kj}=h_l(\mu_j)\exp(\mu_j t),\quad j=1,\dots,mn, \tag{46}$$

де $h_l(\mu_j) = \operatorname{col}(h_{l1}(\mu_j), \ldots, h_{lm}(\mu_j))$, а $h_{lr}(\mu_j), r = 1, \ldots, m,$ – мінори елементів рядка з номером $l = l(j)$ визначника матриці $P(\mu_j, \lambda_k)$; ці мінори обчислюються за формулами

$$h_{lr}(\mu_j) = \sum_{\substack{q_0 \le n(m-1) \\ q_1 \le [n/2](m-1)}} F_q^{lr}(-\lambda_k)^{q_1}\mu_j^{q_0}, \quad r = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, mn, \tag{47}$$

$$F_q^{lr} \equiv F_{q_0, q_1}^{lr} = \sum_{\substack{\sum\limits_{\substack{\beta=1, \\ \beta \ne r}}^{m} \sigma_i(\beta) = q_i, \, i=0,1}} \det \left\| a_{\sigma_0(\beta), \sigma_1(\beta)}^{\alpha\beta} \right\|_{\alpha, \beta=1, \alpha \ne l, \beta \ne r}^{m}, \quad r = 1, \ldots, m, \tag{48}$$

де $a_{\sigma_0(\beta), \sigma_1(\beta)}^{\alpha\beta}$, $a = 1, \ldots, m,$ – елементи β-го стовпця матриці A_q, $q = (\sigma_0(\beta), \sigma_1(\beta))$.

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (43), (44) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{kq} h_l(\mu_q) \exp(\mu_q t), \tag{49}$$

де скалярні коефіцієнти C_{kq} визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{mn} \sum_{r=0}^{n-1} B_r \mu_q^r h_l(\mu_q) \exp(\mu_q t_j) C_{kq} = \varphi_{kj}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{50}$$

визначник якої має вигляд

$$\Delta(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{c=1}^{m} b_r^{dc} \mu_q^r h_{lc}(\mu_q) \exp(\mu_q t_j) \right\|, \tag{51}$$
$$j = 1, \ldots, n, q = 1, \ldots, mn, d = 1, \ldots, m.$$

Теорема 5. *Для єдиності розв'язку задачі (40)-(42) у просторі $C^n(\bar{D})$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \qquad \Delta(\lambda_k) \ne 0. \tag{52}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1.

З'ясуємо умови розв'язності задачі (40)-(42). Нехай має місце єдиність розв'язку розглядуваної задачі. Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ коефіцієнти C_{kq}, $q = 1, \ldots, mn$, однозначно визначаються зі системи рівнянь (50), а розв'язок задачі (40)-(42) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{mn} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{m} h_l(\mu_q) \varphi_{kjd} \Delta_{dq}^j(\lambda_k)(\Delta(\lambda_k))^{-1} \exp(\mu_q t) X_k(x), \tag{53}$$

де $\Delta_{dq}^j(\lambda_k)$ – алгебричне доповнення у визначнику (51) елемента

$$\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{c=1}^{m} b_r^{dc} \mu_q^r h_{lc}(\mu_q) \exp(\mu_q t_j).$$

Зауважимо, що зі структури рівняння (45) випливають такі оцінки:

$$|\mu_j(\lambda_k)| \le C\sqrt{\lambda_k}, \quad j = 1, \ldots, mn, \; C > 0. \tag{54}$$

Теорема 6. *Нехай справджується умова (52) і нехай існують сталі* $\zeta > 0$ *і* $Q > 0$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq \lambda_k^{-\zeta} \exp(-Q\sqrt{\lambda_k}\, T) \tag{55}$$

Якщо $\varphi_j \in \bar{B}_\delta^{\,2}(G)$, $j = 1,\dots,n$, $\delta > (Q + mnC)T$, *де* C *– стала з оцінок (54), то існує розв'язок задачі (40)-(42) з простору* $C^n(\bar{D})$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Доведення. Враховуючи, що

$$|h_{lr}(\mu_q)| \leq M_1(\sqrt{\lambda_k})^{[n/2](m-1)}, \qquad r = 1,\dots,m,\ M_1 > 0,$$

отримуємо наступні нерівності

$$|\Delta^l_{dq}(\lambda_k)| \leq M_2(\sqrt{\lambda_k})^{[n/2](m-1)(mn-1)} \exp((mn-1)C\sqrt{\lambda_k}\,T),$$

$$j = 1,\dots,n,\ d = 1,\dots,m,\ q = 1,\dots,mn,\ M_2 > 0\ .$$

На підставі цих оцінок, формули (53) та нерівностей (4), (54), (55) одержуємо, що

$$\|u\|_{C^n(\bar{D})} \leq M_3 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} |\varphi_{kjr}|(\sqrt{\lambda_k})^{\omega} \exp((Q + mnC)\sqrt{\lambda_k}\,T), \tag{56}$$

де $\omega = [n/2](m-1)mn + n + p/2 + \zeta$, $M_3 = M_3(M_1, M_2, C, m, n) > 0$.

Скориставшись нерівністю (33) при $\theta = \delta - (Q + mnC)T$, із (56) знайдемо, що

$$\|u\|_{C^n(\bar{D})} \leq M_4 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{B_\delta^2}, \qquad M_4 = M_4(M_3, \omega) > 0,$$

звідки випливає твердження теореми.

3.2.Випадок кратних коренів характеристичного рівняння.

Результати п. **3.1** узагальнено на випадок, коли відповідне характеристичне рівняння має кратні корені. Покажемо це на прикладі такої задачі:

$$\left(E\frac{\partial^2}{\partial t^2} - BL\right)^3 u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in D, \tag{57}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \qquad t_j = (j-1)t_0,\ j = 1,\dots,6,\ t_0 = T/5,\ x \in \bar{G}, \tag{58}$$

$$L^m u(t,x)|_{\partial G} = 0, \qquad m = 0,1,2,\ t \in [0,T], \tag{59}$$

де диференціальний вираз L, матриця B та її власні числа γ_j, $j = 1,2,$ - ті ж самі, що і в задачі (5)-(7), $u(t,x) = \mathrm{col}(u_1(t,x), u_2(t,x))$, $\varphi_j(x) = \mathrm{col}(\varphi_{j1}(x), \varphi_{j2}(x))$, $j = 1,\dots,6$.

Припустимо, що $\varphi_{jq}(x) \in L_2(G)$, $j = 1,\dots,6$, $q = 1,2$. Тоді справедливі розвинення

$$\varphi_{jq}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{kjq} X_k(x), \qquad \varphi_{kjq} = \int_G \varphi_{jq}(x) X_k(x)dx, \qquad j = 1,\dots,6,\ q = 1,2.$$

Розв'язок розглядуваної тут задачі шукаємо у вигляді ряду (11), в якому кожна з вектор-функцій $u_k(t) = \mathrm{col}(u_{k1}(t), u_{k2}(t))$, $k \in \mathbb{N}$, визначається як розв'язок задачі

$$\left(E\frac{d^2}{dt^2}+B\lambda_k\right)^3 u_k(t)=0, \tag{60}$$

$$u_k(t_j)=\varphi_{kj},\quad t_j=(j-1)t_0,\quad j=1,\dots,6,\quad t_0=T/5. \tag{61}$$

Характеристичне рівняння

$$\det\|(E\mu^2+B\lambda_k)^3\|=0,$$

яке відповідає рівнянню (60), для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ має чотири різні корені $\pm\mu_j$, $j=1,2$, де μ_j визначаються формулами (17); кратність кожного з цих коренів дорівнює 3.

Для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ компоненти розв'язку $u_k(t)$ задачі (60), (61) зображаються формулами

$$\left.\begin{aligned} u_{k1}(t)&=\sum_{m=1}^{2}\sum_{q=1}^{3}(C_{m,q}(k)g(\gamma_m)\exp(\mu_m t)+C_{2+m,q}(k)g(\gamma_m)\exp(-\mu_m t))t^{q-1},\\ u_{k2}(t)&=\sum_{m=1}^{2}\sum_{q=1}^{3}(C_{m,q}(k)\exp(\mu_m t)+C_{2+m,q}(k)\exp(-\mu_m t))t^{q-1}, \end{aligned}\right| \tag{62}$$

де

$$g(\gamma_m)=\frac{(b_{22}-\gamma_m)^3+b_{11}b_{21}}{b_{12}(b_{11}+b_{22}-3\gamma_m)},\qquad m=1,2,$$

а коефіцієнти $C_{j,q}$, $j=1,2,3,4$, $q=1,2,3$, визначаються зі системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{2}\sum_{q=1}^{3}(C_{m,q}(k)g(\gamma_m)\exp(\mu_m t_j)+C_{2+m,q}(k)g(\gamma_m)\exp(-\mu_m t_j))t_j^{q-1}=\varphi_{kj1},\\ &\sum_{m=1}^{2}\sum_{q=1}^{3}(C_{m,q}(k)\exp(\mu_m t_j)+C_{2+m,q}(k)\exp(-\mu_m t_j))t_j^{q-1}=\varphi_{kj2}. \end{aligned}\right| \tag{63}$$

визначник якої обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=16t_0^{12}(g(\gamma_2)-g(\gamma_1))^6\prod_{m=1}^{2}(\exp(-\mu_m t_0)-\exp(\mu_m t_0))^9.$$

Теорема 7. *Для єдиності розв'язку задачі (57)-(59) у просторі $\tilde{C}^6(\bar{D})$ необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\lambda_k\in\Lambda\ \ \forall l\in\mathbf{Z})\qquad \gamma_j t_0^2\lambda_k\neq\pi^2 l^2,\quad j=1,2. \tag{64}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1.

Наслідок 3. *Якщо $\gamma_j^{(2)}\neq 0$, $j=1,2$, то для довільного фіксованого T задача (57)-(59) не може мати двох різних розв'язків із $\tilde{C}^6(\bar{D})$.*

Наслідок 4. *Якщо $\gamma_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2$, то для єдиності розв'язку задачі (57)-(59) у просторі $\tilde{C}^6(\bar{D})$ достатньо, щоб числа $\gamma_j^{(1)}t_0^2\lambda_k/\pi^2$, $j=$ $=1,2$, не були натуральними.*

Припустимо, що справджуються умови (64). Тоді для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ система рівнянь (63) має єдиний розв'язок, а компоненти розв'язку задачі (60), (61) зображаються формулами

$$u_{k1}(t) = (g(\gamma_2) - g(\gamma_1))\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{6} \frac{t^{q-1}}{t_0^{q-1}(\exp(-\mu_m t_0) - \exp(\mu_m t_0))^{6-q}} \times$$
$$\times(P_q(\mu_m, \varphi_{k11}, \ldots, \varphi_{k61})\exp(\mu_m t) - P_q(-\mu_m, \varphi_{k11}, \ldots, \varphi_{k61})\exp(-\mu_m t)). \quad (65)$$

$$u_{k2}(t) = (g(\gamma_2) - g(\gamma_1))\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{6} \frac{t^{q-1}}{t_0^{q-1}(\exp(-\mu_m t_0) - \exp(\mu_m t_0))^{6-q}} \times$$
$$\times(P_q(\mu_m, \varphi_{k12}, \ldots, \varphi_{k62})\exp(\mu_m t) - P_q(-\mu_m, \varphi_{k12}, \ldots, \varphi_{k62})\exp(-\mu_m t)), \quad (66)$$

де

$$P_1(\mu, \varphi_{k1m}, \ldots, \varphi_{k6m}) = \exp(-3\mu t_0)(\exp(-2\mu t_0) + 10\exp(2\mu t_0) - 5)\varphi_{k1m} -$$
$$-60\varphi_{k2m} + (\exp(-\mu t_0) - \exp(\mu t_0))(30\varphi_{k3m} + 15\varphi_{k5m}) - 10(\exp(-2\mu t_0) +$$
$$+\exp(2\mu t_0) + 4)\varphi_{k4m} - 6\varphi_{k6m};$$
$$P_2(\mu, \varphi_{k1m}, \ldots, \varphi_{k6m}) = -\exp(-3\mu t_0)(\exp(-\mu t_0) + 2\exp(\mu t_0))\varphi_{k1m} +$$
$$+2(\exp(-2\mu t_0) - 4 - 12\exp(2\mu t_0))\varphi_{k2m} + 18(2\exp(\mu t_0) + 3\exp(-\mu t_0))\varphi_{k3m} -$$
$$-2\exp(\mu t_0)(3\exp(-2\mu t_0) + 2\exp(2\mu t_0) + 10)\varphi_{k4m} + (8\exp(-\mu t_0) +$$
$$+7\exp(\mu t_0))\varphi_{k5m} - 3\varphi_{k6m};$$
$$P_3(\mu, \varphi_{k1m}, \ldots, \varphi_{k6m}) = 1/2\exp(-\mu t_0)\varphi_{k1m} - 2\exp(-\mu t_0)(2\exp(-\mu t_0) +$$
$$+3\exp(\mu t_0))\varphi_{k2m} + 1/2\exp(-\mu t_0)(\exp(-2\mu t_0) + 3\exp(2\mu t_0) + 6)\varphi_{k3m} -$$
$$-1/2(\exp(2\mu t_0) + 3\exp(-2\mu t_0) + 6)\varphi_{k4m} + 1/2(3\exp(-\mu t_0) +$$
$$+2\exp(\mu t_0))\varphi_{k5m} - 1/2\varphi_{k6m}.$$

Позначимо:

$$a_j = \sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\, t_0/\pi, \quad \beta_j = \sqrt{|\gamma_j|}\, \sin(\theta_j/2), \quad j = 1,2, \quad \beta = \max(\beta_1, \beta_2).$$

Якщо $\gamma_j^{(2)} \neq 0$, $j = 1,2$, то для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ і довільного фіксованого числа t_0 справджуються нерівності

$$|\exp(-\mu_j t_0) - \exp(\mu_j t_0)| > 2\beta_j t_0\sqrt{\lambda_k}\, \exp(-\beta\sqrt{\lambda_k}\, t_0), \qquad j = 1,2. \quad (67)$$

При $\gamma_j^{(2)} = 0$, $j = 1,2$, для довільного $\lambda_k \in \Lambda$ справедливі оцінки

$$|\exp(-\mu_j t_0) - \exp(\mu_j t_0)| = 2\left|\sin\left(\sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\, t_0\sqrt{\lambda_k}\right)\right| =$$
$$= 2\left|\sin\left(\left(\sqrt{|\gamma_j^{(1)}|}\, t_0\sqrt{\lambda_k}/\pi - m(k)\right)\pi\right)\right| >$$
$$\geq 4a_j k^{1/n}\left|\frac{\sqrt{\lambda_k}}{k^{1/n}} - \frac{m(k)}{a_j k^{1/n}}\right|, \qquad j = 1,2. \quad (68)$$

де $m(k) \in \mathbf{Z}$ таке, що $|a_j\sqrt{\lambda_k} - m(k)| < 1/2$. Із нерівностей (68) та (31) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел a_j, $j = 1,2$, оцінки

$$|\exp(-\mu_j t_0) - \exp(\mu_j t_0)| > C_1 k^{-(1+\varepsilon)/n}, \qquad j = 1,2, \; C_1 > 0, \; 0 < \varepsilon < 1, \quad (69)$$

справджуються для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 8. *Нехай* $\gamma_q^{(2)} \neq 0$, $q = 1,2$, *і нехай* $\varphi_j \in B^{\delta}(G)$, $j = 1$, 6, $\delta > 11\beta T$. *Тоді для довільного фіксованого числа* T *існує розв'язок* *задачі (57)-(59) із простору $C^{0}(\bar{D})$, який неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_j(x), j = 1,\dots,6.$

Доведення. Якщо $\gamma_q^{(2)} \neq 0,\ q = 1,2$, то з формул (11), (65), (66) і нерівностей (4), (33), (67) отримуємо оцінку

$$\|u\|_{C^0(\bar{D})} = \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{C^0(\bar{D})} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6} C_2 |\varphi_{jk}| \lambda_k^{p+4-9} \exp(11\beta T\sqrt{\lambda_k}) <$$

$$< C_3 \sum_{j=1}^{6} \|\varphi_j\|_{B}, \qquad C_2, C_3 > 0,$$

з якої випливає твердження теореми.

Теорема 9. *Нехай* $\gamma_1^{(2)} = 0, \gamma_2^{(2)} \neq 0$ *(або* $\gamma_1^{(2)} \neq 0, \gamma_2^{(2)} = 0$*) і нехай* $\varphi_j \in B_{\delta_2}^{1,2}(G),\ j = 1,\dots,6, \delta_2 > 11\beta_2 T$ *(або* $\varphi_j \in B_{\delta_1}^{1,2}(G), j = 1,2, \delta_1 > 11\beta_1 T$*). Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* α_1 *і довільного фіксованого* γ_2 *(або для майже всіх(стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* α_2 *і довільного фіксованого* γ_1*) існує розв'язок задачі (57)-(59), який належить простору* $C^0(\bar{D})$ *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_j(x),\ j = 1,\dots,6.$

Доведення. Якщо $\gamma_1^{(2)} = 0,\ \gamma_2^{(2)} \neq 0$, то з формул (11), (65), (66) та нерівностей (4), (33), (67), (69) отримуємо, що для майже всіх чисел α_1 справджується така оцінка:

$$\|u\|_{C^0(\bar{D})} = \sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{C^0(\bar{D})} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6} C_4 |\varphi_{jk}| \lambda_k^{\dots} \exp(11\beta_2 T\sqrt{\lambda_k}) \leq$$

$$\leq C_5 \sum_{j=1}^{6} \|\varphi_j\|_{B_{\delta_2}^{1,2}(G)}, \qquad C_4, C_5 > 0.$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми при $\gamma_1^{(2)} = 0, \gamma_2^{(2)} \neq 0$. Якщо ж $\gamma_1^{(2)} \neq 0, \gamma_2^{(2)} = 0$, то доведення теореми проводиться аналогічно.

Теорема 10. *Нехай* $\gamma_j \in \mathbb{R}, j = 1,2$. *Якщо функції* $\varphi_j(x), j = 1,\dots,6$ *задовольняють умови*

$$\varphi_j \in C^{2\sigma}(\bar{G}), \qquad L^m \varphi_j(x)|_{\partial G} = 0, \quad j = 1,\dots,6,\ m = 0,1,\dots,\sigma-1, \tag{70}$$

де $\sigma = [13(p+2)/4] + 1$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\alpha_j,\ j = 1,2$, *існує розв'язок задачі (57) - (59) із простору* $C^0(\bar{D})$, *який неперервно залежить від вектор-функцій* $\varphi_j(x),\ j = 1,\dots,6.$

Доведення. За умов (70) справджуються нерівності

$$|\varphi_{jqk}| \leq C_6 \lambda_k^{-\sigma} \|\varphi_{jq}\|_{C^{2\sigma}(\bar{G})}, \qquad j = 1,\dots,6,\ q = 1,2,\ C_6 > 0. \tag{71}$$

На підставі формул (11), (65), (66) та оцінок (3), (4), (69), (71) одержуємо, що для майже всіх чисел $\alpha_j,\ j = 1,2$, виконується нерівність

$$\|u\|_{C^0(\bar{D})} \leq C_7 \sum_{j=1}^{2} \dots \sum_{k}^{\infty} k^{\dots} \qquad C_7 > 0,\ 0 < \varepsilon < 1 - \{\sigma\}.$$

Зі збіжності ряду у правій частині цієї нерівності випливає твердження теореми.

For the typeless systems of differential equations with coefficients we investigate the correctness of the problem with multipoint conditions on chosen variable and with conditions of 2π-periodicity on all other coordinates. The conditions of univalent solvability are established and the metric theorems are proved for lower bounds of small denominators which appear when constructing solutions of the problems.

[1]. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - К.: Наукова думка, 1984.-264с.

[2]. Абдо С. А., Юрчук Н. И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения.-1985.-**21**, №3.-С. 417-425.

[3]. Абдо С. А., Юрчук Н. И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений // Дифференц. уравнения.-1985.-**21**, №5.- С. 806-815.

[4]. Валицкий Ю. Н. О корректности многоточечной задачи для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами // ДАН СССР.-1986.- **286**, №5.-С. 1041-1043.

[5]. Валицкий Ю. Н. Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн.-1988.-**29**, №4.-С. 44-53.

[6]. Валицкий Ю. Н. К вопросу об условной корректности многоточечной задачи // Сиб. мат. журн.-1989.-**30**, №4.-С. 40-43.

[7]. Валицкий Ю. Н. Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн.-1996.-**37**, №2.-С. 251- 258.

[8]. Антыпко И. И., Перельман М. А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функциональный анализ и их прилож.-1972.-Вып. 16.- С. 98-109.

[9]. Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Известия вузов. Математика.-1973.- №8.- С. 29-34.

[10]. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems // Riv. math. Univ. Parma.-1974.-3, №2.- P. 107-131.

[11]. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa Cl. sci.-1974.-1, №4.- P. 311-358.

[12]. Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperquasi lineari nella forma canonica di Shauder // Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur.-1974.-57, №5.- P. 303-307.

[13]. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка".-1999.-№364.- С. 223-227.

[14]. Пташник Б. Й. Аналог *n*-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А.- 1974.-№8.- С. 709- 712.

[15]. Пташник Б. Й., Силюга Л. П. Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн.-1997.- 49, №9.-С. 1236-1249.

[16]. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Известия АН СССР. Сер. мат.-1960.-24.-С.883-896.

[17]. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Наука,1983.- 424с.

[18]. Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн.-1996.-48, №11.-С.1468-1476.

[19]. Василишин П. Б., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн.-1998.-50, №9.-С.1155-1168.