Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри

Навчальний посібник

для студентів спеціальності «Прикладна математика»

Частина 4

Лінійні функціонали та лінійні оператори

Івано-Франківськ

2020

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф75

Рекомендовано вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для студентів напряму підготовки "Прикладна математика"

Рецензенти:

Загороднюк А.В., зав. кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Заторський Р.А., зав. кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 56с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Частина 4 містить основні поняття та теореми про лінійні функціонали та лінійні оператори, вправи для самостійного розв'язування, тестові завдання.

Може бути використаний студентами напрямів підготовки «Математика», «Середня освіта (математика)», «Статистика» при вивченні дисциплін «Теорія міри та інтеграла Лебега», «Функціональний аналіз».

ЗМІСТ

Лекція №13.

Лінійні функціонали

13.1. Лінійні функціонали: неперервність, обмеженість, норма.
13.2. Приклади лінійних неперервних функціоналів.
13.3. Спряжені простори. Слабка збіжність.
13.4. Простори основних та узагальнених функцій.

13.1. *Лінійні функціонали: неперервність, обмеженість, норма*

Числову функцію f, визначену на деякому лінійному просторі L, називають ***функціоналом***.

Функціонал f називається ***адитивним***, якщо для всіх $x, y \in L$

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right).$$

Він називається ***однорідним***, якщо $f\left(\alpha x\right)=\alpha f\left(x\right)$.

Адитивний однорідний функціонал називається ***лінійним функціоналом***.

У комплексному лінійному просторі розглядають також ***спряжено-однорідні*** функціонали, для яких $f\left(\alpha x\right)=\overline{\alpha} f\left(x\right)$.

Адитивний спряжено-однорідний функціонал називають ***спряжено-лінійним***.

З адитивності функціонала f випливає, що $f\left(0\right)=0$.

Ядром лінійного функціонала називають множину

$$Ker\ f=\left\{x : x\in L, f\left(x\right)=0\right\}.$$

Ця множина утворює лінійний підпростір простору L, бо для будь-яких $x, y \in Ker\ f$ виконується рівність

$$f\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha f\left(x\right)+\beta f\left(y\right)=0.$$

Якщо $Ker\ f=L$, то такий функціонал називають ***нульовим функціоналом***. Відзначимо, що ***корозмірність ядра*** будь-якого ненульового лінійного функціонала дорівнює 1.

Функціонал f, визначений у топологічному лінійному просторі L, називається ***неперервним***, якщо для кожного $\varepsilon>0$ і кожного $x_0 \in L$ існує такий окіл $O\left(x_0\right)$, що $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$ при $x\in O\left(x_0\right)$.

У нормованому просторі таким буде окіл $\{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ при деякому $\delta = \delta(\varepsilon) > 0.$

У $n-$вимірному просторі кожний лінійний функціонал є неперервним. У загальному випадку це не так.

Теорема. Якщо лінійний функціонал f неперервний у деякій одній точці $x_0 \in L,$ то він неперервний на всьому $L.$

● Нехай y_0 – довільна точка цього простору. Розглянемо її окіл

$$O(y_0) = \{y : y = y_0 - x_0 + x\},\ x \in O(x_0).$$

З лінійності f та його неперервності в точці x_0 випливає, що

$$\left|f(y) - f(y_0)\right| = \left|\left(f(y_0) - f(x_0) + f(x)\right) - f(y_0)\right| = \\ = \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

для всіх $y \in O(y_0),$ тобто неперервність функціонала f у точці $y_0.$ ■

Поняття неперервності лінійного функціонала тісно пов'язане з поняттям його обмеженості.

Теорема. Для того, щоб лінійний функціонал f був неперервний на топологічному лінійному просторі $L,$ необхідно і достатньо, щоб у L існував такий окіл нуля $O(0),$ на якому функціонал f обмежений.

● Якщо функціонал f неперервний у точці $x_0 = 0,$ то при кожному $\varepsilon > 0$ існує окіл нуля, на якому $\left|f(x)\right| = \left|f(x) - f(0)\right| < \varepsilon.$

Навпаки, якщо $O(0)$ – такий окіл нуля, на якому $\left|f(x)\right| < C,$ то при кожному $\varepsilon > 0$ окіл $\dfrac{\varepsilon}{C} \cdot O(0)$ є тим околом, на якому $\left|f(x)\right| < \varepsilon.$ Отже, f неперервний в точці $x_0 = 0,$ а значить, і на всьому $L.$ ■

У нормованому просторі лінійний функціонал f неперервний тоді і тільки тоді, коли його значення на одиничній кулі цього простору обмежені в сукупності однією і тією ж сталою. При цьому величину $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \left|f(x)\right|$ називають ***нормою*** функціонала $f.$

Нескладно переконатися, що $\|f\|$ задовольняє всі аксіоми норми.

Зауважимо також, що норму неперервного лінійного функціонала можна визначати і за формулою $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$.

Звідси, при кожному $x \in L$ отримаємо нерівність $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$.

Таким чином, $\|f\|$ – це найменша зі сталих C, для яких нерівність $|f(x)| \leq C\|x\|$ виконується при всіх $x \in L$.

Відзначимо, що часто замість перевірки лінійного функціонала на неперервність доцільніше перевірити його на ***обмеженість***, тобто на існування хоч однієї такої сталої C.

13.2. ***Приклади лінійних неперервних функціоналів***

1. Нехай $x_0(t)$ – фіксована неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Визначимо у просторі $C[a,b]$ функціонал $f(x) = \int\limits_a^b x(t)x_0(t)dt$.

● Його лінійність випливає з відомих властивостей інтеграла Рімана. Крім того, $|f(x)| = \left|\int\limits_a^b x(t)x_0(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |x_0(t)|dt \cdot \|x\|$, тому цей функціонал обмежений та неперервний. При цьому $\|f\| = \int\limits_a^b |x_0(t)|dt$. ■

2. Нехай t_0 – довільна точка відрізка $[a,b]$. Визначимо у просторі $C[a,b]$ лінійний функціонал $f(x) = x(t_0)$.

● Оскільки $|f(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|$, то він обмежений і неперервний, причому $\|f\| = 1$. ■

3. У повному евклідовому просторі всякий лінійний неперервний функціонал має вигляд $f(x) = (x, x_0)$, де x_0 – фіксований елемент цього простору.

● Лінійність такого функціонала випливає з аксіом скалярного добутку, а обмеженість $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x_0\| \cdot \|x\|$ отримуємо з нерівності Коші-Буняковського. При $x = x_0$ вона перетворюється в рівність. Тому $\|f\| = \|x_0\|$. ■

Зауважимо, що така відповідність між множиною всіх лінійних неперервних функціоналів f, визначених у повному евклідовому просторі, і елементами x_0 цього простору є взаємно однозначною.

Важливим прикладом неперервних функціоналів, які не є лінійними, є однорідно-опуклі функціонали.

Функціонал p, визначений на дійсному лінійному просторі L, називається ***однорідно-опуклим***, якщо:

1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для всіх $x,\ y \in L$;

2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для всіх $x \in L,\ \alpha > 0$.

У нормованих просторах прикладами таких функціоналів є функціонали $p(x) = \|x\|$.

13.3. ***Спряжені простори. Слабка збіжність***

Добуток лінійного неперервного функціонала на число та сума двох лінійних неперервних функціоналів також є лінійними неперервними функціоналами, визначеними у тому ж лінійному просторі L. Тому сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених у L, утворює лінійний простір. Його називають ***спряженим*** до простору L і позначають L^*.

Якщо простір L нормований, то задавши у просторі L^* норму $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$, отримаємо нормований простір L^*. Топологія, яка відповідає такій нормі, називається ***сильною топологією***. Збіжність за такою топологією називають ***сильною збіжністю***.

Наведемо деякі приклади спряжених просторів:

$$\left(R^n\right)^* = R^n; \quad \left(R_0^n\right)^* = R_1^n; \quad \left(R_1^n\right)^* = R_0^n; \quad \left(R_p^n\right)^* = R_q^n,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$c_0^* = l_1; \quad l_1^* = m; \quad l_2^* = l_2; \quad l_p^* = l_q,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Із загального вигляду лінійних неперервних функціоналів у повному евклідовому просторі E, випливає, що з точністю до ізометрії $E^* = E$. Зокрема, для гільбертових просторів $H^* = H$.

Теорема. Простір L^*, спряжений до нормованого простору L, повний.

● Нехай (f_n) – довільна фундаментальна послідовність у просторі L^*. Це означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, $m > N$. Звідси для кожного $x \in L$ отримаємо $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| \le \| f_n - f_m \| \cdot \|x\| \le \varepsilon \|x\|$. Отже, при кожному фіксованому $x \in L$ числова послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна, а значить, і збіжна.

Її границю позначимо $f(x)$. Цим визначимо функціонал f на всьому просторі L. Оскільки ж

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

то цей функціонал є лінійним.

Крім того, перейшовши до границі при $m \to \infty$ у записаній вище нерівності, отримаємо $\| f_n - f \| \le \varepsilon$. Отже, лінійний функціонал $f_n - f$ неперервний. Разом з ним неперервним буде і функціонал $f = f_n - (f_n - f)$. При цьому з останньої нерівності випливає, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$. ■

Послідовність (x_n) елементів топологічного лінійного простору L називається ***слабко збіжною*** до елемента $x_0 \in L$, якщо для довільного неперервного функціонала $f \in L^*$ відповідна числова послідовність $(f(x_n))$ збігається до $f(x_0)$.

Якщо простір L нормований, і $x_n \to x_0$ за нормою цього простору, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, то $\left| f(x_n) - f(x_0) \right| \le \| f \| \cdot \|x_n - x_0\| \le \varepsilon \| f \|$.

Звідси отримуємо, що із збіжності послідовності за нормою, тобто сильної збіжності, випливає слабка збіжність цієї послідовності то того ж елемента x_0.

У просторі R^n слабка збіжність є покоординатною і співпадає у ньому із сильною збіжністю.

Але, ***наприклад***, у просторі l_2 послідовність (e_n) не є сильно збіжною, бо вона не фундаментальна. Проте слабко така послідовність збігається до нуля.

● Справді, для кожного $f \in l_2^*$ отримуємо рівність $f(e_n) = (e_n, a) = a_n \to 0 = (0, a) = f(0)$, де $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – деякий елемент простору l_2. ■

Відзначимо, що у нормованому просторі L кожна слабко збіжна послідовність є обмеженою і для її перевірки на слабку збіжність достатньо переконатися, що $f(x_n) \to f(x_0)$ лише для елементів f, які утворюють базис простору L^*.

Враховуючи цей факт, можна довести, що у просторі l_2 слабка збіжність є покоординатною збіжністю обмежених послідовностей. Як показує наведений вище приклад, із сильною збіжністю вона не співпадає.

У просторі $C[a,b]$ послідовність $x_n(t)$ слабко збігається до функції $x_0(t)$ тоді і тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена і $x_n(t) \to x_0(t)$ для кожного фіксованого $t \in [a,b]$. Тобто така збіжність є поточковою збіжністю за умови рівномірної обмеженості. Вона не співпадає із рівномірною збіжністю, якою є сильна збіжність цього простору.

У ***спряженому просторі*** L^* послідовність (f_n) називають ***слабко збіжною*** до функціонала $f \in L^*$, якщо $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in L$.

Якщо простір L нормований, то всяка слабко збіжна послідовність у L^* є обмеженою і для її перевірки на слабку збіжність достатньо переконатися, що $f_n(x) \to f(x)$ лише для елементів x, які утворюють базис простору L. Також із збіжності послідовності (f_n) за нормою простору L^* випливає слабка збіжність цієї послідовності то того ж елемента f.

Часто розглядають також простори L^{**}, спряжені до просторів L^*. Їх називають ***другими спряженими просторами***. Для гільбертових просторів з точністю до ізометрії $H^{**} = H$.

13.4. ***Простори основних та узагальнених функцій***

Функцію $\varphi(x)$, визначену на числовій прямій, називають ***фінітною***, якщо вона перетворюється в нуль поза деяким скінченим інтервалом. Розглянемо множину D всіх фінітних нескінченно диференційованих функцій.

Така множина утворює лінійний простір зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число. Але у ньому не можна ввести норму, яка відповідала би всім аксіомам норми. Проте у цьому просторі вдається визначити поняття збіжності.

Послідовність (φ_n) елементів із D називають ***збіжною*** до функції $\varphi \in D$, якщо:

1) існує спільний для всіх функцій послідовності (φ_n) інтервал, поза яким кожна з них перетворюється в нуль;

2) для кожного фіксованого $k = 0,1,2,...$ послідовність похідних $\left(\varphi_n^{(k)}(x)\right)$ рівномірно збігається до $\varphi^{(k)}(x)$.

Лінійний простір D із введеною таким чином збіжністю називають ***простором основних функцій***, а його елементи – ***основними функціями***.

Узагальненою функцією називається всякий лінійний неперервний функціонал, визначений в D. Якщо такий функціонал f можна представити у вигляді $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, то його називають ***регулярною узагальненою функцією***. Їх ототожнюють зі звичайними функціями $f(x)$.

Подібно до скалярного добутку, домовимося записувати значення функціонала f на елементі φ у вигляді $\langle f, \varphi \rangle$.

Узагальнені функції, які не є регулярними, називають ***сингулярними узагальненими функціями***.

Наприклад, такою є узагальнена функція, визначена рівністю $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Її називають $\delta -$***функцією***. Записують δ або $\delta(x)$.

Якщо ж $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(a)$, то така узагальнена функція називається ***зміщеною*** $\delta -$***функцією*** і позначається δ_a. Використовують також запис $\delta(x-a)$.

Сукупність всіх узагальнених функцій утворює лінійний простір D^*, спряжений до простору D. ***Збіжність*** у ньому послідовності (f_n) до елемента $f \in D^*$ визначають умовою: $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ для всіх $\varphi \in D$.

У цьому просторі вводять також поняття ***добутку*** узагальненої функції f на довільні нескінченно диференційовні функції α, визначаючи його рівністю $\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle$, $\varphi \in D$.

Добуток двох довільних узагальнених функцій не вводять, бо це не можна зробити так, щоб операція множення була неперервною.

Розглянемо довільну неперервно диференційовну на всій числовій прямій функцію $f(x)$. Інтегруванням частинами для неї отримуємо рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx, \quad \varphi(x) \in D$.

Тому природно похідну узагальненої функції f, породженої такою функцією $f(x)$, визначити умовою $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$, $\varphi \in D$.

Останню рівність покладають в основу ***означення похідної*** будь-якої узагальненої функції f. Отриманий при цьому функціонал f' теж буде лінійним неперервним функціоналом, визначеним на D. Зокрема, для похідної $\delta -$функції будемо мати $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$, $\varphi \in D$.

Аналогічно можуть бути визначені і похідні вищих порядків. Наприклад, $\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\left(-\langle f, \varphi'' \rangle\right) = \langle f, \varphi'' \rangle$, $\varphi \in D$.

У загальному випадку $\langle f^{(n)},\varphi\rangle = (-1)^n \langle f,\varphi^{(n)}\rangle,\ \varphi\in D.$

Таким чином, кожна узагальнена функція є нескінченно диференційованою.

Крім того, із збіжності послідовності (f_n) узагальнених функцій до функції f випливатиме, що $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при кожному $k\in N$. Це рівносильне тому, що кожен збіжний ряд, складений з узагальнених функцій, можна почленно диференціювати скільки завгодно разів.

Як ***приклад***, обчислимо похідну регулярної узагальненої функції f, породженої функцією $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1, \\ x^2-3x, & x\ge 1. \end{cases}$

● Оскільки внаслідок інтегрування частинами

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{1}(2x+1)\varphi'(x)dx - \int_{1}^{\infty}\left(x^2-3x\right)\varphi'(x)dx =$$

$$= -3\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)dx - 2\varphi(1) + \int_{1}^{\infty}(2x-3)\varphi(x)dx =$$

$$= -5\varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx, \qquad g(x)=\begin{cases} 2, & x<1, \\ 2x-3, & x\ge 1, \end{cases}$$

то $f' = -5\delta_1 + g$, де регулярна узагальнена функція g породжена функцією $g(x)$. Пишуть ще й так: $f'(x) = -5\delta(x-1)+g(x)$.■

Вправи до лекції №13

1. Доведіть за означенням неперервності неперервність функціонала $f(x)=\int_0^1 tx(t)dt$ у просторі $C[0;1]$.

2. Доведіть, що функціонал $f: C[0;1]\to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x)=\int_0^1 tx(t)dt;$ б) $f(x)=\int_0^1 (1-2t)x(t)dt;$

в) $f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right);$ г) $f(x)=\int_0^1 t^2x(t)dt - x(0).$

3. Доведіть, що функціонал $f: L_2[0;1] \to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x) = \int\limits_0^1 \sin tx(t)dt;$ б) $f(x) = \int\limits_0^{0,5} x(t)dt - \int\limits_{0,5}^1 tx(t)dt.$

4. Доведіть, що функціонал $f: l_2 \to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}};$ б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{2^k}.$

5. При яких α функціонал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^{\alpha}}$ належить до простору l_2^*?

6. Дослідіть на сильну та слабку збіжність у просторі $C[0;1]$:

а) $x_n(t) = t^n - t^{2n};$ б) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}.$

7. Дослідіть на сильну та слабку збіжність у просторі l_2 :

а) $x_n = \left(\underbrace{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots\right);$ б) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right).$

8. Дослідіть на сильну та слабку збіжність у просторі $L_2[0;1]$:

а) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, \ t \in \left[0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \quad t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$ б) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), \ t \in \left[0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \qquad t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$

9. Нехай $\varphi(x) -$ фінітна нескінченно диференційовна функція. Дослідіть на збіжність у просторі D послідовності:

а) $\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n};$ б) $\varphi_n(x) = \frac{\varphi(nx)}{n};$ в) $\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x+n)}{n}.$

10. Знайдіть похідні перших двох порядків узагальнених функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \ x \le 1, \\ \sin \pi x, \quad x > 1. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} |x+1|, \quad |x| \le 2, \\ x^2 - 1, \quad |x| > 2. \end{cases}$

Лекція №14.

Лінійні оператори

14.1. Означення та приклади лінійних операторів та їх норм.
14.2. Добуток та степінь лінійних операторів.
14.3. Оборотні та обернені оператори.
14.4. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри.

14.1. *Означення та приклади лінійних операторів та їх норм*

Нехай маємо два топологічні лінійні простори L та L'. Відображення $A: L \to L'$, для якого $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, називається ***лінійним оператором***.

Зауважимо, що при цьому A не обов'язково вважають визначеним на всьому просторі L. Важливо тільки, щоб його область визначення $D(A)$ була лінійним підпростором в L.

Оператор A називається ***неперервним у точці*** $x_0 \in L$, якщо для кожного околу $O(Ax_0) \subset L'$ існує такий окіл $O(x_0) \subset L$, що $Ax \in O(Ax_0)$ для всіх $x \in O(x_0) \cap D(A)$.

Для нормованих просторів L та L' це означення можна сформулювати так: оператор A називається ***неперервним у точці*** $x_0 \in L$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D(A)$ таких, що $\|x - x_0\| < \delta$.

Якщо оператор неперервний у кожній точці $x \in D(A)$, то його називають ***неперервним оператором***.

Як і для лінійних функціоналів, для неперервності лінійного оператора достатньо, щоб він був неперервним принаймні в одній точці $x_0 \in D(A)$.

Лінійний оператор $A: L \to L'$, який визначений на всьому просторі L, називається ***обмеженим***, якщо він кожну обмежену множину переводить в обмежену.

Кожний неперервний лінійний оператор є обмеженим. Для нормованих просторів справедливе також обернене твердження. Для таких просторів обмеженість лінійного оператора A рівносильна існуванню сталої $C,$ що $\|Ax\| \le C\|x\|$ для всіх $x \in L.$ Найменшу з таких сталих C називають нормою оператора A і позначають $\|A\|.$

Звідси також отримуємо для всіх $x \in L$ нерівність $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$

Норму лінійного обмеженого оператора можна визначити ще й так: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}.$

Для лінійних операторів вводяться операції додавання та множення на число: $(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax,\ (A+B)x = Ax + Bx,\ \ x \in L.$

При цьому сума та добуток на число лінійних неперервних операторів теж є лінійними неперервними операторами. Отже, сукупність таких операторів утворює лінійний простір.

У випадку нормованих просторів L та L' це випливає з рівності $\|(\alpha A)x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\|$ та нерівності $\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\|.$

У такому лінійному просторі може бути введена норма за записаними вище формулами. У результаті отримаємо ***нормований простір лінійних обмежених операторів***.

У разі повноти простору L' простір лінійних обмежених операторів теж є банаховим. Доводиться дане твердження аналогічно, як і повнота простору, спряженого до нормованого.

Наведемо приклади лінійних операторів та їх норм:

1. Найпростішими з них є ***одиничний оператор*** $I : L \to L$ такий, що $Ax = x$ для всіх $x \in L,$ та ***нульовий оператор*** $0 : L \to L'$ такий, що $0x = 0$ для всіх $x \in L.$ Їхні норми дорівнюють 1 та 0 відповідно.

2. Окремими випадками лінійних операторів є лінійні функціонали. Норми деяких із них ми визначили раніше.

3. Лінійний оператор $A : R^n \to R^n,$ визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Його норма дорівнює модулю визначника цієї матриці.

4. Оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що $Ax(t) = x_0(t)x(t)$, де $x_0(t)-$ фіксована неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, називається ***оператором множення***. При цьому $\|A\| = \|x_0\|$.

5. Розглянемо також оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що $Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,$ де $K(t,s)-$ неперервна у квадраті $Q = [a,b;a,b]$ функція. Його називають ***інтегральним оператором Фредгольма***.

● Лінійність такого оператора випливає з властивостей інтеграла Рімана. Крім того, $|Ax(t)| = \left|\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \int\limits_a^b |K(t,s)|ds \cdot \|x\|.$

Тому $\|Ax\| \le \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds \cdot \|x\|.$ Отже, цей оператор є обмеженим. Його норма $\|A\| \le \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds.$

Зокрема, якщо $|K(t,s)| \le M$ у квадраті Q, то $\|A\| \le M(b-a)$. ■

Інтегральний оператор Фредгольма можна розглядати і як оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ за умови, що $B^2 = \iint\limits_Q K^2(t,s)dtds < \infty.$ Він також буде обмеженим оператором з нормою $\|A\| \le B.$

6. Серед необмежених лінійних операторів виділимо ***оператор диференціювання*** $D: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що $Dx(t) = x'(t)$. Він визначений не на всьому просторі $C[a,b]$, а лише на його підпросторі неперервно диференційованих функцій. Але і на цьому підпросторі оператор D не є неперервним, бо $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n} \to 0$, а послідовність $Dx_n(t) = \cos nt$ не є збіжною.

14.2. ***Добуток та степінь лінійних операторів***

Під ***добутком двох операторів*** A та B, які визначені та набувають значень у лінійному просторі L, розуміють оператор $AB: L \to L$ такий, що $(AB)x = A(Bx)$. Його область визначення оператора AB складається із тих $x \in D(B)$, для яких $Bx \in D(A)$.

Якщо A та B – лінійні неперервні оператори, то AB теж буде лінійним неперервним оператором.

У нормованому просторі L для обмежених лінійних операторів A та B виконується нерівність

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Тому добуток таких операторів також є обмеженим оператором, причому $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Добуток трьох і більше операторів визначають послідовно. Зокрема, під ***степенем оператора*** $A: L \to L$ розуміють оператор $A^n: L \to L$ такий, що $A^n x = A\left(A^{n-1}x\right)$.

Степінь лінійного неперервного оператора теж є лінійним неперервним оператором, причому у нормованому просторі L для нього справедлива нерівність $\left\|A^n\right\| \le \|A\|^n$.

Знайдемо у просторі $C[a,b]$ степені інтегрального оператора Фредгольма $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$.

● Оскільки

$$A^2x(t) = A(Ax(t)) = \int_a^b K(t,s)\int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)K(s,\tau)ds \right) x(\tau)d\tau = \int_a^b K_2(t,\tau)Ax(t) = x_0(t)x(t)x(\tau)d\tau,$$

то його квадрат теж є інтегральним оператором Фредгольма.

У загальному випадку отримаємо $A^n x(t) = \int_a^b K_n(t,s)x(s)ds$, де

$$K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,...$$

Такі ядра називають ***ітерованими ядрами***.

Аналогічні формули для ***інтегрального оператора Вольтерри*** $Ax(t)=\int_a^t K(t,s)x(s)ds,\ t\in[a,b]$, мають вигляд:

$$A^n x(t)=\int_a^t K_n(t,s)x(s)ds,$$

$$K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,...$$

Внаслідок теореми Фубіні отримані формули для степенів операторів Фредгольма та Вольтерри залишаться правильними і у просторі $L_2[a,b]$.

14.3. ***Оборотні та обернені оператори***

Оператор $A:L\to L'$ називається ***оборотним***, якщо для кожного y з множини $E(A)$ значень цього оператора рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок $x\in D(A)$.

При цьому відображення $A^{-1}:E(A)\to D(A)$, яке кожному $y\in E(A)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок $x\in D(A)$, називається оператором, ***оберненим до оператора*** A.

Таким чином, справедливі рівності: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$.

Наприклад, для оператора

$$A:l_2\to l_2,\ Ax=(x_1+x_2,x_1-x_2,x_3,...,x_n,...)$$

з рівняння $Ax=y$ отримуємо систему рівнянь

$$x_1+x_2=y_1\ ,\ x_1-x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ ...\ ,\ x_n=y_n,\ ...$$

З неї знаходимо розв'язок

$$x=A^{-1}y=\left(\frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{y_1-y_2}{2},\ y_3,\ ...\ ,\ y_n,\ ...\right).$$

Теорема. Оператор A^{-1}, обернений до лінійного оператора A, лінійний.

● Насамперед відзначимо, що множина значень $E(A)$ є підпростором лінійного простору L'.

Нехай $y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$. Тоді $x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2$, і внаслідок лінійності оператора A маємо рівність $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$.

Застосувавши до обох її частин оператор A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

тобто лінійність оператора A^{-1}. ■

Зауважимо, що оператор, обернений до обмеженого оператора, не завжди є обмеженим оператором. Але справедлива наступна ***теорема Банаха:*** Якщо лінійний обмежений оператор A взаємно однозначно відображає банаховий простір L на банаховий простір L', то обернений до нього оператор A^{-1} обмежений.

Відзначимо, що у банаховому просторі всіх лінійних обмежених операторів $A: L \to L'$ множина лінійних операторів, які мають обмежений обернений, є відкритою. А саме, справедлива ***теорема:***

Якщо лінійний оператор $A_0 : L \to L'$ має обмежений обернений, і $\vartriangle A: L \to L'$ – такий лінійний оператор, що $\|A_0^{-1}\| \cdot \|\vartriangle A\| < 1$, то оператор $A = A_0 + \vartriangle A$ також має обмежений обернений.

Наступна теорема не лише встановлює існування оберненого оператора, а й вказує спосіб його практичного знаходження:

Теорема. Якщо $A-$ лінійний обмежений оператор, який відображає банаховий простір L в себе, причому $\|A\| < 1$, то оператор $(I - A)^{-1}$ існує, є обмеженим і представляється у вигляді

$$(I - A)^{-1} = I + A + \ldots + A^n + \ldots$$

● Оскільки $\|A\| < 1$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty$.

З цієї нерівності та повноти простору L випливає, що сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є лінійним обмеженим оператором. Крім того, для кожного $n \in N$ маємо $\left(I - A\right)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k \left(I - A\right) = I - A^{n+1}.$

Перейшовши тут до границі при $n \to \infty$, з врахуванням $\left\|A^{n+1}\right\| \le \left\|A\right\|^{n+1} \to 0$ отримаємо, що $\left(I - A\right)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(I - A\right) = I,$ звідки й випливає рівність $\left(I - A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$ ■

14.4. *Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри*

Проілюструємо застосування доведеної теореми до розв'язування лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $y\left(x\right) = \lambda\int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt + f\left(x\right)$ у просторі $C\left[a,b\right].$

● Нехай $Ay\left(x\right) = \int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt$ – лінійний інтегральний оператор Фредгольма і $\left|K\left(x,t\right)\right| \le M.$ Тоді в операторному вигляді отримуємо рівняння $y = \lambda Ay + f,$ єдиним розв'язком якого є $y = \left(I - \lambda A\right)^{-1} f$ за умови, що $\left\|\lambda A\right\| = \left|\lambda\right| \cdot \left\|A\right\| < 1.$

Оскільки $\left\|A\right\| \le M\left(b - a\right),$ то для виконання цієї умови достатньо вимагати виконання нерівності $\left|\lambda\right| M\left(b - a\right) < 1.$

Розв'язок $y = \left(I - \lambda A\right)^{-1} f$ операторного рівняння $y = \lambda Ay + f$ для інтегрального оператора Фредгольма у просторі $C\left[a,b\right]$ за умови $\left|\lambda\right| M\left(b - a\right) < 1$ може бути представлений у вигляді

$$y\left(x\right) = f\left(x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n\left(x,t\right) f\left(t\right)dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t) \right] f(t)\,dt = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt.$$

Функцію $R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t)$ називають ***резольвентою Фредгольма***.

Оскільки $\left|\lambda^{n-1} K_n(x,t)\right| \le |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^n$ і за ознакою Д'Аламбера при $|\lambda| M(b-a) < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^n$ збіжний, то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти збігатиметься рівномірно. Отже, здійснене вище почленне інтегрування було правомірним. ■

Такий метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду називається ***методом ітерованих ядер***.

У просторі $L_2[a,b]$ він застосовний за виконання умови $|\lambda| B < 1$. де $B^2 = \iint_Q K^2(t,s)\,dt\,ds$, $Q = [a,b;a,b]$.

Зауважимо, що для інтегрального оператора Вольтерри ряд для його резольвенти збігається рівномірно при кожному λ. Тому для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду метод ітерованих ядер застосовний для всіх λ.

Приклад 1. Розв'язати методом ітерованих ядер інтегральне рівняння $y(x) = \int_0^1 xt^2 y(t)\,dt + x^2$.

● Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, причому $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x,t) = xt^2$, $f(x) = x^2$.

Оскільки $M = \max_{0 \le x,t \le 1} \left|xt^2\right| = 1$, то умова $|\lambda| M(b-a) < 1$ не виконується. Але $|\lambda| B < 1$, бо $B^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(xt^2\right)^2 dx\,dt = \frac{1}{15}$. Тому метод ітерованих ядер застосовний у просторі $L_2[0;1]$.

Враховуючи неперервність підінтегральних функцій, замість інтегралів Лебега тут і надалі будемо записувати інтеграли Рімана.

Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = xt^2,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)\,ds = \int_0^1 xs^2 \cdot st^2 ds = \frac{1}{4}xt^2,$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_2(s,t)\,ds = \int_0^1 xs^2 \cdot \frac{1}{4}st^2 ds = \frac{1}{4^2}xt^2, \ldots .$$

Методом математичної індукції нескладно довести, що $K_n(x,t) = \frac{1}{4^{n-1}}xt^2$. Отже, $R(x,t;\lambda) = R(x,t;1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}xt^2 = \frac{4}{3}xt^2$,

$$y(x) = x^2 + \int_0^1 \frac{4}{3}xt^2 \cdot t^2 dt = x^2 + \frac{4}{15}x. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Розв'язати методом ітерованих ядер інтегральне рівняння $y(x) = \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt + 4e^x$.

● Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду, причому $\lambda = 1,\ a = 0,\ b > 0,\ K(x,t) = x - t,\ f(x) = 4e^x$.

Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = x - t,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x (x-s)(s-t)\,ds = \int_t^x \big((x-t)+(t-s)\big)(s-t)\,ds =$$

$$= (x-t)\int_t^x (s-t)\,ds - \int_t^x (s-t)^2 ds = (x-t)\left.\frac{(s-t)^2}{2}\right|_t^x - \left.\frac{(s-t)^3}{3}\right|_t^x =$$

$$= \frac{(x-t)^3}{2} - \frac{(x-t)^3}{3} = \frac{(x-t)^3}{3!},$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x (x-s)\frac{(s-t)^3}{6}ds = \frac{(x-t)^5}{5!}, \ \ldots ,$$

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Обґрунтуємо останню рівність методом математичної індукції.

Для $n=1$ вона правильна. Припускаючи її виконання для $n=k$, для $n=k+1$ отримуємо

$$K_{k+1}(x,t)=\int_t^x (x-s)\frac{(s-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}ds=\int_t^x \big((x-t)+(t-s)\big)\frac{(s-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}ds=$$

$$=\frac{(x-t)}{(2k-1)!}\cdot\frac{(x-t)^{2k}}{2k}-\frac{(x-t)^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)!}=\frac{(x-t)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

звідки випливає правильність потрібної рівності для всіх $n\in\mathbf{N}$.

Тепер знайдемо резольвенту:

$$R(x,t;\lambda)=R(x,t;1)=(x-t)+\frac{(x-t)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\operatorname{sh}(x-t).$$

Отже, $y(x)=\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\cdot 4e^t dt+4e^x=2e^x\int_0^x dt-2e^{-x}\int_0^x e^{2t}dt+4e^x=$

$$=2e^x\cdot x-e^{-x}(e^{2x}-1)+4e^x=(2x+3)e^x+e^{-x}.\ \blacksquare$$

Вправи до лекції №14

1. Перевірте, чи є оператор $A:C[0;1]\to C[0;1]$ лінійним і неперервним якщо:

   а) $Ax(t)=tx(t)$; б) $Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$; в) $Ax(t)=\int_0^1 e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$.

2. Перевірте, чи є оператор $A:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$ лінійним і неперервним якщо:

   а) $Ax(t)=\int_0^1 t^2\tau x(\tau)d\tau$; б) $Ax(t)=\int_0^{2\pi}\sin(t+\tau)x(\tau)d\tau$.

3. Обґрунтуйте лінійність інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерри.
4. Для норми інтегрального оператора Фредгольма у просторі $L_2[a,b]$ обґрунтуйте нерівність $\|A\|\le B$.
5. За аналогією з доведенням повноти спряженого простору доведіть повноту простору лінійних неперервних операторів $A:L\to L'$ у разі повноти нормованого простору L'.

6. Доведіть, що оператор $A: l_2 \to l_2$ є лінійним обмеженим оператором, та оцініть його норму, якщо:

   а) $Ax = \left(x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$;

   б) $Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$.

7. Для операторів $A: l_2 \to l_2$ із вправи 6 знайдіть обернені до них оператори та обґрунтуйте їх обмеженість.

8. Нехай X_0 – підпростір простору $X = C[0;1]$, який складається з неперервно диференційованих на відрізку $[0;1]$ функцій $x(t)$ таких, що $x(0) = 0$. Знайдіть обернений оператор до оператора $A: X_0 \to C[0;1]$, якщо: $Ax(t) = \left(t^2 + 1\right)x'(t) - 2tx(t)$.

9. Методом ітерованих ядер розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

   а) $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt - x$; б) $y(x) = \int_0^1 x^2 t^2 y(t)\,dt + 4x$;

   в) $y(x) = 2\int_0^1 x t^3 y(t)\,dt - 1$; г) $y(x) = \lambda\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt + x$.

10. Методом ітерованих ядер розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду:

   а) $y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt$; б) $y(x) = 1 + \int_0^x (x-t) y(t)\,dt$.

Лекція №15.

Спектр оператора. Компактні оператори

15.1. Спектр та резольвента оператора.
15.2. Спряжені оператори та їх властивості.
15.3. Компактні оператори та їх властивості.
15.4. Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування.

15.1. *Спектр та резольвента оператора*

Розглянемо лінійний оператор $A: L \to L,$ визначений у нормованому просторі L. Число λ називається ***власним значенням*** цього оператора, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок. Такий розв'язок називають ***власною функцією*** оператора $A,$ яка відповідає власному значенню $\lambda.$

Сукупність всіх власних значень оператора A називають ***точковим спектром*** цього оператора і позначають $\sigma_p(A).$

Якщо $\lambda \in \sigma_p(A),$ то оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},$ який називають ***резольвентою оператора*** $A,$ не існує.

Якщо оператор $R_\lambda(A)$ визначений на всьому просторі L і є обмеженим, то значення λ називають ***регулярним***. Зокрема, у просторі L скінченної розмірності регулярними є всі $\lambda \notin \sigma_p(A).$

Якщо ж простір L нескінченновимірний, то можлива ситуація, коли $R_\lambda(A)$ існує, але визначений не на всьому просторі $L,$ або не є обмеженим. Такі λ відносять до ***неперервного спектру*** $\sigma_c(A)$ оператора $A,$ якщо $\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] = L,$ чи до ***залишкового спектру*** $\sigma_r(A),$ якщо $\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] \neq L.$

Множина $\sigma(A) = \sigma_p(A) + \sigma_c(A) + \sigma_r(A)$ називається ***спектром оператора*** $A,$ а її доповнення складається з регулярних точок цього оператора.

За властивістю операторів, які мають обмежений обернений, множина регулярних точок є відкритою. Відповідно, спектр оператора, як доповнення цієї множини, завжди замкнений.

Теорема. Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L і $|\lambda| > \|A\|$, то точка λ регулярна.

● Справді, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)\right)^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{A}{\lambda}\right)^k$.

При $\|A\| < |\lambda|$ такий ряд збігається і задає обмежений на всьому просторі L оператор. ■

Наведемо ***приклади*** знаходження спектрів операторів.

1. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = tx(t)$.

● З рівняння $Ax(t) = \lambda x(t)$ отримуємо $(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t)$. Прирівнюючи $(t - \lambda)x(t)$ до нуля, при кожному λ знайдемо лише єдиний неперервний розв'язок рівняння $Ax(t) = \lambda x(t)$ – функцію $x(t) = 0$. Тому такий оператор не має власних значень.

Але при $\lambda \in [a;b]$ його резольвента, яка задається рівністю, $R_\lambda(A)x(t) = (A - \lambda I)^{-1}x(t) = \dfrac{x(t)}{t - \lambda}$, визначена не на всьому просторі $C[a,b]$ і є необмеженим оператором. Отже, спектром оператора A є відрізок $C[a,b]$. ■

2. $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, ..., x_n, ...)$.

● З рівняння $Ax = \lambda x$ отримуємо систему рівнянь

$$x_1 + x_2 = \lambda x_1,\ x_1 - x_2 = \lambda x_2,\ x_3 = \lambda x_3,\ ...,\ x_n = \lambda x_n,\ ...\ .$$

Якщо $\lambda \neq 1$, то $x_n = 0,\ n \geq 3$, і залишається дослідити на наявність ненульових розв'язків систему з двох рівнянь $x_1 + x_2 = \lambda x_1$ та $x_1 - x_2 = \lambda x_2$. З рівності нулю визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$ знайдемо два власні значення $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Підставивши $\lambda_1 = \sqrt{2}$ у перше з рівнянь системи, отримаємо $x_2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)x_1$. Отже, власні функції, які відповідають власному значенню $\lambda_1 = \sqrt{2}$, мають вигляд $\left(x_1, \left(\sqrt{2}-1\right)x_1, 0, 0, \ldots\right)$, $x_1 \neq 0$. Покладаючи $x_1 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, знайдемо нормовану власну функцію φ_1.

Аналогічно знаходять нормовану власну функцію φ_2, яка відповідає власному значенню $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Якщо ж $\lambda = 1$, то отримаємо розв'язки вигляду $\left(0, 0, x_3, \ldots, x_n, \ldots\right)$, де $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ – довільні дійсні чи комплексні числа. Тому $\lambda = 1$ – власне значення цього оператора. Відповідну ортогональну нормовану систему власних функцій φ_n, $n \geq 3$, яка йому відповідає, отримаємо, покладаючи $x_n = 1$ при кожному фіксованому $n \geq 3$, а всі інші $x_k = 0$. ■

3. $A: C\left[0;1\right] \to C\left[0;1\right]$, $Ax\left(t\right) = \int\limits_0^1 ts^2 x\left(s\right) ds$.

● Будемо шукати ненульовий розв'язок рівняння $Ax\left(t\right) = \lambda x\left(t\right)$ у вигляді $x\left(t\right) = ct$, $c \neq 0$. Підставивши таку функцію у це рівняння, отримаємо тотожність $\dfrac{ct}{4} \equiv \lambda ct$, з якої знаходимо власне значення $\lambda = \dfrac{1}{4}$. Йому відповідає нормована власна функція $\varphi\left(t\right) = t$. ■

Аналогічно знаходимо те саме власне значення цього оператора у просторі $L_2\left[0;1\right]$. Відповідна йому нормована власна функція у цьому просторі матиме вигляд $\varphi\left(t\right) = \sqrt{2}\, t$.

15.2. ***Спряжені оператори та їх властивості***

Розглянемо лінійний неперервний оператор $A: L \to L'$. Для довільного функціонала $g \in \left(L'\right)^*$ функціонал f такий, що $f\left(x\right) = g\left(Ax\right)$, буде лінійним і неперервним на всьому просторі L, тобто $f \in L^*$. Відображення $A^*: \left(L'\right)^* \to L^*$, яке визначається рівністю $A^* g = f$, називається оператором, ***спряженим*** до оператора A. Такий оператор теж є лінійним та неперервним, а у випадку, коли простори L та L' банахові, $\|A^*\| = \|A\|$.

Крім того, $(A+B)^* = A^* + B^*$ та $(\alpha A)^* = \alpha A^*$. Тому сукупність операторів, спряжених до операторів з простору лінійних обмежених операторів, які діють із L у L', утворює лінійний простір. У випадку, коли простори L та L' банахові, він також є нормованим простором.

Оператор, спряжений до оператора $A: R^n \to R^n$ задається матрицею, транспонованою до матриці A. Оператор, спряжений до інтегрального оператора Фредгольма, визначається ядром $K^*(x,t) = K(t,x)$. Для комплекснозначних ядер спряжений оператор Фредгольма визначається ядром $K^*(x,t) = \overline{K(t,x)}$..

У випадку оператора A, визначеного ***в евклідовому просторі*** E, спряжений до A оператор A^* визначають як такий, що для всіх $x, y \in E$ виконується рівність $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

Якщо ж $A^* = A$, тобто $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всіх $x, y \in E$, то оператор A називають ***самоспряженим.***

У повних евклідових просторах, зокрема, у кожному гільбертовому просторі, $A^{**} = (A^*)^* = A$.

Знайдемо, ***наприклад,*** спряжений оператор до оператора

$$A: l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$$

● Нехай $A^* y = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots)$. Тоді з умови $(Ax, y) = (x, A^* y)$ отримуємо рівність

$$(x_1 + x_2) y_1 + (x_1 - x_2) y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n + \ldots =$$
$$= x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + \ldots + x_n z_n + \ldots$$

Щоб вона виконувалася для всіх $x, y \in l_2$, необхідно, щоб коефіцієнти при всіх відповідних x_k співпадали. Звідси знаходимо

$$A^* y = (y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots).$$

Зауважимо, що $A^* x = Ax$. Отже, оператор A самоспряжений. ■

Теорема. Власні значення самоспряженого оператора A, визначеного у гільбертовому просторі H, дійсні, а його власні функції, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.

● Будемо розглядати H як комплексний гільбертовий простір.

Якщо $Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$ то, враховуючи аксіоми скалярного добутку, отримаємо

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) =$$
$$= (x, \lambda x) = \overline{(\lambda x, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(x,x)} = \overline{\lambda}(x,x).$$

Оскільки $(x,x) \neq 0,$ то власне значення $\lambda = \overline{\lambda}$ дійсне.

Якщо тепер $\mu \neq \lambda$ і $Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$ $Ay = \mu y,\ y \neq 0,$ то, враховуючи, що $\overline{\mu} = \mu,$ з рівності

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) =$$
$$= (x, \mu y) = \overline{(\mu y, x)} = \overline{\mu} \cdot \overline{(y,x)} = \mu(x,y)$$

маємо $(x,y) = 0,$ тобто ортогональність власних функцій x та y. ■

15.3. *Компактні оператори та їх властивості*

Оператор A, який відображає банаховий простір L у банаховий простір L', називається ***компактним*** (***цілком неперервним***), якщо він всяку обмежену множину переводить у передкомпактну.

Оскільки кожна передкомпактна множина є обмеженою, то кожний компактний оператор є обмеженим.

Якщо простір L' має скінченну розмірність, то і, навпаки, кожний обмежений оператор буде компактним. Зокрема, компактним буде і кожний лінійний обмежений оператор, визначений у просторі L скінченної розмірності.

Але, наприклад, обмежений одиничний оператор $I : l_2 \to l_2$ не є компактним. Обмежену послідовність (e_n) він переводить саму в себе, а така послідовність не є передкомпактною в l_2, бо з неї не можна виділити жодної збіжної підпослідовності.

Теорема. Інтегральний оператор Фредгольма

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

ядро якого $K(t,s)$ неперервне у квадраті $Q=[a,b;a,b]$, є компактним оператором у просторі $C[a,b]$.

● З неперервності функції $K(t,s)$ випливає її обмеженість $|K(t,s)|\le M$ та рівномірна неперервність у квадраті Q. Отже, для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для кожного $s\in[a,b]$ при $|t'-t''|<\delta$ буде виконуватися нерівність $|K(t',s)-K(t'',s)|<\varepsilon$.

При цьому будемо мати

$$|Ax(t')-Ax(t'')|\le\int_a^b|K(t',s)-K(t'',s)|\cdot|x(s)|ds\le\varepsilon(b-a)\|x\|.$$

Звідси випливає як неперервність функцій $Ax(t)$, так і одностайна неперервність сім'ї таких функцій за умови, що множина функцій $x(t)$ обмежена: $\|x\|\le C$. За цієї ж умови з нерівності

$$|Ax(t)|\le\int_a^b|K(t,s)|\cdot|x(s)|ds\le M(b-a)\|x\|\le M(b-a)C$$

отримуємо і рівномірну обмеженість такої сім'ї функцій. За теоремою Арцела така сім'я буде передкомпактною у просторі $C[a,b]$. Отже, інтегральний оператор Фредгольма є компактним у цьому просторі. ■

Зауважимо, що умови доведеної теореми можна дещо послабити, вимагаючи обмеженість ядра $K(t,s)$ і допускаючи його розриви вздовж скінченного числа неперервних ліній $s=\varphi_k(t)$, $k=1,2,...,n$. З врахуванням цього зауваження отримаємо також компактність у просторі $C[a,b]$ інтегрального оператора Вольтерри з довільним неперервним ядром у трикутнику $a\le s\le t\le b$.

Компактними ці оператори будуть і у просторі $L_2[a,b]$.

Компактні оператори утворюють замкнений підпростір у просторі лінійних обмежених операторів $A:L\to L'$. Це означає, що лінійна комбінація та границя збіжної за нормою послідовності компактних операторів є компактним оператором.

Покажемо, що і добуток компактних операторів є компактним оператором. Доведемо навіть сильніше твердження:

Теорема. Якщо оператор A компактний, а оператор B обмежений, то оператори AB та BA компактні.

● Якщо множина M обмежена, то оператор B переводить її в обмежену множину, яку в свою чергу оператор A переведе у передкомпактну. Отже, оператор AB компактний.

Аналогічно, обмежену множину M оператор A переводить у передкомпактну множину, яку оператор B знову переведе у передкомпактну. Тому й оператор BA компактний. ■

Наслідок. Компактний оператор, визначений у нескінченно вимірному просторі, не може мати обмеженого оберненого.

● Якщо б обернений до компактного оператора A оператор A^{-1} був обмеженим, то на підставі доведеної тут теореми добуток $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ був би компактним оператором. Але у нескінченно вимірному просторі це не так. ■

Звідси, зокрема, випливає, що у просторах $C[a,b]$ та $L_2[a,b]$ лінійні інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри першого роду $\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x)$ та $\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$ можуть мати розв'язки не для всіх неперервних чи, відповідно, інтегрованих з квадратом функцій $f(x)$.

Спряжений оператор A^* до компактного оператора A теж є компактним оператором.

Власні значення та власні функції компактного оператора характеризує наступна властивість:

Кожний компактний оператор A у банаховому просторі L при кожному $\delta > 0$ може мати лише скінченне число власних функцій, що відповідають власним значенням, які за модулем перевищують δ.

Звідси випливає, що:

1) кожному власному значенню $\lambda \neq 0$ компактного оператора A відповідає лише скінченне число лінійно незалежних власних функцій;

2) множина власних значень такого оператора не більш як зліченна і може мати точкою скупчення лише точку 0.

15.4. ***Теорема Гільберта-Шмідта та її застосування***

Розглянемо тепер властивості самоспряжених компактних операторів у гільбертовому просторі H. Для них справедлива така ***теорема Гільберта-Шмідта:***

Для кожного самоспряженого компактного оператора у гільбертовому просторі H існує ортогональна нормована система $\{\varphi_n\}$ власних функцій, які відповідають власним значенням $\lambda_n \neq 0$, що кожен елемент $x \in H$ єдиним способом записується у вигляді $x = \sum\limits_n c_n \varphi_n + x_0$, де $c_n = (x, \varphi_n)$, $Ax_0 = 0$. При цьому $Ax = \sum\limits_n \lambda_n c_n \varphi_n$, і якщо система $\{\varphi_n\}$ нескінченна, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

Зауважимо, що якщо одному і тому ж власному значенню $\lambda \neq 0$ відповідає кілька різних власних функцій системи $\{\varphi_n\}$, то у теоремі Гільберта-Шмідта таке власне значення повторюється з різними індексами стільки разів, якою є його кратність.

Як ***приклад,*** застосуємо цю теорему до розв'язування операторного рівняння другого роду $x = \lambda Ax + f$ з компактним самоспряженим оператором A у гільбертовому просторі H.

● За теоремою Гільберта-Шмідта запишемо рівняння у вигляді $\sum\limits_n c_n \varphi_n + x_0 = \lambda \sum\limits_n \lambda_n c_n \varphi_n + \sum\limits_n f_n \varphi_n + f_0$, причому $f_n = (f, \varphi_n)$, $Af_0 = 0$.

Помножимо скалярно обидві частини отриманої рівності на φ_k.

Оскільки $(x_0, \varphi_k) = (f_0, \varphi_k) = 0$, бо x_0, f_0, якщо вони не є нулями, можна розглядати як власні функції оператора A, які відповідають власному значенню нуль, та $(\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$ то при кожному k

отримаємо рівність $c_k = \lambda\lambda_k c_k + f_k$, з якої при $\lambda\lambda_k \neq 1$ однозначно знаходимо всі коефіцієнти $c_k = \dfrac{f_k}{1-\lambda\lambda_k}$.

Підставляючи їх у записане вище рівняння, знайдемо також $x_0 = f_0$. Таким чином, при $\lambda\lambda_k \neq 1$ єдиний розв'язок заданого операторного рівняння матиме вигляд

$$x = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k} + f_0 = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k} + \left(f - \sum_k f_k\varphi_k \right) = f + \lambda \sum_k \frac{\lambda_k f_k\varphi_k}{1-\lambda\lambda_k}.$$

Якщо ж $\lambda\lambda_k = 1$ при деяких k, то для існування розв'язку цього операторного рівняння необхідно, щоб $f_k = 0$ для всіх таких k, тобто, щоб елемент f був ортогональним до всіх власних функцій оператора A, які відповідають цим власним значенням. З виконання цієї вимоги розв'язок заданого операторного рівняння існує, але він не буде єдиним. ■

На практиці отриманий тут результат може бути застосований до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ із симетричним ядром у просторі $L_2[a,b]$.

- З рівності $K(x,s) = K(s,x)$ та компактності інтегрального оператора Фредгольма $Ay(x) = \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$ у просторі $L_2[a,b]$ отримаємо, що його розв'язком є функція

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_k \frac{\mu_k \int_a^b f(s)\varphi_k(s)\, ds \cdot \varphi_k(x)}{1-\lambda\mu_k}, \quad 1-\lambda\mu_k \neq 0.$$

Тут μ_k є власними значеннями, а $\varphi_k(x)$ – відповідні нормовані власні функції інтегрального оператора Фредгольма.

Через характеристичні числа $\lambda_k = 1/\mu_k$ інтегрального оператора Фредгольма цей розв'язок представляється у вигляді:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} f(s)\,ds, \qquad \lambda \neq \lambda_k,$$

або $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s)\,ds, \quad \lambda \neq \lambda_k,$ де функція $R(x,s;\lambda)$ – резольвента симетричного ядра, $R(x,s;\lambda) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}, \quad \lambda \neq \lambda_k.$

Для характеристичного значення λ лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду має розв'язок лише тоді, коли функція $f(x)$ є ортогональною до всіх власних функцій, які відповідають цьому характеристичному числу. Його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq \lambda}} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} f(s)\,ds + \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda}} C_k \varphi_k(x),$$

де C_k – довільні сталі. ■

Як випливає з наведених формул, для отримання розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром необхідно знати характеристичні числа та власні функції цього ядра. Для їх знаходження розглядають відповідне однорідне рівняння $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds.$ Ті значення параметра $\lambda,$ для яких воно має ненульові розв'язки, є характеристичними числами ядра $K(x,s),$ а самі ненульові розв'язки – відповідними власними функціями.

Для виродженого симетричного ядра $K(x,s) = \sum_{i=1}^m p_i a_i(x) a_i(s),$ де функції $a_i(x),$ $i = 1,2,\ldots,m,$ є лінійно незалежними, а числа $p_i \neq 0,$ $i = 1,2,\ldots,m,$ розв'язок такого однорідного рівняння шукаємо у вигляді $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m C_i a_i(x).$

Підставивши таку функцію в це однорідне рівняння, прирівнюємо коефіцієнти біля однакових функцій $a_i(x),$ $i = 1,2,\ldots,m,$

і для знаходження чисел $C_i,\ i=1,2,...,m,$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду $C_i=\lambda\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{ij}C_j,\ i=1,2,...,m.$

Якщо її визначник $D(\lambda)$ дорівнює нулю, то вона має ненульові розв'язки. Таким чином, характеристичними числами симетричного ядра є корені рівняння $D(\lambda)=0.$ Зрозуміло, що кількість цих коренів не перевищує m.

Далі, для кожного такого кореня λ_k із системи рівнянь $C_i=\lambda_k\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{ij}C_j,\ i=1,2,...,m,$ знаходимо набір коефіцієнтів C_i^k та отримуємо лінійно незалежну систему власних функцій $\varphi_k(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}C_i^k a_i(x).$

Приклад. Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції симетричного ядра $K(x,s)=xs-1/3,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le s\le 1.$

● Оскільки $a_1(x)=x,\quad a_2(x)=1,$ то розв'язок інтегрального рівняння $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1\left(xs-\dfrac{1}{3}\right)\varphi(s)\,ds$ шукаємо у вигляді $\varphi(x)=C_1x+C_2.$

Підставляючи цю функцію у праву частину рівняння, після очевидних перетворень одержуємо рівність

$$\lambda\int\limits_0^1\left(xs-\frac{1}{3}\right)(C_1s+C_2)\,ds=\lambda\left(\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{2}\right)x-\lambda\left(\frac{C_1}{6}+\frac{C_2}{3}\right).$$

Отже, система рівнянь для коефіцієнтів C_1, C_2 має вигляд

$$\begin{cases}C_1=\lambda\left(C_1/3+C_2/2\right),\\ C_2=-\lambda\left(C_1/6+C_2/3\right),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(6-2\lambda)C_1-3\lambda C_2=0,\\ \lambda C_1+(6+2\lambda)C_2=0.\end{cases}$$

Оскільки $D(\lambda)=\begin{vmatrix}6-2\lambda & -3\lambda\\ \lambda & 6+2\lambda\end{vmatrix}=36-\lambda^2,$ то характеристичними числами є $\lambda_{1,2}=\pm 6.$ Підставляючи $\lambda_{1,2}$ в отриману вище систему, знайдемо $C_1=-3C_2$ для $\lambda_1=6$ та $C_1=-C_2$ для $\lambda_2=-6.$

Покладаючи у кожному з випадків $C_2 = -1,$ знаходимо власні функції $\varphi_1(x) = 3x - 1,$ $\varphi_2(x) = x - 1.$

Оскільки $\|\varphi_1\|^2 = \int\limits_0^1 (3x-1)^2\,dx = 1,$ $\|\varphi_2\|^2 = \int\limits_0^1 (x-1)^2\,dx = \dfrac{1}{3},$ то функції $\varphi_1(x) = 3x - 1$ та $\varphi_2(x) = \sqrt{3}(x-1)$ утворюють ортогональну нормовану систему власних функцій заданого ядра. ■

Вправи до лекції №15

1. Знайдіть спектр оператора $A : l_2 \to l_2,$ якщо
$$Ax = \left(0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$$
2. Знайдіть власні значення та нормовані власні функції операторів $A : l_2 \to l_2,$ якщо:

   а) $Ax = \left(x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \ldots\right);$

   б) $Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$
3. Знайдіть спряжені оператори до операторів, заданих у вправі 2.
4. Обґрунтуйте, що спряжений до лінійного оператор є лінійним оператором.
5. Доведіть, що інтегральний оператор Фредгольма з симетричним ядром є самоспряженим у просторі $L_2[a,b].$
6. Доведіть, що ядро $K(x,s) = \begin{cases} k_1(x)k_2(s), & a \le x \le s, \\ k_1(s)k_2(x), & s \le x \le b, \end{cases}$ є симетричним у квадраті $Q = [a,b;a,b].$
7. Оператор $A : L_2\left[0;1\right] \to L_2\left[0;1\right],$ причому $Ax\left(t\right) = \int\limits_0^t x\left(\tau\right)d\tau,$ $t \in \left[0;1\right].$

   Знайдіть спряжений до нього оператор.
8. Знайдіть характеристичні числа та власні функції вироджених у квадраті $Q = [0,1;0,1]$ симетричних ядер:

   а) $K(x,s) = xs;$

   б) $K(x,s) = 2xs - 1;$

   в) $K(x,s) = \sin \pi x \cdot \sin \pi s.$

9. Знайдіть характеристичні числа та власні функції ядра

$$K(x,s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x, & s\le x\le 1,\end{cases}$$

звівши їхнє знаходження дворазовим диференціюванням відповідного однорідного інтегрального рівняння до крайової задачі: $\varphi''(x)=-(\lambda+1)\varphi(x)$, $\varphi(0)=0,\quad \varphi'(\pi)=0.$

10. Розв'яжіть лінійне інтегральне рівняння Фредгольма

$$y(x)=\int_0^x \sin s\cos x\, y(s)\,ds+\int_x^{\pi}\sin x\cos s\, y(s)\,ds+\sin x,$$

знаючи характеристичні числа та власні функції його ядра:

$$\lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1,\quad \varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,\quad k\in\mathbf{N}.$$

Типові завдання для контрольної роботи №3
з функціонального аналізу та теорії міри

1. Довести лінійність, обмеженість та неперервність і знайти норму заданого функціонала $f : C[a,b] \to R^1$.
2. Знайти похідні першого та другого порядків заданої регулярної узагальненої функції.
3. Довести лінійність, обмеженість і неперервність заданого оператора $A : l_2 \to l_2$ та знайти обернений і спряжений до нього оператори.
4. Розв’язати методом ітерованих ядер задане лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду.

Варіант №__

1. Довести лінійність, обмеженість та неперервність і знайти норму функціонала $f : C[a,b] \to R^1$, якщо $f(x) = \int_0^1 (2-3t)\,x(t)\,dt$.
2. Знайти похідні першого та другого порядків узагальненої функції
$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & |x| \le \pi, \\ \cos x, & |x| > \pi. \end{cases}.$$
3. Довести лінійність, обмеженість і неперервність оператора $A : l_2 \to l_2$ та знайти обернений і спряжений до нього оператори, якщо $Ax = (2x_1 - x_2, x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
4. Розв’язати методом ітерованих ядер лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \int_0^1 x t^3 y(t)\,dt + 4x$.

Тестові завдання

1. *Для множин* A *та* B *множина* $C = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ *є їх*:

А. Різницею. ***Б.*** Симетричною різницею.
В. Асиметричною різницею. ***Г.*** Антисиметричною різницею.

2. *Серед перерахованих нижче множин незліченною є множина:*

А. Натуральних чисел. ***Б.*** Цілих чисел.
В. Раціональних чисел. ***Г.*** Ірраціональних чисел.

3. *Серед перерахованих нижче пар множин виберіть пару, в якій потужності множин рівні:*

А. Канторова множина і множина дійсних чисел.
Б. Канторова множина і множина раціональних чисел.
В. Множина дійних і множина раціональних чисел.
Г. Множина раціональних і множина ірраціональних чисел.

4. *З наступних тверджень про канторову множину виберіть правильне:*

А. Всі точки канторової множини – ізольовані.
Б. Канторова множина – відкрита.
В. Канторова множина – незліченна.
Г. Лінійна міра Лебега канторової множини дорівнює 1.

5. *З наступних тверджень про кільце множин виберіть правильне:*

А. Кожне кільце є $\sigma-$кільцем множин.
Б. Кожне кільце є $\delta-$кільцем множин.
В. Кожне кільце є півкільцем множин.
Г. Кожне кільце є алгеброю множин.

6. *Функція* $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$ *визначає відстань у просторі:*

А. R^1. ***Б.*** R_0^n. ***В.*** R_1^n. ***Г.*** R^n.

7. *Функція* $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$ *визначає відстань у просторі:*

А. R^1. ***Б.*** R_0^n. ***В.*** R_1^n. ***Г.*** R^n.

8. *З наступних метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1;2)$ *та* $y=(3;1)$ *дорівнює 2:*

А. R_3^2. ***Б.*** R_1^2. ***В.*** R_0^2. ***Г.*** R^2.

9. *З наступних метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1;2)$ *та* $y=(3;1)$ *дорівнює 3:*

А. R_3^2. ***Б.*** R_1^2. ***В.*** R_0^2. ***Г.*** R^2.

10. *З наступних чотирьох метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1,2,3,0,0,...,0,...)$ *та* $y=(2,3,1,0,0,...,0,...)$ *є найменшою:*

А. l_3. ***Б.*** l_2. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

11. *З наступних чотирьох метричних просторів виберіть той, у котрому відстань між точками* $x=(1,2,3,0,0,...,0,...)$ *та* $y=(2,3,1,0,0,...,0,...)$ *є найбільшою:*

А. l_3. ***Б.*** l_2. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

12. *Множина* $K=\{x:\rho(x,x_0)\le r\}$ *точок метричного простору називається:*

А. Замкненою кулею. ***Б.*** Відкритою кулею.
В. $\varepsilon-$околом точки x_0. ***Г.*** $r-$околом точки x_0.

13. *Точка* x_0, *у кожному околі якої є принаймні одна точка множини* M, *називається:*

А. Точкою дотику множини M.
Б. Граничною точкою множини M.
В. Ізольованою точкою множини M.
Г. Внутрішньою точкою множини M.

14. *Точка* x_0, *у кожному околі якої є принаймні одна точка множини* M, *відмінна від* x_0, *називається:*

А. Точкою дотику множини M.
Б. Граничною точкою множини M.

В. Ізольованою точкою множини M.

Г. Внутрішньою точкою множини M.

15. *Кожна гранична точка множини:*

А. Є точкою дотику даної множини.

Б. Є ізольованою точкою даної множини.

В. Є внутрішньою точкою даної множини.

Г. Належить до даної множини.

16. *Якщо існує таке* $\varepsilon > 0$, *що* $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ *для кожного* $n > N(\varepsilon)$, *то:*

А. $x_0 -$ точка дотику послідовності (x_n).

Б. $x_0 -$ гранична точка послідовності (x_n).

В. $x_0 -$ границя послідовності (x_n).

Г. Кожна з трьох інших наведених відповідей неправильна.

17. *Якщо для кожного* $\varepsilon > 0$, *існує такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що* $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ *для всіх* $n > N(\varepsilon)$, *то:*

А. $x_0 -$ ізольована точка множини (x_n).

Б. $x_0 -$ належить до послідовності (x_n).

В. $x_0 -$ границя послідовності (x_n).

Г. Кожна з трьох інших наведених відповідей неправильна.

18. x_0 *−внутрішня точка множини. Тоді серед наступних чотирьох тверджень про неї неправильним є твердження:*

А. $x_0 -$ точка дотику даної множини.

Б. $x_0 -$ ізольована точка даної множини.

В. $x_0 -$ гранична точка даної множини.

Г. $x_0 -$ належить до даної множини.

19. *Замиканням множини всіх раціональних чисел є:*

А. Порожня множина. ***Б.*** Скінченна множина.

В. Зліченна множина. ***Г.*** Незліченна множина.

20. *Якщо множини* A_n, $n=1,2,...$, *відкриті, то серед наступних тверджень неправильним є твердження:*

А. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n -$ відкрита множина. ***Б.*** $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n -$ відкрита множина.

В. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n -$ відкрита множина. ***Г.*** $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A_n -$ відкрита множина.

21. *З наведених нижче метричних просторів виберіть простір, який не є сепарабельним:*

А. $C[a,b]$. ***Б.*** R^n. ***В.*** l_1. ***Г.*** m.

22. *Множина* M *метричного простору називається компактною, якщо скінченне підпокриття цієї множини можна виділити з довільного її покриття:*

А. Обмеженими множинами. ***Б.*** Замкненими множинами.

В. Вимірними множинами. ***Г.*** Відкритими множинами.

23. *Міра елементарних множин є продовженням міри:*

А. Прямокутників. ***Б.*** Лебега.

В. Жордана. ***Г.*** Жодної з трьох інших.

24. *Для міри довільних двох елементарних множин виберіть правильну рівність:*

А. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)+m'(A\bigcap B)$.

Б. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)-2m'(A\bigcap B)$.

В. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)-m'(A\bigcap B)$.

Г. $m'(A\bigcup B)=m'(A)+m'(B)$.

25. *Для довільних підмножин* A *та* B *одиничного квадрата та зовнішньої міри* μ^* *правильною є нерівність :*

А. $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\geq\mu^*(A\vartriangle B)$. ***Б.*** $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\leq\mu^*(A\vartriangle B)$.

В. $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|<\mu^*(A\vartriangle B)$. ***Г.*** $\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|>\mu^*(A\vartriangle B)$.

26. *Серед наведених нижче плоских множин не є елементарною множиною:*

А. Круг. ***Б.*** Квадрат. ***В.*** Відрізок. ***Г.*** Точка.

27. *Властивість міри μ, яка полягає у тому, що із включення $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ випливає нерівність $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, називається:*

А. Адитивністю міри. ***Б.*** Зліченною адитивністю міри

В. Півадитивністю міри. ***Г.*** Неперервністю міри.

28. *З наступних тверджень про вимірну за Жорданом плоску множину вберіть правильне :*

А. Ця множина є прямокутником.

Б. Ця множина є елементарною.

В. Ця множина є квадрованою фігурою.

Г. Ця множина не обов'язково є квадрованою фігурою.

29. *Множина точок на площині обмежена лініями:* $y=0,\ y=2,$ $y=x-1,\ x=0.$ *Знайдіть плоску міру Лебега цієї множини:*

А. 1. ***Б.*** 2. ***В.*** 3. ***Г.*** 4.

30. *Множина точок на площині обмежена лініями:* $y=6x,\ \ y=6x^2.$ *Знайдіть плоску міру Лебега цієї множини:*

А. 1. ***Б.*** 2. ***В.*** 3. ***Г.*** 6.

31. *Функція $f(x)$ визначена на вимірній множині A. З наступних чотирьох тверджень виберіть те, з котрого не випливає її вимірність на цій множині:*

А. Множини $\{x : x \in A, f(x) = c\}$ вимірні при кожному $c \in R$.

Б. Множини $\{x : x \in A, f(x) \ge c\}$ вимірні при кожному $c \in R$.

В. Множини $\{x : x \in A, f(x) \le c\}$ вимірні при кожному $c \in R$.

Г. Множини $\{x : x \in A, f(x) > c\}$ вимірні при кожному $c \in R$.

32. *Серед наступних чотирьох тверджень виберіть неправильне твердження:*

А. Якщо функція $f(x)$ вимірна, то $f^2(x)$ також вимірна.

Б. Якщо функція $f(x)$ вимірна, то $f^3(x)$ також вимірна.

В. Якщо функція $f^2(x)$ вимірна, то $f(x)$ також вимірна.

Г. Якщо функція $f^3(x)$ вимірна, то $f(x)$ також вимірна.

33. *Послідовність функцій $f_n(x)=x^{n+1}-x^n$ на відрізку $[-1;1]$ збігається до функції $f(x)=0$:*

А. Лише за мірою. **Б.** Лише майже скрізь.
В. За мірою і майже скрізь. **Г.** Скрізь.

34. *Серед функцій* $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $f_3(x)=\begin{cases}x, & x\in Q,\\ 1, & x\in R\setminus Q,\end{cases}$ *визначте кількість вимірних за Лебегом на відрізку $[-1,1]$ функцій:*

А. 3. **Б.** 2. **В.** 1. **Г.** 0.

35. *З наведених функцій, визначених на проміжку $(0;1]$, виберіть ту, яка не є простою:*

А. $f(x)=1.$ **Б.** $f(x)=x.$

В. $f(x)=\begin{cases}1, & x<0{,}5,\\ 0, & x\geq 0{,}5.\end{cases}$ **Г.** $f(x)=\frac{1}{n},\ x\in\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right],\ n\in N.$

36. *З наступних чотирьох тверджень виберіть твердження, справедливе як для інтеграла Лебега, так і для інтеграла Рімана по відрізку $[a,b]$:*

А. Якщо функція $|f(x)|$ інтегрована, то $f(x)$ теж інтегрована.

Б. Якщо функція $f(x)$ вимірна і обмежена, то вона інтегрована.

В. Обмежена розривна лише при $x\in N$ функція – інтегрована.

Г. Обмежена невід'ємна функція – інтегрована.

37. *Функції $f(x)$ та $g(x)$ вимірні та обмежені на відрізку $[-1;1]$. Тоді на цьому відрізку функція $f(x)-g(x)$:*

А. Інтегровна за Лебегом.
Б. Неперервна і вимірна за Лебегом.
В. Інтегровна за Ріманом.
Г. Непарна і вимірна за Лебегом.

38. *Для функції* $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in Q, \\ 3x^2, & x\in R\setminus Q, \end{cases}$ *обчисліть* $\int\limits_{[0;2]} f(x)d\mu$ *: :*

А. 4. ***Б.*** 8. ***В.*** 12. ***Г.*** Інтеграл не існує.

39. *Обчисліть* $\int\limits_{[0;2]} f(x)d\mu$ *, якщо* $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in Q, \\ 2x, & x\in R\setminus Q, \end{cases}$:

А. 4. ***Б.*** 8. ***В.*** 12. ***Г.*** Інтеграл не існує.

40. *Не інтегрованими за Ріманом на відрізку* $[a;b]$ *є такі функції:*

А. Неперервні на відрізку $[a;b]$.
Б. Монотонні на відрізку $[a;b]$.
В. Обмежені з множиною точок розриву $[a;b]\cap Q$.
Г. Обмежені з множиною точок розриву $[a;b]\setminus Q$.

41. *Послідовність вимірних функцій* $f_n(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *збігається у середньому до функції* $f(x)$. *Тоді вона збігається до* $f(x)$*:*

А. Майже скрізь. ***Б.*** Рівномірно.
В. За мірою. ***Г.*** Принаймні в одній точці.

42. *Якщо функція* $\varphi(x)\geq 0$ *інтегровна за Лебегом на множині* A *скінченної міри і число* $c>0$, *то:*

А. $\mu\{x: x\in A, \varphi(x)\leq c\}\leq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

Б. $\mu\{x: x\in A, \varphi(x)\geq c\}\geq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

В. $\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

Г. $\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \leq c\} \geq \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)d\mu.$

43. *Невизначеним інтегралом Лебега функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *називається функція:*

А. $\int\limits_{[a;x]} f(t)d\mu.$ ***Б.*** $\int\limits_{[a;b]} f(t)d\mu.$ ***В.*** $\int\limits_{[x;b]} f(t)d\mu.$ ***Г.*** $\int\limits_{[t;x]} f(t)d\mu.$

44. *Для похідної кожної монотонно неспадної на відрізку* $[a;b]$ *функції* $f(x)$ *правильною є нерівність:*

А. $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu < f(b) - f(a).$ ***Б.*** $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu > f(b) - f(a).$

В. $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu \leq f(b) - f(a).$ ***Г.*** $\int\limits_{[a;b]} f'(t)d\mu \geq f(b) - f(a).$

45. *З наступних чотирьох тверджень про функції, визначені на деякому відрізку виберіть неправильне:*

А. Абсолютно неперервна функція є неперервною.

Б. Абсолютно неперервна функція є рівномірно неперервною.

В. Монотонна функція є абсолютно неперервною.

Г. Функція з обмеженою похідною є абсолютно неперервною.

46. *Рівність* $\int\limits_{[a,x]} f'(t)d\mu = f(x) - f(a)$ *правильна для кожної:*

А. Абсолютно неперервної функції.

Б. Рівномірно неперервної функції.

В. Монотонної функції.

Г. Функції з обмеженою зміною.

47. *Знакозмінні міри називають:*

А. Розрядами. ***Б.*** Зарядами.

В. Потенціалами. ***Г.*** Функціями стрибків.

48. *До класифікації зарядів не має відношення термін:*

А. Сингулярний. ***Б.*** Регулярний.

В. Неперервний. ***Г.*** Дискретний.

49. *Для всіх функцій з обмеженою зміною правильною є нерівність:*

А. $V_a^b[f+g] \geq V_a^b[f]+V_a^b[g]$. ***Б.*** $V_a^b[f+g] < V_a^b[f]+V_a^b[g]$.

В. $V_a^b[f+g] \leq V_a^b[f]+V_a^b[g]$. ***Г.*** $V_a^b[f+g] > V_a^b[f]+V_a^b[g]$.

50. *Визначте* $V_{-1}^2[f]$, *якщо* $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\in[-1,2), \\ 1, & x=2. \end{cases}$:

А. 0. ***Б.*** 4. ***В.*** 6. ***Г.*** 8.

51. *З наведених нижче чотирьох тверджень виберіть правильне:*

А. Кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Б. Кожна збіжна послідовність є фундаментальною.

В. Кожна послідовність повного метричного простору є збіжною.

Г. Усі послідовності метричного простору є фундаментальними .

52. *З наступних чотирьох варіантів відповідей виберіть той, у котрому всі з наведених у ньому метричних просторів є повними:*

А. $L_2[a,b], C_2[a,b], C[a,b]$. ***Б.*** $C_2[a,b], C_1[a,b], R^n$.

В. $l_2, C_3[a,b], C[a,b]$. ***Г.*** $l_1, L_2[a,b], C[a,b]$.

53. *З наступних варіантів відповідей виберіть той, у котрому рівно два наведені у ньому метричні простори є повними:*

А. $L_2[a,b], C_2[a,b], C[a,b]$. ***Б.*** $l_1, C[a,b], R^n$.

В. $l_2, C_3[a,b], C[a,b], R^1$. ***Г.*** $l_2, L_2[a,b], C_1[a,b], R_1^n$.

54. *Відображення* $A: X \to X$ *називається стискаючим, якщо:*

А. $\rho(Ax,Ay) < \alpha\rho(x,y)$ для всіх $x,y\in X$.

Б. $\rho(Ax,Ay) < \alpha\rho(x,y)$ для всіх різних $x,y\in X$.

В. $\rho(Ax,Ay) \leq \alpha\rho(x,y)$ для всіх $x,y\in X$.

Г. Серед трьох інших наведених відповідей правильне означення відсутнє.

55. *З наступних чотирьох тверджень виберіть правильне:*

А. Кожне неперервне відображення є стискаючим.

Б. Кожне стискаюче відображення є неперервним.

В. Кожне стискаюче відображення є лінійним.

Г. Серед трьох інших наведених відповідей правильне твердження відсутнє.

56. *Для розв'язування рівняння* $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)$ *з обмеженим ядром* $|K(x,s)|\le M$ *метод послідовних наближень у просторі* $C[a,b]$ *застосовний за такої достатньої умови:*

А. $|\lambda|M(b-a)\ge 1.$ ***Б.*** $|\lambda|M(b-a)\le 1.$

В. $|\lambda|M(b-a)>1.$ ***Г.*** $|\lambda|M(b-a)<1.$

57. *Для розв'язування рівняння* $y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x)$ *з обмеженим ядром* $|K(x,s)|\le M$ *метод послідовних наближень у просторі* $C[a,b]$ *застосовний лише за умови:*

А. $|\lambda|M(b-a)<1.$ ***Б.*** $|\lambda|M(b-a)\le 1.$

В. $|\lambda|M(b-a)>1.$ ***Г.*** Для всіх $\lambda\in R.$

58. *Лінійні простори* l_2, c_0, c, m *утворюють такий ланцюжок послідовних включень:*

А. $l_2\subset c_0\subset c\subset m.$ ***Б.*** $c_0\subset l_2\subset c\subset m.$

В. $c_0\subset c\subset l_2\subset m.$ ***Г.*** $c_0\subset c\subset m\subset l_2.$

59. *Серед наступних тверджень про лінійні топологічні простори виберіть неправильне:*

А. Такий простір є лінійним.

Б. Такий простір є топологічним.

В. Такий простір є нормованим.

Г. Операція додавання у такому просторі є неперервною.

60. *До аксіом норми не відноситься умова :*

А. $\|x\| \ge 0$. ***Б.*** $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

В. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$. ***Г.*** $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

61. *Норму у просторі* R_1^n *визначають рівністю:*

А. $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$. ***Б.*** $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|$.

В. $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$. ***Г.*** $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

62. *Норму у просторі* m *задають формулою:*

А. $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$. ***Б.*** $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|$.

В. $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$. ***Г.*** $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

63. *Формула* $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$ *визначає норму у просторі:*

А. $C[a,b]$. ***Б.*** $C_1[a,b]$. ***В.*** $C_2[a,b]$. ***Г.*** $C_3[a,b]$.

64. *Формула* $\|x\| = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}$ *визначає норму у просторі:*

А. $C[a,b]$. ***Б.*** $C_1[a,b]$. ***В.*** $C_2[a,b]$. ***Г.*** $C_3[a,b]$.

65. *З наступних нормованих просторів виберіть той, у котрому послідовність* $x_n(t) = t^n$ *не збігається до функції* $x(t) = 0$*:*

А. $C[0,1]$. ***Б.*** $C_1[0,1]$. ***В.*** $C_2[0,1]$. ***Г.*** $L_2[0,1]$.

66. *Формула* $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ *визначає скалярний добуток на такому лінійному просторі :*

А. $C[0,1]$. ***Б.*** c_0. ***В.*** c.

Г. На жодному з трьох інших просторів

67. *Скалярний добуток елементів* $x = (1,2,-3,0,0,\ldots,0,\ldots)$ *та* $y = (-2,3,1,0,0,\ldots,0,\ldots)$ *простору* l_2 *дорівнює:*

А. 0. ***Б.*** 1. ***В.*** 2. ***Г.*** 3.

68. *Норму в евклідовому просторі визначають рівністю::*

А. $\|x\| = (x,x)$. ***Б.*** $\|x\| = \sqrt{x^2}$.

В. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. ***Г.*** $\|x\| = \sqrt{(x,y)}$.

69. *Умова* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *називається характеристичною властивістю:*

А. Метричних просторів. ***Б.*** Лінійних просторів.

В. Нормованих просторів. ***Г.*** Евклідових просторів.

70. *Скалярним добутком не може бути задана норма простору:*

А. R^n. ***Б.*** $C_2[a,b]$. ***В.*** l_2. ***Г.*** m.

71. *Рівність* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *справедлива для кожної пари елементів довільного:*

А. Дійсного лінійного нормованого простору.

Б. Комплексного лінійного нормованого простору.

В. Дійсного лінійного евклідового простору.

Г. Комплексного лінійного евклідового простору.

72. *Для довільних елементів* x, y *дійсного евклідового простору справедлива нерівність:*

А. $|(x,y)| < \|x\| \cdot \|y\|$. ***Б.*** $|(x,y)| > \|x\| \cdot \|y\|$.

В. $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$. ***Г.*** $|(x,y)| \ge \|x\| \cdot \|y\|$.

73. *У комплексному евклідовому просторі* l_2. *скалярний добуток визначають формулою:*

А. $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$. ***Б.*** $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$.

В. $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$ **Г.** $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k y_k}.$

74. *В означення гільбертового простору не входить вимога:*

А. Нескінченної розмірності. **Б.** Сепарабельності.

В. Повноти. **Г.** Евклідовості.

75. *Нерівність Бесселя у дійсному евклідовому просторі має вигляд:*

А. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \ge \|x\|^2.$ **Б.** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|x\|^2.$ **В.** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|x\|^2.$ **Г.** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 > \|x\|^2.$

76. *Функціонал f називається адитивним, якщо для всіх $x, y \in L$ виконується рівність:*

А. $f(x+y)=\alpha f(x)+f(y).$ **Б.** $f(x+y)=f(x)+f(y).$

В. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$ **Г.** $f(xy)=f(x)+f(y).$

77. *Функціонал f називається спряжено-однорідним, якщо для всіх комплексних чисел α та всіх $x \in L$ виконується рівність:*

А. $f(\alpha x)=\alpha f(x).$ **Б.** $f(\alpha x)=\alpha \overline{f(x)}.$

В. $f(\alpha x)=\overline{\alpha} f(x).$ **Г.** $f(\alpha x)=|\alpha| f(x).$

78. *З наведених нижче функціоналів $f : C(a,b) \to R^1$ виберіть лінійний функціонал:*

А. $f(x)=\int_a^b (t+x(t))dt.$ **Б.** $f(x)=\int_a^b t^2 x(t)dt.$

В. $f(x)=f(a)+f(b).$ **Г.** $f(x)=a+b.$

79. *З наведених нижче функціоналів $f : C[a,b] \to R^1$ виберіть функціонал,який не є лінійним:*

А. $f(x)=\int_a^b t^2 x(t)dt.$ **Б.** $f(x)=\int_a^b t\, x(t)dt.$

В. $f(x)=0.$ **Г.** $f(x)=a+b.$

80. *Норма лінійного неперервного функціонала не може бути визначена формулою:*

А. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}.$ **Б.** $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$

В. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} |f(x)|.$ **Г.** $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} |f(x)|.$

81. *В означенні однорідно-опуклого функціонала* p*, визначеного на дійсному лінійному просторі* L*, нерівність однієї з аксіом має вигляд :*

А. $p(x+y) \geq p(x) + p(y).$ **Б.** $p(x+y) < p(x) + p(y).$

В. $p(x+y) \leq p(x) + p(y).$ **Г.** $p(x+y) > p(x) + p(y).$

82. *Простір усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на лінійному просторі* L*, називається:*

А. Спряженим до L. **Б.** Симетричним до L.

В. Обмеженим на L. **Г.** Неперервним на L.

83. *Слабка збіжність у просторі* $C[a,b]$ *є:*

А. Рівномірною. **Б.** Збіжністю майже скрізь.

В. Поточковою. **Г.** Збіжністю за мірою.

84. *Кожна узагальнена функція є:*

А. Регулярною. **Б.** Сингулярною.

В. Диференційовною. **Г.** Необмеженою.

85. *Похідна узагальненої функції визначається рівністю:*

А. $\langle f', \varphi \rangle = \langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in D.$ **Б.** $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle, \ \varphi \in D.$

В. $\langle f', \varphi \rangle = \langle f', \varphi' \rangle, \ \varphi \in D.$ **Г.** $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in D.$

86. *З наведених нижче операторів* $A: C(a,b) \to C(a,b)$ *виберіть лінійний оператор:*

А. $Ax(t) = 1 + x(t).$ **Б.** $Ax(t) = t + x(t).$

В. $Ax(t) = t - 1.$ **Г.** $Ax(t) = t^2 x(t).$

87. *З наведених нижче прикладів операторів* $A: C(a,b) \to C(a,b)$ *виберіть необмежений оператор:*

А. Нульовий оператор. ***Б.*** Оператор множення.

В. Оператор Фредгольма. ***Г.*** Оператор диференціювання.

88. *З операторів* $A: C[a,b] \to C[a,b]$ *виберіть нелінійний оператор:*

А. $Ax(t) = x(t).$ ***Б.*** $Ax(t) = t + x(t).$

В. $Ax(t) = t\,x(t).$ ***Г.*** $Ax(t) = t^2 x(t).$

89. *Норму лінійного неперервного оператора можна визначити за формулою:*

А. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|>1} \|Ax\|.$ ***Б.*** $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|.$

В. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|.$ ***Г.*** $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\ge 1} \|Ax\|.$

90. *Якщо A та B – обмежені лінійні оператори, то :*

А. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|.$ ***Б.*** $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|.$

В. $\|A+B\| \ge \|A\| + \|B\|.$ ***Г.*** $\|A+B\| < \|A\| + \|B\|.$

91. *Якщо A та B – обмежені лінійні оператори, то :*

А. $\|AB\| \le \|A\| + \|B\|.$ ***Б.*** $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|.$

В. $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$ ***Г.*** $\|AB\| \ge \|A\| \cdot \|B\|.$

92. *Резольвентою Фредгольма називається функція:*

А. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x,t)$.

Б. $R(x,t;\lambda) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)$.

В. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t)$.

Г. $R(x,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} K_n(x,t)$.

93. *Ітеровані ядра інтегрального оператора Вольтерри у просторі $C[a,b]$ визначаються формулами:*

А. $K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int\limits_t^s K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,\ldots$.

Б. $K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(s,t)=\int\limits_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,\ldots$.

В. $K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int\limits_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,\ldots$.

Г. $K_1(t,s)=K(t,s),\ K_n(t,s)=\int\limits_a^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ \ n=2,3,\ldots$.

94. *Якщо $\lambda\in\sigma_p(A)$, то оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$:*

А. Не існує. ***Б.*** Обмежений.

В. Неперервний. ***Г.*** Необмежений.

95. *Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L, то точка λ регулярна, якщо*

А. $|\lambda|=\|A\|$. ***Б.*** $|\lambda|<\|A\|$. ***В.*** $|\lambda|\le\|A\|$. ***Г.*** $|\lambda|>\|A\|$.

96. *Оператор A, визначений в евклідовому просторі E, називають самоспряженим якщо для всіх $x,y\in E$ виконується рівність :*

А. $(Ax,y)=(x,y)$. ***Б.*** $(Ax,y)=(y,Ax)$.

В. $(Ax,y)=(x,Ay)$. ***Г.*** $(Ax,y)=(y,x)$.

97. *Власні значення довільного самоспряженого оператора:*

А. Невід'ємні. ***Б.*** Раціональні.

В. Дійсні. ***Г.*** Ірраціональні.

98. $K(x,s)$ *– неперервна у квадраті $[a,b;a,b]$ функція така, що*

$|K(x,s)|\le M$. *Тоді рівняння* $y(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)$ *має*

єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$ за такої достатньої умови:

А. $|\lambda| M(b-a) \geq 1.$ ***Б.*** $|\lambda| M(b-a) \leq 1.$

В. $|\lambda| M(b-a) > 1.$ ***Г.*** $|\lambda| M(b-a) < 1.$

99. *Власні значення довільного самоспряженого оператора:*

А. Невід'ємні. ***Б.*** Раціональні.

В. Дійсні. ***Г.*** Ірраціональні.

100. *З наведених нижче тверджень про компактні та обмежені оператори виберіть неправильне:*

А. Добуток компактних операторів – компактний оператор.

Б. Добуток обмежених операторів – компактний оператор.

В. Добуток обмежених операторів – обмежений оператор.

Г. Добуток обмеженого і компактного операторів – компактний оператор.

Список рекомендованої літератури

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. *Василишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В.* Інтегральні рівняння. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224с.
4. *Кадец В.М.* Курс функционального анализа. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2006. – 607с.
5. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272с.
7. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. – 496с.
9. *Федак І.В*. Елементи теорії міри та інтеграла Лебега. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.
10. *Федак І.В*. Функціональний аналіз. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.