М.І. Копач, Б.А. Шувар

ПРО ЄДИНІСТЬ ТА ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено нові теореми про єдиність та оцінки розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

Розглядатимемо задачу Коші

$$x'(t) = f(t,x),\ x(t_0) = a, \tag{1}$$

де задану дійсну функцію $f(t,x)$ вважатимемо задля простоти неперервною за сукупністю аргументів у деякій дійсній області $[t_0,T]\times S(a)$ $(t_0 < T < \infty,$ $S(a) = \{x |\ |x-a| \le M, x,a,M \in R^1\},$ R^1– множина дійсних чисел).

Використання методу послідовних наближень

$$x_{n+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \tag{2}$$

з довільним неперервним початковим наближенням $x_0(t) \in S(a)$ $(x_0(t_0) = a)$ дозволяє довести існування принаймні одного неперервно диференційовного розв'язку $x^*(t)$ задачі (1) на проміжку $[t_0,t_1]$ $(t_0 \le t_1 \le T)$. Цей розв'язок є водночас розв'язком рівняння

$$x(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{3}$$

і до нього збігається рівномірно на $[t_0,t_1]$ послідовність $\{x_n(t)\}$, утворена за допомогою алгоритму (2) (див., напр., [1]). Можна за цих припущень довести існування такого проміжку $[t_0,t_2]$, на якому існують неперервно диференційовні нижній $y^*(t)$ та верхній $z^*(t)$ розв'язки задачі (1). Для зручності і без обмеження загальності можна вважати, що $t_2 = t_1$. Це означає, що для всякого визначеного на $[t_0,t_1]$ неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (1) справджується співвідношення

$$y^*(t) \le x(t) \le z^*(t). \tag{4}$$

Для забезпечення єдиності розв'язку задачі Коші (1) доводиться накладати додаткові обмеження на $f(t,x)$.

Припустимо, що справджується умова:

А. Якщо $y \le z$ $(y, z \in S(a),\ t \in [t_0,t_1])$, то

$$f(t,z)-f(t,y)\le L_l(t)(z-y), \tag{5}$$

де $L_1(t)\ge 0$ неперервна при $t\in[t_0,t_1]$ функція.

Теорема 1. Нехай $f(t,x)$ є неперервна за сукупністю аргументів функція при $t\in[t_0,t_1]$, $x\in S(a)$ і справджується умова А. Тоді на проміжку $[t_0,t_1]$ розв'язок задачі Коші (1) єдиний.

Теорема 1 означає, що для скалярного рівняння (1) права одностороння умова Ліпшиця забезпечує єдиність розв'язку. Умови такого вигляду відомі також як $L_1(L_2)$ – умова М. Азбелєва (див. [2]) або W-умова В. Вальтера [3] в теорії інтегральних нерівностей (див. також [6],[4]).

Вважатимемо, що

$$f(t,x)=\{f_1(t,x),...,f_N(t,x)\},\ x(t)=\{x_1(t),...x_N(t)\},\ a=\{a_1,...,a_N\},$$

тобто будемо вважати, що (1) є системою вигляду

$$x_i(t)=f_i(t,x_1(t),...,x_N(t)),\ x_i(t_0)=a_i,\ i=1,2,...,N. \tag{6}$$

Нехай $f(t,x)$ неперервна за сукупністю аргументів при $t\in[t_0,t_1]$, $x\in R^N$ (R^N – N-мірний евклідів простір). Припустимо, що для $f(t,x)$ справджується умова:

Б. з нерівності $u\le v$ $(u,v\in R^N)$ випливає нерівність $f(t,u)\le f(t,v^{[u_i]})$, де $u=\{u_1,...,u_{i-1},u_i,u_{i+1},...,u_N\}$, $v^{[u_i]}=\{v_1,...,v_{i-1},u_i,v_{i+1},v_N\}$.

Нехай тепер замість умови А. виконується умова:

А$_1$. Якщо $y\le z$ $(y,z\in S(a)=\{x|\ \|x-a\|\le M,x,a\in R^N,M\in R^1\}$, то справджується співвідношення

$$f(t,z)-f(t,y)\le l(t)(z-y), \tag{7}$$

де $l(t)$ – матриця, тобто

$$l(t)=\{l_{ij}(t)\},\ l_{ij}(t)\ge 0,\ i,j=1,2,...,N,\ t\in[t_0,T], \tag{8}$$

$l_{ij}(t)$ – неперервні при $t\in[t_0,t_1]$ функції.

Теорема 2. Якщо справджуються умови Б. та А$_1$. при $t\in[t_0,T]$, то існує таке $t_1\in[t_0,T]$, що при $t\in[t_0,t_1]$ розв'язок задачі Коші (6) єдиний.

Теорему 1 можна отримати як частковий випадок теореми 2.

В якісній теорії диференціальних рівнянь та в теорії наближених методів їх розв'язання, зокрема двосторонніх ітераційних методів, часто використовують теореми про диференціальні нерівності (див., напр., [3-7]).

Теорема 3. Нехай неперервна за сукупністю аргументів функція $f(t,x)$ задовольняє умову А., а неперервно диференційовна на $[t_0,t_1]$ функція $u(t)$ задовольняє умову

$$u'(t) \le f(t,u(t)),\ u(t_0) = a. \tag{9}$$

Тоді на $[t_0,t_1]$ справджується оцінка

$$u(t) \le z^*(t), \tag{10}$$

де $z^*(t)$ – верхній розв'язок задачі (1). Якщо для неперервно диференційованої на $[t_0,t_1]$ функції $v(t)$ має місце нерівність

$$v'(t) \ge f(t,v(t)),\ v(t_0) = a, \tag{11}$$

то на $[t_0,t_1]$ справджується оцінка

$$y^*(t) \le v(t), \tag{12}$$

де $y^*(t)$ – нижній розв'язок задачі (1). З одночасного виконання нерівностей (9), (11) випливає двостороння оцінка

$$u(t) \le x^*(t) \le v(t) \tag{13}$$

для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0,t_1]$ розв'язку $x^*(t)$ задачі (1).

Доведення. Оскільки стверджуються умови теореми 1, то існує єдиний розв'язок $x^*(t)$ задачі (1). Міркуючи від супротивного, без обмеження загальності можна вважати, що на деякому проміжку $(t_0,t_2]$ $(t_0 < t_2 \le t_1)$ матимемо $u(t) > x^*(t)$. В такому разі, використовуючи (1), (9) і беручи до уваги (5), матимемо

$$u'(t) - x^{*\prime}(t) \le f(t,u(t)) - f(t,x^*(t)) \le L_1(t)(u(t) - x^*(t)) \tag{14}$$

для $t \in (t_0,t_2)$. Позначивши $w(t) = u(t) - x^*(t)$, (14) перепишемо в такому вигляді

$$w'(t) = L_1(t)w(t) - \delta(t),\ t \in (t_0,t_2], \tag{15}$$

де $\delta(t)$ – неперервна невід'ємна на $(t_0,t_2]$ функція. Оскільки $w(t_0) = u(t_0) - x^*(t_0) = 0$, то з (15) випливає

$$w(t) = -\int_{t_0}^{t} \delta(s) \exp\left(\int_s^t L_1(\tau)d\tau\right) ds \le 0, \tag{16}$$

тобто $u(t) \le x^*(t)$ $\forall t \in (t_0,t_2]$, що суперечить припущенню. Наведені міркування дають підставу вважати доведення теореми 3 завершеним.

Теорема 4. Нехай при $t \in [t_0,t_1]$ справджуються умови Б. та A_1. з теореми 2 і нехай, крім того, задана неперервно диференційовна на $[t_0,t_1]$ вектор-функція $u(t) = \{u_1(t),...,u_N(t)\}$, для якої на $[t_0,t_1]$ виконується нерівність

$$u_i'(t) \le f_i(t,u_1(t),...,u_N(t)),\ u_i(t_0) = a_i,\ (i = 1,2,\dots,N). \tag{17}$$

Тоді

$$u_i(t) \le x_i^*(t) \quad (t \in [t_0, t_1],\ i = 1,2,\ldots,N), \tag{18}$$

де $x_i^*(t)$ – компоненти єдиного розв'язку $x(t) = \{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ задачі Коші (10).

Якщо ж задана неперервно-диференційовна вектор-функція $v(t) = \{v_1(t),\ldots,v_N(t)\}$, для якої на $[t_0, T)$ виконується нерівність

$$v_i'(t) \ge f_i(t, v_1(t),\ldots,v_N(t)),\ v_i(t_0) = a_i\ (i = 1,\ldots,N), \tag{19}$$

то

$$x_i^*(t) \le v_i(t) \quad (t \in [t_0, t_1],\ i = 1,\ldots,N). \tag{20}$$

При одночасному виконанні нерівностей (17), (19) справджуються двосторонні оцінки

$$u_i(t) \le x_i^*(t) \le v_i(t) \quad (t \in [t_0, t_1],\ i = 1,2,\ldots,N) \tag{21}$$

Теорему 3 можна розглядати як частинний випадок теореми 4.

Відмітимо, що теореми 3 і 4 є новими, їх можна поширити і на інші класи рівнянь, зокрема на функціонально-диференціальні, інтегро-диференціальні рівняння, їх системи і т. п. Зазначимо, що поєднання цих теорем з відповідними твердженнями з [8] дає можливість одержувати низку нових результатів про різні класи операторних нерівностей.

It is established new theorems about uniqueness and estimations of solutions of partial differential equations and systems.

[1]. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1973.– 720 с.

[2]. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах. 1. // Мат. сб – 1962.– 56. – № 3.– С. 325-342.

[3]. Walter W. Differential and integral inequalities – Berlin ets: Springer. 1970.– 355 p.

[4]. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. К.: Наук. думка, 1980.– 267 с.

[5]. Lakshmikantam V., Leela S. Differential and integral inequalities: Theory and applications.– New-York: Akad. press. 1969. – Vol. 1. – 390 p.

[6]. Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С. Теоремы о неравенствах – Ашхабад: Ылым, 1980 – 232 с.

[7]. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения – М.: Мир, 1973 – 720 с.

[8]. Шувар Б. А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах. – В кн.: Второй симпозиум по методам решений нелинейных уравнений и задач оптимизации. Т.1. Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. – 1981. – С. 68-73.