*УДК 517.944*
*ББК 22.161.62*

*І.В. Буртняк, Г.П. Малицька*

# ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

*Розглянуто стабілізацію інтеграла Пуассона для рівнянь Колмогорова, що мають три групи змінних, за якими є виродження параболічності.*

***Ключові слова:*** *фундаментальний розв'язок, ультрапараболічне рівняння, задача Коші.*

Одержані результати узагальнюють результати робіт [1; 2] і можуть бути застосовані в теорії стохастичних процесів.

Позначення $n \ge m_1 \ge m_2 \ge m_3$, $n, m_1, m_2, m_3$ – натуральні числа.

$$N_1 = n + 3m_1 + 5m_2 + 7m_3, \quad X = (x, y) \in R^N, \quad N = n + m_1 + m_2 + m_3,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n, \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad y_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m_1}) \in R^{m_1},$$

$$y_2 = (y_{21}, y_{22}, y_{23}, \dots, y_{2m_2}) \in R^{m_2}, \ y_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33}, \dots, y_{3m_3}) \in R^{m_3},$$

$$x^{(k)} = (x_1, x_2, \dots, x_{m_k}),\ k = 1,2,3, \quad y_1^{(k)} = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots, y_{1m_k}),\ k = 1,2, \ y_2^{(3)} = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m_3}).$$

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m_1} x_j \frac{\partial u(t,X)}{\partial y_{1j}} - \sum_{j=1}^{m_2} y_{1j} \frac{\partial u(t,X)}{\partial y_{2j}} - \sum_{j=1}^{m_3} y_{2j} \frac{\partial u(t,X)}{\partial y_{3j}} = a \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,X)}{\partial x_k^2}, \quad a > 0, \tag{1}$$

$$u(t,X)\big|_{t=0} = u_0(X), \tag{2}$$

де $u_0(X)$ – вимірна, обмежена функція в $R^N$.

Фундаментальний розв'язок (1) – (2) має вигляд [3]:

$$Z(t,X;\tau,\Xi) = (12)^{\frac{m_1}{2}} (720)^{\frac{m_2}{2}} (25200)^{\frac{m_3}{2}} (4\pi a)^{-\frac{N}{2}} (t-\tau)^{-\frac{N_1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{a}\rho(t,X;\tau,\Xi)\right\},$$

де

$$\rho(t,X;\tau,\Xi) = |x-\xi|^2 (t-\tau)^{-1} 4^{-1} + 3(t-\tau)^{-3} \left|y_1 - \eta_1 + (x^{(1)} + \xi^{(1)})(t-\tau)2^{-1}\right|^2 +$$

$$+180(t-\tau)^{-5} \left|y_2 - \eta_2 + (y_1^{(1)} + \eta_1^{(1)})(t-\tau)2^{-1} + (x^{(2)} - \xi^{(2)})(t-\tau)^2 12^{-1}\right|^2 +$$

$$+6300(t-\tau)^{-7} \Big|y_3 - \eta_3 + (y_2^{(3)} + \eta_2^{(3)})(t-\tau)2^{-1} + (y_1^{(3)} - \eta_1^{(3)})(t-\tau)^2 10^{-1} +$$

$$+(x^{(3)} + \xi^{(3)})(t-\tau)^3 120^{-1}\Big|^2,$$

$$\Xi = (\xi, \eta),\ \xi \in R^n,\ \eta \in R^{m_1+m_2+m_3},\ \eta_i \in R^{m_i},\ i = 1, 2, 3.$$

$\rho(t,X;0,\Xi) = r^2$ – сімейство поверхонь рівня фундаментального розв'язку задачі (1), (2). Через $F_{r,t}^{X_0}$ позначимо тіло, обмежене еліпсоїдом

$$\rho(t,X_0;0,\Xi) = r^2, \tag{3}$$

де $\Xi$ – змінна точка, $\upsilon_N$ – об'єм тіла, обмеженого поверхнею:

$$|\xi|^2 + \left|\eta_1 - \sqrt{3}\xi^{(1)}\right|^2 + \left|\eta_2 - \sqrt{15}\eta_1^{(2)} - \sqrt{5}\xi^{(2)}\right|^2 +$$

$$+\left|\eta_3 - 2^{-1}\sqrt{35}\eta_2^{(3)} + \sqrt{21}\eta_1^{(3)} + 2^{-1}\sqrt{7}\xi^{(3)}\right|^2 = 1.$$

Нехай $M_t^X(r)$ – середнє значення $u_0(X)$ по тілу $F_{r,t}^X$, обмеженому поверхнею (3).

**Означення 1.** Функція $u_0(X)$ має граничне середнє $M^X(r)$ по тілах $F_{r,t}^X$ при $t \to \infty$, якщо існує $\lim\limits_{t\to\infty} M_t^X(r) = M^X(r)$.

**Точкова стабілізація інтеграла Пуассона для задачі Коші (1), (2).** За аналогією до параболічних рівнянь, розв'язок задачі Коші (1), (2)

$$u(t,X)=\int_{R^N} Z(t,X;0,\Xi)u_0(\Xi)d\Xi \qquad (4)$$

назвемо інтегралом Пуассона задачі Коші (1), (2).

**Теорема 1.** *Якщо* $u_0(X)$ *має граничне середнє по еліпсоїдах* $F_{r,t}^X$, *то інтеграл Пуассона* (4) *стабілізується (прямує при* $t\to+\infty$*) до числа*

$$\ell=(2\pi a)^{-\frac{N}{2}}\upsilon_N\int_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}\mathrm{M}^X(r)dr .$$

**Доведення.** Розглянемо інтеграл Пуассона для рівняння (1) і введемо заміну змінних інтегрування

$$x-\xi=-2\sqrt{at}\alpha ,$$

$$y_1-\eta_1+x^{(1)}t=-\frac{\sqrt{t^3a}\beta_1}{\sqrt{3}},$$

$$y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}=-\frac{\sqrt{t^5a}\beta_2}{6\sqrt{5}},$$

$$y_3-\eta_3+\frac{y_1^{(3)}t}{2}+y_2^{(3)}t^2+\frac{x^{(3)}t^3}{6}=-\frac{\sqrt{t^7a}\beta_3}{30\sqrt{7}} .$$

Тоді (4) матиме вигляд:

$$u(t,X)=\pi^{-\frac{N}{2}}\int_{R^N}\exp\left\{-|\alpha|^2-\left|\beta_1-\sqrt{3}\alpha^{(1)}\right|^2-\left|\beta_2-\sqrt{15}\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\alpha^{(2)}\right|^2-\right.$$

$$\left.-\left|\beta_3-\sqrt{35}\beta_2^{(3)}2^{-1}+\sqrt{21}\beta_1^{(3)}+\sqrt{7}\alpha^{(3)}2^{-1}\right|^2\right\}u_0(t,x+2\sqrt{at}\alpha,y_1+x^{(1)}t+$$

$$+\frac{\sqrt{at^3}\beta_1}{\sqrt{3}}+x^{(2)}t^2 2^{-1}+\frac{\sqrt{at^5}\beta_2}{6\sqrt{5}},y_3+y_2^{(3)}t+x^{(3)}t^3 6^{-1}+2^{-1}y_1^{(3)}t^2+\frac{\sqrt{at^7}\beta_3}{30\sqrt{7}})d\mathrm{E}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{E}=(\alpha,\beta),\ \beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),\ \mathrm{E}\in R^N .$$

Розглянемо додатно визначену квадратичну форму:

$$|\alpha|^2+\left|\beta_1-\sqrt{3}\alpha^{(1)}\right|^2+\left|\beta_2-\sqrt{15}\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\alpha^{(2)}\right|^2+$$

$$+\left|\beta_3+\sqrt{21}\beta_1^{(3)}-\sqrt{35}\beta_2^{(2)}2^{-1}+\sqrt{7}\alpha^{(3)}2^{-1}\right|^2=\sum_{(i,j,k,s)}c_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s , \qquad (6)$$

де $(i,j,k,s)=|i|+|j|+|k|+|s|=2$,

$$\sum_{(i,j,k,s)}c_{ijks}\alpha^i\beta_1^j\beta_2^k\beta_3^s=r^2 .$$

В інтегралі (5) перейдемо до нових змінних інтегрування:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=r\Phi(\Psi)\cos\Psi_1\\ \alpha_2=r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\cos\Psi_2\\ \dots\\ \beta_{3m_3}=r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}\end{array}\right| , \qquad (7)$$

де $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\dots,\Psi_{N-1})$, $0\le r<+\infty$, $0\le\Psi_j\le\pi$, $j=1,2,\dots,N-2$, $0\le\Psi_{N-1}\le 2\pi$ .

Функція $\Phi(\Psi)$ визначається рівністю:

$$\Phi^2(\Psi)\sum_{(i,j,k,s)}c_{ijks}\alpha'^i\beta_1'^j\beta_2'^k\beta_3'^s=1,$$

з $\alpha_1'=\cos\Psi_1$, $\alpha_2'=\sin\Psi_1\cos\Psi_2,\dots$, $\beta_{3m_3}'=\sin\Psi_1\sin\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-1}$. Якобіан перетворення (7) $J=r^{N-1}J_1$,

$$J_1=\Phi^N(\Psi)\sin^{N-2}\Psi_1\sin^{N-3}\Psi_2\dots\sin\Psi_{N-2} .$$

Позначимо через

$$u_0(t,r,\Psi,X)=u_0\Big(2r\sqrt{at}\Phi(\Psi)\cos\Psi_1+x_1,\ldots r\sqrt{at^3}(30\sqrt{7})^{-1}\times$$
$$\times\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\ldots\cos\Psi_{n+1}+y_{11}+x_1t,\ldots,$$
$$r\sqrt{at^5}(6\sqrt{5})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1\ldots\cos\Psi_{n+m_1+1}+y_{21}+y_{11}t+2^{-1}x_1t^2,\ldots,$$
$$r\sqrt{at^7}(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi')\sin\Psi_1\ldots\sin\Psi'_{N-1}+y_{3m_3}+y_{2m_3}t+2^{-1}y_{1m_3}t^2+6^{-1}x_{m_3}t^3\Big).$$

Тоді:

$$u(t,X)=\pi^{-\frac{N}{2}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{N-1}\int\limits_{\Sigma_1}u_0(t,r,\Psi,X)J_1d\Psi=$$
$$=\pi^{-\frac{N}{2}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-r^2}\int\limits_0^{r}\rho^{N-1}d\rho\int\limits_{\Sigma_1}u_0(t,\rho,\Psi,X)J_1d\Psi dr=$$
$$=2\pi^{-\frac{N}{2}}\int\limits_0^{+\infty}re^{-r^2}\int\limits_0^{r}\rho^{N-1}d\rho\int\limits_{\Sigma_1}u_0(t,\rho,\Psi,X)J_1d\Psi dr,$$

де $\Sigma_1$ – одинична сфера в $R^N$.

Виділимо $\mathrm{M}_t^X(r)$:

$$u(t,X)=2\pi^{-\frac{N}{2}}\upsilon_N\int\limits_0^{+\infty}r^{N+1}e^{-r^2}(r^N\upsilon_N)^{-1}\int\limits_0^{r}\rho^{N-1}d\rho\int\limits_{\Sigma_1}u_0(t,\rho,\Psi,X)J_1d\Psi dr=$$
$$=2\pi^{-\frac{N}{2}}\upsilon_N\int\limits_0^{+\infty}r^{N+1}e^{-r^2}\mathrm{M}_t^X(r)dr. \qquad (8)$$

Залишається здійснити граничний перехід під знаком інтеграла (8) при $t\to+\infty$. Це можна зробити на основі теореми Лебега, оскільки існує граничне середнє, а з обмеженості $u_0(X)$ безпосередньо випливає рівномірна (по $t$) обмеженість $\mathrm{M}_t^X(r)$.

Зауважимо, що досить вимагати існування граничного середнього в деякій фіксованій точці $X_1$, із цього вже безпосередньо випливає існування граничного середнього в будь-якій точці $X$ і факт стабілізації на кожному компакті.

**Теорема 2.** *Якщо* $u_0(X)\ge 0$, *то для стабілізації інтеграла Пуассона* (4) *до нуля необхідно й досить, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє* $\mathrm{M}^X(r)$, *майже скрізь рівне нулю.*

**Доведення.** Достатність випливає з теореми 1. Покажемо, що зі стабілізації (4) до 0 випливає існування нульового граничного середнього по $F_{r,t}^X$.

$$\mathrm{M}_t^X(r)=\frac{1}{mesF_{r,t}^X}\int\limits_{F_{r,t}^X}u_0(\Xi)d\Xi\le$$
$$\le ct^{-\frac{N_1}{6}}\int\limits_{R^N}\exp\left\{-\rho(t^{\frac{1}{3}},X,0,\Xi)\right\}u_0(\Xi)d\Xi=c_1u(t^{\frac{1}{3}},X),\ c,c_1>0. \qquad (9)$$

У нерівності (9) $mesF_{r,t}^X$ замінено об'ємом куба зі стороною $t^{\frac{1}{6}}$, який міститься в $F_{r,t}^X$. Оскільки $u(t,X)\to 0$ при $t\to\infty$, із (9) випливає, що $\mathrm{M}_{r,t}^X\to 0$ при $t\to\infty$ для будь-якого $r$. Теорема доведена.

При $n=m_1$, $n_2=m_3=0$ одержимо теореми з [1].

**Рівномірна стабілізація інтеграла Пуассона.** Розглянемо задачу Коші для рівняння порядку $2b$ по змінних $x$:

$$(D_t-(x^{(1)},D_{y_1})-(y_1^{(2)},D_{y_2})-(y_2^{(3)},D_{y_3})-\sum_{|k|=2b}a_kD_x^k)u=0, \qquad (10)$$

де $D_t - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k$ – параболічний за Петровським оператор із сталими коефіцієнтами, $0<b$.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші (10), (2) задовольняє нерівності [2]:

$$\left|D_{y_1}^i D_{y_2}^j D_{y_3}^s D_x^k Z(t,X;\tau,\Xi)\right| \le c(t-\tau)^{-\frac{N_2}{2b}} \exp\{-\rho_1(t,X;\tau,\Xi)\}, \qquad (11)$$

де $N_2 = |k| + n + (2b+1)(m_1+|i|) + (4b+1)(m_2+|j|) + (6b+1)(m_3+|s|)$.

$$\rho_1(t,X.\tau,\Xi) = \left(|x-\xi|(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\right)^q + \left(\left|y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)\right|(t-\tau)^{-\frac{(2b+1)}{2b}}\right)^q +$$

$$+\left(\left|y_2-\eta_2+y_1^{(2)}(t-\tau)+\frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2}\right|(t-\tau)^{-\frac{(4b+1)}{2b}}\right)^q$$

$$+\left(\left|y_3-\eta_3+y_2^{(3)}(t-\tau)+\frac{y_1^{(3)}(t-\tau)^2}{2}+\frac{1}{6}(t-\tau)^3x^{(3)}\right|(t-\tau)^{-\frac{6b+1}{2b}}\right)^q, \quad q=\frac{2b}{2b-1}.$$

Нехай $u_0(X)$ має граничне середнє

$$\lim_{\substack{b_1\to\infty \\ \dots \\ b_N\to+\infty}} \frac{1}{2^{2N}\prod_{s=1}^{N} b_s}\int_{-b_1}^{b_1}\dots\int_{-b_N}^{b_N} u_0(\Xi)d\Xi = \ell, \qquad (12)$$

де $b_j \to \infty, j=1,\dots,N$, незалежно одне від одного.

**Теорема 3.** *Для того, щоб інтеграл Пуассона рівняння* (10) *рівномірно стабілізувався до* $\ell$ *при* $t\to\infty$, *необхідно й досить, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє, рівне* $\ell$.

**Доведення.** Нехай $u_0(X)$ має рівномірне граничне середнє, рівне 0. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $b_0(\varepsilon)$, що при всіх $b_j > b_0(\varepsilon)$ і при будь-якому $X$:

$$\left|\frac{1}{2^{2N}\prod_{j}^{N} b_j}\int_{-b_1+x_{11}}^{b_1+x_{11}}\dots\int_{-b_N+y_{3m_3}}^{b_N+y_{3m_3}} u_0(\Xi)d\Xi\right| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $u_0(X)$ має кутові граничні середні рівні 0.

В інтегралі Пуассона зробимо заміну змінних:

$$x-\xi = -\xi' t^{\frac{1}{2b}},$$

$$y_1-\eta_1+x^{(1)}t = -\eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}},$$

$$y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2} = -\eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}},$$

$$y_3-\eta_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6} = -\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}},$$

тоді одержимо:

$$u(t,X) = t^{\frac{N_3}{2b}}\int_{R^N} Z^*(t,X;0,\Xi')u_0(x+\xi' t^{\frac{1}{2b}}, y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}},$$

$$y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}}, y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}})d\Xi,$$

де $Z^*(t,X;0,\Xi')$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші (10), (2) в нових змінних.

$$N_3 = n+(2b+1)m_1+(4b+1)m_2+(6b+1)m_3,$$

або

$$u(t,X)=t^{\frac{N_2}{2b}}\int_{R^N} Z^*(t,X;0,\Xi)\frac{\partial^N}{\partial\xi_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\xi_1}\ldots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0(x+t^{1/2b}\xi',y_1+x^{(1)}t+$$

$$+\eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}},y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}},y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}})d\Xi' d\Xi .$$

Проінтегрувавши частинами, матимемо:

$$u(t,X)=(-1)^N t^{\frac{N_2}{2b}}\int_{R^N}\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\xi_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\int_0^{\xi_1}\ldots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\times$$

$$\times\left(x+\xi' t^{\frac{1}{2b}},\ldots,y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3-\eta_{3m_3}' t^{\frac{6b+1}{2b}}\right)d\Xi' d\Xi=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3 . \quad (13)$$

Інтеграл (13) розіб'ємо на інтеграли:

$\mathrm{I}_1$ – інтеграл по ділянці, для якої виконується хоч одна з нерівностей:

$$|\xi_s|>B_s,\ |\eta_{ij}|>B_{ij},\ s=1,\ldots,n,\ i=1,2,3,\ j=1,\ldots,m_i .$$

$\mathrm{I}_2$ – інтеграл по ділянці:

$$\left\{0<h_s\le|\xi_s|\le B_s, 0<h_{ij}\le|\eta_{ij}|\le B_{ij}\right\}.$$

$\mathrm{I}_3$ – інтеграл по ділянці:

$$|\xi_s|\le h_s,\ |\eta_{ij}|\le h_{ij} .$$

Оскільки

$$\left|\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi)}{\partial\xi_1\ldots\partial\eta_{3m_3}}\right|\le c_N t^{-\frac{N_1}{2b}}\exp\left\{-c|\Xi|^q\right\}, \quad (14)$$

з оцінки (14) випливає, що можна вибрати досить великі $B_s$, $B_{ij}$ і досить малі $h_s$, $h_{ij}$, залежні тільки від $\varepsilon$, щоб для всіх $X$ і $t$: $|\mathrm{I}_1|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|\mathrm{I}_3|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Перейдемо до оцінки $\mathrm{I}_2$. Позначимо

$$g_t(\Xi)=\int_0^{\xi_1}\ldots\int_0^{\eta_{3m_3}} u_0\left(x+\xi' t^{\frac{1}{2b}},\ldots,y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}}\right)d\Xi .$$

Зробивши заміну змінних:

$$x+t^{\frac{1}{2b}}\xi'=a,\ y_1+x^{(1)}t+\eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}}=\alpha_1,\ y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}}=\alpha_2,$$

$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}}=\alpha_3,$$

$g_t(\Xi)$ запишемо у вигляді

$$g_t(\Xi)=t^{-\frac{N_1}{2b}}\int_{x_{11}}^{x_{11}+\xi_{11}t^{\frac{1}{2b}}}\ldots\int_{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3}^{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3+\eta_{3m_3}t^{\frac{6b+1}{2b}}} u_0(A)dA .$$

Оскільки $u_0(X)$ має кутові граничні середні, то для будь-яких

$$X,|X|\le K,\ t>\mathrm{N}_0,\ |g_t(\Xi)|(\xi_{11}\cdot\ldots\cdot\eta_{3m_3})^{-1}<\delta ,$$

візьмемо

$$\delta=C_N^{-1}\frac{\varepsilon}{3}\left(\prod_{s=1}^{n}B_s\prod_{i,j}B_{ij}\int_{R^N}\exp\left\{-c_0|A|^q\right\}dA\right)^{-1},$$

тому $|\mathrm{I}_2|\le\frac{\varepsilon}{3}$, а $|u(t,X)|<\varepsilon$.

**Необхідність.** Доведення від супротивного. Нехай

$$u(t,X)=\int_{R^N} Z(t,X;0,\Xi)d\Xi \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

рівномірно по $X$, а початкова функція $u_0(X)$ не має рівномірного граничного середнього (12), де $\ell=0$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0>0$, що для будь-якого додатного $n_0$ знайдеться $B>n_0$ і така точка $M$, що

$$|S(B,M)|=\left|\frac{1}{(2B)^N}\int_{V_B^M} u_0(\Xi)d\Xi\right|\ge\varepsilon_0,$$

де $V_B^M$ – куб зі стороною $B$ і центром у точці $M$.

Оскільки фундаментальний розв'язок $Z(t,X;0,0)$ можна записати:

$$Z(t,X;0,0)=t^{-\frac{N_3}{2b}}Z_1\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2b}}},\frac{y_1+x^{(1)}t}{t^{\frac{2b+1}{2b}}},\left(y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}\right)t^{-\frac{4b+1}{2b}},\right.$$

$$\left.\left(y_3+y_2^{(3)}t+y_1^{(3)}\frac{t}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}\right)t^{-\frac{6b+1}{2b}}\right),$$

де $Z_1$ – ціла функція вказаних аргументів при $t>0$, і

$$\int_{R^N} Z(t,X;0,0)dX=\int_{R^N} Z_1(A)dA=1,$$

$$\int_{R^N} Z_1(A)dA=\int_{V_{B^*}} Z_1(A)dA+\int_{R^N-V_{B^*}} Z_1(A)dA,$$

$V_{B^*}$ – куб зі стороною $B^*$, що

$$\int_{V_{B^*}} Z_1(A)dA<\frac{\varepsilon_0}{4},\quad \int_{R^N-V_{B^*}} Z_1(A)dA\ge 1-\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Після відповідної заміни змінних інтеграл Пуассона запишеться у вигляді:

$$u(t,X)=\int_{V_{B^*}} Z_1(A)\times\times u_0\left(x+\alpha t^{\frac{1}{2b}},\beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}}+y_1+x^{(1)}t,\beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}}+y_2+\right.$$

$$\left.+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(1)}t^2}{2},\beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}}+y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}\right)dA+$$

$$+\int_{R^N-V_{B^*}} Z_1(A)u_0\left(x+\alpha t^{\frac{1}{2b}},\beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}}+y_2+x^{(1)}t,\beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}}+y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2},\right.$$

$$\left.\beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}}+y_3+y_2^{(3)}t+y_1^{(3)}\frac{t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}\right)dA=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

Для простоти будемо вважати, що $|u_0(X)|\le 1$, а $B^*$ вибрано так, що

$$|\mathrm{I}_1|\le\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Візьмемо послідовність $n_0^{(\kappa)}\to\infty$, за нею знайдемо послідовності $B_{(\kappa)}\to\infty$ і $\mathrm{M}_{(\kappa)}$ такі, що $S(B_{(\kappa)},\mathrm{M}_{(\kappa)})\ge\varepsilon_0$, визначимо тепер послідовність

$$t_{(\kappa)}=\left(\frac{\varepsilon_0}{8NB^*}B_{(\kappa)}\right)^{2b}.$$

Розглянемо

$$\left|\frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\int\limits_{V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}} u(t_{(\kappa)},X)dX\right| \geq \int\limits_{V_{R^*}} Z_1(A)dAS(B_{(\kappa)},M_{(\kappa)}) - \int\limits_{V_{R^*}} Z_1(A)dA \times$$

$$\times\left|\frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\left[\int\limits_{V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}} u_0\left(x + at^{\frac{1}{2b}}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}},\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}}\right)dX - \int\limits_{V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}} u_0(X)dX\right]\right| - \frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\times$$

$$\times\int\limits_{V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}} \left|\mathrm{I}_2\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

З цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}$ є хоч одна точка $X_{(\kappa)}$, в якій $u(t_{(\kappa)}, X_{(\kappa)}) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}$, а $t_{(\kappa)} \to +\infty$, що суперечить рівномірній збіжності.

Теорема 3 доведена.

**Зауваження.** При $n = m_1$, $m_2 = m_3 = 0$ одержимо результати [2].


1. Малицкая А.П., Репников В.Д., Эйдельман С.Д. О стабилизации решений задачи Коши для уравнения диффузии с инерцией // Труды НИИМ ВГУ. – Воронеж, 1972. – Вып.V – С.86–92.
2. Эйдельман С.Д., Малицкая А.П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.XI. – С.1316–1330.
3. Малицька Г.П. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42. – №3. – С.56–60.
4. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісник Львівського національного університету. – 2000. – №411. – С.211–227.



*In this paper we consider the stabilization of Poisson's integral Cauchy problem for Kolmogorov's equations that are three groups of variables with degeneration of parabolical equations.*

***Key words:** fundamental solution, ultraparabolic equation, Cauchy problem.*



***УДК 517.948***

***ББК 22.161.67***



***Б.В. Василишин, О.М. Голубчак, М.І. Копач, Б.А. Шувар***


## ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА З БАГАТЬМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ


*Для інтегральних рівнянь типу Вольтерра з багатьма незалежними змінними доведено нові теореми про оцінки розв'язків.*

***Ключові слова:** інтегральні нерівності, диференціальні нерівності, оцінка розв'язку, N-вимірний аналог.*


Теореми про диференціальні, інтегральні та інші класи операторних нерівностей мають широке застосування як у якісній, так і в кількісній теорії диференціальних рівнянь. У даній статті одержано деякі результати, які узагальнюють відомі теореми Гронуола, Біхарі, Вендрофа та деякі інші теореми про інтегральні нерівності. Вони близькі до відповідних результатів з [1] (див. [1, §20, 21]) і деколи теж є новими і для $N = 1$. Зазначимо, що подані твердження не